Д.О. Шклярский
Н.Н. Ченцов
И.М. Яглом

Избранные задачи и теоремы элементарной математики

Арифметика и алгебра

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2001

УДК 511+512
ББК 22.1
И 32

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. **Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.** — 6-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 480 с. — ISBN 5-9221-0106-4.

Книга содержит 320 задач, относящихся к алгебре, арифметике и теории чисел. По своему характеру эти задачи значительно отличаются от стандартных школьных задач. Большинство из них предлагалось в школьных математических кружках при МГУ и на математических олимпиадах в Москве. Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы. Задачи, доступные учащимся седьмых-восьмых классов, отмечены особо. Даны подробные решения всех задач; более трудные задачи снабжены указаниями.

Настоящее издание воспроизведено по тексту четвертого издания.

ISBN 5-9221-0106-4

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга является первой из ряда сборников задач, построенных на материале, накопленном в школьном математическом кружке при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Эти сборники содержат задачи и теоремы, большая часть которых предлагалась на занятиях секций школьного математического кружка при МГУ и на математических олимпиадах московских школьников; они рассчитаны на участников и руководителей школьных математических кружков, а также кружков в педагогических институтах. Настоящая книга содержит задачи по арифметике, алгебре и теории чисел. Последующие сборники задач будут посвящены геометрии: вторая книга содержит планиметрические, а третья — стереометрические задачи. Разумеется, отдельные книги этого ряда совершенно не зависят друг от друга.

В работе над сборниками кроме Н.Н. Ченцова и И.М. Яглома принимали участие и другие руководители школьного математического кружка при МГУ. Около 40 задач заимствовано из рукописи одного из создателей школьного кружка при МГУ и замечательного руководителя секций кружка Давида Оскаровича Шклярского (1918–1942) [*], работавшего в школьном математическом кружке при МГУ в 1936–1941 гг. и погибшего на фронте Великой Отечественной войны. Учитывая большое влияние, которое оказал Д.О. Шклярский на последующую деятельность школьного математического кружка

[*] Относительно истории школьного математического кружка при МГУ и роли Д.О. Шклярского в этом кружке см. вступительную статью В.Г. Болтянского и И.М. Яглома к книге: А.А. Леман (составитель). Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1965. (Эта интересная книга имеет много точек соприкосновения с настоящими сборниками.)

при МГУ и, в частности, на настоящие сборники, мы сочли уместным поставить его имя на титульном листе книг на первое место.

В отличие от большинства задачников, предназначенных для учащихся средней школы, настоящие сборники ставят своей целью не столько закрепить и углубить знания читателя, полученные им в школе, сколько ознакомить его с рядом новых для него методов и идей и привить вкус к самостоятельным изысканиям. В связи с этим здесь почти полностью отсутствуют задачи, для решения которых достаточно только формального усвоения школьного курса математики. Очень слабо представлены в сборниках наиболее привычные для школьников типы задач «на сообразительность»: задачи на искусственные методы решения уравнений и систем уравнений высших степеней и задачи на построение. Зато сборники содержат много задач с нестандартными формулировками, требующих для своего решения новых подходов.

При подборе задач больше внимания уделялось тем разделам элементарной математики, которые находят продолжение в современных исследованиях (для примера назовем «Алгебру многочленов» и «Теорию многогранников»). Некоторые циклы задач излагают в переработанном и приспособленном для школьников виде отдельные вопросы, которые обычно относят к «высшей математике» (например, элементы теории чисел или разностные уравнения). Отдельные задачи заимствованы из сочинений классиков математики и из статей, напечатанных в научных математических журналах.

В связи с некоторой необычностью содержания сборники «Избранных задач и теорем» могут показаться трудными читателю, привыкшему к «стандартным» задачникам, предназначенным для учащихся средней школы. Тем не менее опыт школьного математического кружка при МГУ и московских математических олимпиад показывает, что собранные здесь задачи отнюдь не являются недоступными для настойчивого школьника.

Перед решением задач следует прочесть «Общие указания к пользованию книгой».

Настоящая книга содержит 320 задач арифметического и алгебраического содержания; сюда же отнесены некоторые задачи, являющиеся по существу упражнениями на развитие логического мышления (см., например, задачи 1–8).

Все задачи разбиты на 12 отдельных циклов. Последние четыре из них: «Комплексные числа», «Несколько задач из теории чисел», «Некоторые замечательные неравенства» и «Ряды разностей и сумм числовых последовательностей», содержат значительный теоретический материал и вполне могут служить темой занятий школьного математического кружка или математического кружка для студентов педагогического института; при этом может оказаться полезной дополнительная литература, указанная в началах этих циклов. Также и все другие циклы (особенно «Перестановки цифр в числе» и «Решение уравнений в целых числах») могут дать материал для работы математических кружков.

Из 12 циклов только четыре: «Разные задачи из алгебры», «Алгебра многочленов», «Комплексные числа» и «Некоторые замечательные неравенства», относятся к алгебре, а все остальные — к арифметике и теории чисел. Столь малый вес собственно алгебры объясняется отчасти стремлением не давать задач, требующих сложных преобразований, и сделать большую часть задачника доступной ученикам восьмых и даже седбмых классов, а отчасти — наличием хорошего «Задачника по алгебре» В.А. Кречмара, дублировать который мы всячески избегали.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Настоящая книга состоит из условий задач, ответов и указаний к ним и решений. Ради удобства читателей «Ответы и указания» помещены в конце книги; они напечатаны мелким шрифтом.

Номера задач, решение которых не требует знаний, выходящих за пределы программы восьмого класса средней школы, набраны курсивом; решение большинства из этих задач доступно даже семиклассникам. Звездочкой отмечены задачи, которые кажутся авторам более трудными, а двумя звездочками — самые трудные задачи. При этом не исключено, разумеется, что читателю покажется относительно легкой какая-нибудь из отмеченных задач, или, наоборот, его серьезно затруднит задача, не отмеченная звездочкой, ведь точных критериев, определяющих трудность задачи, не существует.

По отношению к большей части задач читателю рекомендуется попытаться самостоятельно решать задачу, не заглядывая в указание или в решение. Если эта попытка не увенчается успехом, то следует посмотреть указание или ответ, знание которого тоже может облегчить решение задачи. Если же и после этого задача не будет решена, то следует прочитать решение задачи. Если задачу удалось решить, не заглядывая в указание, то рекомендуется сравнить ответ с приведенным в «Ответах и указаниях» (если таковой там имеется) и при расхождении попытаться обнаружить свою ошибку. Если же ответы совпадут, то полезно сравнить свое решение с приведенным в книге. Если в книге дано несколько решений задачи, интересно сравнить их между собой.

Этот порядок может быть нарушен по отношению к задачам, отмеченным звездочкой, — здесь можно рекомендовать иногда с самого начала ознакомиться с указанием и только после этого приступить к решению задачи. Что же касается задач, номера которых отмечены двумя звездочками, то к их решению не следует приступать, не посмотрев предварительно указания. Эти задачи можно также рассматривать как «теорию» и сразу читать их решения; каждая из таких задач может служить темой специального доклада на математическом кружке. При этом ознакомление с решением этих трудных задач будет особенно полезно, если предварительно решить и разобрать соседние с ними задачи.

Для решения некоторых из приведенных задач нужны дополнительные сведения, не входящие в программу средней школы. Эти сведения напечатаны мелким шрифтом перед теми задачами, к которым они относятся.

Как правило, задачи сборника независимы одна от другой; лишь изредка решение задачи использует предложение одной из соседних с ней задач. Исключением в этом отношении являются лишь последние четыре цикла задач: «Комплексные числа», «Несколько задач из теории чисел», «Некоторые замечательные неравенства» и «Ряды разностей и сумм числовых последовательностей»; в этих циклах задачи более тесно связаны друг с другом.

Причины, по которым те или иные задачи объединены в один цикл, могут быть различными; иногда это общность методов и постановок вопросов (таков цикл «Алгебра многочленов»), иногда — внешнее сходство условий задач; иногда специальный цикл составляют задачи смешанного содержания, почти не связанные между собой. Некоторые циклы состоят из задач, связанных настолько тесно, что их естественно решать подряд (таков, например, цикл «Перестановки цифр в числе»); эти циклы задач могут служить темой специальных занятий математических кружков. Особо следует отметить последние три цикла задач этой книги, представляющие определенный теоретический интерес. Иногда циклы задач можно естественно разбить на части, различающиеся по методам решения и условиям; эти части циклов отделяются одна от другой черточками. В одном случае (цикл «Некоторые замечательные неравенства») отдельные части циклов снабжены даже специальными подзаголовками. Следует отметить, что названия циклов часто являются условными и передают только их общее содержание; для многих задач невозможно точно определить, к какому циклу их следует отнести.

Задачи сборника рекомендуется решать не «в разбивку», а выбрать сначала определенный цикл и потратить некоторое время на решение задач этого цикла; лишь после ознакомления с одним циклом (которое, конечно, вовсе не должно состоять в решении всех или большинства его задач) следует перейти к другому циклу и т. д. При этом, разумеется, переходить от одного цикла к другому вовсе не необходимо именно в том порядке, в котором циклы расположены в книге.

В известном смысле продолжением этой книги являются последующие сборники задач, входящие в «Библиотеку математического кружка» и объединенные с этой книгой общим списком авторов. Читателю, проработавшему настоящий сборник, может также показаться интересной и полезной книга А.М. Яглома и И.М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М.: Гостехиздат, 1954).

ЗАДАЧИ

1. Вводные задачи

1. Каждый из людей, когда-либо живших на земле, обменялся с другими определенным числом рукопожатий. Доказать, что число людей, обменявшихся нечетным числом рукопожатий, четно.

2. Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

3. а) Имеется пирамида, составленная из n колец разного размера, надетых на палочку так, что самое большое кольцо находится снизу, следующее по величине лежит на первом и т. д. (рис. 1). Требуется переложить все эти кольца на другую палочку, пользуясь вспомогательной третьей палочкой; при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Какое наименьшее число k перекладываний при этом придется сделать?

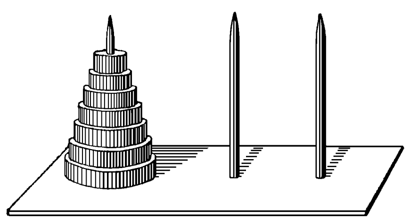


Рис. 1

б)* Распространенная головоломка «китайские кольца» устроена следующим образом: n колец одинакового размера при помощи тонких стержней одинаковой длины прикреплены к одной пластинке. Сквозь все кольца проходит укрепленная на рукоятке изогнутая проволока таким образом, как это изображено на рис. 2; все стержни проходят внутри проволоки и

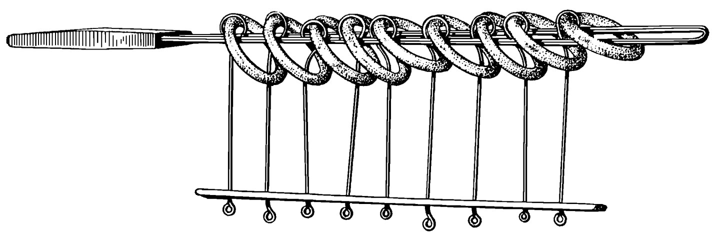


Рис. 2

прикреплены к кольцам над ней. Задача состоит в том, чтобы снять все кольца с проволоки. В какое наименьшее число приемов это можно сделать?

4. а) Известно, что среди 80 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем остальные, имеющие все одинаковый вес. При помощи четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

б) Известно, что среди n монет есть одна фальшивая, более легкая, чем остальные, имеющие все одинаковый вес. Каково наименьшее число k такое, что k взвешиваниями на чашечных весах без гирь всегда можно выделить эту фальшивую монету?

5. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размеру и внешнему виду, алюминиевые, остальные — дюралевые (более тяжелые). Как при помощи не более 11 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить число дюралевых кубиков?

Примечание. В задаче предполагается, что все кубики могут быть алюминиевые, но дюралевыми все они быть не могут (иначе, если бы все кубики оказались одного веса, то без этого условия мы никак не смогли бы определить, алюминиевые они или дюралевые).

6. а)* Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но не известно, легче она настоящих или тяжелее. Настоящие монеты все одного веса. С помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить фальшивую монету и одновременно установить, легче она или тяжелее остальных.

б)** Имеется 1000 монет, среди которых одна фальшивая, имеющая другой вес, чем остальные (но неизвестно, более легкая или более тяжелая). Каково наименьшее число k такое, что k взвешиваниями на чашечных весах без гирь наверное можно выделить фальшивую монету, определив одновременно, является ли эта монета более легкой или более тяжелой, чем все остальные?

Примечание. В условиях задачи *а*) тремя взвешиваниями можно выделить фальшивую монету не только из 12, но и из 13 монет; в последнем случае нельзя, однако, определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Для случая 14 монет необходимы уже четыре взвешивания.

Было бы интересно определить, какое наименьшее число взвешиваний необходимо для того, чтобы выделить одну фальшивую монету из 1000 монет, если не требуется определить, легче она или тяжелее остальных.

7. а) К хозяину гостиницы однажды пришел постоялец, не имевший денег, но обладавший серебряной цепочкой, состоящей из семи звеньев. Хозяин согласился держать этого постояльца неделю, при условии, что тот будет ему ежедневно отдавать в виде платы одно из звеньев цепочки. Какое наименьшее число звеньев надо распилить для того, чтобы владелец цепочки смог ежедневно в течение семи дней расплачиваться с хозяином (быть может, забирая у него при этом отданные ранее звенья и выдавая взамен их другие)?

б) Цепь состоит из 2000 звеньев. Какое наименьшее число звеньев надо распилить для того, чтобы любое число звеньев от 1 до 2000 можно было набрать, взяв некоторое число из образовавшихся частей?

8. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий; с другой стороны из тех же 200 учеников в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем среди отобранных 10 выбран самый низкий. Кто из двоих окажется выше (если это разные лица)?

9. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно разложить на чашках весов, по шесть на каждой чашке, так, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют один и тот же вес.

10. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\;1\;1 \\ 1\;2\;3\;2\;1 \\ 1\;3\;6\;7\;6\;3\;1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

каждое число равно сумме трех чисел — расположенного в предыдущей строке над этим числом и его соседями справа и слева; в случае отсутствия в предыдущей строке одного из двух таких чисел они заменяются нулями.

Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, найдется четное число.

11. 12 полей расположены по кругу и на четырех соседних полях стоят четыре разноцветные фишки: красная, желтая, зеленая и синяя.

Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре любых поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки могут стать снова на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

12. Пять приятелей, один из которых имел обезьяну, купили однажды мешок орехов, которые они предполагали утром следующего дня поделить между собой. Однако ночью один из приятелей проснулся и захотел орехов; он разделил все орехи в мешке на пять равных частей, причем у него остался один лишний орех, который он отдал обезьяне, и взял себе пятую часть. Вслед за ним проснулся другой из хозяев орехов; не зная, что орехи уже кто-то брал, он разделил все оставшееся содержимое мешка снова на пять частей, причем оставшийся лишний орех он отдал обезьяне, и взял себе пятую часть. Затем последовательно проделали ту же операцию оставшиеся трое приятелей; при этом каждый из них, не зная о поступке остальных, делил все орехи на пять частей, брал себе пятую часть и каждый раз оставался один лишний орех, который отдавали обезьяне. Наконец, утром все пятеро вместе достали мешок, разделили оставшиеся орехи на пять частей, а один орех, оказавшийся лишним, снова отдали обезьяне. Требуется определить наименьшее число орехов в мешке, при котором возможен подобный раздел их.

13. Два брата продали принадлежащее им обоим стадо овец, взяв за каждую овцу столько рублей, сколько было овец в стаде. Полученные деньги братья поделили следующим образом: сначала старший брат взял себе десять рублей из вырученной суммы, затем взял десять рублей второй брат, после этого первый брат взял еще десять рублей и т. д. При этом младшему брату не хватило десяти рублей; поэтому он взял все оставшиеся после дележа мелкие деньги, а кроме того, чтобы дележ был справедливым, старший брат отдал младшему свой перочинный нож. Во что был оценен перочинный нож?

14*. а) С какого дня чаще начинается новый год: с субботы или с воскресенья?

б) На какой день недели чаще всего приходится 30-е число месяца?

2. Перестановки цифр в числе

15. Какие целые числа от зачеркивания последней цифры уменьшаются в целое число раз?

16. а) Найти все целые числа, начинающиеся с цифры 6 и от зачеркивания этой цифры уменьшающиеся в 25 раз.

б) Доказать, что не существует целых чисел, которые при зачеркивании первой цифры уменьшаются в 35 раз.

17*. Целое число уменьшается в 9 раз при зачеркивании некоторой его цифры; при этом полученное число тоже делится на 9.

а) Доказать, что для того, чтобы разделить полученное число на 9, тоже достаточно вычеркнуть в нем одну цифру.

б) Найти все целые числа, удовлетворяющие условию задачи.

18. а) Найти все числа, которые при зачеркивании третьей цифры уменьшаются в целое число раз.

б)* Найти все числа, которые при зачеркивании второй цифры уменьшаются в целое число раз.

19. а) Найти наименьшее целое число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец, то число увеличится втрое. Найти все такие числа.

б) Какими цифрами могут начинаться отличные от нуля целые числа, увеличивающиеся втрое от перестановки первой цифры в конец? Найти все такие числа.

20. Доказать, что нет целых чисел (отличных от нуля), которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются в 5 раз, в 6 раз или в 8 раз.

21. Доказать, что нет целых чисел (отличных от нуля), которые увеличиваются вдвое от перестановки начальной цифры в конец.

22. а) Доказать, что нет отличных от нуля целых чисел, которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются в 7 или в 9 раз.

б) Доказать, что нет отличных от нуля целых чисел, которые увеличиваются в 4 раза от перестановки начальной цифры в конец.

23. Найти наименьшее целое число, начинающееся цифрой 7 и уменьшающееся втрое от перестановки этой цифры в конец. Найти все такие числа.

24. а) Доказать, что отличное от нуля целое число не может быть меньше в 2, 3, 5, 6, 7 или 8 раз своего обращенного (т. е. числа, состоящего из тех же цифр, записанных в обратном порядке).

б)* Найти все целые числа, которые в 4 раза или в 9 раз меньше своего обращенного.

25. а) Найти шестизначное число, которое увеличивается в 6 раз, если три последние цифры числа, не меняя их порядка, переставить в начало числа.

б) Доказать, что не существует восьмизначного числа, увеличивающегося в 6 раз при перестановке четырех последних цифр на первые четыре места с сохранением их порядка.

26. Найти шестизначное число, произведения которого на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 записываются теми же цифрами, что и оно само, но в другом порядке.

3. Задачи на делимость чисел*)

27. Доказать, что при всяком целом n:
а) $n^3 - n$ делится на 3;
б) $n^5 - n$ делится на 5;
в) $n^7 - n$ делится на 7;
г) $n^{11} - n$ делится на 11;
д) $n^{13} - n$ делится на 13.

Примечание. Отметим, что $n^9 - n$ уже не обязательно делится на 9 (например, $2^9 - 2 = 510$ не делится на 9).

Задачи а)–д) составляют частные случаи одной более общей теоремы; см. ниже задачу 240.

28. Доказать, что:

а) при всяком целом n

$$3^{6^n} - 2^{6^n}$$

делится на 35;

б) при всяком целом n

$$n^5 - 5n^3 + 4n$$

делится на 120;

в)* при всяких целых m и n

$$mn(m^{60} - n^{60})$$

делится на 56 786 730.

29. Доказать, что

$$n^2 + 3n + 5$$

ни при каком целом n не делится на 121.

*) Относительно общих идей, лежащих в основе решений большинства задач этого цикла, см. книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы» («Библиотека математического кружка», вып. 6) раздел второй «Задачи из теории чисел».

30. Доказать, что выражение

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

ни при каких целых m и n не может равняться 33.

31. Какие остатки может давать сотая степень целого числа при делении на 125?

32. Доказать, что если целое число N взаимно просто с 10, то 101-я степень числа N оканчивается теми же тремя цифрами, что и N (так, например, 1233^{101} оканчивается цифрами 233, а 37^{101} оканчивается цифрами 037).

33. Найти трехзначное число, всякая целая степень которого оканчивается тремя цифрами, составляющими первоначальное число.

34*. Пусть N — четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20}? Какова будет цифра сотен числа N^{200}?

35. Доказать, что сумма

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

где n есть произвольное целое число, а k нечетно, делится на $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

36. Вывести признак делимости многозначных чисел на 11.

37. Число 123456789(10)(11)(12)(13)(14) написано по 15-ричной системе счисления, т. е. это число равно

$$(14) + (13) \cdot 15 + (12) \cdot 15^2 + (11) \cdot 15^3 + \ldots + 2 \cdot 15^{12} + 15^{13}.$$

Какой остаток дает оно при делении на 7?

38. Доказать, что единственными числами K такими, что если N делится на K, то и любое число, полученное из N перестановкой цифр, делится на K, являются 1, 3 и 9. (Для $K = 1$ это свойство очевидно, для $K = 3$ и для $K = 9$ следует из известных признаков делимости на 3 и 9.)

39. Доказать, что $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ делится без остатка на 26460.

40. Доказать, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

41. Доказать, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

42. Доказать, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (так, число 222 делится на 3, число 777 777 777 делится на 9 и т. д.).

43. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + \ldots + 10^{(10^{10})}.$$

44. а) Найти последнюю цифру чисел $9^{(9^9)}$, $2^{(3^4)}$.

б) Найти две последние цифры чисел 2^{999}, 3^{999}.

в)* Найти две последние цифры числа $14^{(14^{14})}$.

45. а) Какова последняя цифра числа

$$\left(\ldots\left(\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^7}}}\right)$$

(возведение в степень 7 повторяется 1000 раз)? Каковы две последние цифры этого числа?

б) Какова последняя цифра числа

$$7^{\left(7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}}}}\ldots\right)},$$

записанного с помощью 1001 семерки, аналогично числу задачи а), однако с иным порядком возведения в степень? Каковы две последние цифры этого числа?

46*. Определить пять последних цифр числа

$$N = 9^{\left(9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(9^{\left(9^9\right)}\right)}}}}\ldots\right)},$$

записанного с помощью 1001 девятки аналогично числу задачи 45, б).

47*. Найти последние 1000 цифр числа

$$N = 1 + 50 + 50^2 + 50^3 + \ldots + 50^{999}.$$

48. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n = n!$$

(читается n факториал). Так, например, предыдущую задачу можно короче сформулировать так: сколькими нулями оканчивается число 100!?

49. а) Доказать, что произведение n последовательных целых чисел делится на $n!$

б) Доказать что дробь $\dfrac{n!}{a!\,b!\ldots k!}$ есть число целое, если только $a + b + \ldots + k \leqslant n$.

в) Доказать, что $(n!)!$ делится на $n!^{(n-1)!}$.

г)* Доказать, что произведение n последовательных целых чисел, образующих арифметическую прогрессию, разность которой взаимно проста с $n!$, делится на $n!$.

Примечание. Задача 49, г) является обобщением задачи 49, а).

50. Делится ли на 7 число сочетаний из 1000 элементов по 500?

51. а) Найти все числа n между 1 и 100, такие, что $(n-1)!$ не делится на n.

б) Найти все числа n между 1 и 100, такие, что $(n-1)!$ не делится на n^2.

52*. Найти все целые числа n, делящиеся на все целые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$.

53. а) Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом целого числа.

б) Доказать, что сумма одинаковых четных степеней трех последовательных целых чисел не может равняться четной степени целого числа.

в) Доказать, что сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел не может равняться никакой степени целого числа (разумеется, с показателем, большим 1).

54. а) Пусть A и B — два различных семизначных числа, каждое из которых составлено из всех цифр от 1 до 7. Доказать, что A не делится на B.

б) Из всех цифр от 1 до 9 составить три трехзначных числа, относящихся друг к другу как $1 : 2 : 3$.

55. Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

56. Доказать, что если обе стороны прямоугольника и его диагональ выражаются целыми числами, то площадь прямоугольника делится на 12.

57. Доказать, что если все коэффициенты квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

— целые нечетные числа, то корни уравнения не могут быть рациональны.

58. Доказать, что если сумму простых дробей

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

(n — целое число) обратить в десятичную, то полученная дробь будет смешанной периодической.

59. Доказать, что числа:

а) $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

б) $N = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}$;

в) $K = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$;

(n, m — целые положительные) не могут быть целыми.

60.** а) Доказать, что если p — простое число, большее 3, то числитель несократимой дроби, равной сумме

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

делится на p^2.

Так, например,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}.$$

Числитель дроби $\dfrac{25}{12}$ равен 5^2.

б) Доказать, что если p — простое число, большее 3, то числитель несократимой дроби, равной сумме

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2},$$

делится на p.

Так, например,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{205}{144};$$

числитель делится на 5.

61. Доказать, что дробь

$$\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$$

несократима ни при каком целом значении a.

62*. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — какие-то n целых чисел. Доказать что произведение всех дробей вида

$$\frac{a_k-a_l}{k-l},$$

где $k>l$, равно целому числу.

63*. Доказать, что все числа вида

$$10\,001, \quad 100\,010\,001, \quad 1\,000\,100\,010\,001, \quad \ldots$$

составные.

64. а) Разделить $a^{128}-b^{128}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64}).$$

б) Разделить $a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\ldots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})(a^{2^k}+b^{2^k}).$$

65. Доказать, что каждые два числа последовательности

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1,\ \ldots,\ 2^{2^n}+1,\ \ldots$$

являются взаимно простыми.

Примечание. Из результата настоящей задачи, в частности, следует, что существует бесконечно много простых чисел (см. также по этому поводу задачи 159 и 253). В самом деле, если бы число простых чисел было конечным, то не могло бы существовать бесконечно много чисел, каждые два из которых взаимно просты.

66. Доказать, что если одно из чисел 2^n-1 и 2^n+1, где $n>2$, простое, то второе является составным (при $n=2$ оба числа $2^n-1=3$ и $2^n+1=5$ простые).

67. а) Доказать, что если p и $8p-1$ — простые числа, то $8p+1$ — составное число.

б) Доказать, что если p и $8p^2+1$ — простые числа, то $8p^2-1$ — простое число.

68. Доказать, что квадрат любого простого числа, кроме чисел 2 и 3, при делении на 12 дает в остатке 1.

69. Доказать, что если три простых числа, больших числа 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность прогрессии делится на 6.

70*. а) Десять простых чисел, меньших 3000, составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

б) Доказать, что не существует 11 простых чисел, меньших 20000, которые составляли бы арифметическую прогрессию.

71. а) Доказать, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое со всеми остальными.

б) Доказать, что из 16 последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно число, взаимно простое со всеми остальными.

4. Разные задачи из арифметики

72. Число A записывается в десятичной системе счисления при помощи 666 троек, а число B — при помощи 666 шестерок. Из каких цифр состоит произведение $A \cdot B$?

73. Найти частное и остаток от деления числа A, записываемого с помощью 1001 семерки, на число 1001.

74. Найти наименьший квадрат, начинающийся с шести двоек.

75. Доказать, что если число α записывается десятичной дробью $0,999\ldots$, начинающейся со 100 девяток, то и число $\sqrt{\alpha}$ записывается десятичной дробью, начинающейся со 100 девяток.

76. Дописать к 523... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

77. Найти четырехзначное число, которое при делении на 131 дает в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

78. а) Доказать, что сумма всех n-значных чисел ($n > 2$) равна $494\,\underbrace{99\ldots9}_{(n-3)\text{ раз}}\,55\,\underbrace{00\ldots0}_{(n-2)\text{ раз}}$ (так, сумма всех трехзначных чисел равна 494 550, а сумма всех шестизначных чисел 494 999 550 000).

б) Найти сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно записать цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5 (одна и та же цифра в числе может повторяться).

79. Сколько и каких цифр понадобится для того, чтобы записать все целые числа от 1 до 100 000 000 включительно?

80. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206788-м месте.

81. Будет ли дробь $0,12345678910111213 14\ldots$, которая получится, если выписать после нуля подряд все целые числа, периодической?

82. Даны 27 гирь, веса которых равны соответственно $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 27^2$. Разложить эти гири на три группы равного веса.

83. Из картона вырезан правильный многоугольник, который центром насажен на острие булавки и вращается вокруг нее. Определить, какое должно быть наименьшее число сторон этого многоугольника, чтобы при повороте на $25\frac{1}{2}^\circ$ он совместился со своим первоначальным контуром.

84. Из всех цифр от 1 до 9 составить три трехзначных числа, произведение которых было бы:

а) наименьшим;

б) наибольшим.

85. Сумма нескольких последовательных целых положительных чисел равна 1000. Найти эти числа.

86. а) Доказать, что всякое число, не являющееся степенью двойки, может быть представлено в виде суммы по меньшей мере двух последовательных целых положительных чисел, а для степеней двойки такое представление невозможно.

б) Доказать, что всякое составное нечетное число может быть представлено в виде суммы по меньшей мере двух последовательных нечетных чисел, а ни одно простое число нельзя представить в таком виде. Какие четные числа можно представить в виде суммы нескольких последовательных нечетных чисел?

в) Доказать, что каждую степень целого положительного числа n (разумеется, с показателем, большим 1) можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел.

87. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей дает полный квадрат.

88. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырех попарно различных можно составить геометрическую пропорцию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

89*. Пусть даны четыре произвольных целых положительных числа A, B, C, D. Доказать, что если образовать из них четыре числа A_1, B_1, C_1, D_1, равных соответственно разности между A и B, между B и C, между C и D и между D и A (мы каждый раз вычитаем меньшее число из большего), затем из чисел A_1, B_1, C_1, D_1 образовать точно так же новую четверку чисел A_2, B_2, C_2, D_2 и т. д., то через некоторое количество шагов мы обязательно придем к четверке нулей.

Так, например, начиная с четверки чисел 32, 1, 110, 7, мы последовательно получим:

$$\begin{array}{rrrr}
32, & 1, & 110, & 7; \\
31, & 109, & 103, & 25; \\
78, & 6, & 78, & 6; \\
72, & 72, & 72, & 72; \\
0, & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

90*. а) Расположить числа от 1 до 100 таким образом, чтобы никакие 11 (не обязательно последовательных!) из этих чисел не следовали одно за другим в порядке возрастания или убывания.

б) Доказать, что в каком бы порядке ни расположить числа от 1 до 101, всегда из этих чисел можно выбрать 11 (не обязательно последовательных) чисел, которые следуют одно за другим в порядке возрастания или убывания.

91. а) Из первых 200 целых чисел от 1 до 200 выбрано 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел найдется пара таких, что одно из них делится на второе.

б) Выбрать из первых 200 целых чисел 100 чисел так, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

в) Доказать, что если хотя бы одно из 100 целых чисел, не превосходящих 200, меньше 16, то одно из этих чисел обязательно делится на другое.

92. а) Доказать, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

б) Доказать, что из любых 100 целых чисел можно выбрать несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на 100.

93*. Шахматист для тренировки играет не менее одной партии в день; при этом, чтобы не переутомиться, он играет не более чем 12 партий в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

94. Пусть N — произвольное целое положительное число.

Доказать, что существует целое число, кратное N, которое в десятичной системе счисления записывается одними лишь цифрами 0 и 1. При этом, если N взаимно просто с 10 (т. е. не делится ни на 2, ни на 5), то существует делящееся на N число, составленное из одних только единиц (если N не взаимно просто с 10, то, разумеется, никакое число вида $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$ не может делиться на N).

95*. Дан ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих (этот ряд называется *рядом Фибоначчи*). Найдется ли среди первых 100 000 001 членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

96*. Пусть α — произвольное иррациональное число. Очевидно, что каково бы ни было целое число n, та из дробей ряда $\frac{0}{n} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$, которая ближе всего к α, отличается от α не больше чем на половину $\frac{1}{n}$. Доказать, что существуют такие n, для которых дробь со знаменателем n, наиболее близкая к α, отличается от α меньше чем на $0,001 \cdot \frac{1}{n}$.

97. Пусть m и n — два взаимно простых целых положительных числа. Доказать, что если $m + n - 2$ дроби

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \frac{3(m+n)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)(m+n)}{m},$$
$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \frac{3(m+n)}{n}, \ldots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

изобразить точками на числовой оси, то в каждый из интервалов $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, ..., $(m+n-2, m+n-1)$ оси попадает

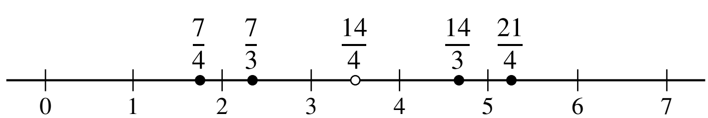


Рис. 3

ровно одна из дробей (см. рис. 3, где положено $m = 3, n = 4$).

98*. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — какие-то целые положительные числа, такие, что каждое из этих чисел меньше 1000, а общее наименьшее кратное любых двух чисел больше 1000. Доказать, что сумма обратных величин чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ меньше числа 2.

99*. Дробь $\dfrac{q}{p}$ с нечетным простым знаменателем $p \neq 5$ разложена в бесконечную периодическую десятичную дробь. Доказать, что если число цифр в периоде дроби четно, то среднее арифметическое всех цифр периода равно $4,5$ (т. е. совпадает со средним арифметическим всех цифр 0, 1, 2, …, 9; это означает, что «большие» и «маленькие» цифры встречаются в периоде дроби одинаково часто) Если же число цифр в периоде дроби нечетное, то среднее арифметическое всех цифр обязательно отлично от $4,5$.

100*. Доказать, что если разложить дроби

$$\frac{a_1}{p},\ \frac{a_2}{p^2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{p^n},\ \ldots$$

(p — простое, отличное от 2 и 5, $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ — какие угодно целые числа, взаимно простые с p) в бесконечные периодические десятичные дроби, то несколько первых дробей (может быть, одна) будут иметь одинаковое число цифр в периоде, а каждая из последующих — в p раз больше цифр в периоде, чем предыдущая.

Так, например: $\dfrac{1}{3} = 0,(3)$; $\dfrac{4}{9} = 0,(4)$; $\dfrac{10}{27} = 0,(370)$; $\dfrac{80}{81} = 0,(987654320)$; $\dfrac{116}{243}$ имеет 27 цифр в периоде; $\dfrac{653}{729}$ имеет 81 цифру в периоде; и т. д.

Ц е л о й   ч а с т ь ю   числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается через $[x]$; например, $[2,5] = 2$, $[2] = 2$, $[-2,5] = -3$.

101. Доказать следующие свойства целой части числа:

1) $[x+y] \geqslant [x] + [y]$;

2) $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$, n — целое число;

3) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

102*. Доказать, что если p и q — взаимно простые целые числа, то

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=$$
$$=\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

103. а) Доказать, что

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\ldots+\tau_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right],$$

где τ_n — число делителей целого числа n.

б) Доказать, что

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\ldots+\sigma_n=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+3\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right],$$

где σ_n — сумма делителей целого числа n.

104. Существует ли такое целое положительное число n, что «дробная часть» числа $(2+\sqrt{2})^n$, т. е. разность

$$(2+\sqrt{2})^2-\left[(2+\sqrt{2})^n\right],$$

больше $0{,}999999$?

105*. а) Доказать, что при любом целом положительном n число $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ нечетно.

б) Найти наивысшую степень 2, на которую делится число $\left[(1+\sqrt{3})^n\right]$.

106. Доказать, что если p — простое число, большее 2, то разность

$$\left[(2=\sqrt{5})^p\right]-2^{p+1}$$

делится на p.

107*. Доказать, что если p — простое число, то разность

$$C_n^p-\left[\frac{n}{p}\right]$$

делится на p (C_n^p — число сочетаний из n элементов по p; n — произвольное целое положительное число, не меньшее p).

Так, например, $C_{11}^5 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$; $C_{11}^5 - \left[\dfrac{11}{5}\right] = 462 - 2$ делится на 5.

108*. Доказать, что если числа α и β обладают тем свойством, что среди чисел

$$[\alpha],\ [2\alpha],\ [3\alpha],\ \ldots;\ [\beta],\ [2\beta],\ [3\beta],\ \ldots$$

встречаются все целые положительные числа $1, 2, 3, \ldots$, причем каждое из них ровно один раз, то α и β — иррациональные числа, такие, что $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Обратно, если α и β — иррациональные числа, связанные равенством $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, то каждое целое положительное число N равно одному и только одному из чисел $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots; [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$

Через (a) обозначается *ближайшее* к a *целое число*; при этом, если таких ближайших чисел два (т. е. если a отличается от целого числа на $\dfrac{1}{2}$, то (a) есть большее из них. Так, например, $(2{,}8) = 3$, $(4) = 4$, $(3{,}5) = 4$.

109. Доказать, что в равенстве

$$N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \ldots + \frac{N}{2^n} + \ldots$$

(N — произвольное целое положительное число) можно заменить все дроби ближайшими к ним целыми числами:

$$N = \left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{N}{2^n}\right) + \ldots$$

5. Решение уравнений в целых числах

110. а) Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что его первые две цифры равны между собой и последние две цифры также равны между собой.

б) Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.

111. Найти четырехзначное число, равное квадрату суммы двух двузначных чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами числа.

112. Найти все четырехзначные числа, являющиеся полными квадратами и записываемые:

а) четырьмя четными цифрами;

б) четырьмя нечетными цифрами.

113. а) Найти все трехзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

б) Найти все целые числа, равные сумме квадратов своих цифр.

114. Найти все целые числа, равные:

а) квадрату суммы цифр числа;

б) сумме цифр куба числа.

115. Решить в целых числах уравнения:

а) $1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$;

б) $1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^z$.

116. Сколькими способами можно разложить 2^n на сумму четырех квадратов целых положительных чисел?

---

117. а) Доказать, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых x, y, z верно только при $x = y = z = 0$.

б) Найти целые числа x, y, z, v, такие, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv.$$

118*. а) При каких целых значениях k возможно равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz,$$

где x, y, z — целые положительные числа.

б) Найти в пределах первой тысячи всевозможные тройки целых чисел, сумма квадратов которых делится на их произведение.

119.** Найти в пределах первой тысячи всевозможные пары взаимно простых целых чисел, таких, что квадрат каждого из них, увеличенный на 125, делится на второе число.

120*. Найти четыре целых (положительных) числа таких, что квадрат каждого из них, сложенный с суммой трех остальных, тоже является полным квадратом.

121. Найти все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

122. Сумма обратных величин трех целых положительных чисел равна единице. Каковы эти числа?

123. а) Решить в целых числах уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}.$$

б)* Решить в целых числах уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$

(указать формулы, дающие все решения).

124. а) Найти все целые положительные, не равные между собой числа, удовлетворяющие уравнению

$$x^y=y^x.$$

б) Найти все рациональные положительные, не равные между собой числа, удовлетворяющие уравнению

$$x^y=y^x$$

(указать формулу, дающую все решения).

125. В шахматном турнире участвовали два ученика 7-го класса и некоторое число учеников 8-го класса. Каждый участник играл с каждым другим один раз. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали одинаковое число очков (в турнире каждому участнику за выигранную партию засчитывается 1 очко, а за партию, окончившуюся вничью, $\frac{1}{2}$ очка). Сколько восьмиклассников участвовало в турнире?

126. В шахматном турнире участвовали ученики 9-го и 10-го классов. Каждый участник играл с каждым другим один раз. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько учеников 9-го класса участвовало в турнире и сколько они набрали очков?

127*. Целочисленным треугольником называется треугольник, длины сторон которого выражаются целыми числами. Найти все целочисленные треугольники, периметр которых равен их площади.

128*. Какими могут быть стороны:

а) прямоугольного целочисленного треугольника;

б) целочисленного треугольника с углом в $60°$;

в) целочисленного треугольника с углом в $120°$ (указать формулы, дающие все решения).

Примечание. Можно показать, что целочисленный треугольник не может иметь рациональных углов[*], отличных от $90°$, $60°$ и $120°$ (см. ниже задачу 238).

129*. Найти длины сторон наименьшего целочисленного треугольника, у которого:

а) один угол вдвое больше другого;

б) один угол в 5 раз больше другого;

в) один угол в 6 раз больше другого.

130.** Доказать, что если катеты прямоугольного треугольника выражаются квадратами целых чисел, то гипотенуза не может быть целым числом.

[*] То есть углов, измеряющихся рациональным числом градусов.

6. Оценки сумм и произведений

131. Доказать, что

$$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n-1)2n = \\ = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1).$$

132. Вычислить суммы:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots + \dfrac{1}{(n-2)(n-1)n}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots$
$$\dots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}.$$

133. Доказать, что:

а) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) =$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

в) $1\cdot 2\cdot 3\dots p + 2\cdot 3\dots p(p+1) + \dots$
$$\dots + n(n+1)\dots(n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}{p+1}.$$

134. Вычислить суммы:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$;

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$;

в) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$;

г) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$.

135. Доказать тождество

$$a + b(1+a) + c(1+a)(1+b) + d(1+a)(1+b)(1+c) + \dots \\ \dots + l(1+a)(1+b)\dots(1+k) = \\ = (1+a)(1+b)(1+c)\dots(1+l) - 1.$$

Рассмотреть случай $a = b = c = \ldots = l$.

136. Вычислить:
а) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$;
б) $C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k$.

137. Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} N} = \frac{1}{\log_{100!} N},$$

где 100! означает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$.

138. Даны n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Найти, чему равна сумма $n!$ слагаемых вида

$$\frac{1}{a_{k_1}(a_{k_1} + a_{k_2})(a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3}) \ldots (a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n})},$$

где система индексов k_1, k_2, …, k_n пробегает всевозможные перестановки чисел 1, 2, …, n.

139. Упростить выражения:
а) $\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right)$;
б) $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha$.

---

140. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

141. а) Доказать, что

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

б)* Доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}.$$

Примечание. Результат задачи б), очевидно, представляет собой усиление результата задачи а).

142. Доказать, что

$$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}$$

(C_{100}^{50} — число сочетаний из 100 элементов по 50).

143. Что больше, $99^n + 100^n$ или 101^n (n — целое положительное число)?

144. Что больше, 100^{300} или $300!$?

145. Доказать, что для любого целого положительного n

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

146. Что больше, $(1{,}000001)^{1000000}$ или 2?

147. Что больше, 1000^{1000} или 1001^{999}?

148. Доказать, что для любого целого $n > 6$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

149*. Доказать, что при $m > n$ (m, n — целые положительные числа):

а) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\left(\text{так, например, } \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4}, \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27} > 2\frac{1}{4}\right)$;

б) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$

$\left(\text{так, например, } \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}, \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81} < 3\frac{3}{8}\right)$.

Примечание. Из задачи а) следует, что в последовательности чисел $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$, …, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, … каждое последующее число больше предыдущего. А так как, с другой стороны, ни одно из чисел не превосходит 3 (см. задачу 145), то при

$n \longrightarrow \infty$ величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к некоторому определенному пределу (заключенному, очевидно, между 2 и 3). Этот предел обозначается буквой e; он равен приближенно $2,718281828459045\ldots$

Аналогично, задача 149,б) утверждает, что в последовательности чисел $\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)^5$, ..., $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, ... каждое последующее меньше предыдущего. А так как все эти числа больше 1, то величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при n, неограниченно возрастающем, стремится к какому-то пределу. При этом числа второй последовательности все более приближаются к числам первой последовательности $\left(\text{отношение } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{n}\right.$ все меньше отличается от $\left.1\right)$; следовательно, этот предел должен равняться тому же самому числу e. Число e играет в математике очень большую роль и встречается в самых разнообразных вопросах (см., например, задачу 150 или примечания к задачам 156 и 159).

150. Доказать, что при любом целом n, большем 6, справедливы неравенства

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

где $e = 2,71828\ldots$ есть предел выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$.

Примечание. Этот результат является усилением результата задачи 148. Из него, в частности, следует, что для любых двух чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 < e < a_2$ (т. е., например, для $a_1 = 2,7$, $a_2 = 2,8$ или $a_1 = 2,71$, $a_2 = 2,72$, или $a_1 = 2,718$, $a_2 = 2,719$ и т. д.) при всех n, бóльших некоторого определенного числа (своего для различных a_1), имеют место неравенства

$$\left(\frac{n}{a_1}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{a_2}\right)^n.$$

Таким образом, число e является той «границей», которая отделяет числа a такие, что $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ растет быстрее $n!$, от чисел a таких, что $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ растет медленнее $n!$ (существование такой границы следует из задачи 148).

Действительно, $\left(\frac{n}{a_2}\right)^n < n!$ при любом n, большем 6 $\left(\text{ибо } a_2 > e,\right.$ а при $n > 6$ в силу задачи 150 $\left. n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$. Далее из результатов задач 145 и 149 вытекает, что при $n \geqslant 3$ выполняются неравенства

$$n > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}, \quad n^{n+1} > (n+1)^n, \quad \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1};$$

следовательно, при $n \geqslant 3$ величина $\sqrt[n]{n}$ убывает, если n растет. Легко видеть, что при n достаточно большом $\sqrt[n]{n}$ становится сколь угодно близким к 1; это следует, например, из того, что $\lg \sqrt[10^k]{10^k} = \frac{k}{10^k}$ при достаточно большом k будет сколь угодно малым. Выберем теперь N так, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt[N]{N} < \frac{e}{a_1}$; тогда при $n > N$ тем более будет $\sqrt[n]{n} < \frac{e}{a_1}$, откуда в силу результата задачи 150 следует, что

$$n! < \left(\frac{n}{e/\sqrt[n]{n}}\right)^n < \left(\frac{n}{a_1}\right)^n.$$

Неравенство задачи 150 допускает значительное уточнение. А именно, можно показать, что при больших n число $n!$ приближенно равно $C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, где C есть постоянное число, равное $\sqrt{2\pi}$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Точнее, можно доказать, что при n, стремящемся к бесконечности, отношение

$$n! : \left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$$

стремится к 1; см. книгу А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (серия «Библиотека математического кружка», вып. 5).

---

151. Доказать, что

$$\frac{1}{k+1}\, n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \frac{1}{k+1}\, n^{k+1}$$

(n и k — произвольные целые числа).

Из результата задачи 151 следует, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

(см. также ниже задачу 316).

152. Доказать, что при всяком целом $n > 1$:

а) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} < \dfrac{3}{4}$;

б) $1 < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} < 2$.

153*. а) Определить целую часть числа

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

б) Определить сумму

$$\frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \frac{1}{\sqrt{10002}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

с точностью до $\dfrac{1}{50}$.

154*. Найти целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$$

155. а) Определить сумму

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2}$$

с точностью до $0,006$.

б) Определить сумму

$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \ldots + \frac{1}{1000!}$$

с точностью до $0,000000015$.

156. Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

превзойдет любое наперед заданное число N, если только n достаточно велико.

Примечание. Результат настоящей задачи может быть значительно уточнен. А именно можно показать, что рассматриваемая сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ при больших n мало отличается от $\log n$ (логарифм берется при основании $e=2,718\ldots$). Точнее говоря, можно доказать, что при любом n разность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$$

не превосходит 1 (см. цитированную на с. 36 книгу А. М. Яглома и И. М. Яглома).

157. Доказать, что если в сумме

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

вычеркнуть все члены, у которых в знаменателе встречается цифра 9, то сумма оставшихся членов при любом n будет меньше 80.

158. а) Доказать, что при любом n

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

б) Доказать, что при любом n

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1\frac{3}{4}.$$

Очевидно, что неравенство задачи б) является усилением неравенства задачи а). Еще более сильный результат содержится в задаче 233. А именно, из этой задачи вытекает, что при любом n сумма

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

меньше, чем $\frac{\pi^2}{6}=1,6449340668\ldots$ (но для любого числа N, меньшего, чем $\frac{\pi^2}{6}$, например, для $N=1,64$ или $N=1,644934$, можно найти такое n, что сумма $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ будет больше N).

159*. Рассмотрим сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{p},$$

где в знаменателях дробей стоят все простые числа от 2 до некоторого простого числа p. Доказать, что эта сумма может быть сделана больше любого наперед заданного числа N (для этого следует только выбрать число p достаточно большим).

Результат настоящей задачи может быть значительно уточнен. А именно, можно показать, что при больших p сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}$ сравнительно мало отличается от $\log\log p$ (логарифм берется при основании $e=2,718\ldots$). Точнее говоря, можно доказать, что при любом p разность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}-\log\log p$$

не превосходит числа 15 (см. цитированную на с. 36 книгу А. М. Яглома и И. М. Яглома).

Отметим еще, что сравнение результата настоящей задачи с результатами задач 157 и 158 позволяет утверждать, что простых чисел имеется в ряду всех целых чисел «довольно много» (в частности, из этой задачи следует, что их бесконечно много). Можно, например, сказать, что простые числа встречаются в ряду натуральных чисел «чаще», чем квадраты или чем числа, в записи которых нет цифры 9, поскольку сумма обратных величин всех квадратов или сумма обратных величин всех целых чисел, в записи которых не фигурирует 9, ограничены, а сумма обратных величин всех простых чисел может быть сделана сколь угодно большой.

7. Разные задачи из алгебры

160. Чему равно выражение

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right),$$

если $a+b+c=0$?

161. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

162. Разложить на множители выражения:

а) $a^3+b^3+c^3-3abc$;

б) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

163. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

164. Доказать, что

$$(a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$$

делится на

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$$

165. Разложить на множители выражение

$$a^{10} + a^5 + 1.$$

166. Доказать, что многочлен

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$$

делится на

$$x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$$

---

167. Воспользовавшись результатом задачи 162, а), найти общую формулу для решения кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

Примечание. Отметим, что результат настоящей задачи позволяет решить *всякое* уравнение третьей степени. Действительно, пусть

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

есть какое-то кубическое уравнение (коэффициент при x^3 всегда можно считать равным 1, так как в противном случае мы можем разделить все уравнение на этот коэффициент). Сделаем в этом уравнении подстановку:

$$x = y + c.$$

Тогда получим

$$y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3 + A(y^2 + 2cy + c^2) + B(y + c) + C = 0,$$

или

$$y^3 + (3c + A)y^2 + (3c^2 + 2Ac + B)y + (c^3 + Ac^2 + Bc + C) = 0.$$

Отсюда видно, что, положив $c = -\dfrac{A}{3}$ $\left(\text{т. е. } x = y - \dfrac{A}{3}\right)$, мы придем к уравнению

$$y^3 + \left(\frac{3A^2}{9} - \frac{2A^2}{3} + B\right) y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0,$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение данной задачи:

$$y^2 + py + q = 0,$$

где $p = -\dfrac{A^2}{3} + B$, $q = \dfrac{2A^3}{27} - \dfrac{AB}{3} + C$.

168. Решить уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

169*. Найти действительные корни уравнения

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right).$$

170. а) Найти действительные корни уравнения

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ радикалов}} = x$$

(все корни квадратные считаются положительными).

б) Решить уравнение

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots \, \cfrac{}{1 + \cfrac{1}{x}}}}} = x$$

(в выражении слева знак дроби повторяется n раз).

171. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

(все корни квадратные считаются положительными).

172. Решить уравнение

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$$

173. Система двух уравнений второй степени

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений этой суммы уменьшается до трех или до двух?

174. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax+y=a^2, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

При каких значениях a эта система вовсе не имеет решений и при каких имеет бесконечно много решений?

б) Тот же вопрос относительно системы

$$\begin{cases} ax+y=a^3, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

в) Тот же вопрос относительно системы

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{cases}$$

175. Найти условия, которым должны удовлетворять данные числа α_1, α_2, α_3, α_4 для того, чтобы система шести уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha_1\alpha_2, \\ x_1+x_3=\alpha_1\alpha_3, \\ x_1+x_4=\alpha_1\alpha_4, \\ x_2+x_3=\alpha_2\alpha_3, \\ x_2+x_4=\alpha_2\alpha_4, \\ x_3+x_4=\alpha_3\alpha_4 \end{cases}$$

имела решения. Найти значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4.

176. Сколько действительных решений имеет система

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1? \end{cases}$$

177. а) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}\,?$$

б) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \lg x\,?$$

178*. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$, то $x_1^n + x_2^n$ при любом целом n является целым числом, не делящимся на 5.

---

179. Может ли выражение

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{999} + a_{1000})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{999}^2 + \\ + a_{1000}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{999}a_{1000},$$

где некоторые из чисел a_1, a_2, …, a_{999}, a_{1000} положительны, а другие отрицательны, содержать одинаковое число положительных и отрицательных попарных произведений?

Рассмотрите аналогичную задачу для выражения

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{9999} + a_{10000})^2.$$

180. Доказать, что любую целую степень числа $\sqrt{2} - 1$ можно представить в виде $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$, где N — целое число (так, например, $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$, а $(\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}$).

181. Доказать, что выражение $99999 + 111111\sqrt{3}$ нельзя представить в виде $(A + B\sqrt{3})^2$, где A и B — целые числа.

182. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде $p + q\sqrt{r}$, где p, q, r — рациональные числа.

183. а) Что больше,

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2 + 2{,}00000000004}$$

или
$$\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2 + 2{,}00000000002}?$$

б) Пусть $a > b > 0$. Что больше,
$$\frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}}{1 + a + a^2 + \ldots + a^n} \quad \text{или} \quad \frac{1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}?$$

184. Даны n чисел a_1, a_2, a_3, …, a_n. Найти число x такое, чтобы сумма
$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$
имела наименьшее возможное значение.

185. а) Даны четыре действительных попарно неравных числа $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Расположить эти числа в таком порядке a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4} (i_1, i_2, i_3, i_4 — те же номера 1, 2, 3, 4, только как-то переставленные), чтобы сумма
$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + (a_{i_3} - a_{i_4})^2 + (a_{i_4} - a_{i_1})^2$$
имела меньшее возможное значение.

б)* Даны n действительных попарно неравных чисел a_1, a_2, a_3, …, a_n. Расположить эти числа в таком порядке a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, …, a_{i_n}, чтобы сумма
$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \ldots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^2 + (a_{i_n} - a_{i_1})^2$$
имела наименьшее возможное значение.

186. а) Доказать, что каковы бы ни были действительные числа a_1, a_2, …, a_n; b_1, b_2, …, b_n, всегда
$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}.$$
При каких условиях имеет место равенство?

б) Пирамида называется *прямой*, если в основание пирамиды можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды. Доказать, что прямая пирамида имеет меньшую боковую поверхность, чем всякая другая пирамида той же высоты, основание которой имеет ту же площадь и тот же периметр.

Примечание. Неравенство задачи а) составляет частный случай так называемого неравенства Минковского (см. ниже задачу 308).

187*. Доказать, что при любых значениях действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{(a_n^2+(1-a_1)^2}\geqslant\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

При каких значениях этих чисел левая часть неравенства точно равна правой части?

188. Доказать, что если числа x_1 и x_2 по абсолютной величине не превосходят единицу, то

$$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}\leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

При каких значениях x_1 и x_2 левая часть этого неравенства точно равна правой части?

---

189. Что больше, $\cos\sin x$ или $\sin\cos x$?

190. Доказать, не пользуясь логарифмическими таблицами, что:

а) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$; б) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_\pi 2}>2$.

191. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то

а) $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta$.

192*. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

193. Найти соотношение между $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

194. Доказать, что каковы бы ни были коэффициенты $a_{31}, a_{30}, \ldots, a_2, a_1$, сумма

$$\cos 32x+a_{31}\cos 31x+a_{30}\cos 30x+\ldots+a_2\cos 2x+a_1\cos x$$

не может принимать при всех x только положительные значения.

195. Пусть некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны $+1$, а остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ = \\ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \ldots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

Так, например, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ получаем

$$2\sin\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)45^\circ = 2\cos\frac{45^\circ}{2^{n-1}} = \\ = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}.$$

8. Алгебра многочленов

196. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}.$$

197. В каком из выражений

$$(1 + x^2 - x^3)^{1000} \quad \text{и} \quad (1 - x^2 + x^3)^{1000}$$

будет стоять после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

198. Доказать, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется членов, содержащих x в нечетной степени.

199. Найти коэффициент при x^{50} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражениях:

а) $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\ldots+x^{1000}$;

б) $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}$.

200*. Определить коэффициент при x^2 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$\underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\text{ раз}}.$$

201. Найти остаток от деления многочлена

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}:$$

а) на $x-1$; б) на x^2-1.

202. Неизвестный многочлен дает при делении на $x-1$ остаток 2, а при делении на $x-2$ — остаток 1. Какой остаток дает этот многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$?

203. При делении многочлена $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ получаются частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

204. Найти уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

205. Показать, что если α и β — корни уравнения

$$x^2+px+1=0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2+qx+1=0,$$

то

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

206. Пусть α и β — корни уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2+Px+Q=0.$$

Выразить произведение

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$$

через коэффициенты данных уравнений.

207. Даны два уравнения:

$$x^2+ax+1=0, \qquad x^2+x+a=0.$$

Определить все значения коэффициента a, при котором эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

208. Найти целое число a такое, что $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

209. Найти такие отличные от нуля не равные между собой целые числа a, b, c, чтобы многочлен четвертой степени с целыми коэффициентами

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

можно было бы представить в виде произведения двух других многочленов с целыми коэффициентами.

210. При каких отличных друг от друга целых числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлены с целыми коэффициентами:

а) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)-1$;

б) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+1$;

разлагаются в произведение двух других многочленов?

211*. Доказать, что при любых отличных друг от друга целых числах a_1, a_2, …, a_n многочлен

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

не разлагается в произведение двух других многочленов с целыми коэффициентами.

212. Доказать, что если многочлен

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами принимает при четырех целых значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении x.

213. Доказать,что если многочлен 7-й степени с целыми коэффициентами

$$a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$$

при 7 целых значениях x принимает значения $+1$ и -1, то его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами.

214. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечетные значения, то уравнение $P(x) = 0$ не имеет целых корней.

215*. Доказать, что если многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами при двух целых значениях $x = p$ и $x = q$ $(p > q)$ равен по абсолютной величине 1 и уравнение $P(x) = 0$ имеет рациональный корень a, то $p - q$ равно 1 или 2 и $a = \dfrac{p+q}{2}$.

216*. Доказать, что многочлены:

а) $x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + 6x^{2216} + 8x^{2214} + \ldots$
$\cdots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222;$

б) $x^{250} + x^{249} + x^{248} + x^{247} + x^{246} + \ldots + x^2 + x + 1;$

не могут быть разложены в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

217. Доказать, что если два многочлена с целыми коэффициентами в произведении дают многочлен с четными коэффициентами, не все из которых делятся на 4, то в одном из перемножаемых многочленов все коэффициенты четные, а в другом не все четные.

218. Доказать, что все рациональные корни многочлена

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени x, равным 1, являются целыми.

219*. Доказать, что не существует такого многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

что все числа $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... являются простыми.

Примечание. Предложение, сформулированное в задаче, было впервые доказано Л. Эйлером. Ему же принадлежат примеры многочленов, значения которых при многих последовательных целых значениях x являются простыми (так, например, в случае многочлена $P(x) = x^2 - 79x + 1601$ 80 чисел: $P(0) = 1601$, $P(1) = 1523$, $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(79)$, являются простыми).

220. Доказать, что если многочлен

$$P(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

при всех целых значениях x принимает целые значения, то его можно представить в виде суммы многочленов

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

обладающих тем же свойством (в силу задачи 49, а)), взятых с целыми коэффициентами.

221. а) Доказать, что если многочлен n-й степени $P(x)$ принимает целые значения при $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, то он принимает целые значения и при всех целых значениях x.

б) Доказать, что всякий многочлен степени n принимающий при каких-то $n+1$ последовательных целых значениях x целые значения, принимает целое значение при всяком целом x.

в) Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения при $x = 0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$, то он принимает целое значение и при любом целом значении x, являющемся полным квадратом (но не обязательно принимает целые значения при всех целых x).

Привести пример многочлена, принимающего целые значения при каждом целом значении x, являющемся полным квадратом, но при некоторых других целых x принимающего дробные значения.

9. Комплексные числа

В ряде последующих задач используются следующие формулы:

1) формула умножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

в справедливости которой нетрудно убедиться непосредственной проверкой:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + (-1)\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta);$$

2) формула Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

(n — целое положительное число), которая получается n-кратным применением предыдущей формулы);

3) формула извлечения корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha + 360^\circ\cdot k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 360^\circ\cdot k}{n}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

являющаяся следствием формулы Муавра.

В частности, большую роль играют в нижеследующих задачах корни n-й степени из единицы, т. е. корни уравнения n-й степени:

$$x^n - 1 = 0,$$

которые, очевидно, имеют вид

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{360^\circ k}{n} + i\sin\frac{360^\circ k}{n}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Наконец, сделаем еще следующее замечание, которым неоднократно придется пользоваться в решениях задач этого цикла. Пусть уравнение n-й степени

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

имеет n корней $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. В таком случае левая часть уравнения делится на $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, …, $(x - x_n)$, т. е.

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Раскрывая скобки в правой части, этого равенства и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, мы получим следующие формулы, указывающие на связь коэффициентов уравнения n-й степени с его корнями (формулы Виета):

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n),$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$
$$a_3 = -(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n),$$
$$a_n = (-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n.$$

Читателю, который заинтересуется комплексными числами, можно рекомендовать книгу Р. О. Кузьмина и Д. К. Фаддеева «Алгебра и арифметика комплексных чисел» (Л., Учпедгиз, 1939).

222. а) Доказать, что

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha,$$
$$\sin 5\alpha = \sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha\cos^2\alpha + 5\sin\alpha\cos^4\alpha.$$

б) Доказать, что при каждом целом n

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots,$$

$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots,$$

где обозначенные точками члены, закон образования которых легко подметить, выписываются до тех пор, пока сохраняют смысл биномиальные коэффициенты.

Примечание. Задача б), очевидно, является обобщением задачи а).

223. Выразить $\operatorname{tg} 6\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

224. Доказать, что если $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

225. Доказать, что

$$\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin(\varphi+n\alpha) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos(\varphi+n\alpha) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

226. Вычислить

$$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha,$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha.$$

227. Вычислить

$$\cos\alpha + C_n^1\cos 2\alpha + C_n^2\cos 3\alpha + \ldots + C_n^{n-1}\cos n\alpha + \cos(n+1)\alpha,$$

$$\sin\alpha + C_n^1\sin 2\alpha + C_n^2\sin 3\alpha + \ldots + C_n^{n-1}\sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha.$$

---

228. Доказать, что если m, n, p — произвольные целые числа, то

$$\sin\frac{m\pi}{p}\sin\frac{n\pi}{p} + \sin\frac{2m\pi}{p}\sin\frac{2n\pi}{p} + \sin\frac{3m\pi}{p}\sin\frac{3n\pi}{p} + \ldots + \sin\frac{(p-1)m\pi}{p}\sin\frac{(p-1)n\pi}{p} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{p}{2}, & \text{если } m+n \text{ делится на } 2p, \text{ а } m-n \text{ не делится на } 2p; \\ \dfrac{p}{2}, & \text{если } m-n \text{ делится на } 2p, \text{ а } m+n \text{ не делится на } 2p; \\ 0, & \text{если } m+n \text{ и } m-n \text{ одновременно делятся или одновременно не делятся на } 2p. \end{cases}$$

229. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

230. Составить уравнение, корнями которого являлись бы числа:

а) $\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\ \sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\ \sin^2\frac{3\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \sin^2\frac{n\pi}{2n+1};$

б) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1},\ \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1},\ \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$

231. Определить суммы:

а) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1};$

б) $\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots$

$\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$

232. Вычислить произведения:

а) $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1},$

$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n};$

б) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1},$

$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}.$

233. Вывести из результатов задач 231, а) и б), что при любом целом положительном n сумма

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

заключается между

$$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}\quad\text{и}\quad\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}.$$

Примечание. Из результата задачи 233, в частности, следует, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

где под суммой бесконечного ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ понимается предел, к которому стремится величина $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$.

---

234. а) На окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, взята точка M. Доказать, что сумма квадратов расстояний от этой точки до всех вершин n-угольника не зависит от положения точки на окружности и равна $2nR^2$, где R есть радиус окружности.

б) Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки M, взятой в плоскости правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, до всех вершин n-угольника зависит только от расстояния l точки M от центра O многоугольника и равна $n(R^2 + l^2)$, где R есть радиус окружности, описанной около n-угольника.

в) Доказать, что утверждение предыдущей задачи остается в силе и в том случае, когда точка M не лежит в плоскости n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$.

235. На дуге A_1A_n окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, взята точка M. Доказать, что:

а) если n четно, то сумма квадратов расстояний от точки M до вершин n-угольника с четными номерами равна сумме квадратов расстояний от этой же точки до нечетных вершин;

б) если n нечетно, то сумма расстояний от точки M до вершин n-угольника с четными номерами равна сумме расстояний от этой же точки до нечетных вершин.

Примечание. Геометрическое доказательство теоремы задачи 235, б) см. в решении задачи 118 из второй части сборника.

236. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, равен R. Доказать, что:

а) сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей n-угольника равна n^2R^2;

б) сумма всех сторон и всех диагоналей n-угольника равна $n \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2\pi} R$;

в) произведение всех сторон и всех диагоналей n-угольника равно $n^{n/2} R^{n(n-1)/2}$.

237*. Найти сумму 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей правильного 100-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

238*. Доказать, что в целочисленном треугольнике *) не может быть углов, отличных от 60°, 90° и 120° и соизмеримых с прямым углом.

239*. а) Доказать, что для любого нечетного $p > 1$ угол $\arccos \dfrac{1}{p}$ не может содержать рационального числа градусов.

б) Доказать, что угол $\operatorname{arctg} \dfrac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа, не равные между собой, не может содержать рационального числа градусов.

10. Несколько задач из теории чисел

Собранные здесь задачи относятся к той части математики, которая изучает свойства целых чисел, — к теории чисел; ряд задач по теории чисел имеется в других частях сборника, особенно в циклах 3, 4 и 5. Некоторые из теорем, сформулированных ниже в виде задач, играют в теории чисел значительную роль (см., например, задачи 240, 241, 245–247, 249, 253). Разумеется, по этим задачам нельзя себе представить всего богатства методов и идей, которые используются в этой науке — одной из серьезнейших (и труднейших) математических наук. Более систематическое изложение одного из разделов теории чисел дано в книге Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы», составляющей вып. 6. «Библиотеки математического кружка»; в частности, в этой книге читатель сможет найти новые решения некоторых задач этого цикла. Хорошим обзором элементарной теории чисел служит статья А. Я. Хинчина «Элементы теории чисел» в книге первой «Энциклопедии эле-

*) Определение целочисленного треугольника см. в условии задачи 127 (с. 31).

ментарной математики» (М.–Л., Гостехиздат, 1951); в конце этой статьи указан довольно полный список дополнительной литературы по затронутым в статье вопросам.

240. Теорема Ферма. Доказать, что если p есть простое число, то разность $a^p - a$ при любом целом a делится на p.

Примечание. Частными случаями этой теоремы являются предложения задач 27, а)–д).

241. Теорема Эйлера. Пусть N есть какое-то целое число и r — число чисел ряда 1, 2, 3, ..., $N - 1$, взаимно простых с N. Доказать, что если a есть произвольное целое число, взаимно простое с N, то разность $a^r - 1$ делится на N.

Примечание. Если число N простое, то все выписанные числа взаимно просты с N, т. е. $r = N-1$, и теорема Эйлера сводится к следующей: разность $a^{N-1}-1$, где N простое, делится на N. Отсюда видно, что теорему Ферма (см. задачу 240) можно рассматривать как частный случай теоремы Эйлера.

Если $N = p^n$, где p — простое, то из $N - 1 = p^n - 1$ чисел 1, 2, 3, ..., $N-1$ не будут взаимно простыми с $N = p^n$ только числа p, $2p$, $3p$, ..., $N - p = (p^{n-1} - 1)p$. Таким образом, в этом случае $r = (p^n - 1) - (p^{n-1} - 1) = p^n - p^{n-1}$, и теорема Эйлера сводится к следующей: разность $a^{p^n} - p^{n-1} - 1$, где p — простое, а a не делится на p, обязательно делится на p^n.

Если $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные между собой простые числа, то число r простых чисел, меньших N и взаимно простых с N, дается формулой

$$r = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

(см., например, цитированную выше статью А. Я. Хинчина). Если $N = p^n$ — степень простого числа p, то эта формула дает

$$r = p^n\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^n - p^{n-1},$$

т. е. результат, полученный выше.

242*. Согласно теореме Эйлера, разность $2^k - 1$, где $k = 5^n - 5^{n-1}$, делится на 5^n (см. задачу 241; в частности, примечание к этой задаче). Доказать, что ни при каком k, меньшем чем $5^n - 5^{n-1}$, разность $2^k - 1$ не делится на 5^n.

243. Выпишем подряд последовательные степени числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ... Легко заметить, что в этом ряду чисел последние цифры периодически повторяются с периодом 4:

$$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6, \ldots$$

Доказать, что и последние 10 цифр в этом ряду чисел, начиная с некоторого числа, также будут периодически повторяться. Найти длину периода и номер числа в ряду, начиная с которого наблюдается периодичность.

244*. Доказать, что существует такая степень числа 2, последние 1000 цифр которой все будут единицами и двойками.

---

245. Теорема Вильсона. Доказать, что если целое число p простое, то число $(p-1)! + 1$ делится на p; если же p составное, то $(p-1)! + 1$ не делится на p.

246*. Пусть p — простое число, которое при делении на 4 дает в остатке 1. Доказать, что существует целое число x такое, что $x^2 + 1$ делится на p.

247.** Доказать, что:

а) если каждое из двух чисел A и B можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и их произведение $A \cdot B$ можно представить таким образом;

б) всякое простое число вида $4n + 1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, а никакое число вида $4n + 3$ не допускает такого представления;

в) составное число N может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел в том и только в том случае, если все простые множители вида $4n + 3$ входят в разложение числа N в четных степенях.

Так, например, числа $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ и $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел (в разложение первого числа вовсе не входят множители вида $4n + 3$, а в разложение второго числа входит единственный подобный множитель 3 в четной степени 2), а число $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ нельзя представить в таком виде (множители 7 и 11 вида $4n+3$ входят в разложение этого числа в первых степенях).

248. Доказать, что для всякого простого числа p можно найти такие целые числа x и y, что $x^2 + y^2 + 1$ делится на p.

249.** Доказать, что:

а) если каждое из двух чисел A и B представимо в виде суммы квадратов четырех целых чисел, то и их произведение $A \cdot B$ представимо в таком виде;

б) всякое целое положительное число представимо в виде суммы квадратов не более чем четырех целых чисел.

Так, например, $35 = 25 + 9 + 1 = 5^2 + 3^2 + 1^2$, $60 = 49 + 9 + 1 + 1 = 7^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$, $1000 = 900 + 100 = 30^2 + 10^2$ и т. д.

250. Доказать, что никакое число вида $4^n(8k - 1)$, где n и k целые, т. е. ни одно из чисел, принадлежащих к следующим геометрическим прогрессиям:

$$\begin{array}{rrrrl}
7, & 28, & 112, & 448, & \ldots \\
15, & 60, & 240, & 960, & \ldots \\
23, & 92, & 368, & 1472, & \ldots \\
31, & 124, & 496, & 1984, & \ldots \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

и т. д., не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трех квадратов целых чисел.

Примечание. Можно доказать, что *каждое* целое число, не имеющее вида $4^n(8k - 1)$, представимо в виде суммы трех или меньшего числа квадратов целых чисел. Однако доказательство этого предложения весьма сложно.

251.** Доказать, что каждое положительное число представимо в виде суммы не больше чем 53-х четвертых степеней целых чисел.

Примечание. Непосредственная проверка показывает, что все не очень большие целые числа представимы в виде суммы значительно меньшего числа четвертых степеней целых чисел, чем 53. До сих пор неизвестно ни одного целого положительного числа, которое нельзя было бы представить в виде суммы 19 или меньшего числа четвертых степеней целых чисел (из всех чисел первой сотни только одно число $79 = 16+16+16+16+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ не представимо в виде суммы меньше чем 19 четвертых степеней целых чисел). Предполагают, что *каждое целое положительное число представимо в виде суммы не более чем 19 четвертых степеней целых чисел*; однако хотя это предположение, по-видимому, и верно, оно до сих пор не получило полного доказательства. Доказано лишь, что каждое целое положительное число представимо в виде суммы не более чем 21 четвертой степени целых чисел; это предложение, конечно, значительно сильнее, чем предложение задачи 251, но доказательство его основано на применении некоторых весьма сложных понятий высшей математики.

В задаче 249, б) утверждается, что всякое целое число представимо в виде суммы квадратов не более чем четырех целых чисел. Доказано также, что всякое целое число представимо в виде суммы кубов не более чем девяти целых чисел.

Все эти предложения охватываются следующей замечательной теоремой: *для любого целого положительного числа k существует такое целое число N* (разумеется, зависящее от k), *что каждое целое положительное число представимо в виде суммы не более чем N слагаемых, являющихся k-ми степенями целых чисел.* Эта последняя теорема имеет несколько различных доказательств, но до самого последнего времени были известны лишь такие ее доказательства, которые используют очень сложный математический аппарат (относящийся к высшей математике). Лишь в 1942 г. советский математик Ю. В. Линник дал элементарное доказательство теоремы. Это доказательство изложено в популярной книжке А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел» (М.–Л., Гостехиздат, 1949). Следует, впрочем, отметить, что доказательство Ю. В. Линника при полной элементарности является весьма сложным.

252.** Доказать, что каждое положительное рациональное (в частности, целое) число можно представить в виде суммы кубов трех положительных рациональных чисел.

Примечание. Отметим, что в виде суммы кубов *двух* положительных рациональных чисел можно представить не всякое положительное рациональное число. Так, например, число 1 нельзя представить в виде суммы двух кубов. Действительно, равенство

$$1 = \left(\frac{m}{n}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

можно переписать в виде

$$(nq)^3 = (mq)^3 + (np)^3,$$

где m, n, p и q — целые числа. Но известно, что не существует таких целых чисел x, y и z, что

$$x^3 + y^3 = z^3$$

(доказательство см., например, в книгах: А. Я. Хинчин, «Великая теорема Ферма», М.–Л., ГТТИ, 1934, или Л. Г. Шнирельман, «Простые числа», М.–Л., ОНТИ, 1940).

---

253. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

254. а) Доказать, что среди членов арифметических прогрессий 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... и 5, 11, 17, 23, 29, 35, ... имеется бесконечно много простых чисел.

б)* Доказать, что среди членов арифметической прогрессии

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ \ldots$$

имеется бесконечно много простых чисел.

в)* Доказать, что среди членов арифметической прогрессии

$$11, 21, 31, 41, 51, 61, \ldots$$

имеется бесконечно много простых чисел.

Примечание. Имеет место также общее предложение о существовании бесконечного числа простых чисел в *каждой* арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с ее разностью, однако доказательство этого предложения является необычайно сложным (интересно отметить, что элементарное, хотя и очень сложное, доказательство этой классической теоремы теории чисел было найдено впервые лишь в 1950 г. датским математиком Сельбергом; до этого были известны лишь доказательства, относящиеся к высшей математике).

11. Некоторые замечательные неравенства

Ниже собраны некоторые задачи на неравенства, объединяющиеся вокруг двух важных неравенств, играющих большую роль в математическом анализе и геометрии. Речь идет *о теореме о* среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268) и неравенстве Коши–Буняковского (задача 289). Много задач на неравенства, не относящихся к этим общим неравенствам, но имеющих отношение к другому кругу вопросов, читатель найдет в других местах книги (см. в особенности циклы 6 и 7).

Большое число интересных неравенств собрано в «Задачнике по алгебре» В. А. Кречмара (Гостехиздат, М.–Л., 1950), где неравенствам посвящена целая глава; в частности, в этой книге имеются другие доказательства некоторых неравенств второго раздела. Много интересного найдет читатель также в книгах: П. П. Коровкин, «Неравенства» (Гостехиздат, М.–Л., 1951), Г. Л. Невяжский, «Неравенства» (Учпедгиз, Москва, 1947) и особенно в фундаментальном сочинении Харди, Литтльвуда и Полиа «Неравенства» (Госиноиздат, Москва, 1949), первые главы которого доступны читателю и незнакомому с высшей математикой.

Нижеследующие задачи расположены не в порядке возрастания трудности, а либо так, что знание результатов или методов решения предыдущих задач помогает решить последующие, либо рядом расположены задачи, близкие по тематике. Простейшие свойства неравенств предполагаются известными.

Во всех задачах этого цикла малыми латинскими буквами обозначаются действительные числа.

А. Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом и ее применения. Из школьного курса известно, что среднее геометрическое двух положительных чисел a и b не больше их среднего арифметического

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{I}$$

причем равенство достигается только в том случае, когда $a = b$.

В самом деле, возведем обе части неравенства в квадрат и освободимся от знаменателя; получим

$$4ab \leqslant (a+b)^2.$$

Раскрывая скобки в правой части, перенося $4ab$ в правую часть и приводя подобные члены, приходим к неравенству

$$0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

которое, очевидно, выполняется для любых a и b (ибо полный квадрат не может быть отрицательным). Следовательно, и неравенство (I) тоже имеет место для любых действительных чисел. Далее, очевидно, что $(a-b)^2$ обращается в нуль лишь когда $a=b$, т. е. последнее выписанное неравенство обращается в равенство только при $a=b$; следовательно, и исходное неравенство (I) обращается в равенство только при $a=b$.

Неравенство (I) может быть переписано в следующем равносильном виде, которым мы в дальнейшем воспользуемся:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}. \tag{I$'$}$$

Действительно, раскрывая в (I$'$) скобки, освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в правую часть, получаем

$$0 \leqslant 2a^2+2b^2-(a^2+2ab+b^2)=(a-b)^2.$$

С помощью простых неравенств (I) и (I$'$) легко решаются первые из нижеследующих задач.

Неравенства (I) и (I$'$) допускают много различных обобщений, самые важные из которых составляют содержание задач 268 и 283.

Средним арифметическим n положительных чисел a_1, a_2, …, a_n называется выражение

$$A_n(a)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Средним геометрическим n положительных чисел a_1, a_2, …, a_n называется корень n-й степени из произведения этих чисел:

$$\Gamma_n(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Наконец, *средним гармоническим* n положительных чисел называется такое число $H_n(a)$, что

$$\frac{1}{H_n(a)}=\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n}$$

(число, обратное среднему гармоническому n чисел, есть среднее арифметическое n чисел, обратных данным). В частности, среднее гармоническое c двух чисел a и b определяется равенствами

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \quad \text{откуда} \quad c=\frac{2ab}{a+b}.$$

255. а) Доказать, что из всех прямоугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет квадрат.

б) Доказать, что из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший периметр имеет квадрат.

256. Доказать, что сумма катетов произвольного прямоугольного треугольника всегда не больше, чем его гипотенуза, умноженная на $\sqrt{2}$.

257. Доказать, что для любого острого угла α

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2.$$

258. Доказать, что для любых положительных чисел a и b, в сумме равных единице: $a + b = 1$, имеет место неравенство

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Выяснить, при каких значениях a и b достигается равенство.

259. Доказать, что для любых трех положительных чисел a, b, c имеет место неравенство

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

При этом знак равенства достигается только при $a = b = c$.

260. При каком значении x дробь

$$\frac{a + bx^4}{x^2} \quad (a,\ b \text{ положительны})$$

принимает наименьшее значение?

261. У продавца заведомо неточные весы (коромысла весов разной длины). Зная это, продавец отвешивает каждому покупателю половину товара на одной чашке весов, а половину — на второй чашке, думая, что этим он компенсирует неточность весов. Так ли обстоит дело в действительности?

262. а) Доказать, что среднее геометрическое двух положительных чисел есть в то же время среднее геометрическое их среднего арифметического и среднего гармонического.

б) Доказать, что среднее гармоническое двух положительных чисел a и b не больше их среднего геометрического, причем равенство может иметь место только в случае равенства a и b.

263*. Доказать, что среднее арифметическое трех положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е.

что

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

причем равенство достигается лишь в случае $a = b = c$.

264. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

265. Рассмотрим трехгранную пирамиду с прямым трехгранным углом при вершине. Обозначим длины ребер, выходящих из вершин, через x, y и z.

При каких x, y, z объем пирамиды будет наибольшим, если известно, что

$$x + y + z = a?$$

266. Доказать, что для любых положительных чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 имеет место неравенство

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}.$$

267. Ч а с т н ы й с л у ч а й т е о р е м ы о с р е д н е м а р и ф м е т и ч е с к о м и с р е д н е м г е о м е т р и ч е с к о м. Даны 2^m положительных чисел a_1, a_2, …, a_{2^m}. Доказать, что имеет место неравенство

$$\Gamma_{2^m}(a) \leqslant A_{2^m}(a),$$

т. е.

$$\sqrt[2^m]{a_1a_2\ldots a_{2^m}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^m}}{2^m},$$

причем неравенство обращается в равенство лишь в случае, когда все числа a_1, a_2, …, a_{2^m} равны между собой.

268*. Т е о р е м а о с р е д н е м а р и ф м е т и ч е с к о м и с р е д н е м г е о м е т р и ч е с к о м д л я n ч и с е л. Доказать, что для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_n имеет место неравенство

$$\Gamma_n(a) \leqslant A_n(a),$$

т. е.

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Равенство достигается лишь в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

269. а) Доказать, что произведение n положительных множителей, сумма которых задана, достигает наибольшей величины, когда все n множителей равны между собой.

б) Доказать, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

270. Доказать, что для любых n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n имеет место неравенство

$$H(a) \leqslant \Gamma(a) \ \left(\text{т. е.} \quad n : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right).$$

Равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

271. Доказать, что для любых положительных чисел a и b

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a + nb}{n+1}$$

(равенство достигается только, если $a = b$).

272. Доказать, что для произвольных положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

В каком случае имеет место равенство?

273. Доказать, что при любом целом $n > 1$ имеет место неравенство

$$n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

274. Доказать, что для любых положительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4 имеет место неравенство

$$a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \leqslant \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4}{10}\right)^{10}.$$

275. Доказать неравенства:

а) $1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4^4} \ldots \frac{1}{n^n} < \left[\frac{2}{n+1}\right]^{n(n+1)/2}$;

б) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \ldots n^n < \left[\frac{2n+1}{3}\right]^{n(n+1)/2}$.

276. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Положим

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}.$$

277*. Доказать, что для любого целого n имеет место неравенство

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{4}\,\sqrt[8]{8}\ldots\sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n+1.$$

278. При каком значении x произведение

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$$

достигает наибольшего значения и каково это значение?

279*. В данный сегмент вписать прямоугольник наибольшей площади.

280. Из квадратного листа со стороной $2a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты (со стороной b) и загибая затем получившиеся выступы так,

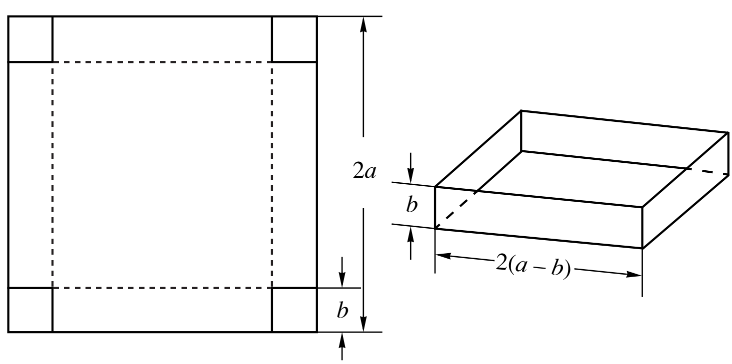


Рис. 4

как указано на рис. 4. При каком значении b коробка будет иметь наибольший возможный объем?

Б. Два обобщения теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Степенным средним порядка a данных n положительных чисел a_1, a_2, …, a_n называется число

$$S_\alpha(a) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha};$$

в частности, при целом положительном $a = k$ имеем

$$S_k(a) = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}}.$$

Очевидно, что

$$S_1(a) = A(a), \quad S_{-1}(a) = H(a).$$

При $\alpha = 0$ выражение для S_α бессмысленно. Однако можно доказать, что при $\alpha \longrightarrow 0$ $S_\alpha(a)$ стремится к среднему геометрическому $\Gamma(a)$ *); поэтому естественно положить

$$S_0(a) = \Gamma(a)$$

(дополнительные основания для этого дает предложение задачи 282). Степенное среднее порядка 2 называется средним квадратичным n чисел.

Отметим еще, что неравенство (I′) с. 63 теперь можно сформулировать следующим образом: среднее арифметическое двух чисел не превосходит их среднего квадратичного (причем равенство достигается только в случае равенства обоих чисел).

281*. а) Доказать, что среднее арифметическое n положительных чисел не превосходит среднего квадратичного этих чисел:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}.$$

*) То есть $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (см.: Левин В. И. Элементарное доказательство одной теоремы теории средних // Математическое просвещение. Вып. 3. — М., 1958. — С. 177–181).

Равенство достигается только в случае равенства всех чисел.

б) Пусть k — какое угодно целое число, большее 1. Доказать, что среднее арифметическое n положительных чисел не превосходит их степенного среднего порядка k, т. е.

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}.$$

Равенство достигается только в случае равенства всех чисел.

282. Доказать, что степенное среднее порядка α n положительных чисел при α положительном не меньше среднего геометрического этих чисел, а при α отрицательном не больше их среднего геометрического (причем равенство может достигаться только в случае равенства всех чисел).

Примечание. Частными случаями этого предложения являются важные теоремы задач 268 и 270.

283*. Теорема о степенных средних. Доказать, что если $\alpha < \beta$, то степенное среднее порядка α не превосходит степенного среднего порядка β:

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

Равенство достигается только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

284. а) Сумма трех положительных чисел равна 6. Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов этих чисел? А сумма кубов?

б) Сумма квадратов трех положительных чисел равна 18. Какое наименьшее значение может иметь сумма кубов этих чисел? Какое наибольшее значение может иметь сумма этих чисел?

Симметрическим средним порядка k n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (k — целое положительное число, не превосходящее n) называется корень степени k из среднего арифметического всевозможных произведений из n чисел a_1, a_2, …, a_n по k:

$$\sum_k(a) = \\ = \sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_k + a_1a_2\ldots a_{k-1}a_{k+1} + \ldots + a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n}{C_n^k}}.$$

Очевидно, что $\sum_1(a) = A(a)$, $\sum_n(a) = \Gamma(a)$.

285*. Доказать, что

$$\Bigl(\sum_k\Bigr)^{2^k} \geqslant \Bigl(\sum_{k+1}\Bigr)^{k+1} \cdot \Bigl(\sum_{k-1}\Bigr)^{k-1}.$$

286. Теорема о симметрических средних. Доказать, что если $k > l$, то

$$\sum_k(a) \geqslant \sum_l(a).$$

Равенство достигается только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

287. Известно, что сумма всевозможных попарных произведений четырех положительных чисел равна 24. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел? Какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел?

288. Пусть $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

а) Найти наименьшее возможное значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

б) Найти наибольшее возможное значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

В. Неравенство Коши–Буняковского. Легко проверить непосредственно следующее элементарное неравенство:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

или

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \qquad \text{(II)}$$

Действительно, раскрывая скобки в обеих частях неравенства, мы после приведения подобных членов и перенесения оставшихся членов в одну сторону придем к следующему очевидному неравенству:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда же видно, что неравенство (2) обращается в равенство лишь в случае

$$a_1b_2 = a_2b_1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Неравенство (II) допускает значительное обобщение, которое имеет важное значение в теории неравенств и часто применяется в различных вопросах математики и физики.

289. Неравенство Коши–Буняковского. Доказать, что для любых $2n$ действительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

имеет место неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

При этом знак равенства достигается лишь в случае, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

290. Выведите из неравенства Коши–Буняковского результат задачи 272.

291. Выведите из неравенства Коши–Буняковского теорему задачи 281, а).

292. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

293. Доказать, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

294. Пусть Q есть сумма всевозможных попарных произведений n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а P — сумма их квадратов. Доказать, что

$$Q \leqslant \frac{n-1}{2} P.$$

295. Доказать, что для любых положительных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место неравенство

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2).$$

296. Проверить, что для любых чисел x_1, x_2, x_3 имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$

297. Доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — положительные числа, то

$$\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2} + \ldots + \sqrt{x_ny_n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

298. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — четыре последовательности положительных чисел. Доказать неравенство

$$(a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4)\times$$
$$\times (c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \ldots + d_n^4).$$

299*. Неравенство Коши–Буняковского (задача 289) утверждает, что отношение

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности положительных чисел, больше или равно 1 $\Big($причем оно равно 1, только если последовательности a и b пропорциональны: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}\Big)$. Докаэать, что это отношение всегда заключается между 1 и

$$1+\left(\frac{\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}-\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2,$$

где M_1 и m_1 — соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а M_2 и m_2 — наибольшее и наименьшее из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. В каком случае рассматриваемое отношение точно равно

$$1+\left(\frac{\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}-\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2?$$

Г. Еще несколько неравенств.

300. Неравенство Чебышева. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две неубывающие последовательности чисел. В таком случае

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n},$$

причем равенство достигается только, если $a_1=a_2=\ldots$ $\ldots=a_n$ или $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

Примечание. Можно показать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — невозрастающая последовательность чисел, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — неубывающая последовательность, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

Доказательство этого предложения предоставляется читателю.

301. Пусть p и q — положительные рациональные числа и

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Доказать, что для любых положительных чисел x и y имеет место неравенство

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

П р и м е ч а н и е. При $p = q = 2$ мы получаем элементарную теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

302. Пусть α и β — положительные рациональные числа, в сумме равные единице:

$$\alpha + \beta = 1.$$

Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + \ldots + a_n^\alpha b_n^\beta \leqslant \\ \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^\alpha (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^\beta.$$

П р и м е ч а н и е. При $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, как легко видеть, мы получим неравенство задачи 297, которое равносильно неравенству Коши–Буняковского.

303. Н е р а в е н с т в о Г ё л ь д е р а. Пусть p и q — положительные рациональные числа такие, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеет место неравенство

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \leqslant \\ \leqslant (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

П р и м е ч а н и е. При $p = q = 2$ это неравенство обращается в неравенство Коши–Буняковского (задача 289), которое, таким образом, является частным случаем неравенства Гёльдера.

304. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ есть k последовательностей положительных чисел и $\alpha, \beta, \ldots$ $\ldots, \lambda$ есть k положительных чисел, таких, что

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1.$$

Доказать, что

$$(a_1^\alpha b_1^\beta \ldots l_1^\lambda + a_2^\alpha b_2^\beta \ldots l_2^\lambda + \ldots + a_n^\alpha b_n^\beta \ldots l_n^\lambda \leqslant \\ \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^\alpha (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^\beta \ldots (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)^\lambda.$$

305. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть n положительных чисел, g — их среднее геометрическое ($g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$). Доказать, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant (1 + g)^n.$$

306. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; … …; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ есть k последовательностей положительных чисел, то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} + \ldots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \ldots l_n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1 + \ldots + l_1)(a_2 + b_2 + \ldots + l_2)(a_n + b_n + \ldots + l_n)}.$$

307. Пусть x, y и z — положительные числа, причем

$$x + y + z = 1.$$

Доказать, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

308. Неравенство Минковского. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; …; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ есть k последовательностей положительных чисел. Доказать, что

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} +$$
$$+ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} + \ldots + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2} \geqslant$$
$$\geqslant \left((a_1 + b_1 + \ldots + l_1)^2 + (a_2 + b_2 + \ldots + l_2)^2 + \ldots\right.$$
$$\left.\cdots + (a_n + b_n + \ldots + l_n)^2\right)^{1/2}.$$

Примечание. Неравенство задачи 308 (обобщающее результат задачи 186, а); см. выше с. 44) можно также записать в виде

$$S_2(a) + S_2(b) + \ldots + S_2(l) \geqslant S_2(a + b + \ldots + l),$$

где S_2 есть среднее квадратичное n чисел (см. выше с. 68).

В более общей формулировке неравенство Минковского имеет такую форму: если $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; …; $l_1, l_2, \ldots, l_n$

есть k последовательностей положительных чисел, то

$$S_\alpha(a) + S_\alpha(b) + \ldots + S_\alpha(l) \begin{cases} \geqslant S_\alpha(a+b+\ldots+l), & \text{если } \alpha > 1; \\ \leqslant S_\alpha(a+b+\ldots+l), & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

В частности, неравенство задачи 306, которое можно записать в виде

$$\Gamma(a) + \Gamma(b) + \ldots + \Gamma(l) \leqslant \Gamma(a+b+\ldots+l),$$

или

$$S_0(a) + S_0(b) + \ldots + S_0(l) \leqslant S_0(a+b+\ldots+l),$$

составляет частный случай неравенства Минковского при $\alpha = 0$.

12. Ряды разностей и сумм числовых последовательностей

Рассмотрим последовательность чисел

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Первым рядом разностей этой последовательности называется последовательность чисел

$$u_0^{(1)} = u_1 - u_0, \quad u_1^{(1)} = u_2 - u_1, \quad u_2^{(1)} = u_3 - u_2, \quad \ldots \\ \ldots, \quad u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n, \quad \ldots$$

Вторым рядом разностей называется первый ряд разностей последовательности $u_n^{(1)}$:

$$u_0^{(2)} = u_1^{(1)} - u_0^{(1)}, \quad u_1^{(2)} = u_2^{(1)} - u_1^{(1)}, \quad u_2^{(2)} = u_3^{(1)} - u_2^{(1)}, \quad \ldots \\ \ldots, \quad u_n^{(2)} = u_{n+1}^{(1)} - u_n^{(1)}, \quad \ldots$$

Аналогично определяются и последующие ряды разностей: k-й ряд разностей $u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)}, \ldots$ есть первый ряд разностей $(k-1)$-го ряда разностей $u_0^{(k-1)}, u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}, \ldots$ Так, например, если исходная последовательность представляет собой арифметическую прогрессию $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$, то первый ряд разностей состоит из одних четверок: $4, 4, 4, 4, 4, \ldots$, а второй ряд разностей состоит из нулей: $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ Если исходная последовательность состоит из квадратов целых чисел $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$, то ее первый ряд разностей состоит из нечетных чисел 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., второй ряд разностей состоит из двоек 2, 2, 2, 2, 2, ..., а третий ряд разностей состоит из нулей 0, 0, 0, 0, ... (Тот факт, что в обоих рассмотренных случаях мы довольно быстро пришли к ряду, составленному из одних нулей, связан с общим предложением, составляющим содержание задачи 309, б).) Ряды разностей конечной последовательности чисел удобно расположить в так называемый *треугольник разностей*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_0 & & u_1 & & u_2 & & \ldots & & u_n \\
 & u_0^{(1)} & & u_1^{(1)} & & u_2^{(1)} \quad \ldots & & u_{n-1}^{(1)} & \\
 & & u_0^{(2)} & & u_1^{(2)} \quad \ldots & & u_{n-2}^{(2)} & & \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
 & & & & u_0^{(n)} & & & &
\end{array}$$

Здесь, очевидно, каждое число равно разности двух, стоящих над ним. Для бесконечной последовательности чисел мы будем иметь бесконечный треугольник разностей:

$$\begin{array}{cccccc}
u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_n & \ldots \\
u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots & u_n^{(1)} & \ldots \\
u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_n^{(2)} & \ldots \\
\multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

Аналогично рядам разностей последовательности чисел можно определить и ряды сумм. *Первым рядом сумм* последовательности чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется ряд $\overline{u}_0^{(1)}, \overline{u}_1^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \overline{u}_n^{(1)}, \ldots$, где

$$\overline{u}_0^{(1)} = u_0 + u_1, \quad \overline{u}_1^{(1)} = u_1 + u_2, \quad \ldots, \quad \overline{u}_n^{(1)} = u_n + u_{n+1}, \quad \ldots$$

k-м *рядом сумм* ряда $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ называется первый ряд сумм $(k-1)$-го ряда сумм данного ряда, k-й ряд сумм ряда $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ обозначается так: $\overline{u}_0^{(k)}, \overline{u}_1^{(k)}, \ldots, \overline{u}_n^{(k)}, \ldots$

Так, например, если исходный ряд состоит из единиц 1, 1, 1, 1, 1, 1, ..., то первый ряд сумм состоит из двоек: 2, 2, 2, 2, 2, ..., второй ряд сумм состоит из четверок: 4, 4, 4, 4, ..., третий ряд сумм состоит из восьмерок: 8, 8, 8, ... и т. д. Если исходный ряд есть ряд всех целых чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., то в качестве последовательных рядов сумм получаем арифметические прогрессии

$$\begin{array}{l} 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots, \\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots, \\ 20,\ 28,\ 36,\ 44,\ \ldots \end{array}$$

и т. д.

Ряды сумм конечной последовательности чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ удобно расположить в так называемый **треугольник сумм**:

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_0 & & u_1 & & u_2 & & \ldots & & u_{n-1} & & u_n \\ & \overline{u}_0^{(1)} & & \overline{u}_1^{(1)} & & \overline{u}_2^{(1)} & & \ldots & & \overline{u}_{n-1}^{(1)} & \\ & & \overline{u}_0^{(2)} & & \overline{u}_1^{(2)} & & \ldots & & \overline{u}_{n-2}^{(2)} & & \\ & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & \\ & & & & \overline{u}_0^{(n-1)} & & \overline{u}_1^{(n-1)} & & & & \\ & & & & & \overline{u}_0^{(n)} & & & & & \end{array}$$

Здесь каждое число равно сумме чисел, стоящих над ним. Если мы возьмем бесконечный ряд $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, то получим бесконечный треугольник сумм.

Рассмотрим еще так называемый **треугольник Паскаля** (или **арифметический треугольник**):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Здесь в каждой строке по краям стоят 1, а остальные числа получаются сложением двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке.

Для чисел треугольника Паскаля имеется употребительное обозначение: число, которое стоит в треугольнике Паскаля в n-й строке (счет строк мы начинаем с нуля, т. е. считаем, что 1 в вершине треугольника образует нулевую строку, 1 1 — первую и т. д.) на $(k+1)$-м месте слева, обозначается через C_n^k.

При таких обозначениях треугольник Паскаля принимает вид

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

. . . .

Ряд свойств чисел треугольника Паскаля рассматривается в книге Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, «Математические беседы», раздел 2, гл. III, § 2 («Библиотека математического кружка», вып. 6).

К материалу, составляющему содержание задач этого цикла, близко содержание интересной популярной книжки: А. И. Маркушевич, «Возвратные последовательности», Гостехиздат, М.–Л., 1950.

Последовательность чисел, получающихся при подстановке в многочлен k-й степени $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$ вместо x последовательных целых чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ (т. е. последовательность чисел $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$), мы будем называть *последовательностью k-й степени*. Частным случаем последовательности k-й степени является последовательность k-х степеней чисел натурального ряда $1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \ldots, n^k, \ldots$

309. Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ есть последовательность k-й степени, т. е. $u_n = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_k$.

а) Доказать, что $u_n^{(1)}$ есть последовательность $(k-1)$-й степени.

б) Доказать, что $(k+1)$-й ряд разностей нашей последовательности состоит из одних нулей.

310. Доказать, что если $u_n = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_k$, то все числа k-го ряда разностей последовательности $u_0, u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n, \ldots$ равны $a_0\,k!$.

311. Доказать, что:

а) $\overline{u}_n^{(k)} = C_k^0u_n + C_k^1u_{n+1} + C_k^2u_{n+2} + \ldots + C_k^ku_{n+k}$;

б) $u_n^{(k)} = (-1)^kC_k^0u_n + (-1)^{k-1}C_k^1u_{n+1} +$
$$+(-1)^{k-2}C_k^2u_{n+2} + \ldots + C_k^ku_{n+k}.$$

312. Доказать, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (k>0)$$

(через $k!$ обозначено произведение $1\cdot 2\cdot 3\ldots k$).

313. Доказать, что

$$u_n = C_n^0 u_0 + C_n^1 u_0^{(1)} + C_n^2 u_0^{(2)} + \ldots + C_n^k u_0^{(k)}.$$

314. Пусть $(k+1)$-й ряд разностей некоторой последовательности состоит из одних нулей, а в k-м ряду разностей есть отличные от нуля числа. Доказать, что эта последовательность есть последовательность k-й степени.

Примечание. Теорема этой задачи обратна теореме задачи 309, б). Там было доказано, что $(k+1)$-й ряд разностей последовательности k-й степени состоит из нулей; здесь требуется доказать, что если $(k+1)$-й ряд разностей некоторой последовательности состоит из нулей, то эта последовательность есть последовательность k-й степени (прямая и обратная теоремы).

315. Найти формулу для суммы

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4.$$

316. а) Доказать, что сумма $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ является многочленом относительно n степени $k+1$.

б) Вычислить коэффициенты при n^{k+1} и n^k этого многочлена.

317. Говорят, что ряд, состоящий из целых чисел, *делится на число* d, если каждое число этого ряда делится на d (так, например, последовательность чисел $n^{13} - n$ делится на 13, последовательность чисел $3^{6^n} - 2^{6^n}$ делится на 35, последовательность чисел $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120; см. задачи 27, д), 28, а), б)).

Пусть u_n есть последовательность k-й степени: $u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$, такая, что все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$ являются целыми взаимно простыми числами (т. е. все числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ не имеют никакого общего делителя).

Доказать, что если последовательность u_n делится на целое число d, то d есть делитель числа $k!$

318. Вычислить $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

319. Пользуясь результатом задачи 313, доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^k = \\ = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2}\, a^{k-2}b^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}\, b^k.$$

320. Рассмотрим ряд $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Составим для него треугольник разностей:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \cdot \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{30} & & \cdot & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \cdot & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{60} & & \cdot & & & \\
& & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{30} & & \cdot & & & & \\
& & & & & -\frac{1}{6} & & \cdot & & & & &
\end{array}$$

Повернем этот треугольник на 60° так, чтобы вершина, где стоит 1, оказалась вверху:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & & 1 & & & & & \\
& & & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
& & & \frac{1}{3} & & -\frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
& & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & -\frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
& \frac{1}{5} & & -\frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & -\frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
-\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & -\frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & -\frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

В полученном треугольнике откинем знаки, затем числа каждой строки разделим на самое левое число строки:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \frac{1}{2} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{4} & & 1 & \\
1 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{5} & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

После этого каждое число заменим на обратное $\left(\text{т. е. вместо дроби } \frac{a}{b} \text{ напишем дробь } \frac{b}{a}\right)$.

Доказать, что у нас получится треугольник Паскаля.

РЕШЕНИЯ

1. Составим общую сумму чисел всех рукопожатий, сделанных когда-либо каждым из людей. Эта сумма обязательно четна, потому что каждое рукопожатие, которым обменялись два лица A и B, увеличивает на 1 число рукопожатий, сделанных A, и на 1 число рукопожатий, сделанных B, и, следовательно, дает слагаемое 2 в общей сумме. Но, с другой стороны, эта сумма составляется из числа рукопожатий, сделанных каждым отдельным человеком. Из четности суммы вытекает, что число нечетных слагаемых в ней четно,что и требовалось доказать.

2. Для того чтобы обойти все 64 клетки шахматной доски, побывав на каждом поле один раз, конь должен сделать 63 хода. Так как при каждом ходе конь переходит с белого поля на черное или с черного на белое, то после ходов с четными номерами конь будет попадать на поля того же цвета, что и исходное, а после ходов с нечетными номерами — на поля другого цвета. Поэтому конь не может 63-м ходом попасть на поле, находящееся на одной диагонали с исходным, так как эти поля окрашены в один цвет.

3. а) Обозначим наименьшее число перекладываний, которое надо произвести, чтобы с соблюдением условий задачи переложить пирамиду из n колец на другую палочку, через $k(n)$. Очевидно, что $k(1) = 1$. Далее, если $n = 2$, то для того, чтобы можно было переложить на вторую палочку нижнее кольцо, необходимо переложить верхнее кольцо на третью (вспомогательную) палочку; после этого можно переложить нижнее кольцо на вторую палочку и затем второе кольцо —

поверх первого. Таким образом, $k(2) = 3$. Аналогично, для того чтобы переложить на вторую палочку нижнее кольцо пирамиды из трех колец, надо сначала переложить на третью (вспомогательную) палочку два верхних кольца; согласно уже доказанному, для этого надо произвести $k(2) = 3$ перекладывания. Затем можно переложить нижнее кольцо на вторую палочку; после этого нам опять придется перенести пирамиду из двух колец с одной палочки на другую, на что понадобится еще $k(2) = 3$ перекладывания. Таким образом, мы видим, что

$$k(3) = 2k(2) + 1 = 7.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$k(4) = 2k(3) + 1 = 15,$$
$$k(5) = 2k(4) + 1 = 31,$$

и вообще

$$k(n) = 2k(n-1) + 1.$$

Последняя формула позволяет легко доказать, что

$$k(n) = 2^n - 1.$$

Действительно, если мы уже знаем, что

$$k(n-1) = 2^{n-1} - 1,$$

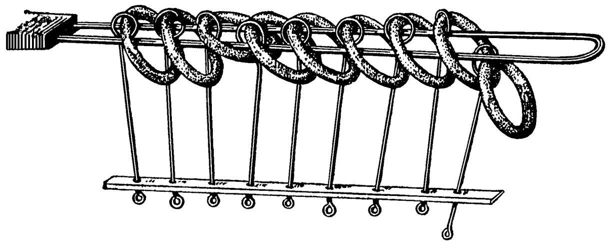
то

$$k(n) = 2k(n-1) + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

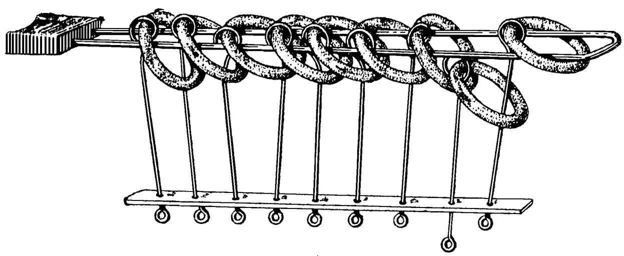
Отсюда, в силу принципа математической индукции, следует, что $k(n) = 2^n - 1$ для всех значений n.

б) Обозначим наименьшее число приемов, с помощью которых можно снять с проволоки n колец, через $K(n)$. В исходном положении можно снять с проволоки либо первое кольцо (рис. 5, а), либо второе (рис. 5, б); следовательно, $K(1) = 1$ и $K(2) = 2$ (в случае двух колец мы сначала снимем второе кольцо, а после этого — первое).

Для того чтобы можно было снять с проволоки i-е кольцо, очевидно, необходимо, чтобы предшествующие $i - 2$ кольца были уже сняты — иначе i-е кольцо нельзя будет сдвинуть к концу проволоки. С другой стороны, если и $(i-1)$-е кольцо уже снято, то i-е кольцо снять нельзя (см. рис. 6, а, на котором



а



б

Рис. 5

видно, что если сняты три кольца, то четвертое снять нельзя). Но если $(i-1)$-е кольцо снято, то $(i+1)$-е кольцо снимается без труда (рис. 6, б, в).

Теперь уже нетрудно ответить на вопрос задачи. Для того чтобы снять последнее из n колец, необходимо сначала снять первые $n-2$ кольца; это можно сделать в $K(n-2)$ приемов. После этого можно снять последнее кольцо — еще в один прием. Затем нам останется только снять единственно оставшееся на проволоке $(n-1)$-е кольцо. Обозначим число приемов, необходимых для того, чтобы снять единственное n-е кольцо при условии, что все предшествующие кольца уже сняты, через $k(n)$. В таком случае мы, очевидно, будем иметь

$$K(n) = K(n-2) + 1 + k(n-1).$$

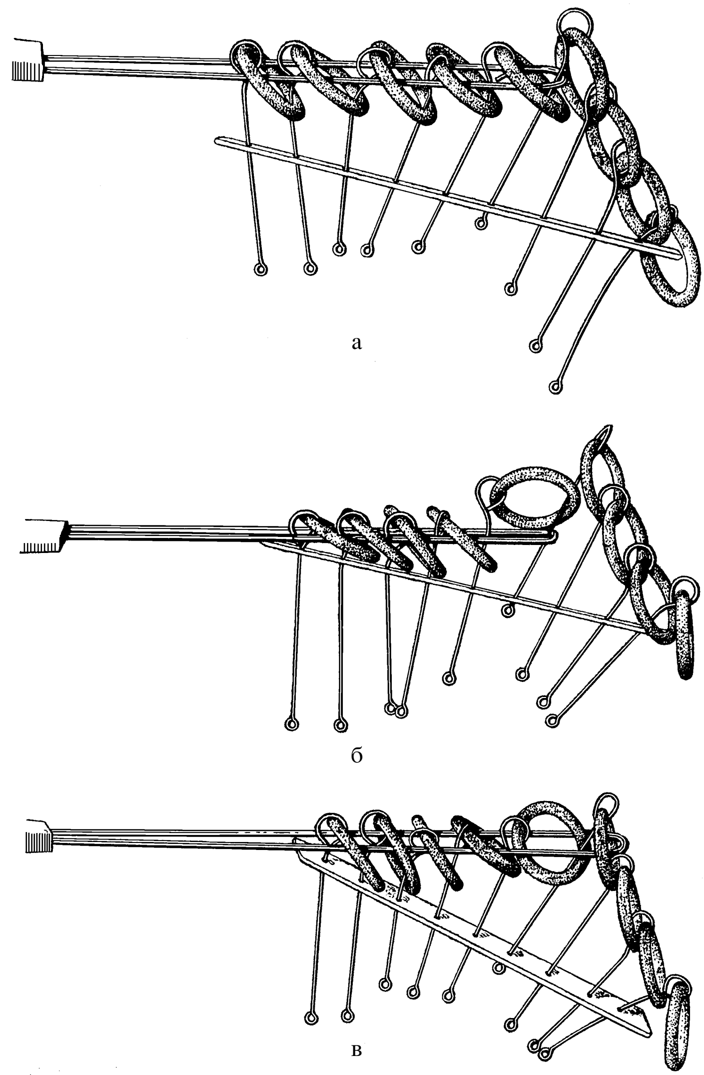


Рис. 6

Найдем теперь выражение для числа $k(n)$. Очевидно, для того чтобы снять с проволоки n-е кольцо, надо предварительно надеть на проволоку $(n-1)$-е кольцо: это можно сделать в $k(n-1)$ приемов (это те же приемы, которые необходимы, чтобы снять с проволоки $(n-1)$-е кольцо, только проделанные в обратном порядке). После этого легко снять с проволоки n-е кольцо — это еще один прием. Наконец, нам останется снять с проволоки $(n-1)$-е кольцо — на это потребуется еще $k(n-1)$ приемов. Итак, мы получаем

$$k(n) = 2k(n-1) + 1,$$

откуда легко находим

$$k(n) = 2^n - 1$$

(см. решение задачи а)).

Теперь формула для определения $K(n)$ принимает вид

$$K(n) = K(n-2) + 2^{n-1}.$$

А отсюда, так как $K(1) = 1$ и $K(2) = 2$, без труда находим при $n = 2m$ (четном)

$$\begin{aligned}K(n) = K(n-2) + 2^{n-1} &= K(n-4) + 2^{n-1} + 2^{n-3} = \\ &= K(n-6) + 2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} = \ldots \\ \ldots &= K(2) + 2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + 2^3 = \\ &= 2 + \frac{2^{n+1} - 2^3}{4-1} = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2);\end{aligned}$$

при $n = 2m+1$ нечетном

$$\begin{aligned}K(n) = K(n-2) + 2^{n-1} &= K(n-4) + 2^{n-1} + 2^{n-3} = \\ &= K(n-6) + 2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} = \ldots \\ \ldots &= K(1) + 2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + 2^2 = \\ &= 1 + \frac{2^{n+1} - 2^2}{4-1} = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1).\end{aligned}$$

4. а) Разделим наши монеты на три группы: две группы по 27 монет и одну в 26 монет. При первом взвешивании поместим на чашки весов группы по 27 монет. Если весы не уравновесятся, то фальшивая монета находится на более «легкой» чашке. Если же весы окажутся в равновесии, то фальшивая монета содержится в группе из 26 монет. Таким образом, нам достаточно научиться решать задачу: тремя взвешиваниями выделить фальшивую монету из группы в 27 монет (задача выделить фальшивую монету из группы в 26 монет может быть сведена к этой задаче, например, добавлением к группе из 26 монет еще одной произвольной монеты из числа остальных 54).

При втором взвешивании разделим группу в 27 монет на три группы по 9 монет в каждой. Поместив на обе чашки весов по группе из 9 монет, найдем группу из 9 монет, в которой содержится фальшивая монета.

Разделив группу из 9 монет, одна из которых фальшивая, на три группы по 3 монеты, мы третьим взвешиванием выделим тройку монет, в которой содержится фальшивая.

Наконец, тем же путем при четвертом взвешивании найдем фальшивую монету.

б) Пусть k — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $3^k \geqslant n$, $3^{k-1} < n$. Покажем, что это число k удовлетворяет условиям задачи.

Прежде всего покажем, что при помощи k взвешиваний всегда можно определить фальшивую монету. Разделим наши монеты на три группы так, чтобы в двух равных группах было по 3^{k-1} (или меньше) монет, а число монет в третьей группе было бы не больше 3^{k-1} (это возможно, ибо $n \leqslant 3^k$). Положив на чашки весов две группы из равного числа монет, мы определим, в какой из трех групп содержится фальшивая монета (ср. с решением задачи а)). Таким образом, после первого взвешивания мы выделим группу из 3^{k-1} монет, среди которых содержится фальшивая (если окажется, что фальшивая монета находится в группе, содержащей меньше 3^{k-1} монет, то мы можем дополнить эту группу монет произвольными монетами до 3^{k-1}). При каждом последующем взвешивании будем делить наши монеты на три равные группы и находить, в какой из них находится монета. Таким образом, после k взвешиваний мы придем к группе из одной монеты, т. е. выделим фальшивую монету.

Теперь остается показать, что k есть минимальное число взвешиваний, с помощью которых всегда можно выделить фальшивую монету, т. е. что при любых способах взвешивания результаты взвешиваний могут сложиться таким неблагоприятным для нас образом, что после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

При каждом взвешивании монеты распадаются на три группы: монеты, попавшие на одну чашку, попавшие на другую чашку и не попавшие ни на одну из чашек. Если на чашке весов было положено одинаковое число монет и весы уравновесились, то фальшивая монета заведомо находится в группе монет, не попавших при взвешивании ни на одну чашку. Если одна из чашек перетянет (при равном числе монет на чашках), то фальшивая монета находится на второй чашке. Наконец, если на чашки весов было положено разное число монет, то в случае, когда перетянула чашка, где монет больше, фальшивая монета может оказаться в любой из трех групп и такое взвешивание вообще не даст нам никаких сведений о местонахождении фальшивой монеты. Пусть теперь при произвольно производимых взвешиваниях результат взвешивания каждый раз оказывается наиболее неблагоприятным, т. е. фальшивая монета каждый раз оказывается в той из трех групп, которая содержит наибольшее число монет. Тогда при каждом взвешивании число монет группы, содержащей фальшивую монету, убывает не более чем в три раза (ибо при делении некоторого числа монет на три группы всегда по крайней мере одна из трех групп содержит не менее чем треть от общего числа монет); поэтому после $k-1$ взвешиваний число монет группы, содержащей фальшивую монету, останется не меньшим, чем $\frac{n}{3^{k-1}}$, и так как $n > 3^{k-1}$, то после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

Примечание. Можно коротко записать ответ задачи в такой форме: минимальное число взвешиваний, необходимое для выделения фальшивой монеты из группы в n монет, есть $\left[\log_3\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]+1$, где прямые скобки обозначают целую часть числа (см. с. 30).

5. Положим на чашки весов по одному кубику (первое взвешивание). При этом могут иметь место два различных случая.

1°. При первом взвешивании одна чашка весов перетянула. В таком случае из двух взвешиваемых кубиков один обязательно является алюминиевым, а второй — дюралевым. Далее кладем эти два кубика на одну чашку весов, а на вторую — последовательно по паре оставшихся кубиков (разбиение 18 оставшихся кубиков на 9 пар производим произвольно). Если какая-нибудь пара кубиков перетягивает нашу пару, то это значит, что оба кубика во второй паре дюралевые; если перетягивает первая пара, то оба кубика второй пары — алюминиевые; если обе пары имеют один вес, то, значит, вторая пара тоже содержит один алюминиевый и один дюралевый кубики. Таким образом, в случае 1° мы можем определить число дюралевых кубиков при помощи 10 взвешиваний (одно взвешивание и еще 9).

2°. При первом взвешивании чашки весов остались в равновесии. В таком случае кубики первой пары или оба алюминиевые, или оба дюралевые. Кладем, далее, эти два кубика на одну чашку весов, а на вторую — последовательно кладем по паре кубиков из числа оставшихся 18. Пусть первые k из этих пар оказываются одного веса с первоначальной, а $(k+1)$-я пара — другого веса. (Если $k = 9$, то все кубики оказываются одного веса и, следовательно, дюралевых кубиков нет вовсе; случай $k = 0$ ничем не отличается от общего случая.) Предположим для определенности, что $(k+1)$-я пара оказалась более тяжелой, чем первоначальная (рассуждение мало изменилось бы, если $(k + 1)$-я пара оказалась бы более легкой). В таком случае первые два кубика, а следовательно, и кубики тех k пар, которые оказались с ними одного веса, обязательно алюминиевые. Итак, мы произвели пока $1 + (k + 1) = k + 2$ взвешиваний и выделили при этом $k + 1$ пар алюминиевых кубиков. Теперь положим на чашки весов по кубику из последней взвешенной пары ($(k + 3)$-е взвешивание). Если оба кубика окажутся одинакового веса, то оба они должны быть дюралевыми; в противном случае — один из них алюминиевый, а второй дюралевый. В обоих случаях мы можем после $k + 3$ взвешиваний указать пару из двух кубиков, один из которых алюминиевый, а второй дюралевый. С помощью этой пары мы $8 - k$ взвешиваниями определим число дюралевых кубиков среди оставшихся $20 - 2(k + 2) = 16 - 2k$

кубиков аналогично тому, как мы поступали в случае 1°. Общее число взвешиваний в случае 2° будет равно $k + 3 + (8 - k) = 11$.

6. а) Разделим наши монеты на три группы по четыре монеты в каждой. При первом взвешивании поместим на каждую чашку весов по группе из четырех монет. Возможны два варианта.

1°. Чашки весов уравновесились.

2°. Одна из чашек перевесила.

Рассмотрим оба варианта в отдельности.

1°. При первом взвешивании чашки весов уравновесились. Следовательно, фальшивая монета находится в оставшейся группе, а 8 монет на весах — настоящие. Перенумеруем монеты из оставшейся группы: 1, 2, 3, 4. Положим при втором взвешивании монеты 1, 2 и 3 на одну чашку, а на другую — три монеты из числа восьми заведомо настоящих. Возможны два случая:

А) Чашки весов уравновесились. Тогда монета 4 фальшивая. Сравнивая третьим взвешиванием ее с настоящей, мы находим, легче она или тяжелее, чем настоящая.

Б) Одна из чашек перетянула. В этом случае фальшивой является одна из монет 1, 2 или 3. При этом, если перетянула чашка с настоящими монетами, то фальшивая монета легче настоящих; одним взвешиванием мы без труда выделяем более легкую из трех монет: 1, 2 и 3 (ср. с решением задачи 4, а)). Если же перетянула чашка с монетами 1, 2, 3, то фальшивая монета тяжелее настоящих; и в этом случае ее легко определить одним взвешиванием.

2°. При первом взвешивании одна из чашек весов перетянула. Тогда все монеты в оставшейся группе настоящие. Обозначим монеты, лежавшие на перетянувшей чашке, через 1, 2, 3, 4 (если одна из этих монет фальшивая, то она тяжелее настоящих), а монеты на другой чашке — через $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ (если одна из этих монет фальшивая, то она легче настоящих). При втором взвешивании поместим на одну чашку монеты 1, 2 и $1'$, а на другую — монеты 3, 4, и $2'$. Возможны опять-таки различные случаи.

А) Чашки уравновесились. Тогда фальшивая одна из монет $3'$ или $4'$ (и при этом она легче настоящих). При третьем взвешивании поместим на одну чашку весов монету $3'$, а на вторую — монету $4'$; та из этих монет, которая окажется легче другой, и будет фальшивой.

Б) Перетянула чашка с монетами 1, 2, $1'$. В этом случае монеты 3, 4 и $1'$ — настоящие; в самом деле, если бы одна из монет 3, 4 была бы тяжелее остальных или монета $1'$ была бы легче остальных, то при втором взвешивании чашка, на которой лежат монеты 3, 4 и $2'$, должна была бы перетянуть, чего на самом деле не случилось. Итак, фальшивой является одна из монет 1, 2 (в этом случае фальшивая монета тяжелее настоящих) или $2'$ (в этом случае фальшивая монета легче настоящих). Положим при третьем взвешивании на одну чашку монету 1, а на другую — монету 2. Если чашки уравновесились, то фальшивая монета $2'$, а если одна из чашек перетянула, то на перетянувшей чашке лежит фальшивая монета.

В) Перетянула чашка с монетами 3, 4, $2'$. Рассуждая аналогично предыдущему, мы заключаем, что монеты 1, 2 и $2'$ настоящие и что либо одна из монет 3, 4 фальшивая и тяжелее настоящих, либо монета $1'$ фальшивая и легче настоящих. При третьем взвешивании положим на одну чашку монету 3, а на другую — монету 4. Если весы уравновесились, то фальшивая монета $1'$. Если же одна из чашек перетянула, то на ней и находится фальшивая монета.

б) Доказательство того, что если число монет $N \leqslant \dfrac{3^n-3}{2}$, то фальшивую монету можно выделить (и определить, легче она или тяжелее остальных) при помощи n взвешиваний, а если $N > \dfrac{3^n-3}{2}$, то это невозможно (см. указание к настоящей задаче), мы проведем в три этапа.

А. Решим сначала более простую задачу. Предположим, что нам дано N монет, разделенных на две группы: группу X и группу Y (одна из этих двух групп может, в частности, не содержать ни одной монеты). Известно, что среди наших N монет есть одна фальшивая.

Известно также, что если фальшивая монета находится в группе X, то она легче остальных, а если — в группе Y, то тяжелее. Требуется доказать, что *если* $N \leqslant 3^n$, *то фальшивую монету наверняка можно выделить* при помощи n взвешиваний на чашечных весах без гирь, а если $N > 3^n$, то это может оказаться невозможным*). (В частном случае, когда группа Y не содержит ни одной монеты, наша задача формулируется так: среди N монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем остальные. Доказать, что если $N \leqslant 3^n$, то фальшивую монету, наверное, можно выделить n взвешиваниями на чашечных весах без гирь, а если $N > 3^n$, то это не всегда возможно; см. задачу 4, б).)

Доказательство будем проводить методом математической индукции. Прежде всего покажем, что из $N \leqslant 3^n$ монет фальшивую монету всегда можно выделить n взвешиваниями. При $n = 1$, т. е. при $N = 1$, 2 или 3, это утверждение почти очевидно (с одним ограничением, о котором говорится в подстрочном примечании); так, например, при $N = 3$ для определения фальшивой монеты достаточно сравнить вес двух монет из одной группы. Предположим теперь, что мы уже доказали, что если $N \leqslant 3^{n-1}$, то фальшивую монету можно выделить $n-1$ взвешиваниями, и пусть $N \leqslant 3^n$. Поместим на каждую чашку весов по x монет из группы X и по y монет из группы Y, где x и y выбраны так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$x + y \leqslant 3^{n-1}, \quad N - 2(x + y) \leqslant 3^{n-1}.$$

$\Bigl($Если $N \leqslant 3^n$, то неравенство $N - 2(x + y) \leqslant 3^{n-1}$ или $x + y \geqslant \dfrac{N - 3^{n-1}}{2}$ совместимо с $x + y \leqslant \dfrac{3^n - 3^{n-1}}{2} = 3^{n-1}$, т. е. всегда можно выбрать x и y так, что $3^{n-1} \geqslant x + y \geqslant \dfrac{N - 3^{n-1}}{2}$.$\Bigr)$ Если весы окажутся в равновесии, то, значит, фальшивая монета находится среди $N - 2(x + y)$ монет, не положенных на весы, а если одна из чашек перевесит, то, значит, она находится или среди x монет из группы X, лежащих на более легкой чашке, или среди y монет из группы Y, лежащих на более тяжелой чашке. Но согласно сделанному предположению в обоих случаях мы можем выделить фальшивую монету,

*) Это утверждение имеет одно очевидное исключение: если $N = 2$ и группы X и Y содержат по одной монете, то фальшивую монету, разумеется, вовсе невозможно выделить.

произведя еще $n-1$ взвешиваний (ибо и $N-2(x+y)$ и $x+y$ не превосходят 3^{n-1} *)). Тем самым доказано, что из $N \leqslant 3^n$ монет фальшивую можно выделить при помощи n взвешиваний.

Докажем теперь, что при $N > 3^n$ фальшивую монету, вообще говоря, нельзя выделить при помощи n взвешиваний. Для дальнейшего нам будет важно доказать несколько более общее утверждение: предположим, что помимо двух групп, содержащих $N > 3^n$ монет, из которых одна — фальшивая, мы имеем еще некоторое число заведомо настоящих монет; эту группу настоящих монет мы обозначим буквой Z (число монет в группе Z для дальнейших рассуждений безразлично). Покажем, что даже и в этом случае фальшивую монету, вообще говоря, нельзя выделить n взвешиваниями. Легко проверить, что при $n = 1$ (т. е. если общее число монет в группах X и Y превосходит 3) действительно одним взвешиванием не всегда можно выделить фальшивую монету. Предположим теперь, что мы умеем доказать, что в случае, когда общее число монет в группах X и Y превосходит 3^{n-1}, не всегда можно выделить фальшивую монету $n-1$ взвешиваниями, и покажем, что в таком случае при $N > 3^n$ фальшивую монету не всегда можно выделить n взвешиваниями. Допустим, что при первом взвешивании мы на одну чашку весов положили x монет из группы X, y монет из группы Y и z монет из группы Z, а на вторую — x' монет из группы X и y' монет из группы Y, причем $x+y+z = x'+y'$ (ясно, что совершенно бесцельно класть монеты из группы Z на обе чашки весов); пусть из монет групп X и Y при этом невзвешенными останутся ω монет $(x + x' + y + y' + \omega = N)$. Так как при этом весы могут оказаться в равновесии, то, по предположению индукции, для того чтобы можно было обойтись n взвешиваниями, ω должно не превосходить 3^{n-1}; но в этом случае

$$x + y + x' + y' \geqslant N - 3^{n-1} > 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

*) Если $N > 2$, то случай, когда $x = 1$, $y = 1$, уже не представляет исключения, так как теперь мы кроме двух монет имеем еще некоторое число заведомо настоящих монет; сравнив вес одной из них с весом одной из сомнительных монет, мы одним взвешиванием выделим фальшивую монету.

и большее из чисел $x+y'$ и $x'+y$ будет больше 3^{n-1}. Но если, например, $x'+y>3^{n-1}$, то согласно сделанному предположению мы не сможем обойтись $n-1$ взвешиваниями в том случае, когда перевесит чашка весов, на которой находилось x монет из группы X и y монет из группы Y. Тем самым полностью доказано, что при $N>3^n$ фальшивую монету не всегда можно выделить при помощи n взвешиваний, чем и завершается доказательство предложения А.

Б. Рассмотрим теперь такую задачу. Пусть дано N монет, среди которых имеется одна фальшивая, отличающаяся от остальных по весу (более легкая или более тяжелая, неизвестно), и кроме этих N монет еще по крайней мере одна заведомо настоящая монета. Покажем, что при

$$N \leqslant \frac{3^n-1}{2}$$

фальшивую монету всегда можно выделить n взвешиваниями и определить при этом, легче она или тяжелее остальных, а при

$$N > \frac{3^n-1}{2}$$

это не всегда возможно.

Пусть сначала $N \leqslant \dfrac{3^n-1}{2}$. При $n=1$ (т. е. при $N=1$) одного взвешивания достаточно. Будем считать, далее, уже доказанным, что при

$$N \leqslant \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

можно обойтись $n-1$ взвешиваниями, и покажем, что в таком случае при

$$N \leqslant \frac{3^n-1}{2}$$

можно обойтись n взвешиваниями. Поместим на одну чашку весов x из данных N монет и одну настоящую монету, а на вторую чашку весов $x+1$ монет; при этом невзвешенными останутся $N-2x-1$ монет. Выберем x таким образом, чтобы

$$2x+1 \leqslant 3^{n-1}, \quad N-2x-1 \leqslant \frac{3^{n-1}-1}{2};$$

ясно, что x всегда можно так выбрать, если $N \leqslant \frac{3^n-1}{2}$ $\Bigl($в этом случае $N - \frac{3^{n-1}-1}{2} \leqslant \frac{3^n-1}{2} - \frac{3^{n-1}-1}{2} = 3^{n-1}\Bigr)$. Если весы окажутся в равновесии, то останется

$$N - 2x - 1 \leqslant \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

непроверенных монет и ряд заведомо настоящих монет; поэтому, по предположению, мы можем выделить фальшивую монету, произведя еще не более чем $n-1$ взвешиваний. Если равновесия не будет, то x монет на одной чашке и $x+1$ на другой образуют две группы, содержащие всего $2x+1 \leqslant 3^{n-1}$ монет, к которым применимы результаты рассмотренной ранее задачи А; следовательно, и в этом случае нам потребуется еще не более $n-1$ взвешиваний. Тем самым полностью доказано, что при

$$N \leqslant \frac{3^n-1}{2}$$

можно обойтись n взвешиваниями.

Покажем теперь, что при

$$N > \frac{3^n-1}{2}$$

не всегда можно обойтись n взвешиваниями. При $n = 1$ (т. е. при $N > 1$) легко видеть, что, действительно, одного взвешивания недостаточно. Далее будем опять пользоваться индукцией. Предположим, что для

$$N > \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

доказано, что $n-1$ взвешиваний может не хватить, и рассмотрим случай, когда

$$N > \frac{3^n-1}{2}.$$

Пусть на одну чашку весов мы положили x монет из наших N и z монет заведомо настоящих (здесь мы считаем даже, что заведомо настоящих монет у нас не одна, а много), а на вторую $x+z$ монет из наших N; число сомнительных монет, оставшихся невзвешенными, обозначим через ω. Так как весы могут оказаться в равновесии, то для того чтобы можно было обойтись n взвешиваниями, ω должно быть не больше $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ (по сделанному предположению). Но в этом случае $2x+z>3^{n-1}$ $\left(\text{ибо } N>\dfrac{3^n-1}{2}\right)$; так как к двум группам X и Y, состоящим из сомнительных монет, лежащих на одной и на другой чашке весов, в случае, если равновесия не будет, полностью применимы все результаты задачи А, то из неравенства $2x+z>3^{n-1}$ следует, что при нарушении равновесия n взвешиваний может не хватить.

В. После этих предварительных рассмотрений перейдем к решению нашей основной задачи. Покажем, что, *имея* N *монет*

$$2<N\leqslant\frac{3^n-3}{2},$$

из которых одна фальшивая (более легкая или более тяжелая, неизвестно), всегда можно выделить n *взвешиваниями фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее других* *). Поместим на одну и на другую чашку весов по x монет; тогда еще $N-2x$ монет останутся невзвешенными. При этом x выберем так, что

$$2x\leqslant 3^{n-1},\qquad N-2x\leqslant\frac{3^{n-1}-1}{2};$$

при

$$N\leqslant\frac{3^n-3}{2}$$

это является возможным. Если весы окажутся в равновесии, то сомнительными останутся лишь

$$N-2x\leqslant\frac{3^{n-1}-1}{2}$$

невзвешенных монет; сверх того, у нас будет $2x$ заведомо настоящих монет, и, в силу результатов пункта Б, мы можем

*) Очевидно, что если число монет равно 2, то фальшивую монету вовсе невозможно определить.

при помощи еще $n-1$ взвешиваний выделить фальшивую монету. Если же одна из чашек перевесит, то к двум группам монет на двух чашках применимы результаты задачи А; так как общее число монет на этих чашках равно $2x < 3^{n-1}$, то и в этом случае для выделения фальшивой монеты достаточно произвести еще $n-1$ взвешиваний.

Докажем теперь, что *если*

$$N > \frac{3^n - 3}{2},$$

то n взвешиваний может не хватить. Пусть при первом взвешивании на каждую чашку помещено по x монет и ω монет остались невзвешенными. Если весы окажутся в равновесии, то, в силу результата Б, для определения фальшивой монеты и выяснения того, легче она или тяжелее настоящих, достаточно произвести еще $n-1$ взвешиваний лишь в том случае, если ω не превосходит $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$. Но тогда

$$2x > \frac{3^n - 3}{2} - \frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{2\cdot 3^{n-1} - 2}{2} = 3^{n-1} - 1.$$

Так как $2x$ четно, то, следовательно, $2x > 3^{n-1}$ и в силу результатов А нельзя будет n взвешиваниями выделить фальшивую монету, если одна из чашек перевесит.

Таким образом, мы полностью доказали предложение, сформулированное в указании к задаче. Теперь достаточно только заметить, что

$$\frac{3^7 - 3}{2} = 1092 > 1000 > 363 = \frac{3^6 - 3}{2},$$

чтобы получить ответ задачи $k = 7$.

7. а) Достаточно распилить одно третье звено; при этом цепочка распадется на две части, содержащие соответственно 2 и 4 звена, и на одно отдельное (распиленное) звено. В первый день постоялец отдаст это звено; во второй — заберет его обратно и отдаст взамен часть цепочки, состоящую из двух звеньев; в третий — добавит снова распиленное звено; в четвертый — заберет все, что дал раньше, и передаст часть цепочки из четырех звеньев; в пятый — добавит еще раз распиленное звено; в шестой — возьмет обратно это звено и даст взамен часть цепочки из двух звеньев; в седьмой — отдаст последнее звено.

б) Удобно сначала разобрать следующую задачу: при каком наибольшем n достаточно распилить k звеньев n-звенной цепи для того, чтобы любое число звеньев от 1 до n можно было получить, взяв некоторые из образовавшихся частей цепи? Для решения этой задачи рассмотрим, каково наиболее выгодное расположение k распиленных звеньев. Так как после перепиливания k звеньев у нас будет k отдельных (распиленных) звеньев, то любое число звеньев от 1 до k мы сможем набрать уже только из них. Но $k+1$ звеньев мы уже не сможем получить, если у нас не будет части, состоящей из $k+1$ или менее звеньев. Ясно, что наиболее выгодно будет иметь часть точно из $k+1$ звеньев; тогда из этой части и k отдельных звеньев мы сможем набрать любое число от 1 до $2k+1$. Для того чтобы можно было получить также $2k+2 = 2(k+1)$ звеньев, нам надо будет иметь еще часть, содержащую $2(k+1)$ или менее звеньев; наиболее выгодно для нас будет, если эта часть будет содержать ровно $2(k+1)$ звеньев. Теперь мы можем уже составить все числа от 1 до $2k+1+2(k+1) = 4k+3$; следующая по величине часть, которая нам необходима, — это часть, содержащая $4(k+1)$ звеньев. Продолжая рассуждать таким же образом, убедимся, что наиболее выгодным будет, если $k+1$ частей, получающихся после того, как мы распилили k звеньев (отдельные k звеньев, получающихся при этом, мы здесь не засчитываем в число частей), будут иметь соответственно следующие числа звеньев:

$$k+1, \quad 2(k+1), \quad 4(k+1), \quad 8(k+1), \quad \ldots, \quad 2^k(k+1).$$

В этом случае любое число звеньев от 1 и до

$$n = k + \{k+1+2(k+1)+4(k+1)+\ldots+2^k(k+1)\} = \\ = k + (2^{k+1}-1)(k+1) = 2^{k+1}(k+1) - 1$$

можно будет составить из частей цепи.

Итак, если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1)-1$, то можно обойтись k разрывами цепи, но нельзя обойтись $k-1$ разрывами.

В частности:

при $2 \leqslant n \leqslant 7 \qquad k=1$;
при $8 \leqslant n \leqslant 23 \qquad k=2$;
при $24 \leqslant n \leqslant 63 \qquad k=3$;
при $64 \leqslant n \leqslant 159 \qquad k=4$;
при $160 \leqslant n \leqslant 383 \qquad k=5$;
при $384 \leqslant n \leqslant 895 \qquad k=6$;
при $896 \leqslant n \leqslant 2047 \qquad k=7$.

Итак, мы видим, что при $n=2000$ наименьшее число распиленных звеньев равно 7. Условия задачи будут выполнены, если выбрать эти звенья так, чтобы получающиеся 8 частей цепи (7 отдельных звеньев мы здесь не считаем) имели соответственно 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и 977 звеньев.

8. Пусть A — первый из двух выбранных учеников, а B — второй. Если A и B стоят в одном поперечном ряду, то B выше A, ибо A — самый низкий ученик в своем поперечном ряду; если A и B стоят в одном продольном ряду, то B также выше A, ибо B самый высокий ученик в своем продольном ряду; наконец, если A и B стоят в разных поперечных и продольных рядах и C стоит в том же поперечном ряду, что и A, и в том же продольном ряду, что и B, то B выше A, так как B выше C, а A ниже C.

9. Из условия задачи прежде всего следует, что все гири одновременно имеют или четный, или нечетный вес. Действительно, из того, что каждые 12 гирь можно разбить на две группы равного веса, следует, что общий вес каждых 12 гирь четен. При этом общий вес 12 гирь останется четным и в том случае, если произвольную из них заменить отложенной 13-й гирей. А это возможно только в том случае, если вес каждой из 12 гирь четен или нечетен одновременно с весом отложенной 13-й гири, что и приводит к нашему заключению.

Вычтем теперь из весов всех гирь вес самой легкой гири (или самых легких, если их несколько). При этом мы, очевидно, получим новую систему гирь, которая тоже удовлетворяет условиям задачи; следовательно, веса всех новых гирь тоже имеют одинаковую четность. А так как среди новых гирь имеются «гири» нулевого веса, то вес всех новых гирь должен быть четным. Разделим теперь веса всех гирь на два.

При этом мы получим новую систему гирь, тоже удовлетворяющую условиям задачи.

Предположим теперь, что не все исходные гири имеют одинаковый вес. В таком случае не все гири второй системы, веса которых получаются из весов первоначальных гирь вычитанием веса наилегчайших гирь, будут «нулевыми». В этом случае путем последовательного деления весов всех гирь на два мы в конце концов придем к системе гирь, часть из которых имеет четный вес (например, вес «нуль»), а часть — нечетный вес. Но мы уже показали, что такая система гирь не может существовать. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

Примечание. В условии задачи требовалось, чтобы веса всех гирь были *целыми* числами. Однако нетрудно видеть, что если считать веса гирь числами *рациональными*, а не целыми, результат задачи не изменится. Действительно, в этом случае, умножив веса всех гирь на некоторый множитель (приведя все веса к общему знаменателю и отбросив знаменатель), можно свести задачу к случаю целых весов. Более того, если позволить весам гирь быть произвольными *иррациональными* числами, мы все равно сможем утверждать, что все они равны между собой: это следует из того, что можно найти рациональные числа, сколь угодно близкие к данным иррациональным числам (рекомендуем читателю попытаться самостоятельно провести полное доказательство; следует, впрочем, предупредить, что сделать это аккуратно не так уж просто).

10. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, четыре первых числа и поставим на месте четного числа букву *ч*, а на месте нечетного числа — букву *н*. Получится полоса:

нчнч
ннчн
нччч
ннн ч
нчнч
....
....

Мы видим, что пятая строка нашей полосы совпала с первой. С другой стороны, четность или нечетность первых четырех чисел каждой строки нашего числового треугольника зависит только от четности или нечетности первых четырех чисел предыдущей строки; следовательно, в нашей полосе строки будут периодически повторяться через каждые четыре строки. Так как в каждой из четырех первых строк полосы имеется четное число, то отсюда вытекает, что оно будет и во всех последующих строках.

11. Изменим порядок расположения полей по кругу, а именно, расположим их в порядке, при котором можно было бы переходить с одного поля на соседнее. Иными словами, после поля *1* поместим *6* (ибо по условию задачи с поля *1* можно перейти на *6*), после *6* поместим поле *11* (с поля *6* можно перейти на *11*), затем *4* (ибо с поля *11* можно перейти на *4*) и т. д. При этом мы получим порядок полей, изображенный на следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{К} & & & & & & & & & & \text{Ж} \\
1 & \longleftrightarrow & 6 & \longleftrightarrow & 11 & \longleftrightarrow & 4 & \longleftrightarrow & 9 & \longleftrightarrow & 2 \\
\updownarrow & & & & & & & & & & \updownarrow \\
8 & \longleftrightarrow & 3 & \longleftrightarrow & 10 & \longleftrightarrow & 5 & \longleftrightarrow & 12 & \longleftrightarrow & 7
\end{array}$$

Мы можем считать, что имеем 12 полей, расположенных именно таким образом (ведь фактически занимаемое полем место значения не имеет) и занумерованных так, как это указано на нашей схеме. При этом фишки первоначально стояли так, как это обозначено на схеме буквами сверху и снизу полей (буква К обозначает красную фишку, буква Ж — желтую, буква З — зеленую и буква С — синюю). Правило движения фишек при этом новом расположении полей оказывается чрезвычайно простым — каждая фишка может сдвинуться на одно поле влево или вправо, если только это соседнее поле не занято.

Теперь совершенно ясно, что единственный способ, каким фишки могут поменяться местами, — это двигаться по кругу в одном или другом направлении: ведь ни одна фишка не может «перегнать» другую, ибо другая преграждает ей путь. Таким образом, если фишка К займет поле *4*, то фишка С должна будет занять поле *2*, фишка Ж — поле *3* и фишка З — поле *1*. Если фишка К займет поле *2*, то фишка С должна будет занять поле *3*, фишка Ж — поле *1*, фишка З — поле *4*.

Если фишка К займет поле *3*, то фишка С должна будет занять поле *1*, фишка Ж — поле *4* и фишка З — поле *2*.

Никакие другие новые расположения фишек невозможны.

12. Первое решение. Пусть n — число орехов, которое досталось утром каждому из приятелей; в таком случае $5n + 1$ есть число орехов, которое было утром в мешке. Последний из проснувшихся ночью, очевидно, взял себе $\frac{5n+1}{4}$, а до этого в мешке было $5\frac{5n+1}{4} + 1 = \frac{25n+9}{4}$ орехов. Предпоследний проснувшийся взял себе $\frac{1}{4} \cdot \frac{25n+9}{4}$, а до этого в мешке было $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{25n+9}{4} + 1 = \frac{125n+61}{16}$ орехов; третий взял себе $\frac{1}{4} \cdot \frac{125n+61}{16}$, а до этого в мешке было $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{125n+61}{16} + 1 = \frac{625n+369}{64}$ орехов; второй взял себе $\frac{1}{4} \cdot \frac{625n+369}{64}$, а до этого в мешке было $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{625n+369}{64} + 1 = \frac{3125n+2101}{256}$ орехов; наконец, первый взял себе $\frac{1}{4} \cdot \frac{3125n+2101}{256}$, а первоначально в мешке было

$$N = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3125n+2101}{256} + 1 = \frac{15625n+11529}{1024} = 15n + 11 + \frac{265n+265}{1024}$$

орехов. Так как это число должно быть целым, то $265(n+1)$ должно делиться на 1024. Наименьшее значение n, удовлетворяющее этому условию, равно, очевидно, 1023 и в этом случае

$$N = 15 \cdot 1023 + 11 + 265 = 15621.$$

Второе решение. Эту задачу можно решить значительно быстрее и почти без всяких подсчетов, если внимательно рассмотреть те условия, которые накладывает ее содержание на общее число N орехов. Первое условие задачи заключается в том, что при первом разделе на пять частей в остатке остается один орех. Это условие означает, что N при делении на 5 должно дать в остатке 1, т. е. $N = 5l + 1$; числа, удовлетворяющие этому условию, встречаются в натуральном ряду чисел с интервалом в пять чисел, и, зная одно такое число, мы можем найти неограниченно много других, прибавляя к нему (или вычитая из него) числа, кратные 5. Второе условие задачи утверждает, что $k = \frac{4}{5}(N - 1) = 4l$ дает при делении на 5 остаток 1, т. е. $k = 5l_1 + 1$. Это требование равносильно тому, что l дает при делении на 5 остаток 4 или что $N = 5l+1$ дает при делении на 25 остаток 21; числа, удовлетворяющие этому условию, встречаются в числовом ряду с интервалом в 25 чисел, и, зная одно такое число, мы можем получить сколько угодно других, прибавляя к нему (или вычитая из него) числа, кратные 25. Точно так же третье условие задачи утверждает, что $k_1 = \frac{4}{5}(k - 1) = 4l_1$ дает при делении на 5 остаток 1; это условие определяет остаток от деления числа l_1 на 5 или остатки от деления чисел k и l на 25, или остаток от деления N на 125. Все условия задачи определяют остаток от деления числа N на $5^6 = 15\,625$; числа, удовлетворяющие этим условиям, встречаются в натуральном ряду чисел с интервалом в 15 625.

Мы могли бы подсчитать остаток, который дает при делении на 5^6 число N, но в этом нет нужды. Дело в том, что одно число, удовлетворяющее всем условиям задачи, является очевидным. Этим числом является -4. Действительно, при делении на 5 число -4 дает в частном -1 и в остатке $+1$; поэтому, если вычесть из -4 число 1 и взять $\frac{4}{5}$ от полученной разности, уже делящейся на 5, то мы получим то же число -4. Поэтому при всех последующих делениях на 5 мы будем иметь тот же остаток $+1$. Правда, число -4 не может служить ответом нашей задачи, так как, по условию, число N должно бить положительным; но, зная одно число, удовлетворяющее условиям задачи, мы можем получить сколько угодно других, прибавляя к нашему числу кратные 5^6. Наименьшее положительное число, удовлетворяющее условиям, есть, очевидно, $-4 + 5^6 = 15\,625 - 4 = 15\,621$.

13. Обозначим число овец в стаде через n; в таком случае братья взяли за каждую овцу n рублей и, следовательно, всего выручили $N = n \cdot n = n^2$ рублей. Пусть d есть число целых десятков числа n, а e — число единиц; тогда $n = 10d + e$ и

$$N = (10d + e)^2 = 100d^2 + 20de + e^2.$$

Из условий дележа следует, что старшему брату досталось одной десяткой больше, чем младшему, т. е. что общая сумма N содержит нечетное число десятков (и какой-то остаток). Но $100d^2 + 20de = 20d\,(5d + e)$ делится на 20 (содержит четное число десятков); следовательно, число e^2 должно содержать нечетное число десятков. Так как e меньше 10 (e есть остаток от деления числа n на 10), то e^2 может иметь только одно из следующих значений:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Но из этих чисел только 16 и 36 содержат нечетное число десятков; следовательно, e^2 равно 16 или 36. Оба этих числа оканчиваются на 6; значит, тот остаток, который получил младший брат взамен нехвативших ему 10 рублей, равен 6 рублям, и старший получил на 4 рубля больше младшего. Поэтому, для того чтобы раздел был справедливым, старший должен еще доплатить младшему 2 рубля. Следовательно, перочинный нож был оценен в 2 рубля.

14. а) Наш календарь устроен следующим образом. Каждый год имеет 365 дней. Исключением являются годы, номера которых делятся на 4: эти годы (високосные годы) имеют лишний 366-й день (29 февраля). Однако и это правило имеет исключения: годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, имеют не 366 дней, а 365, т. е. не являются високосными; так, 1900 и 1800 гг. не были високосными, не будет високосным и 2100 г., в то время как 2000 г. будет високосным (2000 делится на 400). Задача заключается в том, чтобы выяснить, каким днем чаще бывает по нашему календарю 1 января: субботой или воскресеньем.

Промежутки, через которые следуют друг за другом числа 1 января, не всегда постоянны, но эти промежутки изменяются периодически, с периодом в 400 лет. При этом 400 лет содержат целое число недель: действительно, невисокосный год содержит 52 недели и еще 1 день, а високосный —

52 недели и 2 дня; в течение четырех лет (из которых один високосный) набегает, таким образом, сверх $4 \cdot 52$ недель еще 5 дней; в течение 400 лет должно было бы набежать еще 500 дней, но так как три года, делящиеся на 100, но не делящиеся на 400, не являются високосными, то за 400 лет сверх $400 \cdot 52$ недель набегает всего $500 - 3 = 497$ дней, т. е. ровно 71 неделя. Поэтому нам достаточно выяснить, каким днем чаще бывает 1 января за какие-либо 400 лет; этим днем будет чаще 1 января и за любые другие 400 лет.

Рассмотрим теперь промежуток в 400 лет с 1901 г. по 2301 г. Отметим, что если в течение 28 лет каждый четвертый год является високосным (т. е. эти 28 лет не содержат года, номер которого делится на 100, но не делится на 400), то эти 28 лет содержат целое число недель: в течение каждых четырех лет набегает сверх целого числа недель еще 5 дней, а за 28 лет набегает $5 \cdot 7 = 35$ дней, т. е. 5 недель. Теперь отметим, что 1 января 1952 г. было вторником. Так как каждый невисокосный год содержит целое число недель и один день, а високосный — целое число недель и 2 дня, то 1 января 1953 г. — четверг (1952 г. високосный), 1 января 1954 г. — пятница, 1 января 1955 г. — суббота и т. д.; точно так же 1 января 1951 г. было понедельником, 1 января 1950 г. было воскресеньем и т. д. Таким образом, подсчитываем, что за 28 лет с 1929 г. по 1956 г. 1 января является каждым из семи дней недели ровно по 4 раза. Точно такое же распределение дней, с которых начинается новый год, было и в течение 28 лет с 1901 г. по 1928 г. (напоминаем, что 28 лет, среди которых каждый четвертый является високосным, содержит целое число недель, и, следовательно, через каждые 28 лет будет повторяться точно такое же распределение первых дней года, как и в предыдущие 28 лет); такое же распределение первых дней года будет и в периоды 1957–1984 гг., 1985–2012 гг. (2000 г., как делящийся на 400, будет високосным), 2013–2040 гг., 2041–2068 гг. и 2069–2096 гг. Итак, в промежутке 1901–2096 гг. 1 января будет одинаковое число раз каждым днем недели.

Далее, 1 января 2097 г. будет тем же самым днем, что 1 января 1901 г. или 1 января 1929 г., т. е. вторником, 1 января 2098 г. будет средой, 1 января 2099 г. — четвергом, 1 января 2100 г. — пятницей, 1 января 2101 г. — субботой (2100 г. не будет високосным). Последующие 28 лет будут отличаться от промежутка 1901–1928 гг. тем, что они начались не со вторника, а с субботы; это вызовет соответствующую перестановку дней, которыми будут являться 1 января; однако, так как в течение 28 лет с 1901 г. по 1928 г. 1 января было ровно по 4 раза каждым днем недели, то и в промежутке с 2101 г. по 2128 г. 1 января будет каждым днем недели по 4 раза. Это соображение относится и к промежуткам 2129–2156 гг. и 2157–2184 гг.; 2185 г. начнется с того же самого дня, что и 2101 г., т. е. с субботы. Это позволяет определить, с каких дней будут начинаться годы с 2185 г. по 2201 г. Простой подсчет показывает, что в промежутке между 2185 г. и 2200 г. 1 января будет по 2 раза понедельником, средой, четвергом, пятницей и субботой и по 3 раза — воскресеньем и вторником. 1 января 2201 г. будет четвергом. В течение $3 \cdot 28 = 84$ лет с 2201 г. по 2284 г. 1 января будет каждым днем недели одинаковое число раз. 1 января 2285 г. будет тем же днем, что и 1 января 2201 г., т. е. четвергом. Это позволяет определить распределение дней, с которых начинается год в интервале с 2285 по 2300 г.; оказывается, в течение этого интервала 1 января будет по 2 раза понедельником, вторником, средой, четвергом и субботой и по 3 раза — воскресеньем и пятницей. Таким образом, сверх тех периодов, в течение которых 1 января бывает одинаковое число раз каждым днем недели, мы получили еще $2 + 2 = 4$ понедельника, $1 + 3 + 2 = 6$ вторников, $1 + 2 + 2 = 5$ сред, $1 + 2 + 2 = 5$ четвергов, $1 + 2 + 3 = 6$ пятниц, $2 + 2 = 4$ субботы и $3 + 3 = 6$ воскресений. Отсюда следует, что 1 января чаще бывает воскресеньем, чем субботой.

б) Аналогично решению задачи 14, а) можно показать, что в интервале 400 лет 30-е число бывает воскресеньем 687 раз, понедельником 685 раз, вторником 685 раз, средой 687 раз, четвергом 684 раза, пятницей 688 раз, субботой 684 раза. Итак, чаще всего 30-е число приходится на пятницу.

15. Легко видеть, что при зачеркивании последней цифры целое число уменьшается не меньше чем в 10 раз. Ровно в 10 раз уменьшаются при зачеркивании последней цифры числа, оканчивающиеся нулем; следовательно, все эти числа удовлетворяют условию задачи.

Допустим теперь, что целое число x при зачеркивании последней цифры уменьшается в целое число раз, большее чем 10, а именно в $10+a$ раз ($a \geqslant 1$); пусть y — число целых десятков числа x (не цифра, а число!); z — цифра единиц: $x = 10y + z$. После отбрасывания последней цифры число x переходит в число y; поэтому наши условия дают

$$x = (10 + a) \cdot y$$

или

$$10y + z = (10 + a) \cdot y,$$

откуда

$$z = ay.$$

Так как $z < 10$, то и $y < 10$, $a < 10$; следовательно, числа, обладающие нужным свойством, двузначны и при отбрасывании последней цифры могут уменьшиться не более чем в 19 раз. Теперь легко видеть, что при зачеркивании последней цифры в 11 раз уменьшаются только числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99; в самом деле, если $10 + a = 11$, то $a = 1$; следовательно, $z = ay = y$, $x = 10y + z = 11y$, где $y = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Аналогично найдем, что в 12 раз уменьшаются лишь числа 12, 24, 36, 48; в 13 раз — 13, 26, 39; в 14 раз — 14, 28; в 15, 16, 17, 18 и 19 раз — только соответственно числа 15, 16, 17, 18 и 19.

16. а) Пусть искомое число имеет $k+1$ цифр; в таком случае оно имеет вид $6 \cdot 10^k + y$, где y есть k-значное число (которое может начинаться с одного или нескольких нулей). По условию задачи имеем

$$6 \cdot 10^k + y = 25 \cdot y,$$

откуда

$$y = \frac{6 \cdot 10^k}{24}.$$

Отсюда вытекает, что k не может быть меньше 2 (иначе $6 \cdot 10^k$ не делилось бы на 24). При $k \geqslant 2$ число y оказывается равным $25 \cdot 10^{k-2}$, т. е имеет вид $25\underbrace{0\ldots0}_{(k-2)\text{ нулей}}$. Поэтому все искомые числа имеют вид $625\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

б) Решая задачу: найти число, начинающееся с данной цифры a и уменьшающееся при зачеркивании этой цифры в 35 раз, аналогично задаче а), мы придем к следующему равенству:

$$y = \frac{a \cdot 10^k}{34},$$

где y — целое число (см. решение задачи а)). Но это равенство, очевидно, не может иметь место ни при каких целых $a \leqslant 9$ и k.

Примечание. Совершенно аналогично решениям задач 16, а) и б) можно показать, что число, начинающееся с известной цифры а), может уменьшаться при зачеркивании этой цифры в целое число b раз только в том случае, если $b-1$ есть большее a число, такое что все простые делители $b-1$, отличные от 2 и 5, входят (и при том в не меньшей степени) так же и в состав числа a $\left(\text{т. е. что } \dfrac{a}{b-1} \text{ есть правильная дробь, которую можно превратить в конечную десятичную дробь}\right)$. Так, например, никакое число не может при зачеркивании первой цифры уменьшаться в 85 раз ($85-1=84$ делится на $3 \cdot 7$, а никакая цифра не может одновременно делиться на 3 и на 7), а число уменьшающееся при зачеркивании первой цифры в 15 раз, должно начинаться с цифры 7 ($15-1=14$ делится на 7). Общий вид чисел, которые при зачеркивании известной первой цифры a уменьшаются в данное число b раз, легко найти.

17. а) Покажем прежде всего, что никакое число N не может уменьшиться в 9 раз при зачеркивании цифры, стоящей дальше чем на втором месте. Действительно, обозначая цифры числа N через $a_0, a_1, \ldots, a_n$, т. е. полагая

$$a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n = N,$$

мы заключим, что число $\dfrac{N}{9}$ имеет n цифр, первые две из которых a_0 и a_1, т. е.

$$a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots = \frac{N}{9}.$$

Умножая последнее равенство на 10 и вычитая первое, получим

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1},$$

что невозможно, так как

$$\frac{N}{10} = a_0 \cdot 10^{n-1} + \ldots \geqslant 10^{n-1}.$$

С другой стороны, из признака делимости на 9 вытекает, что если число N делится на 9 одновременно с числом, получаемым из N вычеркиванием одной цифры, то эта цифра есть 0 или 9. Таким образом, в нашем случае возможно только, что первая или вторая цифра числа N равна 0 или 9 и вычеркивание этой цифры равносильно делению N на 9. Но первая цифра N не может равняться 0, а если бы она была равна 9, то число $\dfrac{N}{9}$ имело бы столько же цифр, сколько N, и не могло получаться из N вычеркиванием одной цифры. Далее, если вторая цифра N равна 9 и число, получаемое из N зачеркиванием этой цифры, равно $\dfrac{N}{9}$, то мы будем иметь

$$N = a_0 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$\tfrac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

откуда опять, умножая второе равенство на 10 и вычитая из него первое, получим

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1}$$

(ибо $a_2 \leqslant 9$). Таким образом, мы убеждаемся, что *для того чтобы уменьшить число N в 9 раз, в нем надо зачеркнуть цифру 0, стоящую на втором месте.*

Теперь мы имеем

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Отсюда следует

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^n + a_0 \cdot 10^{n-1} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9$$

и, наконец,

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{N}{9} = \frac{N}{9} - a_0 \cdot 10^{n-1};$$

последнее означает, что, для того чтобы разделить число $\dfrac{N}{9}$ на 9, в нем достаточно зачеркнуть первую цифру.

б) Имеем (см. решение задачи а))

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9,$$

откуда сразу следует

$$N = \frac{a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 81}{8}.$$

Теперь, считая a_0 равным соответственно 1, 2, 3 и т. д., получим, что N может быть равно одному из чисел 10 125, 2 025, 30 375, 405, 50 625, 6 075, 70 875 или отличается от одного из этих чисел каким-то количеством нулей в конце (a_0 не может быть равно 8 или 9, так как в этом случае вторая цифра N уже не будет нулем).

18. а) Аналогично решению задачи 17, а) в предположении, что целое число N уменьшается в m раз при зачеркивании третьей цифры, имеем

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$10 \cdot \frac{N}{m} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n \cdot 10.$$

При $m < 10$ получаем $\dfrac{10-m}{m}N < 10^{n-1}$, что невозможно, так как $\dfrac{10-m}{m} > \dfrac{1}{10}$, а $\dfrac{1}{10}N = a_0 \cdot 10^{n-1} + \ldots \geqslant 10^{n-1}$. При $m > 11$ получаем $\dfrac{m-10}{m} \cdot N < 10^{n-1}$, что невозможно по аналогичной причине $\left(\text{ибо } \dfrac{m-10}{m} > \dfrac{1}{10}\right)$. Наконец, если $m = 11$, то должно быть $\dfrac{1}{11}N < 10^{n-1}$, т. е. $\dfrac{N}{m} = \dfrac{N}{11}$ имеет на две цифры меньше, чем N, что тоже невозможно.

Таким образом, единственным возможным случаем является $m = 10$; следовательно, условию задачи удовлетворяют числа, все цифры которых кроме первых двух — нули, и только эти числа.

Примечание. Совершенно аналогично можно показать, что единственные целые числа, уменьшающиеся в целое число раз при вычеркивании k-й цифры, где $k > 3$, есть числа, все цифры которых кроме первых $k-1$ — нули.

б) Аналогично решению задачи 17, принимая, что целое число N уменьшается при вычеркивании второй цифры в m раз, имеем

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$\frac{N}{m} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Отсюда следует

$$\frac{N}{m} = N - a_0 \cdot 10^n - a_1 \cdot 10^{n-1} + a_0 \cdot 10^{n-1},$$

или, после несложных преобразований,

$$N = \frac{(9a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1} \cdot m}{m-1}. \qquad (*)$$

Последнее выражение можно еще представить в следующем виде:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} - a_0 \cdot 10^{n-1} + \frac{(9a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1}}{m-1}.$$

Но, с другой стороны, мы знаем, что N есть $(n+1)$-значное число, начинающееся с цифр a_0 и a_1:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

где можно считать, что не все цифры $a_2, \ldots, a_n$ равны нулю (противоположный случай сводится к рассмотрению двузначных чисел N; см. решение задачи 15). Таким образом, должно иметь место неравенство

$$0 < -a_0 \cdot 10^{n-1} + \frac{(9a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1}}{m-1} < 10^{n-1},$$

или, что равносильно,

$$a_0 < \frac{9a_0 + a_1}{m-1} < a_0 + 1. \qquad (**)$$

Таким образом, окончательно имеем следующие результаты. Искомые числа N выражаются формулой $(*)$, где $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$; так как N целое, а m и $m-1$ взаимно просты, то отсюда следует, что простую дробь $\dfrac{9a_0 + a_1}{m-1}$

можно обратить в десятичную. При этом возможные значения a_0, a_1 и m должны удовлетворять неравенству (**) (кроме того, отдельно следует присоединить к возможным значениям N двузначные числа, полученные в решении задачи 15). Теперь остается только последовательно рассмотреть все возможные значения a_0.

1°. $a_0 = 1$. В этом случае неравенство (**) дает

$$1 < \frac{18}{m-1}, \quad m-1 < 18; \qquad \frac{9}{m-1} < 2, \quad m-1 > 4;$$

придавая $m-1$ последовательно значения 5, 6, 7, ..., 17 и выбирая каждый раз подходящие значения a_1, мы получаем следующие значения N:

$$N = 108;\ 105;\ 10\,125,\ 1\,125,\ 12\,375,\ 135,\ 14\,625,\ 1\,575,\ 16\,875;$$
$$121,\ 132,\ 143,\ 154,\ 165,\ 176,\ 187,\ 198;$$
$$1\,625,\ 195;\ 192,\ 180\,625,\ 19\,125,$$

к каждому из которых еще можно приписать в конце произвольное число нулей.

Аналогично, далее, получаем следующее.

2°. $a_0 = 2$:

$$N = 2\,025,\ 21\,375,\ 225,\ 23\,625,\ 2\,475,\ 25\,875;$$
$$231,\ 242,\ 253,\ 264,\ 275,\ 286,\ 297;\ 2\,925.$$

3°. $a_0 = 3$:

$$N = 30\,725,\ 315,\ 32\,625,\ 3\,375,\ 34\,875;$$
$$341,\ 352,\ 363,\ 374,\ 385,\ 396.$$

4°. $a_0 = 4$:

$$N = 405,\ 41\,625,\ 4\,275,\ 43\,875;\ 451,\ 462,\ 473,\ 484,\ 495.$$

5°. $a_0 = 5$:

$$N = 50\,625,\ 5\,175,\ 52\,875;\ 561,\ 572,\ 583,\ 594.$$

6°. $a_0 = 6$:

$$N = 6\,075;\ 61\,875;\ 671,\ 682,\ 693.$$

7°. $a_0 = 7$:

$$N = 781,\ 792.$$

8°. $a_0 = 8$:

$$N = 891.$$

Значению $a_0 = 9$ не отвечает ни одно значение N.

Всего, включая результаты задачи 15, мы получаем для числа N 104 значения, к каждому из которых еще можно приписать в конце произвольное количество нулей.

19. а) Первое решение. Обозначим (m-значное) число, которое получается, если отбросить у искомого числа первую цифру 1, через X. В таком случае мы по условию задачи имеем

$$(1 \cdot 10^m + X) \cdot 3 = 10X + 1,$$

откуда

$$X = \frac{3 \cdot 10^m - 1}{7}.$$

Из последнего равенства уже нетрудно определить число X. Для этого надо число $3 \cdot 10^m = 30\,000\ldots$ делить на 7, пока в остатке не получится 1. В результате имеем

$$\begin{array}{l|l}
300\ldots0 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 42\,857 \\
20 & \\
\underline{14} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
1 &
\end{array}$$

Таким образом, наименьшее возможное значение числа X равно 42 857, а наименьшее значение искомого числа есть 142 857.

В процессе деления можно было бы не останавливаться на первой единице, а продолжать деление до следующей и т. д.; при этом мы получили бы числа

$$142\,857\,142\,857, \quad \ldots, \quad \underbrace{\underbrace{142\,857}\underbrace{142\,857}\ldots\underbrace{142\,857}}_{k \text{ раз}}, \quad \ldots,$$

тоже удовлетворяющие условию задачи.

Второе решение. Обозначим вторую цифру искомого числа через x, третью — через y и т. д., т. е. предположим, что искомое число имеет вид $\overline{1xy\ldots zt}$ (черта наверху означает, что здесь мы имеем не произведение $1\cdot x\cdot y\ldots z\cdot t$, а число, составленное из цифр 1, x, y, …, z, t). В таком случае по условию задачи имеем

$$\overline{1xy\ldots zt}\cdot 3=\overline{xy\ldots zt1}.$$

Отсюда следует, что $t=7$ (ни в каком ином случае произведение слева не оканчивалось бы на 1). Следовательно, цифра десятков числа, которое стоит справа, равна 7. Но это возможно только, если произведение $z\cdot 3$ оканчивается на $7-2=5$ (два десятка справа получаются за счет произведения последней цифры искомого числа 7 на 3), т. е. $z=5$. Теперь мы знаем уже цифру сотен числа справа: 5; поэтому цифра сотен искомого числа должна давать при умножении на 3 число, оканчивающееся на $5-1=4$ (1 есть цифра десятков произведения $5\cdot 3$). Вычисления закончатся тогда, когда мы придем к первой цифре 1. Их удобно расположить следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & & 4\,2\,8\,5\,7\\
. & . & . & . & . & . & \times 3 = & .\;.\;.\;.\;.\;1\\
\multicolumn{6}{l}{4-1=3,\ 2-0=2,\ 8-2=6,\ 5-1=4,\ 7-2=5} & &
\end{array}$$

(вычисления проводятся справа налево). Таким образом, наименьшим числом, удовлетворяющим условиям задачи, будет 142 857.

Если в наших вычислениях не останавливаться на первой полученной единице, а продолжать дальше, то мы получим другие числа, удовлетворяющие условию задачи:

$$\ldots,\ \underbrace{\underbrace{142\,857}\,\underbrace{142\,857}\ldots\underbrace{142\,857}}_{k\text{ раз}},\ \ldots$$

б) Так как при увеличении такого числа втрое количество цифр его не увеличилось, то первая цифра числа может быть равна только 1, 2 или 3.

Как мы видели в решении задачи а), она может быть равна 1. Покажем теперь, что она не может быть равна 3.

Действительно, если первая цифра искомого числа равна 3, то вторая цифра, равная первой цифре утроенного данного числа, равна 9. Но результат умножения на 3 числа, начинающегося с цифр 39, имеет больше цифр, чем само исходное число; поэтому он не может получаться из первоначального числа перенесением первой цифры в конец.

Предоставляем читателям самостоятельно доказать, что искомые числа *могут* начинаться с цифры 2. Наименьшее подобное число есть 285 714; все такие числа, начинающиеся с цифры 2, имеют вид

$$\underbrace{\underbrace{285\,714}\,\underbrace{285\,714}\ldots\underbrace{285\,714}}_{k\text{ раз}}$$

(доказательство аналогично решению задачи а)).

20. Так как при увеличении такого числа в 5 раз количество его цифр не изменяется, то искомое число должно начинаться с цифры 1. При перенесении этой цифры в конец мы получим число, оканчивающееся цифрой 1. Но такое число не может делиться на 5.

Так же доказывается, что не существует чисел, увеличивающихся в 6 или 8 раз от перестановки начальной цифры в конец.

21. *Первое решение.* Так как произведение искомого числа на 2 имеет то же самое число цифр, то первая цифра числа не может быть больше 4. Так как при перенесении первой цифры в конец мы должны получить четное число (удвоенное исходное число), то первая цифра должна быть четной. Поэтому она может быть равна только 2 или 4.

Теперь, предполагая, что первая цифра искомого числа равна 2 или 4, и обозначая число, получаемое из искомого отбрасыванием первой цифры, через X, мы получим аналогично первому решению задачи 19, а)

$$(2\cdot 10^m + X)\cdot 2 = 10\cdot X + 2,$$

откуда

$$X = \frac{4\cdot 10^m - 2}{8} = \frac{2\cdot 10^m - 1}{4},$$

или

$$(4\cdot 10^m + X)\cdot 2 = 10\cdot X + 4,$$

откуда

$$X = \frac{8 \cdot 10^m - 4}{8} = \frac{2 \cdot 10^m - 1}{2}.$$

Но обе полученные формулы для числа X невозможны (целое число не может быть равно дроби, числитель которой нечетен, а знаменатель четен).

В т о р о е р е ш е н и е. Как и в первом решении, убеждаемся, что первая цифра числа может быть равна только 2 или 4. Далее получаем в принятых ранее обозначениях (см. второе решение задачи 19, а))

$$\overline{2xy\ldots zt} \cdot 2 = \overline{xy\ldots zt2} \quad \text{или} \quad \overline{4xy\ldots zt} \cdot 2 = \overline{xy\ldots zt4}.$$

В первом случае t может быть равно только 1 или 6 (в противном случае произведение слева не может оканчиваться цифрой 2). Но если $t = 1$, то мы получаем слева число, не делящееся на 4, а справа — число, делящееся на 4 (оканчивающееся на 12). Если $t = 6$, то, наоборот, слева будет стоять число, делящееся на 4, а справа — не делящееся на 4 (оканчивающееся на 62).

Во втором случае t может быть равно 2 или 7. Но если $t = 2$, то аналогично второму решению задачи 19, а) находим, что $z = 1$ или 6; при $z = 1$ произведение слева делится на 8 (произведение на 2 числа, оканчивающегося на 12), а число справа — не делится на 8 (оканчивается на 124); при $z = 6$ число справа делится на 8, а произведение слева — только на 4. Аналогично показывается, что t не может равняться 7.

22. а) П е р в о е р е ш е н и е. Число увеличивающееся при перенесении первой цифры в конец в 7 раз, должно начинаться с цифры 1 (иначе число, большее первоначального в 7 раз, будет иметь больше цифр, чем первоначальное). Обозначая далее m-з н а ч н о е число, полученное из исходного отбрасыванием первой цифры, через X, мы будем иметь (ср. с решением задачи 19, а))

$$(1 \cdot 10^m + X) \cdot 7 = 10 \cdot X + 1,$$

откуда получаем

$$X = \frac{7 \cdot 10^m - 1}{3}.$$

Но очевидно, что подобное число X ни при каком m не будет m-значным $\left(\dfrac{7\cdot 10^m-1}{3} > 10^m\right)$.

Аналогично можно доказать, что не существует чисел, увеличивающихся в 9 раз от перестановки начальной цифры в конец.

Второе решение. Как в первом решении, показываем, что искомое число может начинаться только с цифры 1. Далее, имеем в принятых обозначениях

$$\overline{1xy\ldots zt}\cdot 7=\overline{xy\ldots zt1}.$$

Отсюда следует, что произведение $t\cdot 7$ оканчивается цифрой 1. Следовательно, $t=3$. Подставим это значение t: имеем $\overline{1xy\ldots z3}\cdot 7=\overline{xy\ldots z31}$. Ввиду того что $3\cdot 7=21$, а произведение числа $\overline{z3}$ на 7 оканчивается на 31, произведение $z\cdot 7$ должно оканчиваться на 1. Следовательно, z также равно 3. Таким же образом доказывается, что каждая следующая (если рассматривать с конца) цифра нашего числа равна 3. Но начальная цифра должна быть 1. Этого мы никогда достичь не можем. Поэтому чисел, увеличивающихся в 7 раз от перестановки начальной цифры в конец, не существует.

Аналогично можно доказать, что не существует чисел, увеличивающихся от перестановки начальной цифры в конец в 9 раз.

б) Первое решение. Так как произведение искомого числа на 4 имеет не больше цифр, чем само число, то первая цифра числа должна быть не больше 2. Так как при перенесении первой цифры в конец мы получаем четное число, то первая цифра должна быть равна 2. Далее, обозначая через X m-значное число, которое получается из искомого при отбрасывании первой цифры, имеем

$$(2\cdot 10^m+X)\cdot 4=10X+2,$$

откуда

$$X=\frac{8\cdot 10^m-2}{6},$$

что невозможно, так как $\dfrac{8\cdot 10^m-2}{6} > 10^m$ (ср. с первым решением задачи а)).

Второе решение. Как в первом решении, получаем, что первая цифра искомого числа может быть только 2. Далее имеем

$$\overline{2xy\ldots zt}\cdot 4=\overline{xy\ldots zt2},$$

откуда следует, что $t=3$ или 8 ($t\cdot 4$ оканчивается на 2).

Если бы t равнялось 8, то число справа оканчивалось бы на 82 и не могло делиться на 4. Если же $t=3$, то

$$\overline{2xy\ldots z3}\cdot 4=\overline{xy\ldots z32},$$

откуда

$$\overline{2xy\ldots z0}\cdot 4=\overline{xy\ldots z20},$$
$$\overline{2xy\ldots z}\cdot 4=\overline{xy\ldots z2}.$$

Таким образом, мы видим, что число $\overline{2xy\ldots z}$ обладает тем же свойством, что и $\overline{2xy\ldots zt}$. Поэтому, применив те же рассуждения, получим $z=3$. Продолжая дальше эти вычисления и двигаясь последовательно справа налево, мы получим, что в десятичной записи нашего числа стоят только цифры 3. В то же время оно начинается с 2. Значит, такого числа не существует.

23. *Первое решение.* Обозначим неизвестные пока цифры искомого числа через x, y, …, z, t. В таком случае в обозначениях второго решения задачи 19, а) имеем

$$\overline{7xy\ldots zt}\cdot\frac{1}{3}=\overline{xy\ldots zt7},$$

или

$$\overline{xy\ldots zt7}\cdot 3=\overline{7xy\ldots zt}.$$

Теперь сразу ясно, что $t=1$; после этого мы можем определить цифру z ($17\cdot 3$ оканчивается на 51; значит, $z=5$) и так последовательно с конца находить новые и новые цифры искомого числа. Вычисление следует прекратить тогда, когда мы придем к цифре 7. Его удобно расположить следующим образом:

$$\overset{241379310344827586206896551}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}7\cdot 3=\overset{7241379310344827586206896551}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

вычисления проводятся *справа налево*). Таким образом, наименьшим числом, удовлетворяющим условиям задачи, будет 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

Если в наших вычислениях не останавливаться на первой семерке, а продолжать дальше, то мы получим другие числа, удовлетворяющие условию задачи. Все такие числа будут иметь вид

$$\underbrace{\underbrace{7241379310344827586206896551}\ldots\underbrace{7241379310344827586206896551}}_{k\text{ раз}}.$$

Второе решение. Пусть $\overline{7xyz\ldots t}$ — искомое число. Тогда при делении его на 3 получится число $\overline{xyz\ldots t7}$. Запишем это в виде

$$\begin{array}{l|l} \overline{7xyz\ldots t} & 3 \\ \cline{2-2} & \overline{xyz\ldots t7} \end{array}.$$

Отсюда ясно, что $x = 2$. Если мы запишем в делимом и частном это значение, то можно будет найти вторую цифру частного; воспользовавшись ею, можно будет найти третью цифру делимого; отсюда можно найти третью цифру частного и т. д. Процесс закончится тогда, когда последняя полученная цифра частного будет 7, а выписанное делимое разделится на 3 без остатка.

Легко видеть, что это число является искомым, так как если мы в нем переставим 7 из начала в конец, то получится число, записанное нами в качестве частного, т. е. втрое меньшее.

Так как до этого места мы по написанным уже цифрам с необходимостью получали следующую, то указанное число будет наименьшим, обладающим требуемым свойством. Вычисления можно расположить так: в верхней строке будем выписывать цифры делимого, во второй строке — число, при делении которого на 3 получается очередная цифра частного, а в нижней — эту цифру:

7	2	4	1	3	7	9	3	1	0	3	4	4	8	2	7	5	8	6	2			
7	12	4	11	23	27	9	3	1	10	13	14	24	8	22	17	25	18	6	2			
2	4	1	3	7	9	3	1	0	3	4	4	8	2	7	5	8	6	2	0			
															0	6	8	9	6	5	5	1
															20	26	28	19	16	15	5	21
															6	8	9	6	5	5	1	7

Итак, наименьшее число, обладающее требуемым свойством: 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

Третье решение. Аналогично первому решению задачи 19, а), используя похожие обозначения, будем иметь:

$$(7 \cdot 10^m + X) \cdot \frac{1}{3} = 10X + 7,$$

откуда

$$X = \frac{7 \cdot 10^m - 21}{29}.$$

Таким образом, задача сводится к определению такого числа вида 70000..., которое при делении на 29 дает в остатке 21. Предоставляем читателю самому проверить, что при этом мы приходим к тому же результату, что и в первых двух решениях.

Примечание. Аналогично можно решить следующую задачу: Найти наименьшее число, начинающееся с известной цифры, которое уменьшается в 3 раза от перестановки первой цифры в конец. Для того чтобы можно было искать и решения, начинающиеся с цифр 1 и 2, будем считать, что 0 может стоять в начале числа.

Если в начале числа стоит цифра 0, то легко убедиться, что требуемым свойством обладает лишь число 0. Выпишем остальные числа, обладающие этим свойством:

1 034 482 758 620 689 655 172 413 793
2 068 965 517 241 379 310 344 827 586
3 103 448 275 862 068 965 517 241 379
4 137 931 034 482 758 620 689 655 172
5 172 413 793 103 448 275 862 068 965
6 206 896 551 724 137 931 034 482 758
8 275 862 068 965 517 241 379 310 344
9 310 344 827 586 206 896 551 724 137

Таким же способом можно решить задачу:

найти наименьшее целое число, начинающееся заданной цифрой a и уменьшающееся от перестановки этой цифры в конец в l раз. Найти все такие числа.

24. а) По условию задачи имеем

$$\overline{xy\ldots zt} \cdot a = \overline{tz\ldots yx},$$

где a есть одно из чисел 2, 3, 5, 6, 7 или 8.

Если $a=5$, то x должно равняться 1, так как иначе число $\overline{xy\ldots zt}\cdot 5$ будет иметь больше цифр, чем $\overline{xy\ldots zt}$ (случай $x=0$ исключаем, так как в этом случае $\overline{y\ldots zt}=2\cdot\overline{tz\ldots y}$, т. е. мы приходим к той же задаче с $a=2$). Но число $\overline{tz\ldots y1}$ не может делиться на 5. Аналогично доказываем, что a не может быть равно 6 или 8.

Если $a=7$, то x тоже должно равняться 1. Но в таком случае t должно равняться трем, — иначе $\overline{1y\ldots zt}\cdot 7$ не будет оканчиваться цифрой 1. А равенство $\overline{1y\ldots z3}\cdot 7=\overline{3z\ldots y1}$, очевидно, является абсурдным (левая часть равенства явно больше правой).

Если $a=2$, то x не может быть больше 4. А так как число $\overline{tz\ldots yx}$ в этом случае четно, то x должно быть равно 2 или 4. Но при $x=4$ цифра t (первая цифра числа $\overline{4y\ldots zt}\cdot 2$) может быть равна только 8 или 9, а ни $\overline{4y\ldots z8}\cdot 2$, ни $\overline{4y\ldots z9}\cdot 2$ не могут оканчиваться на 4. Если $x=2$, то t (первая цифра числа $\overline{2y\ldots zt}\cdot 2$) может быть равна только 4 или 5; но ни $\overline{2y\ldots z4}\cdot 2$, ни $\overline{2y\ldots z5}\cdot 2$ не могут оканчиваться на 2.

Наконец, если $a=3$, то x не может быть больше 3. Если $x=1$, то t должно быть равно 7 ($t\cdot 3$ оканчивается на 1); если $x=2$, то t должно быть равно 4; если $x=3$, то t должно быть равно 1. Но в первом случае $\overline{tz\ldots yx}$ больше, чем $\overline{xy\ldots zt}\cdot 3$, а во втором и в третьем — меньше.

б) Пусть $\overline{xy\ldots zt}$ — такое число; тогда

$$\overline{xy\ldots zt}\cdot 4=\overline{tz\ldots yx}.$$

Так как $\overline{xy\ldots zt}\cdot 4$ имеет то же число цифр, что и $\overline{xy\ldots zt}$, то x может быть равен лишь 0, 1 или 2; так как $\overline{tz\ldots yx}$ делится на 4, то x должен быть четным. Следовательно, x может быть равен 0 или 2.

Пусть $x=0$. Очевидно, что число 0 обладает требуемым свойством. Будем допускать десятичные записи, в начале которых может стоять один или несколько нулей. Тогда мы имеем $\overline{y\ldots zt}\cdot 4=\overline{tz\ldots y0}$, откуда $t=0$ (ибо $t<4$) и $\overline{y\ldots z}\cdot 4=\overline{z\ldots y}$: если число обладает требуемым свойством и начинается нулем, то оно оканчивается также нулем, и число, которое получится, если мы зачеркнем первый и последний нули, также будет обладать требуемым свойством.

Поэтому достаточно рассмотреть случай $x=2$. Тогда имеем $\overline{2y\ldots zt}\cdot 4=\overline{tz\ldots y2}$. Ввиду того что $2\cdot 4=8$, t может быть равно лишь 8 или 9. Но произведение $t \cdot 4$ оканчивается на 2; следовательно, $t = 8$, т. е. можно написать $\overline{2y\ldots z8} \cdot 4 = \overline{8z\ldots y2}$. Так как $23 \cdot 4 > 90$, y может быть лишь равно 0, 1 или 2; но при любом z в произведении $\overline{z8} \cdot 4$ цифра десятков нечетная. Следовательно, $y = 1$. Так как нам известны две последние цифры произведения $\overline{2y\ldots z8} \cdot 4$, то для предпоследней цифры z этого числа остаются лишь две возможности: z может быть равно лишь 2 или 7. Но $21 \cdot 4 > 82$, значит, $z = 7$.

Итак, наше число имеет вид $\overline{21\ldots 78}$. Если оно четырехзначно, то мы получаем число 2178, удовлетворяющее условию задачи. Рассмотрим теперь случай, когда число цифр рассматриваемого числа больше 4. В этом случае имеем

$$\overline{21uv\ldots rs78} \cdot 4 = \overline{87sr\ldots vu12},$$

или, после очевидных преобразований,

$$84 \cdot 10^{k+2} + 312 + \overline{uv\ldots rs00} \cdot 4 = 87 \cdot 10^{k+2} + 12 + \overline{sr\ldots vu00},$$
$$\overline{uv\ldots rs} \cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots vu}.$$

Так как число $\overline{uv\ldots rs}$ при умножении на 4 дает число, имеющее больше цифр, чем оно само, и при этом начинающееся с цифры 3 (или, в крайнем случае, с комбинации цифр 29), то u может быть равно только 9, 8 или 7. Так как $\overline{3sr\ldots vu}$ нечетно, то u может быть равно только 9 или 7. Рассмотрим эти случаи последовательно.

1°. $u = 9$. В таком случае, очевидно, получаем

$$\overline{9v\ldots rs} \cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots v9},$$

откуда следует, что $s = 9$ ($s \cdot 4$ оканчивается на 6; если $s = 4$, то $\overline{34r\ldots v9}$ меньше, чем $\overline{9v\ldots r4} \cdot 4 + 3$) и

$$\overline{9v\ldots r9} \cdot 4 + 3 = \overline{39r\ldots v9}, \quad \overline{v\ldots r} \cdot 4 + 3 = \overline{3r\ldots v},$$

т. е. число, получаемое из $\overline{uv\ldots rs}$ отбрасыванием цифры 9 в начале и в конце, обладает тем же свойством, что и само число $\overline{uv\ldots rs}$. В частности, $\overline{uv\ldots rs}$ может равняться 9, 99, 999 и т. д.; при этом мы получаем числа

$$21\,978, \ 219\,978, \ 2\,199\,978, \ \ldots,$$

удовлетворяющие условию задачи.

2°. $u = 7$. В этом случае имеем

$$\overline{7v\ldots rs}\cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots v7},$$

откуда аналогично тому, как мы рассуждали в начале решения задачи, легко получить, что $s = 1$; $v = 8$; $r = 2$, т. е. что число $\overline{uv\ldots rs}$ имеет вид $\overline{78\ldots 21}$ и что число, которое получается из $\overline{uv\ldots rs}$ отбрасыванием 78 в начале и 21 в конце, в 4 раза меньше своего обращенного.

Отсюда видно, что если число, в 4 раза меньшее своего обращенного, отлично от чисел ряда

$$\begin{gathered} 0, 2178,\ 21\,978,\ 219\,978,\ \ldots, \\ 21\underbrace{99\ldots 9}_{k\text{ цифр}}78,\ 21\underbrace{99\ldots 9}_{(k+1)\text{ цифр}}978,\ \ldots, \end{gathered} \tag{$*$}$$

то в начале и в конце его стоит одна и та же последовательность цифр, составляющих одно из чисел этого ряда, и если зачеркнуть эти цифры (и в начале, и в конце), то получится также число, в 4 раза меньшее своего обращенного, или, как в случае числа 21 782 178, при этом будут зачеркнуты все цифры нашего числа.

Поэтому десятичная запись любого числа, в 4 раза меньшего своего обращенного, имеет вид

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1$$

или же

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_nP_{n-1}\ldots P_2P_1,$$

где P_1, P_2, …, P_n — последовательности цифр, составляющие какие-либо числа из написанного выше ряда $(*)$. Таковы, например, числа

$$\begin{gathered} 2\,197\,821\,978,\ \ 2\,199\,782\,178\,219\,978, \\ 21\,978\,021\,997\,800\,219\,978\,021\,978,\ \ 02\,199\,999\,780 \end{gathered}$$

(последнее число следует считать решением задачи, если условиться, что можно в начале десятичной записи числа ставить 0).

Аналогично доказывается, что все числа, в 9 раз меньшие своего обращенного, получаются из чисел ряда

$$0,\ 1089,\ 10989,\ 109989,\ \ldots,\ 10\underbrace{99\ldots 9}_{k\text{ раз}}89,\ 10\underbrace{99\ldots 99}_{(k+1)\text{ раз}}89, \ldots$$

таким же образом, как и числа, в 4 раза меньшие своего обращенного, получаются из чисел ряда $(*)$.

25. а) Обозначим число, составленное первыми тремя цифрами искомого числа N, через p, а число, образуемое тремя последними цифрами числа N, — через q. В таком случае условие задачи дает

$$1000q + p = 6(1000p + q) \quad (= 6N),$$

откуда

$$(1000q + p) - (1000p + q) = 999(q - p) = 5N,$$

т. е. N делится на 999.

Далее, $p + q = (1000p + q) - 999p = N - 999p$, откуда следует, что $p + q$ тоже делится на 999. Но p и q — трехзначные числа, которые, очевидно, не могут оба равняться 999; следовательно,

$$p + q = 999.$$

Теперь без труда находим

$$(1000q + p) + (1000p + q) = 1001(p + q) = 7N$$

и, значит,

$$7N = 999\,999, \quad N = 142\,857.$$

б) Совершенно аналогично решению задачи а), обозначая через p число, образуемое первыми четырьмя цифрами искомого числа N, а через q — число, образуемое последними четырьмя цифрами, находим

$$7N = 10001(p + q) = 99\,999\,999,$$

что невозможно при целом N (ибо $99\,999\,999$ не делится на 7).

26. Пусть x — число, удовлетворяющее этому условию. Так как $6x$, так же как и x, — шестизначное число, то первая цифра десятичной записи числа x равна 1. Поэтому:

1) первые цифры десятичной записи чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ все различны, следовательно, составляют полный набор цифр, участвующих в десятичной записи числа x;

2) все цифры в десятичной записи числа x различны между собой.

Среди этих цифр нет 0, поэтому последняя цифра числа x нечетна (иначе $5x$ оканчивается нулем) и отлична от 5 (иначе $2x$ оканчивается нулем). Вследствие этого последние цифры десятичной записи чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ все различны, а значит, также составляют полный набор цифр, участвующих в десятичной записи числа x. Поэтому среди них есть 1. Оканчиваться на 1 может лишь число $3x$, так как $2x$, $4x$ и $6x$ оканчиваются на четные цифры, $5x$ оканчивается на 5, а в десятичной записи x уже есть 1 (первая цифра). Следовательно, x оканчивается цифрой 7, $2x$ — цифрой 4, $3x$ — цифрой 1, $4x$ — цифрой 8, $5x$ — цифрой 5 и $6x$ — цифрой 2. Так как первые цифры этих чисел — цифры того же набора, расположенные в возрастающем порядке, то можно написать:

$$\begin{gathered}
x \cdot 1 = 1****7, \\
x \cdot 2 = 2****4, \\
x \cdot 3 = 4****1, \\
x \cdot 4 = 5****8, \\
x \cdot 5 = 7****5, \\
x \cdot 6 = 8****2
\end{gathered}$$

(звездочки стоят на месте неизвестных нам пока цифр).

Отметим теперь, что в выписанной таблице не только в каждой строке стоят в каком-то порядке шесть разных цифр 1, 2, 4, 5, 7 и 8, но и в каждом столбце стоят в каком-то порядке те же самые шесть р а з н ы х цифр. Действительно, предположим, например, что в числах $x \cdot 2$ и $x \cdot 5$ на третьем месте стоит одна и та же цифра a (a может иметь одно из двух значений, не занятых первыми и последними цифрами рассматриваемых двух чисел). В таком случае разность $x \cdot 5 - x \cdot 2 = x \cdot 3$ будет представлять собой шестизначное число, в десятичной записи которого на третьем месте стоит цифра 0 или цифра 9 (это следует из правила вычитания многозначных чисел «столбиком»). Но это невозможно, так как мы знаем, что число $x \cdot 3$ записывается цифрами 1, 2, 4, 5, 7 и 8.

Сложим теперь числа

$$\begin{gathered}
x \cdot 1 = 1****7, \\
x \cdot 2 = 2****4,
\end{gathered}$$

$$x \cdot 3 = 4 * * * * 1,$$
$$x \cdot 4 = 5 * * * * 8,$$
$$x \cdot 5 = 7 * * * * 5,$$
$$x \cdot 6 = 8 * * * * 2$$

«столбиком», учитывая, что сумма цифр каждого столбца равна $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$. Мы получим

$$x \cdot 21 = 2\,999\,997,$$

или $x = 142\,857$. Это и есть искомое число; действительно,

$$\begin{aligned} x &= 142857,\\ 2x &= 285714,\\ 3x &= 428571,\\ 4x &= 571428,\\ 5x &= 714285,\\ 6x &= 857142. \end{aligned}$$

27. а) $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, а из трех последовательных целых чисел одно обязательно делится на 3.

б) Если целое число n и $n^5 - n = (n-1)n(n+1)$, а из трех последовательных оканчивается одной из цифр 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то один из первых трех множителей делится на 5. Если n оканчивается одной из цифр 2, 3, 7 или 8, то n^2 оканчивается на 4 или 9 и $n^2 + 1$ делится на 5.

в) $n^7 - n = n(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$. Если n делится на 7 или дает при делении на 7 остаток 1 или 6, то один из первых трех множителей делится на 7. Если n дает при делении на 7 остаток $2 (n = 7k + 2)$, то n^2 дает при делении на 7 остаток $4 (n^2 = 49k^2 + 28k + 4)$ и, следовательно, $n^2 + n + 1$ делится на 7. Точно так же показывается, что если n дает при делении на 7 остаток 4, то $n^2 + n + 1$ делится на 7, а если n дает при делении на 7 остаток 3 или 5, то $n^2 - n + 1$ делится на 7.

г) $n^{11} - n = n(n-1)(n+1)(n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1)$. Если n делится на 11 или дает при делении на 11 остаток 1 или 10, то один из первых трех множителей делится на 11. Если n дает при делении на 11 остаток 2 или $9 (n = 11k \pm 2)$, то n^2 дает при делении на 11 остаток $4 (n^2 = 121k^2 \pm 44k + 4)$, n^4 — остаток $5 = 16 - 11$, n^6 — остаток $9 = 20 - 11$ ($n^6 = n^4 \cdot n^2 = (11k_1 + 5)(11k_2 + 4) = 121k_1k_2 + 11(4k_1 + 5k_2) + 20$) и n^8 — остаток $3 = 25 - 22$; отсюда следует, что $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ делится на 11. Точно так же показывается, что $n^8+n^6+n^4+n^2+1$ делится на 11, если n дает при делении на 11 остаток ± 3, ± 4 или ± 5.

д) $n^{13} - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)(n^4+n^2+1)$. Аналогично решению предыдущих задач замечаем, что если n делится на 13 или дает при делении на 13 остаток ± 1, то один из первых трех множителей делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 5, то n^2+1 делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 2 или ± 6, то n^4-n^2+1 делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 3 или ± 4, то n^4+n^2+1 делится на 13.

28. а) Разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований; поэтому $3^{6n}-2^{6n} = 27^{2n}-8^{2n}$ делится на $27 + 8 = 35$.

б) Нетрудно проверить, что

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2-1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Но из пяти последовательных целых чисел одно, наверное, делится на 5, по крайней мере одно на 3 и по крайней мере два на 2, причем из этих двух последних чисел одно, наверное, делится на 4. Таким образом, произведение пяти последовательных целых чисел, наверное, делится на $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4 = 120$ (ср. с решением задачи 27, а)).

в) Нетрудно проверить, что

$$56\,786\,730 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 61;$$

таким образом, остается доказать, что наше выражение делится на каждый из этих простых делителей. Если m и n оба нечетны, то $m^{60} - n^{60}$ четно; следовательно, $mn(m^{60} - n^{60})$ обязательно четно (делится на 2). Далее, из результата задачи 27 следует, что если k равно 3, 5, 7, 11 или 13 и n не делится на k, то разность $n^{k-1}-1$ обязательно будет делиться на k. Отсюда, в частности, вытекает, что если m и n не делятся на 3, то $m^{60} - 1 = (m^{30})^2 - 1$ и $n^{60} - 1 = (n^{30})^2 - 1$ делятся на 3, т. е. m^{60} и n^{60} дают при делении на 3 один и тот же остаток 1; следовательно, если mn не делится на 3, то $m^{60}-n^{60}$ делится на 3 и, значит, произведение $mn(m^{60}-n^{60})$ делится на 3 во всех случаях. Точно так же доказывается, что разность

$$m^{60}-n^{60}=(m^{15})^4-(n^{15})^4=(m^{10})^6-(n^{10})^6= \\ =(m^6)^{10}-(n^6)^{10}=(m^5)^{12}-(n^5)^{12}$$

делится на 5, если ни m, ни n не делятся на 5; делится на 7, если ни m, ни n не делятся на 7; делится на 11, если ни m, ни n не делятся на 11; делится на 13, если ни m, ни n не делятся на 13. Таким образом, мы доказали, что $mn(m^{60}-n^{60})$ всегда делится на $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

Аналогично показывается, что выражение $mn(m^{60}-n^{60})$ делится на 31 и на 61 (так как $n^{31}-n$ при всяком целом n делится на 31 и $n^{61}-n$ при всяком целом n делится на 61; см. ниже задачу 240).

29. Воспользуемся тождеством

$$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33.$$

Для того чтобы это выражение делилось на 11, необходимо, чтобы $(n+7)(n-4)$ делилось на 11. Но так как $(n+7)-(n-4)=11$, то оба сомножителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Поэтому если $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится и на 121 и, следовательно, $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

30. Представим данное выражение в виде

$$(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n).$$

При $n\neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно не равны между собой. Между тем число 33 нельзя разложить более чем на четыре различных целых множителя (разложение на четыре множителя возможно несколькими способами, например,

$$33=(-11)\cdot 3\cdot 1\cdot(-1) \quad \text{или} \quad 33=11\cdot(-3)\cdot 1\cdot(-1)\,).$$

При $n=0$ наше выражение есть m^5 и не равно 33 ни при каком целом m.

31. Всякое целое число или делится на 5 или может быть представлено в одном из следующих четырех видов $5k+1$,

$5k+2$, $5k-2$ или $5k-1$. Если число делится на 5, то его сотая степень, очевидно, делится на $5^3 = 125$. Далее, по формуле бинома Ньютона получим

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \ldots + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}(5k)^2 \pm 100 \cdot 5k + 1,$$

где все невыписанные члены содержат множитель $5k$ в степени, не меньшей 3, и, следовательно, делятся на 125. Аналогично,

$$(5k \pm 2)^{100} = \\ = (5k)^{100} \pm \ldots + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}(5k)^2 \cdot 2^{98} \pm 100 \cdot 5k \cdot 2^{99} + 2^{100}.$$

Но $\frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}(5k)^2 = 125 \cdot 990k^2$ и $100 \cdot 5k = 125 \cdot 4k$ делятся на 125. Что касается числа 2^{100}, то его можно представить в виде

$$(5-1)^{50} = 5^{50} - \ldots + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 5 - 50 \cdot 5 + 1,$$

откуда видно, что оно дает при делении на 125 остаток 1.

Итак, сотая степень числа, делящегося на 5, делится на 125; сотая степень числа, не делящегося на 5, дает при делении на 125 остаток 1.

32. Нам надо доказать, что если N взаимно просто с 10, то $N^{101} - N = N(N^{100} - 1)$ делится на 1000, т. е. что $N^{100} - 1$ делится на 1000. Прежде всего совершенно ясно, что если N нечетно, то $N^{100} - 1 = (N^{50}+1)(N^{25}+1)(N^{25}-1)$ делится на 8. Далее, из результата предыдущей задачи следует, что если N не делится на 5, то $N^{100}-1$ делится на 125. Таким образом, мы видим, что действительно $N^{100} - 1$ при N, взаимно простом с 10, делится на $8 \cdot 125 = 1000$.

33. Пусть N — искомое число; тогда, в частности, $N^2 - N$ оканчивается тремя нулями, т. е. делится на 1000. Так как $N^2 - N = N(N-1)$, а N и $N-1$ — взаимно простые числа, то это возможно лишь в том случае, когда одно из этих чисел делится на 8, а второе — на 125 (на 1000 ни одно из этих чисел само делиться не может, так как N трехзначно).

Если N есть трехзначное число, делящееся на 125, то $N-1$, как легко проверить, будет делиться на 8, лишь если $N = 625$,

$N-1=624$. Так же легко проверяется, что если $N-1$ есть трехзначное число, делящееся на 125, то N будет делиться на 8 лишь при $N-1=375$, $N=376$.

Заметим теперь, что так как $N^{k-1}-1$ при любом целом $k \geqslant 2$ делится без остатка на $N-1$, то $N^k-N=N(N^{k-1}-1)$ при любом целом k будет делиться без остатка на $N(N-1)= = N^2-N$; поэтому если N^2-N оканчивается тремя нулями, то и N^k-N при любом целом $k \geqslant 2$ будет оканчиваться тремя нулями, т. е. N^k будет оканчиваться теми же тремя цифрами, что и N. Отсюда вытекает, что числа 625 и 376 (и только они) удовлетворяют условиям задачи.

34. Найдем две последние цифры числа N^{20}. Число N^{20} делится на 4 (ибо N четно). Далее, число N не делится на 5 (иначе оно делилось бы на 10) и, значит, представимо в виде $5k \pm 1$ или в виде $5k \pm 2$ (ср. с решением задачи 31). Но число

$$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20(5k)^{19} + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}(5k)^2 \pm 20 \cdot 5k + 1$$

дает при делении на 25 остаток 1, а число

$$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20(5k)^{19} \cdot 2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}(5k)^2 \cdot 2^{18} \pm 20 \cdot 5k \cdot 2^{19} + 2^{20}$$

дает при делении на 25 тот же остаток, что и число $2^{20} = = (2^{10})^2 = (1024)^2 = (1025-1)^2$, т. е. тоже остаток 1. Из того, что число N^{20} дает при делении на 25 остаток 1, следует, что последними двумя цифрами этого числа могут быть лишь цифры 01, 26, 51 или 76. Учитывая еще, что N^{20} должно делиться на 4, получим, что двумя последними цифрами этого числа могут быть лишь цифры 76. Итак, цифрой десятков числа N^{20} будет цифра 7.

Найдем теперь три последние цифры числа N^{200}. Число N^{200} делится на 8. Далее, так как N взаимно просто с 5, то N^{100} дает при делении на 125 остаток 1 (см. решение задачи 31): $N^{100}=125k+1$. Но тогда и $N^{200}=(125k+1)^2= = 125^2k^2+250k+1$ дает при делении на 125 остаток 1. Следовательно, N^{200} может оканчиваться цифрами 126, 251, 376, 501, 626, 751 или 876, но так как N^{200} делится на 8, то оно должно оканчиваться цифрами 376. Итак, цифра сотен числа N равна 3.

Примечание. Нетрудно видеть, что уже число N^{100} обязательно оканчивается тремя цифрами 376.

35. Сумма $1+2+3+\ldots+n$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$ следовательно, нам надо доказать, что если k нечетно, то $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ делится на $\frac{n(n+1)}{2}$.

Отметим прежде всего, что при k нечетном $a^k + b^k$ делится на $a+b$. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

А. Число n четно. В таком случае сумма S_k делится на $n+1$, так как каждая из сумм

$$1^k + n^k,\ 2^k + (n-1)^k,\ 3^k + (n-2)^k,\ \ldots,\ \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k$$

делится на

$$1+n\ \left[= 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \ldots = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right];$$

сумма S_k делится также на $\frac{n}{2}$, ибо

$$1^k + (n-1)^k,\ 2^k + (n-2)^k,\ 3^k + (n-3)^k,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \left(\frac{n}{2}-1\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k,\ \left(\frac{n}{2}\right)^k,\ n^k$$

все делятся на $\frac{n}{2}$.

Б. Число n нечетно. В этом случае сумма S_k делится на $\frac{n+1}{2}$, так как

$$1^k + n^k,\ 2^k + (n-1)^k,\ 3^k + (n-2)^k,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+3}{2}\right)^k,\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^k$$

все делятся на $\frac{n+1}{2}$; S_k делится также на n, так как

$$1^k + (n-1)^k,\ 2^k + (n-2)^k,\ 3^k + (n-3)^k,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k,\ n^k$$

все делятся на n.

36. Пусть

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

— данное число (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_1, a_0 — цифры числа, которые могут принимать значения 0, 1, 2, …, 9).

Вычтем из N число

$$M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_n,$$

представляющее собой алгебраическую сумму цифр числа N, взятых с чередующимися знаками. Группируя подходящим образом члены, мы получим число

$$N - M = a_1(10+1) + a_2(10^2-1) + a_3(10^3+1) + \\ + a_4(10^4-1) + \ldots + a_n(10^n \pm 1),$$

делящееся на 11, ибо каждое его слагаемое делится на 11. (Из того, что при перемножении чисел остатки, даваемые ими при делении на некоторое число, перемножаются, легко вывести, что

$$10^k = (11-1)^k$$

дает при делении на 11 остаток -1 при k нечетном и остаток $+1$ при k четном.) Таким образом, разность $N - M$ делится на 11, т. е. число N делится или не делится на 11 одновременно с числом M.

37. Число 15 дает при делении на 7 остаток 1. Отсюда следует, что и

$$15^2 = (7 \cdot 2 + 1) \cdot (7 \cdot 2 + 1) = 7n_1 + 1$$

дает при делении на 7 остаток 1,

$$15^3 = 15^2 \cdot 15 = (7n_1 + 1) \cdot (7 \cdot 2 + 1) = 7n_2 + 1$$

дает при делении на 7 остаток 1, и вообще любая степень числа 15 при делении на 7 дает остаток 1. Если мы теперь вычтем из заданного нам числа сумму $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 14 = 105$, то, сгруппировав соответствующим образом члены, мы получим

$$13(15-1) + 12(15^2-1) + 11(15^3-1) + \ldots \\ \ldots + 2(15^{12}-1) + 1(15^{13}-1),$$

т. е. число, делящееся на 7. Но из того, что разность заданного числа и числа $105 = 7 \cdot 15$ делится на 7, следует, что исходное число тоже делится на 7.

38. Пусть K есть n-значное число. Среди $(n+2)$-значных чисел, начинающихся цифрами 1, 0 (т. е. среди чисел вида $\overline{10a_1a_2\ldots a_n}$ *)), всегда найдется по крайней мере одно, делящееся на K. Пусть это число есть $\overline{10b_1b_2\ldots b_n}$. Тогда по условию числа $\overline{b_1b_2\ldots b_n10}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_n01}$ оба делятся на K. Их разность равна 9 и также делится на K. Но у 9 делителями служат лишь 1, 3 и 9, откуда и следует наше утверждение.

39. Нам надо показать, что число

$$N = 27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$$

делится без остатка на $26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Доказательство проводится в два приема.

1°. $N = 27\,195^8 - (10\,887^8 - 10\,152^8)$.

Но $27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$; следовательно, это число делится на $5 \cdot 7^2$. С другой стороны, разность, заключенная в круглые скобки, делится на

$$10\,887 - 10\,152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

(ибо разность восьмых степеней двух чисел делится на разность оснований). Отсюда следует, что N делится на $5 \cdot 7^2$.

2°.

$$N = (27\,195^8 - 10\,887^8) + 10\,152^8.$$

Но $10\,152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ делится на $2^2 \cdot 3^3$. С другой стороны, разность, заключенная в круглые скобки, делится на

$$27\,195 - 10\,887 = 16\,308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151.$$

Таким образом, N делится на $2^2 \cdot 3^3$.

---

*) Через $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ мы обозначаем число, которое записывается цифрами $a_1, a_2, \ldots, a_k$, т. е. число

$$a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k.$$

Так как N делится на $5\cdot 7^2$ и $2^2\cdot 3^3$, то N делится и на произведение этих чисел, равное 26 460.

40. Нетрудно проверить, что

$$11^{10}-1^{10}=(11-1)(11^9+11^8+11^7+11^6+\\ +11^5+11^4+11^3+11^2+11+1).$$

Легко видеть, что второй сомножитель в правой части делится на 10, так как он представляет собой сумму 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1.

Итак, $11^{10}-1$ есть произведение 10 на число, делящееся на 10, и, значит, делится на 100.

41. $2222^{5555}+5555^{2222}=$
$$=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222}).$$

Из трех выражений, стоящих в круглых скобках, первое делится на $2222+4=2226=7\cdot 318$ (сумма нечетных степеней делится на сумму оснований) и, следовательно, делится на 7; второе тоже делится на 7, так как оно делится на $5555-4=$ $=5551=7\cdot 793$ (разность любых целых степеней делится на разность оснований). Что касается третьего выражения, то его можно переписать в виде

$$4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1),$$

откуда видно, что оно делится на разность $64-1=63$ и, следовательно, делится на 7 (разность одинаковых целых степеней делится на разность оснований).

42. Воспользуемся методом математической индукции. Число $\overline{aaa}$, составленное из трех одинаковых цифр (черта наверху поставлена, чтобы не путать с произведением $a\cdot a\cdot a$), делится на 3 (так как сумма цифр этого числа, равная $3a$, делится на 3). Далее, предположим, что наше утверждение уже доказано для каждого числа, составленного из 3^n одинаковых цифр. Число, составленное из 3^{n+1} одинаковых цифр, можно представить в следующем виде:

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}}=\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}}\cdot\underbrace{100\ldots 0}_{3^n \text{ цифр}}\underbrace{100\ldots 01}_{3^n \text{ цифр}}.$$

Но из двух сомножителей первый в силу предположения индукции делится на 3^n, а второй делится на 3 (сумма цифр этого числа равна 3); следовательно, все произведение делится на 3^{n+1}.

43. Заметим прежде всего, что $10^6 - 1 = 999\,999$ делится на 7 (так как $999\,999 = 7 \cdot 142\,857$). Отсюда легко следует, что 10^N, где N — какое угодно целое число, дает при делении на 7 такой же остаток, как и 10^r, где r есть остаток от деления N ни 6. Действительно, если $N = 6k + r$, то

$$10^N - 10^r = 10^{6k+r} - 10^r = 10^r(10^{6k} - 1) = \\ = 10^r \cdot (10^6 - 1)(10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \ldots + 10^6 + 1)$$

делится на 7.

Но любая целая степень 10 дает при делении на 6 остаток 4; в самом деле, $10^n - 4 = \underbrace{999\ldots9}_{(n-1)\text{ раз}}6$ всегда делится на $2 \cdot 3 = 6$ (в силу признаков делимости на 2 и на 3). Таким образом, все сложные показатели степени у слагаемых нашей суммы дают при делении на 6 остаток 4. Следовательно, каждое из этих 10 слагаемых дает при делении на 7 такой же остаток, как и число 10^4, а вся сумма — такой же остаток, как и число

$$10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 = \\ = 10^5 = 100000 = 7 \cdot 14285 + 5.$$

Итак, искомый остаток равен 5.

44. а) Каждая четная степень 9 представима в виде

$$9^{2n} = 81^n = \underbrace{81 \cdot 81 \ldots 81}_{n\text{ раз}}$$

и, следовательно, оканчивается цифрой 1. Каждая нечетная степень 9 представима в виде $9^{2n+1} = 9 \cdot 81^n$ и, следовательно, оканчивается цифрой 9 (как произведение числа, оканчивающегося единицей, на 9). В частности, $9^{(9^9)}$ есть нечетная степень 9; значит, $9^{(9^9)}$ оканчивается цифрой 9.

Заметим теперь, что любая целая степень 6 оканчивается цифрой 6; действительно, $6^1 = 6$, и если 6^n оканчивается на 6, то и $6^{n+1} = 6^n \cdot 6$ оканчивается на 6. Но 16^n оканчивается на ту же цифру, что и 6; следовательно, любая целая степень 16 оканчивается цифрой 6. Таким образом, любая степень двойки, кратная четырем, оканчивается шестеркой (ибо $2^{4n} = 16^n$). Но $3^4 - 1$ делится на $3 + 1 = 4$; значит, $2^{(3^4-1)}$ оканчивается цифрой 6, а $2^{(3^4)} = 2 \cdot 2^{(3^4-1)}$ оканчивается цифрой 2 (как произведение 2 на число, оканчивающееся шестеркой).

б) Нам надо найти остаток от деления 2^{999} на 100 (это и есть две последние цифры числа 2^{999}). Покажем прежде всего, что при делении на 25 число 2^{1000} дает остаток 1. Действительно, $2^{10}+1 = 1024+1 = 1025$ делится на 25; следовательно, и $2^{20}-1 = (2^{10}+1)(2^{10}-1)$ делится на 25, а $2^{1000}-1 = (2^{20})^{50}-1$ делится на $2^{20}-1$. Отсюда вытекает, что последние две цифры числа 2^{1000} могут быть равны или 01, или $01 + 25 = 26$, или $01+50 = 51$, или $01+75 = 76$; но так как 2^{1000}, конечно, делится на 4, то этими цифрами могут быть только 76. Таким образом, 2^{999} равно частному от деления числа, оканчивающегося на 76, на 2, т. е. оно может оканчиваться только цифрами 38 или 88 (так как $76 : 2 = 38$, $176 : 2 = 88$). Но так как это число делится на 4, то оно оканчивается цифрами 88.

Найдем теперь остаток от деления числа 3 на 100. Напомним, что каждая четная степень 9 оканчивается цифрой 1, а каждая нечетная степень 9 — цифрой 9 (см. решение задачи а)). Воспользовавшись этим, найдем остаток от деления числа $9^5 + 1$ на 100:

$$9^5 + 1 = (9 + 1) \cdot (9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1) = \\ = 10 \cdot (9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1),$$

а в алгебраической сумме, стоящей в скобках, каждое из трех положительных слагаемых оканчивается на 1 и каждое из двух отрицательных слагаемых — на 9; таким образом, число $9^4 + 9^2 + 1$ оканчивается на 3, а число $9^3 + 9$ — на 8 и, значит, все выражение, стоящее в скобках, оканчивается на 5. Итак, число $9^5 + 1$ при делении на 100 дает остаток $10 \cdot 5 = 50$. Отсюда вытекает, что число $9^{10} - 1 = (9^5 + 1) \cdot (9^5 - 1)$ делится на 100, а так как $3^{1000} - 1 = 9^{500} - 1 = (9^{10})^{50} - 1$ делится на $9^{10} - 1$ (разность целых степеней делится на разность оснований), то и $3^{1000} - 1$ делится на 100. Таким образом, число 3^{1000} оканчивается цифрами 01. Но это число делится на 3; следовательно, его число сотен при делении на 3 должно давать в остатке 2 (если бы при делении сотен на 3 в остатке оставалась одна сотня или ни одной, то это число сотен плюс 01 не могло бы делиться на 3). Итак, мы нашли, что число $3^{999} = 3^{1000} : 3$ должно оканчиваться теми же двумя цифрами, что и число $201 : 3 = 67$.

в) Нам надо найти остаток от деления числа $14^{(14^{14})} = (7 \cdot 2)^{(14^{14})}$ на 100, — это и есть две последние цифры числа $14^{(14^{14})}$. Найдем в отдельности остаток от деления на 100 чисел $7^{(14^{14})}$ и $2^{(14^{14})}$.

Число $7^4 - 1 = 2401 - 1 = 2400$ делится на 100. Отсюда следует, что если $n = 4k$ делится на 4, то $7^n - 1$ делится на 100 (ибо $7^{4k} - 1 = (7^4)^k - (1)^k$ делится на $7^4 - 1$). Но $14^{14} = 2^{14} \cdot 7^{14}$ делится на 4; следовательно, $7^{(14^{14})} - 1$ делится на 100 и, значит, число $7^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 01.

Далее, в решении задачи б) было показано, что $2^{20} - 1$ делится на 25; следовательно, если $n = 20k$ делится на 20, то $2^n - 1$ делится на 25. Найдем теперь остаток от деления числа 14^{14} на 20. Очевидно, $14^{14} = 2^{14} \cdot 7^{14}$. Но $2^{14} = 4 \cdot 2^{12}$; так как $2^{12} - 1 = (2^4)^3 - 1$ делится на $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$, то $4(2^{12} - 1)$ делится на 20, а следовательно, $2^{14} = 4 \cdot 2^{12}$ дает при делении на 20 остаток 4. Далее, $7^{14} = 49 \cdot 7^{12}$; так как 7^{12} дает при делении на 20 остаток 1 (так как 12 делится на 4, то $7^{12} - 1$ делится на 100), то $49 \cdot 7^{12}$ дает при делении на 20 такой же остаток, как и число 49, т. е. 9. Таким образом, $14^{14} = 2^{14} \cdot 7^{14}$ дает при делении на 20 такой же остаток, как и произведение $4 \cdot 9 = 36$, т. е. остаток 16: $14^{14} = 20K + 16$. А отсюда следует, что $2^{(14^{14})} = 2^{16} \times 2^{20K}$ дает при делении на 25 такой же остаток, как и число $2^{16} = 65536$, т. е. $2^{(14^{14})}$ может оканчиваться только цифрами 11, 36, 61 или 86. Но так как $2^{(14^{14})}$ делится на 4, то $2^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 36.

Итак, число $7^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 01, а число $2^{(14^{14})}$ — цифрами 36. Следовательно, их произведение $7^{(14^{14})} \times 2^{(14^{14})} = 14^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 36.

45. а) Если перемножить два числа, одно из которых оканчивается на цифру a, а второе на цифру b, то их произведение будет оканчиваться на ту же цифру, что и произведение ab. Это замечание позволяет просто решить поставленную задачу. Будем последовательно производить возвышения в степень, следя только за последней цифрой числа: 7^2 оканчивается цифрой 9, $7^3 = 7^2 \cdot 7$ оканчивается цифрой 3, $7^4 = 7^3 \cdot 7$ оканчивается цифрой 1 и $7^7 = 7^4 \cdot 7^3$ оканчивается цифрой 3.

Далее, точно таким же образом найдем, что (7^7), оканчивается снова цифрой 7 (действительно, $(7^7)^2$ оканчивается цифрой 9, $(7^7)^3$ оканчивается цифрой 7, $(7^7)^4$ оканчивается цифрой 1 и $(7^7)^7$ оканчивается цифрой 7). Отсюда следует, что число $((7^7)^7)^7$ оканчивается той же цифрой, что и число 7^7, т. е. цифрой 3, число $\left(((7^7)^7)^7\right)^7$ оканчивается снова цифрой 7 и т. д. Продолжая таким же образом, мы после нечетного числа возведений в степень 7 будем каждый раз приходить к числу, оканчивающемуся цифрой 3, а после четного числа возведений в степень 7 — к числу, оканчивающемуся цифрой 7. Так как 1000 есть число четное, то интересующее нас число оканчивается цифрой 7.

Если одно число оканчивается двузначным числом A, а второе — двузначным числом B, то их произведение оканчивается на те же самые *две цифры*, что и произведение $A \cdot B$. Это позволяет найти и две последние цифры интересующего нас числа. Как прежде, проверяем, что 7^7 оканчивается двумя цифрами 43, а $(7^7)^7$ оканчивается теми же цифрами, что и 43^7, а именно цифрами 07. Отсюда следует, что, возводя последовательно числа 7, 7^7, $(7^7)^7$ в степень 7, мы после нечетного числа возведений в степень будем приходить к числу, оканчивающемуся цифрами 43, а после четного числа возведений — к числу, оканчивающемуся цифрами 07. Следовательно, искомое число оканчивается цифрами 07.

б) В решении задачи а) мы видели, что 7^4 оканчивается цифрой 1. Отсюда следует, что $7^{4^k} = (7^4)^k$ тоже оканчивается цифрой 1 и $7^{4^{k+l}}$, где l есть одно из чисел 0, 1, 2 или 3, оканчивается той же цифрой, что и $7^l (7^{4^{k+l}} = 7^{4^k} \cdot 7^l)$. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить, какой остаток дает при делении на 4 число, являющееся степенью, в которую надо возвести 7, чтобы получить число задачи.

Степень, в которую в задаче возводится число 7, сама представляет собой 7 в некоторой очень большой степени; нам надо выяснить, какой остаток дает эта степень семи при делении на 4. Но $7 = 8-1$; отсюда следует, что $7^2 = (8-1)\times(8-1)$ дает при делении на 4 остаток 1, $7^3 = 7^2 \cdot (8-1)$ дает при делении на 4 остаток -1 (или, что то же самое, остаток 3) и вообще каждая четная степень 7 дает при делении на 4 остаток 1, а нечетная — остаток -1 (т. е. $+3$). Но интересующая нас в настоящем случае степень 7 заведомо является числом нечетным (так как она сама есть степень 7), а следовательно, фигурирующее в условии задачи число имеет вид $7^{4^{k+3}}$ и, следовательно, оканчивается той же цифрой, что и 7^3, т. е. цифрой 3.

Так как 7^4 оканчивается цифрами 01, то $7^{4^{k+l}}$ оканчивается даже теми же двумя цифрами, что и 7^l. Следовательно, интересующее нас число оканчивается теми же двумя цифрами, что и число 7^3, т. е. цифрами 43.

46. Рассмотрим последовательно числа.

1°. $Z_1 = 9$.

2°. $$Z_2 = 9^{Z_1} = (10-1)^{Z_1} = 10^{Z_1} - C^1_{Z_1} \cdot 10^{Z_1 - 1} + \ldots + C^1_{Z_1} \cdot 10 - 1,$$

где опущенные члены разложения все делятся на 100. Но $C^1_{Z_1} = 9$; следовательно, две последние цифры числа Z_2 будут теми же самыми, что и две последние цифры числа $9 \cdot 10 - 1 = 89$.

3°. $$Z_3 = 9^{Z_2} = (10-1)^{Z_2} = 10^{Z_2} - C^1_{Z_2} \cdot 10^{Z_2 - 1} + \ldots - C^2_{Z_2} \cdot 10^2 + C^1_{Z_2} \cdot 10 - 1.$$

Но Z_2 оканчивается на 89; следовательно, $C^1_{Z_2} = Z_2$ оканчивается на 89, а $C^2_{Z_2} = \dfrac{Z_2(Z_2-1)}{1 \cdot 2} = \dfrac{\ldots 89 \cdot \ldots 88}{1 \cdot 2}$ (точками обозначены неизвестные цифры) оканчивается цифрой 6. Следовательно, три последние цифры числа Z_3 будут теми же самыми, что и три последние цифры числа $-600 + 890 - 1 = 289$.

4°. $$Z_4 = 9^{Z_3} = (10-1)^{Z_3} = 10^{Z_3} - C^1_{Z_3} \cdot 10^{Z_3 - 1} + \ldots + C^3_{Z_3} \cdot 10^3 - C^2_{Z_3} \cdot 10^2 + C^1_{Z_3} \cdot 10 - 1.$$

Так как Z_3 оканчивается на 289, то и $C^1_{Z_3} = Z_3$ оканчивается на 289;

$$C^2_{Z_3} = \frac{Z_3(Z_3-1)}{1\cdot 2} = \frac{\ldots 289 \cdot \ldots 288}{1\cdot 2}$$

оканчивается на 16;

$$C^3_{Z_3} = \frac{Z_3(Z_3-1)(Z_3-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\ldots 289 \cdot \ldots 288 \cdot \ldots 287}{1\cdot 2\cdot 3}$$

оканчивается цифрой 4. Следовательно, четыре последние цифры числа Z_4 будут теми же самыми, что и последние четыре цифры числа $4000 - 1600 + 2890 - 1 = 5289$.

$$5^\circ.\ Z_5 = 9^{Z_4} = (10-1)^{Z_4} = 10^{Z_4} - C^1_{Z_4}\cdot 10^{Z_4-1} + \ldots$$
$$\ldots - C^4_{Z_4}\cdot 10^4 - C^3_{Z_4}\cdot 10^3 + C^2_{Z_4}\cdot 10^2 + C^1_{Z_4}\cdot 10 - 1.$$

Так как Z_4 оканчивается на 5289, то $C^1_{Z_4} = Z_4$ оканчивается на 5289;

$$C^2_{Z_4} = \frac{Z_4(Z_4-1)}{1\cdot 2} = \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288}{1\cdot 2}$$

оканчивается на 116;

$$C^3_{Z_4} = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288 \cdot \ldots 5287}{1\cdot 2\cdot 3}$$

оканчивается на 64; наконец,

$$C^4_{Z_4} = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)(Z_4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} =$$
$$= \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288 \cdot \ldots 5287 \cdot \ldots 5286}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

оканчивается цифрой 6. Следовательно, Z_5 оканчивается на те же самые пять цифр, что и число

$$-60\,000 + 64\,000 - 11\,600 + 52\,890 - 1 = 45\,289.$$

Далее из того, что последние четыре цифры числа Z_5 совпадают с последними четырьмя цифрами числа Z_4, следует, что последние пять цифр числа $Z_6 = 9^{Z_5} = (10-1)^{Z_5}$ совпадают с последними пятью цифрами числа $Z_5 (= 9^{Z_4})$. Точно так же показывается, что все числа ряда

$$Z_5,\ Z_6 = 9^{Z_5},\ Z_7 = 9^{Z_6},\ \ldots,\ Z_{1000} = 9^{Z_{999}},\ Z_{1001} = 9^{Z_{1000}}$$

оканчиваются на одни и те же пять цифр, а именно на 45 289. Но Z_{1001} это и есть число N условия задачи.

47. Согласно формуле для суммы членов геометрической прогрессии

$$N = \frac{50^{1000}-1}{50-1} = \frac{50^{1000}-1}{49}.$$

Но $\frac{1}{49}$ обращается в чистую периодическую десятичную дробь, период которой, состоящий из 42 знаков, нетрудно найти простым делением:

$$\frac{1}{49} = 0{,}(020408163265306122448979591836734693877551),$$

или, сокращенно,

$$\frac{1}{49} = 0{,}(P),$$

где P изображает выписанную выше последовательность из 42 цифр.

Ближайшее к показателю 1000 целое кратное числу 42 есть $1008 = 24 \cdot 42$. Следовательно,

$$\frac{10^{1008}}{49} = 10^{1008} \cdot \frac{1}{49} = \underbrace{PP\ldots P}_{24\ \text{раза}}, P\ldots$$

Таким образом, дробь

$$M = \frac{10^{1008-1}}{49} = 10^{1008} \cdot \frac{1}{49} - \frac{1}{49} = \underbrace{PP\ldots P}_{24\ \text{раза}}$$

есть целое число, состоящее из 1008 цифр, которые можно разбить на 24 группы из повторяющихся 42 цифр (фактически число M содержит не 1008 цифр, а 1007, так как наше число P начинается нулем).

Составим теперь разность между интересующим нас числом N и числом M:

$$N - M = \frac{5^{1000}\cdot 10^{1000}-1}{49} - \frac{10^{1008}-1}{49} = \frac{5^{1000}-10^{8}}{49}\cdot 10^{1000}.$$

Так как разность $N - M$ двух целых чисел — целое число и 10^{1000} взаимно просто с 49, то $5^{1000} - 10^8$ должно делиться на 49. Следовательно, число $x = \dfrac{5^{1000} - 10^8}{49}$ является целым и разность $N - M = 10^{1000} \cdot x$ оканчивается на 1000 нулей. Таким образом, последние 1000 цифр числа N — те же самые, что и последние 1000 цифр числа M, а именно,

$$p\underbrace{PP\ldots P}_{23\text{ раза}},$$

где p — группа из 34 цифр, являющихся последними 34 цифрами числа P.

48. Число нулей в конце числа показывает, сколько раз 10 встречается сомножителем в этом числе. Число 10 равно произведению $2 \cdot 5$; в произведении всех целых чисел от 1 до 100 множитель 2 входит в большей степени, чем множитель 5. Следовательно, произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$ делится на такую степень 10 (т. е. оканчивается на такое число нулей), сколько это произведение содержит множителей 5. Но до 100 имеется 20 чисел, кратных пяти, причем четыре из них (25, 50, 75 и 100) кратны также 25, т. е. содержат по два множителя 5. Следовательно, всего в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$ число 5 встретится сомножителем 24 раза; поэтому и нулей в конце этого произведения будет 24.

49. Первое решение задач а) и б). Решим сначала задачу а). Пусть $t+1$, $t+2$, …, $t+n$ будут n произвольных, последовательных целых чисел. Подсчитаем для каждого простого числа p наивысшую степень m, с которой оно входит в произведение $n!$, и наивысшую степень s, с которой оно входит в произведение $(t+1)\ldots(t+n)$. Для этого обозначим через m_1 число чисел ряда 1, 2, …, n, в которые p входит по крайней мере в первой степени, через m_2 — число чисел того же ряда, в которые p входит по крайней мере во второй степени и т. д. Тогда показатель, с которым p входит в $n!$, будет равен $m = m_1 + m_2 + \ldots$

Если теперь s_1 — число чисел ряда $t+1$, …, $t+n$, делящихся на p, s_2 — число чисел этого же ряда, делящихся на p^2, и т. д., то показатель s, с которым p входит в произведение $(t+1)\ldots(t+n)$, равен $s = s_1 + s_2 + \ldots$

Но число чисел ряда $t+1$, …, $t+n$, делящихся на p, не меньше чем m_1. Действительно, среди чисел $t+1$, …, $t+n$

находятся также числа $t+p$, $t+2p$, ..., $t+m_1p$, а в каждом промежутке между $t+kp$ и $t+(k+1)p$ ($k=0, 1, 2, \ldots, m_1-1$) есть хотя бы одно число, делящееся на p. Таким образом, $s_1 \geqslant m_1$, аналогично $s_2 \geqslant m_2$ и т. д., а потому $s \geqslant m$. Но это означает, что каждый простой сомножитель числа $n!$ входит в состав числа $(t+1)\ldots(t+n)$, причем в степени, не меньшей чем он входит в $n!$, т. е. число $(t+1)\ldots(t+n)$ делится на $n!$.

б) Произведение первых a сомножителей в $n!$ совпадает с $a!$; произведение следующих b сомножителей в силу задачи а) делится на $b!$, произведение следующих c сомножителей — на $c!$ и т. д. Так как $a+b+c+\ldots+k \leqslant n$, то отсюда следует, что $n!$ разделится на $a!\,b!\ldots k!$

Другое решение задач а) и б). Решим сначала задачу б). Показатель m, с которым некоторое простое число p входит в $a!$, как мы видели, равен $m=m_1+m_2+\ldots$, где m_1 — число чисел ряда 1, 2, ..., a кратных p, m_2 — кратных p^2 и т. д. Но число чисел, кратных p, равно $\left[\frac{a}{p}\right]$, кратных p^2 — равно $\left[\frac{a}{p^2}\right]$ и т. д., где $\left[\frac{a}{p}\right]$, $\left[\frac{a}{p^2}\right]$, ... — целые части дробей $\frac{a}{p}$, $\frac{a}{p^2}$, ... (см. с. 26). Таким образом, $m=\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\ldots$ Пусть теперь p — любое простое число. Тогда показатель, с которым p войдет в числитель, равен $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$ Показатель, с которым p войдет в знаменатель, равен

$$\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{b}{p}\right]+\left[\frac{b}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\ldots$$

Но так как $n \geqslant a+b+\ldots+k$, то, используя результат задачи 101, 1), мы получим отсюда, что

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots \geqslant$$
$$\geqslant \left(\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{b}{p}\right]+\ldots\right)+\left(\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{b}{p^2}\right]+\ldots\right)+\ldots,$$

т. е. p войдет в числитель в большей степени, чем в знаменатель. Значит, наша дробь есть целое число.

Решим теперь задачу а). Дополним для этого произведение $(t+1)\ldots(t+n)$ до $(t+n)!$. По только что доказанному дробь

$$\frac{(t+n)\ldots(t+1)t(t-1)\ldots 1}{n!\,t(t-1)\ldots 1}=\frac{(n+t)!}{n!\,t!}=\frac{(t+1)\ldots(t+n)}{n!}$$

есть число целое.

в) $(n!)!$ есть произведение $n!$ первых целых чисел. Но эти $n!$ чисел можно разбить на $(n-1)!$ групп по n последовательных целых чисел, а произведение чисел каждой из этих групп в силу результата задачи а) делится на $n!$.

г) Пусть рассматриваемые числа будут a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+(n-1)d$. Докажем сначала, что существует такое целое число k, что произведение kd дает при делении на $n!$ в остатке 1. Действительно, рассмотрим $n!-1$ чисел d, $2d$, $3d$, ..., $(n!-1)d$. Ни одно из этих чисел не делится на $n!$, так как d взаимно просто с $n!$. С другой стороны, никакие два произведения pd и qd где p, q — целые числа, меньшие $n!$, не могут давать при делении на $n!$ одинаковые остатки, так как иначе разность $pd-qd=(p-q)d$ делилась бы на $n!$. Таким образом, рассматриваемые $n!-1$ чисел должны при делении на $n!$ давать $n!-1$ разных остатков, откуда вытекает существование числа k, такого, что произведение kd дает при делении на $n!$ остаток 1; $kd=r\cdot n!+1$.

Обозначим теперь ka через A. Тогда мы имеем

$$\begin{gathered}
ka=A,\\
k(a+d)=A+kd=(A+1)+r\cdot n!,\\
k(a+2d)=A+2kd=(A+2)+2r\cdot n!,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k[a+(n-1)d]=A+(n-1)kd=[A+(n-1)]+(n-1)r\cdot n!.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что произведение

$$k^n a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d]$$

дает при делении на $n!$ такой же остаток, как и произведение $A(A+1)(A+2)\ldots[A+(n-1)]$. Но последнее из этих двух произведений делится на $n!$ в силу задачи а), а k^n взаимно просто с $n!$, так как, если бы k не было взаимно просто с $n!$, kd тоже не могло бы быть взаимно просто с $n!$.

50. Число, сочетаний из 1000 элементов по 500 равно $\frac{1000!}{(500!)^2}$. Так как 7 — простое число, то наивысшая степень, с которой 7 войдет в 1000! (см. второе решение задачи 49,б), равна $\left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{49}\right] + \left[\frac{1000}{343}\right] = 142 + 20 + 2 = 164$. Наивысшая степень, с которой 7 войдет в 500!, равна $\left[\frac{500}{7}\right] + \left[\frac{500}{49}\right] + \left[\frac{500}{343}\right] = 71+10+1 = 82$. Следовательно, наивысшая степень, с которой 7 войдет в знаменатель, равна $82 \cdot 2 = 164$. Таким образом, и числитель и знаменатель содержат 7 в 164-й степени. После сокращения числитель не будет уже содержать множителем 7, и следовательно, целое число $\frac{1000!}{(500!)^2}$ не делится на 7.

51. а) Число $(n-1)!$ не делится на n только в том случае, если n — простое число или если $n = 4$. Действительно, если n — составное число, которое можно представить в виде произведения двух неравных множителей a и b, то и a и b меньше $n-1$ и, следовательно, входят в состав $(n-1)!$; значит, $(n-1)!$ делится на $ab = n$. Если n есть квадрат простого числа p, большего двух, то $n - 1 = p^2 - 1 > 2p$. Поэтому и p и $2p$ входят в состав $(n-1)!$; значит, $(n-1)!$ делится на $p \cdot 2p = 2p^2 = 2n$. Итак, условию задачи удовлетворяют только числа 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, т. е. число 4 и все простые числа, меньшие 100.

б) $(n-1)!$ не делится на n^2 только в следующих случаях: n есть простое число, n есть удвоенное простое число, $n = 8$, $n = 9$. Действительно, если n не является ни простым числом, ни удвоенным простым числом, ни квадратом простого числа и не равно ни 8, ни 16, то n можно представить в виде $n = ab$, где a и b — различные числа, не меньшие 3. Мы будем считать, что $b > a$, $a \geqslant 3$. В таком случае числа a, b, $2a$, $2b$, $3a$ все меньше $n-1$ и при этом a, b и $2b$ заведомо различны, а из чисел $2a$ и $3a$ хотя бы одно отлично от чисел a, b и $2b$. Таким образом, в $(n-1)!$ входят множители a, b, $2b$, $2a$ или a, b, $2b$, $3a$ (а может быть, входят и все множители a, b, $2b$, $2a$, $3a$); во всех случаях $(n-1)!$ делится на $a^2b^2 = n^2$.

Далее, если $n = p^2$, где p есть простое число, большее 4, то $n-1 > 4p$ и $(n-1)!$ содержит множители p, $2p$, $3p$, $4p$ и, следовательно, делится на $p^4 = n^2$. Если $n = 2p$, то $(n-1)!$ не делится на p^2, а следовательно, и на n^2; когда $n = 8$ или 9, то $(n-1)!$ не делится на n^2 (7! не делится на 8^2 и 8! не делится на 9^2); когда $n = 16$, то $(n-1)!$ делится на n^2 (15! содержит множители 2, $4 = 2^2$, $6 = 3\cdot 2$, $8 = 2^3$, $10 = 2\cdot 5$, $12 = 2^2\cdot 3$, $14 = 2\cdot 7$ и, следовательно, делится на $2^{1+2+1+3+1+2+1} = 2^{11} = 16^2\cdot 2^3$).

Таким образом, условию задачи б) удовлетворяют все числа, удовлетворяющие условию задачи а), и, кроме того, числа 6, 8, 9, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94, т. е. все простые числа, все удвоенные простые числа и числа 8 и 9.

52. Предположим, что число n делится на все числа m, меньшие или равные $\sqrt{n}$. Составим общее наименьшее кратное K всех таких чисел m. В него, очевидно, будут входить все простые числа, меньшие $\sqrt{n}$, причем каждое простое число p в такой степени k, что $p^k \leqslant \sqrt{n}$, но $p^{k+1} > \sqrt{n}$. Предположим, что число простых чисел, меньших $\sqrt{n}$, равно l; эти простые числа мы обозначим через p_1, p_2, ..., p_l Наименьшее общее кратное K всех чисел, меньших $\sqrt{n}$, представляет собой произведение $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l}$, где k_1 таково, что $p_1^{k_1} \leqslant \sqrt{n} < p_1^{k_1+1}$, k_2 таково, что $p_2^{k_2} \leqslant \sqrt{n} < p_2^{k_2+1}$, и т. д. Перемножив теперь l неравенств

$$\sqrt{n} < p_1^{k_1+1}, \quad \sqrt{n} < p_2^{k_2+1}, \quad \ldots, \quad \sqrt{n} < p_l^{k_l+1},$$

получим

$$(\sqrt{n})^l < p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\ldots p_l^{k_l+1}.$$

Но $p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\ldots p_l^{k_l+1} = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l}\cdot p_1p_2\ldots p_l \leqslant K^2$, ибо $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l} = K$, а следовательно, $p_1p_2\ldots p_l \leqslant K$. Таким образом, имеем

$$(\sqrt{n})^l < K^2.$$

Но так как согласно нашему предположению n должно делиться на K, то $K \leqslant n$; следовательно, $(\sqrt{n})^l < n^2$. Отсюда $l < 4$; так как $p_1, \ldots, p_l$ — все простые числа, меньшие $\sqrt{n}$, то $p_4 = 7 > \sqrt{n}$ (четвертое простое число есть 7) и $n < 49$.

Перебирая все числа, меньшие 49, мы без труда убеждаемся, что из них требуемым свойством обладают только числа 24, 12, 8, 6, 4 и 2.

53. а) Обозначим пять последовательных целых чисел через

$$n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2.$$

Тогда

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = \\ = 5n^2+10 = 5(n^2+2).$$

Если бы число $5(n^2+2)$ было полным квадратом, то оно делилось бы на 25, следовательно, n^2+2 делилось бы на 5. Но это возможно лишь в том случае, если последняя цифра числа n^2 есть либо 8, либо 3, а никакой квадрат целого числа не оканчивается на эти цифры.

б) Из трех последовательных целых чисел одно, наверное, делится на 3, второе дает при делении на 3 остаток 1 и третье — остаток 2 или же, что равносильно, остаток -1. При перемножении чисел остатки от деления их на какое-либо число тоже перемножаются; в самом деле,

$$(pk+r)(qk+s) = pqk^2+pks+qkr+rs = k(pqk+ps+qr)+rs.$$

Поэтому, если число при делении на 3 дает остаток 1, то любая его степень при делении на 3 тоже дает остаток 1; если же число при делении на 3 дает остаток -1, то любая его нечетная степень при делении на 3 дает остаток -1, а любая четная — остаток 1.

Таким образом, из трех четных степеней последовательных целых чисел одна делится на 3, а две другие дают при делении на 3 остаток 1. Следовательно, сумма четных степеней трех последовательных целых чисел дает при делении на 3 остаток 2, или, что то же самое, остаток -1. А мы уже видели, что такой остаток не может дать при делении на 3 четная степень никакого целого числа.

Примечание. Интересно отметить, что в приведенном доказательстве нигде не используется тот факт, что четные степени, в которые возводятся три числа, одинаковы. Таким образом, имеет место следующее предложение более общее, чем утверждение задачи: *сумма четных степеней* (может быть, различных) *трех последовательных целых чисел не может быть четной степенью никакого целого числа.*

в) Как мы видели в решении задачи б), сумма четных степеней трех последовательных целых чисел дает при делении на 3 остаток 2. Отсюда вытекает, что сумма четных степеней девяти последовательных чисел дает при делении на 3 остаток $2+2+2=6$, т. е. делится на 3. Докажем теперь, что сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел не делится на $3^2=9$; отсюда будет сразу следовать утверждение задачи.

Из девяти последовательных целых чисел одно обязательно делится на 9, одно дает при делении на 9 остаток 1, одно — остаток 2 и т. д. Отсюда следует, что если $2k$ есть общая степень, в которую возводятся девять чисел, то наша сумма дает при делении на 9 тот же самый остаток, что и сумма

$$0+1^{2^k}+2^{2^k}+3^{2^k}+4^{2^k}+5^{2^k}+6^{2^k}+7^{2^k}+8^{2^k}$$

или сумма

$$2(1^k+4^k+7^k)$$

(так как 3^2 и 6^2 делятся на 9; 1^2 и $8^2=64$ дают при делении на 9 остаток 1; $2^2=4$ и $7^2=49$ дают при делении на 9 остаток 4; $4^2=16$ и $5^2=25$ дают при делении на 9 остаток 7).

Отметим теперь, что $1^3=1$, $4^3=64$ и $7^3=343$ все дают при делении на 9 остаток 1. Отсюда следует, что если $k=3l$, то $1^k+4^k+7^k=1^l+64^l+343^l$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1^l+1^l+1^l=3$, т. е. не делится на 9; если $k=3l+1$, то $1^k+4^k+7^k=1^l\cdot 1+64^l\cdot 4+343^l\cdot 7$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 7=12$, т. е. не делится на 9; если $k=3l+2$, то $1^k+4^k+7^k=$ $=1^l\cdot 1+64^l\cdot 4^2+343^l\cdot 7^2$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1 \cdot 1 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 49 = 66$, т. е. не делится на 9.

54. а) Сумма цифр каждого из чисел A и B равна

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28;$$

отсюда следует, что оба числа дают при делении на 9 остаток 1 (каждое число дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр). Но если бы было $\frac{A}{B} = n$, или, что то же самое, $A = nB$, где n — целое число, отличное от 1, то из того, что $B = 9N + 1$, следовало бы, что $A = nB = 9M + n$; таким образом, n должно давать при делении на 9 остаток 1.

Наименьшее подобное число n есть 10; но $\frac{A}{B} < 10$, так как оба числа A и B состоят из 7 цифр.

б) Обозначим искомые числа через N, $2N$, $3N$. Каждое целое число дает при делении на 9 такой же остаток, как и его сумма цифр; поэтому сумма $N + 2N + 3N$ дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, т. е. $6N$ (а следовательно, и $3N$) делится на 9.

Так как $3N$ трехзначно, то первая цифра числа N не может быть больше 3; поэтому последняя цифра N не может равняться 1 (так как в этом случае $2N$ оканчивается цифрой 2, а $3N$ — цифрой 3 и все три цифры 1, 2, 3 оказываются занятыми). Число N не может также оканчиваться цифрой 5 (в этом случае $2N$ оканчивалось бы нулем). Предположим теперь, что последняя цифра N есть 2; в таком случае последняя цифра $2N$ и $3N$ равна соответственно 4 и 6. Для двух первых цифр $3N$ остаются возможными значения 1, 3, 5, 7, 8 и 9; так как сумма всех цифр $3N$ кратна 9, то первые две цифры $3N$ есть 3 и 9 или 5 и 7. Проверяя все представляющиеся случаи, находим одну тройку чисел, удовлетворяющих условию задачи: 192, 384, 576. Аналогично исследуются случаи, когда N оканчивается на 3, 4, 6, 7, 8 или 9; при этом обнаруживаются еще три решения задачи: 273, 546, 819; 327, 654, 981 и 219, 438 и 657.

55. Полный квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 9, 6 и 5. Далее, квадрат каждого четного числа, очевидно, делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1 ($(2k)^2 = 4k^2$, $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$; поэтому квадрат никакого числа не может оканчиваться цифрами 11, 99, 66 и 55; числа, оканчивающиеся двумя цифрами 11, 99, 66 или 55, дают при делении на 4 соответственно остатки 3, 3, 2 и 3). Рассмотрим, наконец, какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 16. Каждое целое число можно представить в одном из следующих видов:

$$8k,\quad 8k \pm 1,\quad 8k \pm 2,\quad 8k \pm 3 \ \text{ или } \ 8k + 4;$$

квадраты этих чисел имеют вид

$$16 \cdot (4 \cdot k^2),\quad 16(4k^2 \pm k) + 1,\quad 16(4k^2 \pm 2k) + 4,$$
$$16(4k^2 \pm 3k) + 9 \ \text{ или } \ 16(4k^2 + 4k + 1).$$

Таким образом, мы видим, что квадрат целого числа или делится на 16 или дает при делении на 16 один из остатков 1, 4 и 9. Число же, оканчивающееся цифрами 4444, дает при делении на 16 остаток 12 и, следовательно, не может быть полным квадратом.

Итак, если полный квадрат оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами, то эти цифры — четыре нуля (например, $100^2 = 10000$).

56. Первое решение. Обозначим стороны прямоугольника через x и y , а диагональ — через z; тогда по теореме Пифагора будем иметь

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Нам надо доказать, что произведение xy делится на 12. Покажем сначала, что это произведение делится на 3, а затем — что оно делится на 4.

Так как

$$(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ и } (3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

то квадрат каждого числа, не кратного 3, дает при делении на 3 остаток 1. Поэтому, если бы ни x ни y не делились на 3, то сумма $x^2 + y^2$ давала бы при делении на 3 остаток 2 и поэтому не могла бы быть равна квадрату никакого целого числа. Следовательно, если $x^2 + y^2$ равно квадрату целого числа z, то хотя бы одно из чисел x и y делится на 3, а значит, и xy делится на 3.

Далее ясно, что оба числа x и y одновременно нечетными быть не могут; если $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$, то

$$x^2 + y^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = \\ = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$$

не может равняться квадрату никакого целого числа (квадрат нечетного числа нечетен, а квадрат четного числа делится на 4). Если и x и y — четные числа, то их произведение делится на 4. Предположим теперь, что x четно, а y нечетно: $x = 2m$, $y = 2n + 1$. Число z при этом будет нечетно (ибо $z^2 + x^2 + y^2$ нечетно): $z = 2p + 1$. В этом случае имеем $(2m)^2 = (2p + 1)^2 - (2n + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4n^2 - 4n - 1$, или

$$m^2 = p(p + 1) - n(n + 1).$$

Отсюда вытекает, что m^2 четно (произведения последовательных целых чисел $p(p + 1)$ и $n(n + 1)$ оба четные); следовательно, m четно и $x = 2m$ делится на 4. Значит, и в этом случае произведение xy делится на 4.

Второе решение. Из формул решения задачи 128, а) следует, что стороны x и y рассматриваемого прямоугольника выражаются формулами $x = 2tab$, $y = t(a^2 - b^2)$, где t, a и b — целые числа, причем a и b взаимно простые. Если хотя бы одно из чисел a, b четно, то x делится на 4; если a и b оба нечетны, то x делится на 2 и y делится на 2. Далее, если a или b делятся на 3, то x делится на 3. Если же ни a ни b не делятся на 3, то либо одно из них дает при делении на 3 остаток 1, а второе — остаток 2, либо оба они дают при делении на 3 одинаковые остатки; в обоих случаях $y = t(a+b)(a-b)$ делится на 3. Итак, во всех случаях произведение xy делится на 12, что и требовалось доказать.

57. По формуле решения квадратного уравнения имеем

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

следовательно, для того чтобы корни уравнения были рациональны, надо, чтобы выражение $b^2 - 4ac$ являлось полным квадратом. Положим $b = 2n + 1$, $a = 2p + 1$, $c = 2q + 1$; в таком случае будем иметь

$$b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)=4n^2+4n-$$
$$-16pq-8p-8q-3=8\Big(\frac{n(n+1)}{2}-2pq-p-q-1\Big)+5.$$

Так как это число нечетно $\Big(\frac{n(n+1)}{2}$ есть целое число, ибо произведение двух последовательных целых чисел всегда четно$\Big)$, то оно может быть квадратом только нечетного числа. Но каждое нечетное число можно представить в виде $4k\pm 1$; квадрат этого числа равен

$$(4k\pm 1)^2=16k^2\pm 8k+1=8(2k^2\pm k)+1$$

и, следовательно, всегда дает при делении на 8 остаток 1. Поскольку число b^2-4ac дает при делении на 8 остаток 5, оно не может являться полным квадратом.

58. Имеем

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Числитель нашей дроби не делится на 3, а знаменатель делится, так как он является произведением трех последовательных целых чисел. Следовательно, в знаменателе есть множители, отличные от 2 и 5, а потому в разложении получится *бесконечная периодическая* десятичная дробь.

Из двух целых чисел n и $n+1$ одно должно быть четным. Если четно $n+1$, то n нечетно, следовательно, нечетно $3n^2$, а потому и весь числитель. Если же n четно, то и $n+2$ делится на 2 и, следовательно, знаменатель, наверное, делится на 2^2; числитель же делится только на 2, так как если $n=2k$, то

$$3n^2+6n+2=12k^2+12k+2=2(6k^2+6k+1).$$

Поэтому знаменатель полученной после сокращения дроби не будет взаимно прост с 10, и десятичная дробь будет *смешанной* периодической.

59. а), б). Приведем все слагаемые в сумме

$$M=\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\quad\Big(\text{или}\quad N=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}\Big)$$

к общему знаменателю. Из всех дробей, входящих в нашу сумму, рассмотрим ту, в знаменателе которой стоит самая высокая степень двух (такая дробь может быть только одна). Тогда во все остальные дроби число 2 войдет дополнительным множителем, в то время как в этой дроби дополнительным множителем обязательно будет число нечетное. У всей дроби M (или N) знаменатель есть, конечно, число четное, а числитель, как мы видим, состоит из суммы некоторого числа четных чисел и одного нечетного. Следовательно, числитель есть число нечетное, а потому вся дробь не может быть целой.

в) Рассмотрим дробь в сумме K, в знаменателе которой стоит самая высокая (k-я) степень числа 3. Так как у нас знаменателями являются только нечетные числа, то дробь $\dfrac{1}{2\cdot 3^k}$ в сумме K отсутствует. Поэтому при приведении суммы дробей к общему знаменателю дополнительные множители всех дробей кроме рассмотренной будут делиться на 3, а дополнительный множитель этой дроби не будет делиться на 3. Следовательно, в сумме получим дробь, знаменатель которой делится на 3, а числитель не делится.

60. а) Приведя сумму дробей к общему знаменателю $(p-1)!$, мы получим в числителе сумму: всевозможных произведений из $p-1$ чисел $1, 2, \ldots, p-1$ по $p-2$. Так как знаменатель, очевидно, не делится на p, то нам надо доказать, что эта сумма делится на p^2.

Обозначим сумму всевозможных произведений из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по k через Π_n^k:

$$\Pi_n^1 = 1+2+3+\ldots+n,$$

$$\Pi_n^2 = 1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+1\cdot n+2\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+2\cdot n+ \\ +3\cdot 4+\ldots+3\cdot n = 4\cdot 5+\ldots+(n-1)\cdot n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_n^n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n = n!$$

Докажем, что *если* $n+1=p$ — *простое число, то все суммы* $\Pi_n^1, \Pi_n^2, \ldots, \Pi_n^{n-1}$ *делятся на* p, а Π_n^{n-1} *делится даже на* p^2; из последнего будет следовать утверждение настоящей задачи.

Составим произведение

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n).$$

Очевидно, что, раскрывая в этом произведении скобки, получим

$$P(x) = x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n$$

(здесь мы считаем, что n четное),

Рассмотрим, далее, выражение $P(x)[x-(n+1)]$. Его можно преобразовать двумя способами. С одной стороны, мы имеем

$$P(x)[x-(n+1)] = \\ = (x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n)[x-(n+1)],$$

а кроме того,

$$\begin{aligned} P(x)[x-(n+1)] &= \\ &= (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)(x-n-1) = \\ &= (x-1)\{[(x-1)-1][(x-1)-2]\ldots[(x-1)-n]\} = \\ &= (x-1)\cdot P(x-1) = (x-1)[(x-1)^n - \Pi_n^1(x-1)^{n-1} + \\ &\qquad + \Pi_n^2(x-1)^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned} &(x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n)[x-(n+1)] = \\ &= (x-1)^{n+1} - \Pi_n^1(x-1)^n + \Pi_n^2(x-1)^{n-1} - \ldots + \Pi_n^n(x-1). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Если два многочлена равны при всех значениях x, то это значит, что равны коэффициенты этих многочленов. Приравняем коэффициенты многочленов, стоящих с обеих сторон равенства $(*)$ (причем в правой стороне этого равенства нам придется раскрыть скобки при различных степенях $x-1$, пользуясь формулой бинома Ньютона). Мы получим ряд равенств (через C_n^m обозначаются, как обычно, биномиальные коэффициенты):

$$\begin{gathered} \Pi_n^1 + (n+1) = C_{n+1}^1 + \Pi_n^1, \\ \Pi_n^2 + (n+1)\Pi_n^1 = C_{n+1}^2 + C_n^1\Pi_n^1 + \Pi_n^2, \\ \Pi_n^3 + (n+1)\Pi_n^2 = C_{n+1}^3 + C_n^2\Pi_n^1 + C_{n-1}^1\Pi_n^2 + \Pi_n^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_n^n + (n+1)\Pi_n^{n-1} = C_{n+1}^n + C_n^{n-1}\Pi_n^1 + C_{n-1}^{n-2}\Pi_n^2 + \\ + C_{n-2}^{n-3}\Pi_n^3 + \ldots + C_2^1\Pi_n^{n-1} + \Pi_n^n, \\ (n+1)\Pi_n^n = 1 + \Pi_n^1 + \Pi_n^2 + \ldots + \Pi_n^{n-1} + \Pi_n^n. \end{gathered}$$

Первое из этих равенств очевидно. Из 2-го, 3-го, ..., n-го последовательно, учитывая, что $(n+1)-C_n^1=1$, $(n+1)-C_{n-1}^1=$ $=2$, ..., $(n+1)-C_2^1=n-1$, получаем

$$\begin{gathered}
\Pi_n^1=C_{n+1}^2,\\
2\Pi_n^2=C_{n+1}^3+C_n^2\Pi_n^1,\\
3\Pi_n^3=C_{n+1}^4+C_n^3\Pi_n^1+C_{n-1}^2\Pi_n^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(n-1)\Pi_n^{n-1}=C_{n+1}^n+C_n^{n-1}\Pi_n^1+C_{n-1}^{n-2}\Pi_n^2+\ldots+C_3^2\Pi_n^{n-2}.
\end{gathered}\tag{$**$}$$

Предположим теперь, что $n+1=p$ есть простое число. В таком случае

$$C_{n+1}^k=C_p^k=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}$$

при всяком k делится на p (ибо числитель дроби делится на p, а знаменатель не делится). Пользуясь этим, из первой формулы $(**)$ находим, что Π_n^1 делится на p, затем из второй, что Π_n^2 делится на p, затем из третьей, что Π_n^3 делится на p и так до Π_n^{n-1}.

Наконец, подставим в основное равенство

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)=$$
$$=x^{p-1}-\Pi_{p-1}^1x^{p-2}+\Pi_{p-1}^2x^{p-3}-\Pi_{p-1}^3x^{p-4}+\ldots+\Pi_{p-1}^{p-1}$$

значение $x=p$. Мы получим

$$(p-1)!=p^{p-1}-\Pi_{p-1}^1p^{p-2}+\Pi_{p-1}^2p^{p-3}-$$
$$-\Pi_{p-1}^3p^{p-4}+\ldots+\Pi_{p-1}^{p-3}p^2-\Pi_{p-1}^{p-2}p+\Pi_{p-1}^{p-1}.$$

Но $\Pi_{p-1}^{p-1}=(p-1)!$. Отбрасывая слева и справа $(p-1)!$, сокращая на p, перенося Π_{p-1}^{p-1}, в левую сторону и вынося справа p за скобки, мы получаем

$$\Pi_{p-1}^{p-2}=p(p^{p-3}-\Pi_{p-1}^1p^{p-4}+\Pi_{p-1}^2p^{p-5}-\ldots+\Pi_{p-1}^{p-3},$$

откуда следует, что Π_{p-1}^{p-2} делится на p^2 (ибо выражение в скобках при $p>3$, как мы доказали выше, тоже делится на p).

б) Приведем фигурирующую в условии задачи сумму дробей к общему знаменателю $[(p-1)!]^2$. Мы получим выражение

$$\frac{A}{[(p-1)!]^2},$$

где A есть сумма всевозможных произведений из чисел 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(p-1)^2$ по $p-2$. Для того чтобы доказать, что A делится на p, составим квадрат суммы Π_{p-1}^{p-2} (относительно обозначений см. решение задачи а)). Раскрыв скобки по правилу возведения в квадрат многочлена (квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов плюс сумма удвоенных произведений всевозможных пар членов), мы получим A и еще ряд членов (всевозможные удвоенные произведения). Рассмотрим какое-либо из этих удвоенных произведений:

$$2[1\cdot 2\ldots(i-1)(i+1)\ldots(p-1)]\times \\ \times[1\cdot 2\ldots(j-1)(j+1)\ldots(p-1)].$$

Очевидно, что это произведение равно

$$2[1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)\times \\ \times[1\cdot 2\ldots(i-1)(j+1)\ldots(j-1)(j+1)\ldots(p-1)].$$

Суммируя все такие выражения, мы покажем, что

$$(\Pi_{p-1}^{p-2})^2 = A + 2(p-1)!\Pi_{p-1}^{p-3}.$$

Отсюда

$$A = (\Pi_{p-1}^{p-2})^2 - 2(p-1)!\Pi_{p-1}^{p-3}.$$

и, в силу доказанного выше (см. решение задачи а)), A делится на p, что и требовалось доказать.

61. Дробь $\dfrac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\dfrac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a} = a + \dfrac{a^2+1}{a^3+2a}$ или одновременно с дробью $\dfrac{a^2+1}{a^3+2a}$. Дробь $\dfrac{a^2+1}{a^3+2a}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\dfrac{a^3+2a}{a^2+1} = a + \dfrac{a}{a^2+1}$ или одновременно с дробью $\dfrac{a}{a^2+1}$. Дробь $\dfrac{a}{a^2+1}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\dfrac{a^2+1}{a} = a + \dfrac{1}{a}$ или одновременно с дробью $\dfrac{1}{a}$, которая при целом a, очевидно, несократима.

62. Покажем прежде всего, что для любого целого числа b число разностей $a_k - a_l$, делящихся на b, не меньше числа разностей $k - l$, делящихся на b. С этой целью подсчитаем число разностей $a_k - a_l$, делящихся на b.

Пусть n_0 из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делятся на b, n_1 из них дают при делении на b остаток 1, n_2 дают остаток 2, n_3 — остаток 3, …, n_{b-1} — остаток $b-1$. Так как каждое число при делении на b дает один из остатков 0, 1, 2, 3, …, $b-1$, то ясно, что
$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{b-1} = n.$$
Для того чтобы разность $a_k - a_l$ делилась на b, надо, чтобы a_k и a_l давали при делении на b одинаковые остатки. Таким образом, из разностей $a_k - a_l$ на b будут делиться: $C_{n_0}^2 = \dfrac{n_0(n_0-1)}{2}$ попарных разностей n_0 чисел, делящихся на b, $C_{n_1}^2 = \dfrac{n_1(n_1-1)}{2}$ попарных разностей n_1 чисел, дающих при делении на b остаток 1, $C_{n_2}^2 = \dfrac{n_2(n_2-1)}{2}$ попарных разностей n_2 чисел, дающих остаток 2, и т. д. вплоть до $C_{n_{b-1}}^2 = \dfrac{n_{b-1}(n_{b-1}-1)}{2}$ попарных разностей n_{b-1} чисел, дающих при делении на b остаток $b-1$. Следовательно, общее число N разностей $a_k - a_l$, делящихся на b, равно
$$N = \frac{n_0(n_0-1)}{2} + \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ldots + \frac{n_{b-1}(n_{b-1}-1)}{2}.$$
Последнее выражение можно переписать в следующем виде:
$$N = \frac{n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{b-1}^2}{2} - \frac{n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{b-1}}{2} = \frac{n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{b-1}^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Преобразуем теперь первый член правой части этого равенства:

$$\frac{n_0^2+n_1^2+n_2^2+\ldots+n_{b-1}^2}{2}=\frac{1}{2}\big((n_0+n_1+n_2+\ldots+n_{b-1})^2-$$
$$-2n_0n_1-2n_0n_2-\ldots-2n_{b-2}n_{b-1}\big)=$$
$$=\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}\{[(n_0-n_1)^2-n_0^2-n_1^2]+[(n_0-n_2)^2-n_0^2-n_2^2]+\ldots$$
$$\ldots+[(n_{b-2}-n_{b-1})^2-n_{b-2}^2-n_{b-1}^2]\}=$$
$$=\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}[(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-2}-n_{b-1})^2-$$
$$-(n_0^2+n_1^2)-(n_0^2+n_2^2)-\ldots-(n_{b-2}^2+n_{b-1}^2)]=$$
$$=\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}[(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-2}-n_{b-1})^2-$$
$$-(b-1)(n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{b-1}^2)].$$

Перенесем член, содержащий сумму квадратов чисел n_k, в левую часть равенства и разделим обе части на b; получим

$$\frac{n_0^2+n_1^2+n_2^2+\ldots+n_{b-1}^2}{2}=$$
$$=\frac{n^2}{2b}+\frac{(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-2}-n_{b-1})^2}{2b},$$

откуда

$$N=\frac{(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-2}-n_{b-1})^2}{2b}+\frac{n^2}{2b}-\frac{n}{2}.$$

Точно так же доказывается, что число N' разностей $k-l$, где k и l — целые числа, $k>l$, $k\leqslant n$ и $l\geqslant 1$ делящихся на b, равно

$$N'=\frac{(n_0'-n_1')^2+(n_0'-n_2')^2+\ldots+(n_{b-2}'-n_{b-1}')^2}{2b}+\frac{n^2}{2b}-\frac{n}{2};$$

здесь n_k' есть число членов ряда 1, 2, 3, …, n, дающих при делении на b остаток k.

Из полученных формул сразу следует, что если $n=mb$ (n делится на b), то число N не меньше чем N': действительно, в этом случае числа n_0', n_1', n_2', …, n_{b-1}' все равны m и поэтому сумма квадратов попарных разностей этих чисел равна нулю. Менее очевидно, что и в том случае, когда n дает при делении на b остаток r, отличный от нуля: $n = mb + r$, где $0 < r < b$, имеет место неравенство $N \geqslant N'$. В этом случае r из чисел $n'_0, n'_1, n'_2, \ldots, n'_{b-1}$, (а именно числа $n'_1, n'_2, n'_3, \ldots, n'_r$) равны $m + 1$, а остальные числа n'_0, $n'_{r+1}, n'_{r+2}, \ldots, n'_{b-1}$ равны m. Для того чтобы доказать, что N не может быть меньше N', воспользуемся следующим искусственным приемом.

Так как сумма b чисел $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{b-1}$ равна $n = mb+r$, то хотя бы одно из этих чисел n_t не больше m: действительно, в противном случае сумма этих чисел была бы не меньше $b(m + 1) > n$. Прибавим теперь к нашим числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ еще одно число a_{n+1}, дающее при делении на b остаток 1. При этом к числу разностей $a_k - a_l$, добавятся n разностей $a_{n+1} - a_1, a_{n+1} - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n$, из которых ровно n_t будут делиться на b . Точно так же к числу разностей $k - l$ добавятся n разностей $(n+1)-1, (n+1)-2, \ldots, (n+1)-n$; из этих разностей, очевидно, $m \geqslant n_t$ будут делиться на b. Поэтому, если мы докажем, что из C^2_{n+1} разностей $a_k - a_l$ $(k > l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n + 1)$ не меньшее число их делится на b, чем среди разностей $k - l$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n + 1)$, то отсюда будет следовать, что из числа $C^2_{n_1}$ первоначальных разностей $a_k - a_l (k > l, k, l = 1, 2, \ldots, n)$ и подавно не меньше делилось на b, чем среди разностей $k - l$, где $k, l = 1, 2, \ldots, n$. Если число $n + 1$ делится на b, то последнее утверждение уже следует иэ приведенных выше соображений; если же $n + 1$ еще не делится на b, то мы аналогичным образом будем добавлять к ряду чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$, все новые и новые числа, пока общее число их не окажется кратным b и все разности $n'_i - n'_j$ не обратятся в нуль. Этим завершается доказательство нашего утверждения.

Из доказанного немедленно следует предложение задачи. Действительно, каково бы ни было простое число p, среди разностей $a_k - a_l$ имеется не меньше делящихся на p, чем среди разностей $k - l$; не меньше делящихся на p^2, чем среди разностей $k - l$; не меньше делящихся на p^3, чем среди разностей $k - l$ и т. д. Отсюда вытекает, что каждое простое число p входит в произведение всех разностей $(a_k - a_l)$ не в низшей степени, чем в произведение всех разностей $(k - l)$. А это означает, что в произведении всех дробей вида $\dfrac{a_k - a_l}{k - l}$ каждый простой множитель знаменателя можно будет сократить с соответствующим множителем числителя и, следовательно, произведение будет целым числом.

63. Числа нашего ряда имеют вид $1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}$. Рассмотрим наряду с этими числами числа $1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2k}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что

$$10^{4k+4} - 1 = (10^4 - 1) \cdot (1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}),$$
$$10^{2k+2} - 1 = (10^2 - 1) \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k}).$$

Кроме того, очевидно,

$$10^{4k+4} - 1 = (10^{2k+2} - 1)(10^{2k+2} + 1).$$

Сопоставляя все эти равенства, получаем

$$10^{4k+4} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}) = \\ = (10^2 - 1)(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1),$$

или, так как $\dfrac{10^4 - 1}{10^2 - 1} = 10^2 + 1 = 101$,

$$(1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}) \cdot 101 = \\ (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1).$$

Так как 101 есть простое число, то или $1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k}$ или $10^{2k+2} + 1$ делится на 101; при этом, если $k > 1$, то частное больше 1. Сократив на 101, мы получим, что число $1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}$ при $k > 1$ разлагается по крайней мере на два множителя, что и требовалось доказать. При $k = 1$ мы имеем число $10^4 + 1 = 10\,001$, которое тоже является составным ($10\,001 = 73 \cdot 137$).

Точно так же можно доказать, что все числа ряда

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}},\quad 1\underbrace{00\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}1,\quad 1\underbrace{00\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}},\quad 1\underbrace{00\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}},\quad 1\underbrace{00\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}1,\quad \ldots$$

являются составными.

64. а) $a^{128} - b^{128} = (a^{64} + b^{64})(a^{64} - b^{64}) =$

$$= (a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{32} - b^{32}) =$$
$$= (a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^{16} - b^{16}) = \ldots$$
$$\ldots = (a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^{8} + b^{8}) \times$$
$$\times (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$$

Следовательно, частное равно $a - b$.

б) Как и в предыдущей задаче,

$$\frac{a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}}}{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})(a^{2^k}+b^{2^k})} = a - b.$$

65. Заметим, что

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) =$$
$$= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) = \ldots$$
$$\ldots = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-3}} + 1)\ldots(2^2 + 1)(2 + 1)$$

(см. предыдущую задачу; последний множитель $2 - 1$ можно отбросить, так как $2 - 1 = 1$). Таким образом, число $2^{2^n} - 1 = (2^{2^n} + 1) - 2$ делится на все предыдущие числа нашего ряда. Отсюда следует, что если $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^k} + 1$, где $k < n$, имеют общий делитель, то на этот общий делитель должно делиться и число 2. Но 2 не может быть общим делителем двух чисел последовательности, так как все эти числа нечетные; следовательно, каждые два числа последовательности являются взаимно простыми.

66. 2^n, разумеется, не может делиться на 3. Если 2^n дает при делении на 3 остаток 1, то $2^n - 1$ делится на 3; если 2^n дает при делении на 3 остаток 2, то $2^n + 1$ делится на 3. Поэтому во всех случаях одно из двух чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$ делится на 3, и следовательно, если оба этих числа больше 3, то они не могут быть одновременно простыми.

67. а) Если бы простое число $p > 3$ давало при делении на 3 остаток 2, то $8p - 1$ делилось бы на 3. Поэтому число p

должно давать при делении на 3 остаток 1; но в этом случае $8p+1$ делится на 3. Если же $p=3$, то $8p+1=25$ — тоже составное число.

б) Если p не делится на 3, то p^2 дает при делении на 3 остаток 1 (см. решение задачи 53, б)) и, следовательно, $8p^2+1$ делится на 3. Таким образом, должно быть $p=3$, $8p^2+1=73$. Но в этом случае и число $8p^2-1=71$ — простое число.

68. Простые числа, кроме 2 и 3 дают при делении на 6 остаток 1 или 5, ибо если бы число давало при делении на 6 остаток 2 или 4, то оно было бы четным, а если бы оно давало остаток 3, то делилось бы на 3. Таким образом, любое простое число, больше 3, можно записать в виде $6n+1$ или $6n+5$. Квадраты этих выражений имеют вид $36n^2+12n+1$ и $36n^2+60n+25$. В обоих случаях при делении на 12 получается в остатке 1.

69. Из трех чисел, имеющих вид $6n+1$ или $6n+5$ (см. предыдущую задачу), по крайней мере два имеют одинаковый вид. Следовательно, их разность, равная d или $2d$, где d — разность прогрессии, делится на 6; поэтому d делится на 3. Кроме того, d как разность двух нечетных чисел делится на 2, поэтому d делится на 6. (См. также решение задачи 70, а).)

70. а) Так как простые числа (кроме 2) — числа нечетные, то разность прогрессии — число четное. Далее, если бы разность прогрессии не делилась на 3, то три члена прогрессии a_1, a_1+d, a_1+2d все давали бы разные остатки при делении на 3 (разность никаких двух из них не делится на 3) и, следовательно, хотя бы одно из них делилось бы на 3, что невозможно, так как все члены прогрессии по условию — простые числа (если $a_1=3$ то a_1+3d тоже делится на 3). Точно так же, если бы d не делилось на 5, то все числа a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d и a_1+4d давали бы при делении на 5 разные остатки и, следовательно, одно из них делилось бы на 5. Аналогично показывается, что если все члены арифметической прогрессии простые, то разность прогрессии должна делиться на 7. Итак, разность d искомой прогрессии должна быть кратна $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$; $d=210k$.

По условию задачи

$$a_{10}=a_1+9d=a_1+1890k<3000.$$

Но это неравенство невозможно при $k \geqslant 2$; значит, $k = 1$, Отсюда следует, что $a_1 < 3000 - 9d = 1110$.

Далее $210 = 11 \cdot 19 + 1$; следовательно, $(m+1)$-й член прогрессии можно представить в виде

$$a_{m+1} = a_1 + (11 \cdot 19 + 1) \cdot m = 11 \cdot 19m + (a_1 + m).$$

Отсюда следует, что если a_1 дает при делении на 11 остаток 2, то a_{10} делится на 11; если a_1 дает при делении на 11 остаток 3, то a_9 делится на 11, и т. д. Таким образом, доказываем, что a_1 не может давать при делении на 11 остаток 2, 3, 4, ... или 10. Если a_1 отлично от 11, то a_1 не может делиться на 11 (ибо a_1 — простое); значит a_1 или равно 11 или дает при делении на 11 остаток 1. Далее, используя то, что $210 = 13 \cdot 16 + 2$ и, следовательно,

$$a_{m+1} = a_1 + (13 \cdot 16 + 2)m = 13 \cdot 16m + (a_1 + 2m),$$

можно показать, что a_1 при делении на 13 может давать только остатки 2, 4, 6, 8, 10 или 12. Учитывая, что a_1 нечетно (ибо все члены прогрессии нечетны), мы заключаем, что a_1 или равно 11 или имеет один из следующих видов:

$$2 \cdot 11 \cdot 13l + 23 = 286l + 23, \quad 286l + 45, \quad 286l + 67,$$
$$286l + 155, \; 286l + 177 \;\text{ или }\; 286l + 199.$$

Учитывая, что $a_1 < 1110$, нам остается только проверить следующие возможные значения a_1:

11; 23, 309, 595, 881; 45, 331, 615, 903; 67, 353, 637, 925;
155, 441, 727, 1013; 177, 463, 749, 1035; 199, 485, 771, 1057.

Простыми из этих чисел являются только

11, 23, 881, 331, 67, 353, 727, 1013, 463 и 199.

Проверив соответствующие 10 прогрессий, мы найдем единственную прогрессию, удовлетворяющую условиям задачи:

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

б) Задача решается аналогично задаче а). Прежде всего, если a_1, отлично от 11, то совершенно аналогично решению задачи а) показывается, что знаменатель d прогрессии должен быть пропорционален $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 2310$ ($d = 2310k$); отсюда вытекает, что

$$a_{11} = a_1 + 23100k > 20000.$$

Остается только исследовать случай $a_1 = 11$; здесь можно только утверждать, что $d = 210k$. Воспользовавшись тем, что $210 = 13\cdot 16 + 2$, мы сможем записать следующее выражение для общего члена прогрессии:

$$a_{n+1} = 11 + (13\cdot 16 + 2)kn = 13(16kn + 1) + 2(kn - 1).$$

Но при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$ удается подобрать такой номер $n < 10$, что $kn - 1$ делится на 13 и, следовательно, a_{n+1} делится на 13 и не является простым; это значение и будет соответственно равно 1, 7, 9, 10, 8, 2, 5, 3, 4. Если же $k = 6$, $d = 210\cdot 6 = 1260$, то

$$a_4 = 11 + 3\cdot 1260 = 3791$$

делится на 17. Таким образом, если $a_1 = 11$, то $k > 10$, а следовательно, $d \geqslant 2100$ и опять $a_{10} > 20000$.

71. а) Если два неравных числа отличаются одно от другого не больше чем на 4, то они не могут иметь общих делителей, больших 4. Таким образом, два числа из наших пяти последовательных чисел могут иметь или общий делитель 2, или общий делитель 3, или общий делитель 4, или быть взаимно простыми. Из пяти последовательных чисел по крайней мере два будут нечетны; из двух последовательных нечетных чисел по крайней мере одно не будет делиться на 3. Следовательно, среди наших чисел имеется хотя бы одно нечетное число, не делящееся на 3; это число заведомо будет взаимно просто с остальными четырьмя числами.

б) Решение этой задачи близко к решению задачи а), но значительно сложнее. Если два неравных числа отличаются друг от друга не больше чем на 15, то они не могут иметь общих делителей, больших 15. Так как два числа заведомо взаимно просты, если они не имеют общих простых делителей, то, для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно показать, что среди 16 последовательных целых чисел можно найти число, не имеющее с остальными 15 числами общих делителей 2, 3, 5, 7, 11 и 13; это число и будет взаимно просто со всеми остальными.

Прежде всего из 16 чисел вычеркнем как не удовлетворяющие нашим требованиям восемь четных чисел; после этого у нас останется восемь последовательных нечетных чисел. Из восьми последовательных нечетных чисел, очевидно, на 3 делятся или 1-е, 4-е, 7-е, или 2-е, 5-е, 8-е, или 3-е, 6-е; на 5 делятся или 1-е и 6-е, или 2-е и 7-е, или 3-е и 8-е, или же только одно число; на 7 делятся или 1-е и 8-е, или же только одно число; на 11 и на 13 делится не больше одного числа. Если среди наших восьми последовательных нечетных чисел имеется не больше пяти чисел, делящихся на 3, или на 5, или на 7, то среди этих восьми чисел найдется число, не делящееся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11, ни на 13; это число заведомо будет взаимно просто со всеми остальными. Рассмотрим теперь все те случаи, когда чисел, делящихся или на 3, или на 5, или на 7, будет не меньше 6.

Пусть среди наших восьми нечетных последовательных чисел на 3 делятся три числа; тогда на 5 могут делиться два из оставшихся чисел только в том случае, если одно из крайних чисел делится на 3, а второе — на 5. Вычеркнув эти пять чисел, мы оставим 2-е, 5-е и 6-е числа, или же 7-е, 4-е и 3-е числа. Рассмотрим сначала первый случай. 2-е, 5-е и 6-е нечетные числа являются в ряду всех 16 последовательных чисел 4-м, 10-м и 12-м или 3-м, 9-м и 11-м числами. Ни одно из этих чисел не может иметь ни с одним из остальных 15 чисел общий делитель 13, так как каждое из остальных чисел отличается от него меньше чем на 13. Следовательно, если эти три числа не делятся ни на 3, ни на 5, то одно из них (а именно, то, которое не делится ни на 7, ни на 11) будет взаимно просто со всеми остальными числами. Точно так же проводится доказательство и в том случае, когда после вычеркивания чисел, делящихся на 3 и на 5, остаются 3-е, 4-е и 7-е числа.

Если из наших восьми чисел на 3 делятся три числа, то на 7 не могут делиться никакие два из оставшихся. Если же на 3 делятся только два числа, 3-е и 6-е, то возможно, что из оставшихся на 7 делятся два, а именно 1-е и 8-е, и на 5 делятся два: 2-е и 7-е. Вычеркнув эти шесть чисел, мы оставим из наших восьми нечетных чисел 4-е и 5-е, которые не будут уже делиться ни на 3, ни на 5, ни на 7. Оба эти числа будут взаимно простыми с каждым из остальных 15 чисел нашей последовательности, так как каждое из остальных чисел отличается от них меньше чем на 11 и поэтому не может иметь с ними общий делитель 11 или 13.

Итак, мы полностью доказали, что из 16 последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с остальными.

Примечание. Аналогично, но более просто доказывается, что из 8 или из 10, или из любого другого числа, *меньшего* 16, последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с остальными. Для 17 чисел это предложение уже неверно: например, среди 17 последовательных чисел от 1184 до 1220 нет ни одного взаимно простого со всеми остальными. По-видимому, и для любого другого числа k, большего 16, можно найти k последовательных целых чисел, среди которых нет ни одного взаимно простого со всеми остальными; однако доказательство этого общего предложения неизвестно.

72. Искомое число будет равно произведению $A_1 \cdot B_1$, где A_1 состоит из 666 цифр 9, а B_1 — из 666 цифр 2. Но A_1 на 1 меньше числа 10^{666}, выражаемого единицей с 666 нулями. Поэтому умножить число B_1 на это число — то же самое, что умножить B_1 на 10^{666} (при этом получится число, состоящее из 666 двоек и 666 нулей) и из результата вычесть число B_1. Нетрудно видеть, что получаемая разность будет иметь вид $\underbrace{22\ldots2}_{665\text{ раз}}1\ \underbrace{77\ldots7}_{665\text{ раз}}8$.

73. Число 777 777 делится без остатка на 1001 и дает в частном 777. Поэтому число $\underbrace{777\ldots7}_{996\text{ раз}}00000$ дает при делении на 1001 в частном

$$\underbrace{777000777000\ldots777000}_{\text{группа 777000 повторяется 166 раз}}\ 00.$$

Так как, кроме того, число 77 777 дает при делении на 1001 в частном 77 и в остатке 700, то частное от деления A на 1001 имеет вид

$$\underbrace{777000777000\ldots777000}_{\text{группа 777000 повторяется 166 раз}}\ 77,$$

а остаток равен 700.

74. Так как число 222 222 не является полным квадратом, то десятичная запись искомого числа имеет вид

$$222222a_7a_8\ldots a_n,$$

где a_7, a_8, …, a_n — какие-то не известные нам цифры.

Предположим сначала, что число n цифр искомого числа четно: $n = 2k$. Будем теперь извлекать корень из этого числа по обычным правилам:

$$\sqrt{22\,22\,22\,a_7a_8\ldots a_{2k-1}a_{2k}} = 471\,405$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \underline{16} \\
87 & 622 \\
7 & \underline{609} \\
941 & 1322 \\
1 & \underline{941} \\
9424 & 381a_7a_8 \\
4 & \underline{376\,9\ \,6} \\
942805 & x_1\,x_2\,x_3\,a_9\,a_{10}\,a_{11}\,a_{12} \\
5 & \underline{4\ \,7\ \,1\ \,4\ \,0\ \,2\ \,5}
\end{array}$$

(пятая цифра результата есть 0, так как x_1, очевидно, может быть равно только 4 или 5 и, следовательно, меньше 9; по аналогичной причине шестая цифра, если она последняя, есть 5).

Остаток равен нулю, если $a_9 = 4$, $a_{10} = 0$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 5$; $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$, откуда легко выводим $a_8 = 6 + 1 = 7$, $a_7 = (7 + 9) - 10 = 6$. Таким образом, наименьшее число, имеющее четное число цифр и удовлетворяющее условию задачи, есть $222\,222\,674\,025 = 471\,405^2$.

Аналогично рассматривается случай, когда $n = 2k + 1$ нечетно:

$$\sqrt{2\,22\,22\,2a_7a_8a_9\ldots a_{2k}a_{2k+1}} = 149071\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \underline{1} \\
24 & 122 \\
4 & \underline{96} \\
289 & 2622 \\
9 & \underline{2601} \\
29807 & 21\,2a_7\,a_8\,a_9 \\
7 & \underline{20\,86\ \,4\ \,9} \\
298141 & x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,a_{10}\,a_{11} \\
1 & \underline{2\ \,9\ \,8\ \,1\ \,4\ \,1} \\
298142 & x_5\,x_6\,x_7\,x_8\,x_9\,x_{10}\,a_{12}a_{13}
\end{array}$$

Так как число, образованное цифрами x_1, x_2, не меньше 33 $(= 119-86)$ и не больше 43 $(= 129-86)$, то шестая цифра корня равна 1, причем на этом процесс извлечения корня не обрывается, а продолжается дальше. Следовательно, наименьшее число, имеющее нечетное число цифр и удовлетворяющее условию задачи, не менее чем тринадцатизначно, т. е. превосходит число 222 222 674 025. Итак, искомым числом будет 222 222 674 025.

75. Если число α меньше 1, то и $\sqrt{\alpha}$ меньше 1. Предположим теперь, что десятичная дробь, равная $\sqrt{\alpha}$, начинается с меньшего числа девяток, чем 100; это означает, что $\sqrt{\alpha} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$. Возводя обе части последнего неравенства в квадрат, получаем

$$\alpha < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}.$$

Но

$$1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100};$$

поэтому $\alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ и, значит, десятичная дробь, равная α, не может начинаться со 100 девяток.

76. Искомое шестизначное число, начинающееся с цифр 523 и делящееся без остатка на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, можно представить в виде $523\,000 + X$, где X — трехзначное число. Но непосредственное деление дает $523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352$, т. е. 523 000 дает при делении на 504 остаток 352. Так как сумма числа 523 000 и трехзначного числа X должна делиться на 504, то отсюда следует, что X может быть равно либо

$$504 - 352 = 152,$$

либо

$$2 \cdot 504 - 352 = 656$$

(ибо число $3 \cdot 504 - 352$ уже четырехзначно). Итак, условию задачи удовлетворяют два числа: 523 152 и 523 656.

77. Пусть N — искомое число. По условию задачи имеем

$$N = 131k + 112 = 132l + 98,$$

где k и l — целые положительные числа. При этом так как N четырехзначно, то, очевидно,

$$l = \frac{N-98}{132} < \frac{10000-98}{132} \leqslant 75.$$

Далее, имеем

$$131k + 112 = 132l + 98; \quad 131(k-l) = l - 14.$$

Отсюда видно, что если $k-l$ отлично от нуля, то $l-14$ по абсолютной величине превосходит 130, что невозможно, если $l \leqslant 75$. Таким образом, должно быть $k-l=0$, $k=l$, откуда сразу получаем

$$l - 14 = 0, \quad k = l = 14,$$
$$N = 131\cdot 14 + 112 (= 132\cdot 14 + 98) = 1946.$$

78. а) Выписанное в условии задачи $2n$-значное число можно преобразовать так:

$$4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} + 4\cdot 10^{2n-3} + 9(10^{2n-4} + 10^{2n-5} + \ldots$$
$$\ldots + 10^n) + 5\cdot 10^{n-1} + 5\cdot 10^{n-2} = 4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} +$$
$$+\ 4\cdot 10^{2n-3} + 9\cdot 10^n\frac{10^{n-3}-1}{9} + 5\cdot 10^{n-1} + 5\cdot 10^{n-2} =$$
$$= 4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} + 5\cdot 10^{2n-3} - 10^n + 5\cdot 10^{n-1}\ +$$
$$+\ 5\cdot 10^{n-2} = \frac{1}{2}(8\cdot 10^{2n-1} + 18\cdot 10^{2n-2} + 10\cdot 10^{2n-3} -$$
$$-\ 2\cdot 10^n + 10^n + 10^{n-1}) = \frac{1}{2}\,(9\cdot 10^{2n-1} + 9(10^{2n-2} - 9\cdot 10^{n-1}) =$$
$$= \frac{[(10^n-1)+10^{n-1}]\cdot 9\cdot 10^{n-1}}{2}.$$

Но этому же равна и сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым членом 10^{n-1} и последним членом $10^n - - 1$ (число членов прогрессии равно $10^n - 10^{n-1} = 9\cdot 10^{n-1}$) — сумма всех n-значных чисел.

б) Число тех из рассматриваемых чисел, у которых на первом месте стоит данная цифра a (a может быть равно 1, 2, 3, 4 или 5), есть $6\cdot 6\cdot 3 = 108$ (ибо на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, а на третьем месте — любая из т р е х цифр 0, 2, 4, так как рассматриваются только четные числа). Отсюда общая сумма всех целых тысяч, содержащихся во всех наших числах, равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$.

Аналогично число чисел, у которых на втором месте стоит данная цифра, равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$, так как на первом месте может стоять одна из п я т и цифр 1, 2, 3, 4 или 5. Отсюда общая сумма всех целых сотен (после вычета всех целых тысяч), содержащихся во всех наших числах, равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000$.

Таким же образом получаем, что общая сумма всех целых десятков равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 10 = 13500$ и, наконец, сумма единиц равна $(2 + 4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 1080$.

Искомая сумма равна

$$1\,620\,000 + 135\,000 + 13\,500 + 1080 = 1\,769\,580.$$

79. Рассмотрим сначала все целые числа от 0 до 99 999 999; при этом те из этих чисел, которые имеют меньше восьми цифр, дополним слева нулями так, чтобы они стали восьмизначными. Мы будем иметь 100 000 000, восьмизначных чисел, для записи которых нам потребуется, очевидно, 800 000 000 цифр. При этом здесь каждая из 10 цифр будет использована равное число раз, поскольку все они совершенно равноправны (нуль может стоять на первом месте точно так же, как и всякая другая цифра). Следовательно, каждая цифра будет у нас использована 80 000 000 раз.

Теперь подсчитаем, сколько здесь будет лишних нулей (т. е. нулей, приписанных спереди чисел, имеющих меньше восьми цифр). Однозначных чисел (не считая нуля) имеется всего девять, двузначных чисел $99 - 9 = 90$, трехзначных чисел $999 - 99 = 900$ и т. д. Так как к однозначной цифре мы приписали слева семь нулей, к двузначной — шесть и т. д., то общее число лишних нулей (не считая цифр первого числа, которое у нас записывалось так: 00 000 000) будет равно

$$7 \cdot 9 + 6 \cdot 90 + 5 \cdot 900 + 4 \cdot 9\,000 + 3 \cdot 90\,000 + 2 \cdot 900\,000 + \\ + 1 \cdot 9\,000\,000 = 11\,111\,103.$$

Припишем теперь 1 слева первого числа 00 000 000; при этом мы получим все целые числа от 1 до 100 000 000. Мы видим, что для записи этих чисел требуется 80 000 000 двоек, троек и т. д. до девяток, 80 000 001 единица (одну лишнюю единицу мы приписали слева числа 00 000 000) и 80 000 000 − − 11 111 103 = 68 888 897 нулей.

80. Однозначных чисел всего имеется девять, двузначных всего имеется $99 - 9 = 90$, трехзначных $999 - 99 = 900$ и вообще n-значных $9 \cdot 10^{n-1}$.

Однозначные числа займут в выписанном нами ряду девять мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трехзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест, четырехзначные $9000 \cdot 4 = 36\,000$ мест, пятизначные $90\,000 \cdot 5 = 450\,000$ мест. Отсюда видно, что интересующая нас цифра будет принадлежать пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырехзначным числам, будут иметь номера от 1 и до $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$. Для того чтобы узнать, сколько пятизначных чисел уложится в промежутке от 38 889-го места до 206 788-го, надо разделить разность $206\,788 - 38\,889 = 167\,899$ на 5 (деление с остатком):

$$206\,788 - 38\,889 = 5 \cdot 33\,579 + 4.$$

Таким образом, искомая цифра будет принадлежать 33 580-му пятизначному числу, т. е. числу 43 579 (так как первое пятизначное число есть 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте. Следовательно, искомая есть 7.

81. Допустим, что дробь $0,1234\ldots$ периодическая, n — число цифр периода, k — число цифр до периода. Рассмотрим число $N = 10^m$, где m — какое-нибудь целое число, не меньшее чем $n + k$; это есть единица с m нулями на конце. При составлении нашей дроби мы выписываем подряд все целые числа; следовательно, где-то будет расположено и число N. Но из того, что в ряду цифр нашей бесконечной десятичной дроби где-то стоят подряд $m \geqslant n + k$ нулей, следует, что период дроби состоит из одних нулей. Так как это, очевидно, невозможно, то дробь $0,1234\ldots$ непериодическая.

82. Разложим сначала девять гирь, веса которых равны соответственно n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $\ldots$, $(n+8)^2$, на три группы следующим образом.

I группа n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$:

$$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=3n^2+24n+74;$$

II группа $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$:

$$(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2=3n^2+24n+74;$$

III группа $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$:

$$(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2=3n^2+24n+56.$$

Таким образом, мы видим, что вес первой и второй групп один и тот же, а третья легче их на 18. Затем следующие за ними девять гирь разложим аналогично, однако так, чтобы первая и третья группы имели одинаковый вес, а вторая была легче их на 18; наконец, последующие девять гирь разложим так, чтобы вторая и третья группы имели одинаковый вес, а первая была легче их на 18. Сгруппировав затем все первые, все вторые и все третьи группы этих трех разбиений, мы получим разложение любых 27 последовательных гирь на три группы равного веса.

83. Проведем луч от острия булавки через какую-нибудь из вершин многоугольника. Если этот луч повернуть на $25\frac{1}{2}^\circ$, то он пройдет через другую вершину.

$25\frac{1}{2}^\circ$ составляет $\frac{17}{240}$ окружности. Так как 17 и 240 взаимно просты, то, поворачивая на $25\frac{1}{2}^\circ$ наш луч 1, 2, 3, … …, 239 раз, мы каждый раз будем иметь новое положение луча. Действительно, за m поворотов луч поворачивается на $\frac{17m}{240}$ окружности. Чтобы после k-го и l-го $(k>l)$ поворотов луч попал в одно и то же положение, $\frac{17k}{240}$ окружности должно отличаться от $\frac{17l}{240}$ окружности на целое число окружностей, т. е. $\frac{17(k-l)}{240}$ должно быть целым числом. Поэтому $k-l$ должно делиться на 240, откуда либо $k=l$, либо $k\geqslant 240$. Итак, вместе с первоначальным положением мы получим 240 разных лучей. На каждом из этих лучей лежит по вершине и, следовательно, вершин не меньше 240. С другой стороны правильный 240-угольник при повороте на $\frac{17}{240}$ окружности совмещается со своим первоначальным положением. Таким образом, наименьшее число сторон равно 240.

84. а) Первые цифры трех искомых чисел должны быть наименьшими; следовательно, эти числа в десятичной записи имеют вид

$$\overline{1Aa},\ \overline{2Bb},\ \overline{3Cc},$$

где символ $\overline{xyz}$ обозначает число, состоящее из цифр x, y, z:

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z.$$

Докажем, что: 1) $A < B < C$; 2) $a < b < c$; 3) каждая из цифр a, b, c больше каждой из цифр A, B, C.

Действительно:

1) если бы, например, было $A > B$, то мы имели бы $\overline{Aa} > \overline{Bb}$ и

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} - \overline{2Aa} \cdot \overline{1Bb} = (100 + \overline{Aa})(200 + \overline{Bb}) - \\ - (200 + \overline{Aa})(100 + \overline{Bb}) = 100(\overline{Aa} - \overline{Bb}) > 0$$

и, следовательно, $\overline{1Bb} \cdot \overline{2Aa} \cdot \overline{3Cc} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$;

2) если бы, например, было $a > b$, то мы имели бы

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} - \overline{1Ab} \cdot \overline{2Ba} = (10 \cdot \overline{1A} + a)(10 \cdot \overline{2B} + b) - \\ - (10 \cdot \overline{1A} + b)(10 \cdot \overline{2B} + a) = (10 \cdot \overline{2B} - 10 \cdot \overline{1A})(a - b) > 0$$

и, следовательно, $\overline{1Ab} \cdot \overline{2Ba} \cdot \overline{3Cc} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$;

3) если бы было $C > a$, $C = a + x$, где $x > 0$ (в силу 1) и 2) C — самая большая из цифр A, B, C, а a — самая маленькая из цифр a, b, c), то мы имели бы

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{3Cc} - \overline{1AC} \cdot \overline{3ac} = \overline{1Aa} \cdot (\overline{3ac} + 10x) - \\ - (\overline{1Aa} + x)(\overline{3ac}) = x(10 \cdot \overline{1Aa} - \overline{3ac}) > 0$$

и, следовательно, $\overline{1AC} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3ac} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$.

Из 1), 2) и 3) следует $A < B < C < a < b < c$, и искомое произведение имеет вид

$$147 \cdot 258 \cdot 369.$$

б) Искомое произведение должно иметь вид

$$\overline{9Aa} \cdot \overline{8Bb} \cdot \overline{7Cc}.$$

Аналогично решению задачи а) можно доказать, что: 1) $A < B < C$; 2) $a < b < c$; 3) каждая из цифр a, b, c меньше каждой из цифр A, B, C.

Из 1), 2) и 3) следует, что $a < b < c < A < B < C$, и, следовательно, искомое произведение имеет вид

$$941 \cdot 852 \cdot 763.$$

85. Нам дано, что $m + (m+1) + \ldots + (m+k) = 1000$. По формуле суммы членов арифметической прогрессии имеем

$$\frac{2m+k}{2} \cdot (k+1) = 1000,$$

или

$$(2m+k)(k+1) = 2000.$$

Так как

$$(2m+k) - (k+1) = 2m - 1$$

нечетно, то из двух последних множителей один четен, а второй нечетен. Кроме того, очевидно, $2m + k > k + 1$. Отсюда вытекает, что наша задача имеет следующие решения:

$$\begin{array}{llll} 2m+k=2000, & k+1=1, & m=1000, & k=0; \\ 2m+k=400, & k+1=5, & m=198, & k=4; \\ 2m+k=80, & k+1=25, & m=28, & k=24; \\ 2m+k=125, & k+1=16, & m=55, & k=15. \end{array}$$

86. а) Пусть наше число отлично от любой степени 2. Тогда имеет место равенство

$$N = 2^k(2l+1),$$

где 2^k — наибольшая степень 2, на которую делится N (k может быть равно нулю), а $2l+1$ — наибольший нечетный делитель числа N. Далее, имеем

$$(2^k - l) + (2^k - l + 1) + \ldots + (2^k - l + 2l - 1) + (2^k - l + 2l) =$$
$$= \frac{(2l+1)(2^k - l + 2^k - l + 2l)}{2} = 2^k(2l+1) = N.$$

При этом, если несколько первых из этих $2l+1$ последовательных целых чисел будут отрицательными (т. е. $l > 2^k$), то их можно будет сократить с первыми положительными числами и N опять представится в виде суммы некоторого числа (меньшего $2l+1$) положительных целых чисел.

Предположим теперь, что какое-нибудь число вида 2^k можно представить в виде суммы m последовательных целых положительных чисел $n, n+1, \ldots, n+m-2, n+m-1$. Тогда

$$2^{k+1} = 2\,[n + (n+1) + \ldots + (n+m-2) + (n+m-1)] = \\ = m(n+n+m-1) = m(2n+m-1).$$

Но разность $(2n+m-1)-m = 2n-1$ нечетна, следовательно, одно из чисел, m или $2n+m-1$, нечетно (причем оба они отличны от 1, ибо $m > 1$ и $n > 0$). Значит, последнее равенство невозможно (ибо 2^{k+1} не имеет нечетных делителей, отличных от 1).

б) Имеем

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (2m-1) = \\ = \frac{(2n+1)+(2m-1)}{2}(m-n) = (m+n)(m-n).$$

Поэтому если число N представимо в виде суммы последовательных нечетных чисел, то оно составное (разлагается на множители $m+n$ и $m-n$). С другой стороны, каждое нечетное составное число N можно представить в виде произведения двух нечетных множителей a и b $(a \geqslant b)$ и, следовательно, $N = ab = (m+n)(m-n)$, где $m = \dfrac{a+b}{2}$, $n = \dfrac{a-b}{2}$, есть сумма нечетных чисел от $a-b+1$ до $a+b-1$.

Далее, в формуле $N = (m+n)(m-n)$ множители $m+n$ и $m-n$ оба четны или оба нечетны; если N четно, то эти множители, очевидно, должны быть четными. Но в таком случае N делится на 4 (и $m+n$ и $m-n$ делятся на 2); следовательно, если четное число N не делится на 4, то его нельзя представить в виде суммы последовательных нечетных чисел. Если же $N = 4n$ делится на 4, то N можно представить в виде суммы двух последовательных нечетных чисел $2n-1$ и $2n+1$.

в) Легко видеть, что

$$(2^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \ldots + (n^{k-1} - 1) + \\ + (n^{k-1} + 1) + \ldots + (n^{k-1} + n - 3) + (n^{k-1} + n - 1) = \\ = \frac{(n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} + n - 1)}{2} \cdot n = n^k$$

(все слагаемые этой суммы нечетны, ибо n^{k-1} и n одновременно четны или нечетны).

87. Обозначим эти числа через $n, n+1, n+2, n+3$. Сумма их произведения и единицы имеет вид

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = [n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = \\ = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = \\ = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2;$$

следовательно, эта сумма является квадратом целого числа $(n^2 + 3n + 1)$.

88. Докажем, что эти числа принимают не более четырех различных значений. Допустим, что это неверно и среди наших $4n$ чисел существуют пять чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, попарно различных между собой. Будем считать, что $a_1 < a_2 < < a_3 < a_4 < a_5$.

Рассмотрим числа a_1, a_2, a_3, и a_4. Согласно нашему условию из них можно составить геометрическую пропорцию; следовательно, произведение двух из этих чисел (крайних членов пропорции) равно произведению двух других. Но это возможно только, если

$$a_1 a_4 = a_2 a_3$$

(равенство $a_1 a_3 = a_2 a_4$ невозможно, так как $a_1 < a_2$, $a_3 < a_4$; еще очевиднее, что не может иметь места равенство $a_1 a_2 = = a_3 a_4$).

Рассмотрим теперь числа a_1, a_2, a_3, a_5. Таким же образом, как и выше, можно доказать, что $a_1 a_5 = a_2 a_3$. Следовательно, $a_1 a_4 = a_1 a_5$, $a_4 = a_5$, что противоречит нашему предположению.

Итак, мы доказали, что каждое из $4n$ чисел принимает одно из не более чем четырех различных значений. Поэтому какое-нибудь из этих значений принимается не менее чем n числами.

89. Отметим, что четность или нечетность разности двух чисел зависит только от четности и нечетности уменьшаемого и вычитаемого. Условимся обозначать четные числа буквой *ч*, а нечетные — буквой *н*. Всего возможны следующие шесть существенно различных комбинаций начальных чисел A, B, C, D: 1°) *ч, ч, ч, ч*; 2°) *ч, ч, ч, н*; 3°) *ч, ч, н, н*; 4°) *ч, н, ч, н*; 5°) *ч, н, н, н*; 6°) *н, н, н, н*. Все остальные комбинации могут быть получены из этих шести циклической перестановкой чисел (перестановкой без изменения порядка; при этом 1-е число считается следующим за 4-м). Проверим, что во всех случаях не позднее чем через четыре шага мы придем к четверке четных чисел. Действительно, комбинация 1°) сразу состоит из четных чисел; в случае комбинации 6°) мы в один шаг приходим к комбинации 1°); в случае комбинации 4°) мы в один шаг приходим к комбинации 6°) и, следовательно, в два шага — к комбинации 1°); в случае комбинации 3°) мы в один шаг приходим к комбинации 4°) и, следовательно, в три шага — к комбинации 1°); наконец, в случае комбинаций 2°) и 5°) мы в один шаг приходим к комбинации 3°) (в случае комбинации 5°) — к комбинации, получающейся из 3°) циклической перестановкой) и, следовательно, в четыре шага — к комбинации 1°). Таким образом, мы во всех случаях через четыре шага придем к четверке четных чисел.

Продолжим теперь процесс образования новых четверок чисел; так же, как выше, мы убедимся, что еще через четыре шага мы придем к числам, делящимся на 4; еще через четыре шага — к числам, делящимся на 8, и т. д. Таким образом, продолжая процесс достаточно долго, мы сможем прийти к четверке чисел, делящихся на *любую* (сколь угодно высокую!) степень двух. Так как числа по абсолютной величине не увеличиваются, то это означает, что мы, в конце концов, придем к четверке чисел, состоящей из одних нулей (если все числа A, B, C, D меньше 2^n, то мы заведомо придем к четверке нулей через $4n$ шагов, но можем прийти к ней и значительно раньше).

Примечание. Аналогично можно показать, что если взять не 4, а 8, 16, ... или любое другое число $n = 2^k$ целых положительных чисел, то, поступая аналогично вышеизложенному, мы через конечное число шагов придем к системе n чисел, являющихся одними нулями. Если число n не является степенью двух, то дело обстоит по-другому; так, например, исходя из тройки чисел 1, 1, 0, мы никогда не придем к тройке 0, 0, 0:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 0, \\ 0, & 1, & 1, \\ 1, & 0, & 1, \\ 1, & 1, & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Отметим еще, что числа A, B, C, D могут быть и не целыми, а рациональными, — этот случай несущественно отличается от того случая, когда числа A, B, C, D — целые, ибо дроби можно привести к общему знаменателю, который в дальнейших рассуждениях не играет роли. Если числа A, B, C, D — иррациональные, то утверждение задачи становится неверным.

90. а) Нетрудно видеть, что следующее расположение 100 первых целых чисел удовлетворяет условию задачи:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

б) Пусть $a_1^{(1)}$ есть первое (самое левое) из выписанных чисел, $a_2^{(1)}$ — первое из оставшихся, большее чем $a_1^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ — первое из следующих за $a_2^{(1)}$, большее чем $a_2^{(1)}$, и т. д. Таким образом, мы составим последовательность возрастающих чисел $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots, a_{i_1}^{(1)}$. Если в этой последовательности имеется больше 10 чисел (т. е. если $i_1 > 10$), то задача уже решена. Если же $i_1 \leqslant 10$, то мы вычеркнем все эти числа и из оставшихся $101 - i_1$ чисел составим *точно таким же образом* новую последовательность $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots, a_{i_2}^{(2)}$ возрастающих чисел. Продолжая этот процесс, мы выделим из наших 101 числа ряд возрастающих последовательностей. Если хотя бы одна из этих последовательностей содержит больше 10 чисел, то наша задача уже решена; таким образом, нам остается только рассмотреть случай, когда в каждой из выделенных последовательностей имеется не больше 10 чисел.

Так как у нас имеется всего 101 число, то в рассматриваемом случае общее число k выделенных последовательностей возрастающих чисел не может быть меньше 11. В таком случае мы утверждаем, что в ряду из 101 числа можно выбрать 11 чисел, следующих один за другим в убывающем порядке. Эти числа мы будем выбирать с конца следующим образом. Последним из них будет последнее число $a_{i_k}^{(k)}$ последней из наших возрастающих последовательностей. Затем выберем число из предпоследней последовательности, расположенное слева от $a_{i_k}^{k}$ ближе всего к нему. Это число больше $a_{i_k}^{(k)}$, ибо в противном случае в процессе построения предпоследней последовательности мы бы выписали вслед за ним число $a_{i_k}^{(k)}$ в то время как на самом деле число $a_{i_k}^{(k)}$ попало в другую последовательность. Точно так же вслед за этим выписываем число из третьей от конца последовательности, расположенное слева от выбранного числа предпоследней последовательности ближе всего к нему, и т. д. Таким образом, мы построим последовательность чисел, которые идут возрастая, если их рассматривать в порядке справа налево, т. е. убывающую последовательность; число членов этой последовательности равно числу k выбранных возрастающих последовательностей, т. е. не меньше 11.

Примечание. Совершенно аналогично можно доказать, что $(n-1)^2$ целых положительных чисел можно расположить так, что никакие n из них не будут следовать один за другим в порядке возрастания или убывания, но при любом расположении $k > (n-1)^2$ целых положительных чисел какие-то n из этих чисел обязательно будут следовать одно за другим в порядке возрастания или убывания.

91. а) Первое решение. Рассмотрим наибольшие нечетные делители выбранных 101 числа, т. е. числа, которые получаются, если разделить каждое число на наибольшую степень двойки, которую оно содержит множителем. Так как различных нечетных чисел, не превосходящих 200, имеется всего 100, то среди этих наибольших нечетных делителей чисел будут два одинаковых. Но это означает, что среди наших 101 числа имеются два, отличающихся одно от другого только тем, что множитель 2 входит в эти числа в разной степени. Очевидно, что большее из этих чисел будет делиться на второе.

Второе решение. Можно также доказать это предложение методом математической индукции. Проверим, что если из четырех чисел 1, 2, 3 и 4 выбраны три числа, то одно из них делится на другое (еще легче видеть, что если из чисел 1, 2 выбраны два числа, то одно из них делится на второе). Докажем теперь, что если из $2n$ чисел от 1 до $2n$ нельзя выбрать $n+1$ чисел так, чтобы никакое из них не делилось на другое, то из первых $2(n+1)$ целых положительных чисел нельзя будет выбрать $n+2$ чисел так, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

Действительно, рассмотрим какие-либо $n+2$ чисел, выбранных из первых $2(n+1)$ целых положительных чисел. Если среди них нет чисел $2n+1$ и $2n+2$ или есть только одно из этих чисел, то среди них есть $n+1$ чисел, не превосходящих $2n$, и по сделанному предположению одно из этих чисел обязательно делится на другое. Если среди них есть оба числа $2n+1$ и $2n+2$ и есть также число $n+1$, то мы уже имеем пару чисел, делящихся одно на другое, а именно, $n+1$ и $2n+2$. Наконец, если среди наших чисел есть числа $2n+1$ и $2n+2$, но нет числа $n+1$, то исключим из рассмотрения числа $2n+1$ и $2n+2$ и добавим $n+1$. Мы получим $n+1$ чисел, не превосходящих $2n$; по сделанному предположению одно из этих чисел делится на другое. Если это число не есть $n+1$, то мы уже получаем пару чисел из выбранных нами $n+2$, одно из которых делится на другое. Если же число, делящееся на другое, есть $n+1$, то и $2n+2$ делится на одно из выбранных чисел.

б) Выберем наши числа следующим образом, нечетные числа от 101 до 199 (50 чисел), нечетные числа от 51 до 99, умноженные каждое на 2 (25 чисел), нечетные числа от 27 до 49, умноженные каждое на 4 (12 чисел), нечетные числа от 13 до 25, умноженные каждое на 8 (7 чисел), нечетные числа от 7 до 11, умноженные каждое на 16 (3 числа), числа $3 \cdot 32$, $5 \cdot 32$, $1 \cdot 64$.

в) Предположим, что мы выбрали 100 целых чисел, не превосходящих 200, ни одно из которых не делится на другое; докажем, что среди этих чисел не может быть ни одного из чисел $1-15$.

Как в первом решении задачи а), рассмотрим все наибольшие нечетные делители выбранных чисел; очевидно, это будут все нечетные числа, не превосходящие 200 (см. решение задачи а)). В частности, среди этих нечетных делителей есть числа 1, 3, 9, 27 и 81. Так как никакие два из чисел, отвечающих этим нечетным делителям, не делятся одно на другое, то число, содержащее нечетный делитель 27, должно делиться на 2 в степени не ниже первой; число, содержащее нечетный делитель 9, — на 2 в степени не ниже второй; число, содержащее делитель 3, — на 2 в степени не ниже третьей и число, содержащее делитель 1, — на 2 в степени не ниже четвертой. Но это значит, что числа 1, $2 = 1 \cdot 2$, 3, $4 = 1 \cdot 2^2$, $6 = 3 \cdot 2$, $8 = 1 \cdot 2^3$, 9 и $12 = 3 \cdot 2^2$ не входят в число наших 200 чисел.

Точно так же, рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди наших чисел нет чисел 5, $10 = 5 \cdot 2$, 15; рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 7 и 21, убеждаемся, что среди 200 чисел нет числа 7; рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 11 и 33, убеждаемся, что среди наших чисел нет 11 и, рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 13 и 39, убеждаемся, что среди них нет числа 13.

Примечание. Аналогично решениям задач а)–в) можно показать, что из $2n$ (или меньше) первых целых положительных чисел нельзя выбрать $n+1$ чисел так, чтобы никакие два не делились одно на другое, но можно выбрать n (или меньше) таких чисел. При этом, если $3^k < 2n < 3^{k+1}$, то из $2n$ первых целых чисел нельзя выбрать n чисел, хотя бы одно из которых меньше 2^k и таких, что никакое из этих чисел не делится на другое, но можно выбрать n таких чисел, наименьшее из которых равно 2^k (так, из 200 чисел можно выбрать 100, наименьшее из которых равно 16 и ни одно из которых не делится на другое).

92. а) Рассмотрим наименьшие по абсолютной величине остатки, которые дают наши числа при делении на 100 (т. е. если какое-либо число a дает при делении на 100 остаток, больший 50, то мы будем производить деление с избытком и рассмотрим отрицательный остаток $-r$: $a = 100q - r$, где $0 < r < 50$). Так как положительных чисел, не превосходящих 50, существует всего 51 (а именно, $0, 1, 2, \ldots, 50$), а остатков мы имеем 52, то два из этих остатков равны по абсолютной величине. Если эти остатки равны и по знаку, то разность соответствующих чисел делится на 100; если они противоположны, то сумма чисел делится на 100.

б) Пусть a_1, a_2, a_3, ..., a_{100} — данные числа (расположенные в произвольном порядке). Рассмотрим суммы

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}.$$

Так как этих сумм имеется 100, то в том случае, если ни одна из них не делится на 100, по крайней мере две из сумм дают при делении на 100 одинаковые остатки (ибо различных не равных нулю остатков от деления на 100 существует только 99). Вычтя из большей из двух сумм, дающих одинаковые остатки, меньшую, мы получим некоторую сумму вида $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m$, которая будет делиться на 100.

93. Предположим, что за какой-то понедельник шахматист сыграл a_1 партий, за понедельник и вторник — a_2 партий, за три дня — a_3 партий и т. д., наконец, за 77 дней — a_{77} партий. Рассмотрим теперь следующую совокупность чисел: a_1, a_2, a_3, ..., a_{77}; $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20$, ..., $a_{77} + 20$.

Всего мы имеем здесь $2 \cdot 77 = 154$ числа, каждое из которых не больше чем $132 + 20 = 152$ (число a_{77} не больше чем $11 \cdot 12 = 132$, так как 77 дней это равно 11 недель); следовательно, по крайней мере два из этих 154 чисел равны между собой. Но никакие два числа из ряда a_1, a_2, a_3, ..., a_{77} не могут быть равны между собой (ибо шахматист каждый день играет не меньше одной партии); точно так же не могут быть равны между собой никакие два числа из ряда $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20$, ..., $a_{77} + 20$. Таким образом, для каких-то k и l должно иметь место равенство

$$a_k = a_l + 20;$$

это равенство означает, что $a_k - a_l = 20$, т. е. что за $k - 1$ дней, с $(l + 1)$-го по k-й включительно, шахматист сыграл ровно 20 партий.

94. Первое решение. Рассмотрим остатки от деления чисел

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{1111\ldots1}_{N \text{ раз}}$$

на N. Так как этих чисел N, а различных не равных нулю остатков при делении на N может получиться только $N-1$, то если ни одно из этих чисел не делится на N (противное доказывало бы предложение задачи), то какие-то два из них, например,

$$K = \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ раз}} \text{ и } L = \underbrace{1111\ldots1}_{l\text{ раз}} \quad (l > k),$$

дают при делении на N один и тот же остаток. В таком случае разность

$$L - K = \underbrace{11\ldots1}_{l-k\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}$$

делится на N.

Если N взаимно просто с 10, то из делимости числа $L - K = \underbrace{11\ldots1}_{l-k\text{ раз}}\cdot 10^k$ на N следует, что число $\underbrace{11\ldots1}_{l-k\text{ раз}}$ делится на N.

Второе решение. Рассмотрим разложение числа $\dfrac{1}{N}$ в периодическую десятичную дробь:

$$\frac{1}{N} = \overline{0,\, b_1\, b_2 \ldots b_k(a_1 a_2 \ldots a_l)}.$$

По правилу обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные, мы будем иметь

$$\frac{1}{N} = \frac{\overline{b_1 b_2 \ldots b_k a_1 a_2 \ldots a_l} - \overline{b_1 b_2 \ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}}.$$

Отсюда вытекает, что число $A = 9\underbrace{9\ldots9}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}$ делится на N.

Но $A = 9A_1$, где $A_1 = \underbrace{11\ldots1}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}$. Рассмотрим теперь число

$$B = \underbrace{11\ldots1}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}\underbrace{11\ldots1}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{l\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ раз}},$$

получающееся, если число A_1 выписать 9 раз подряд. Очевидно, что B равно произведению числа A_1 на число

$$\underbrace{\underbrace{100\ldots0}_{l+k\text{ цифр}}\underbrace{100\ldots0}_{l+k\text{ цифр}}\ \ldots\ \underbrace{100\ldots0}_{l+k\text{ цифр}}}_{8\text{ раз}}1,$$

делящееся на 9 (по признаку делимости на 9). Следовательно, число B, состоящее из одних единиц и нулей, делится на $9A_1 = A$, а значит, и на N.

Если N взаимно просто с 10, то $\frac{1}{N}$ при обращении в десятичную дробь дает дробь чисто периодическую, так что B в этом случае будет состоять из одних единиц.

95. Оставим в каждом члене ряда Фибоначчи, записывающемся пятью и более цифрами, только последние четыре цифры. У нас получится последовательность чисел, каждое из которых меньше чем 10^4. Обозначим через a_k член этой последовательности, стоящий на k-м месте. Заметим, что если нам известно a_{k+1} и a_k, то мы можем вычислить a_{k-1}, ибо $(k-1)$-й член ряда Фибоначчи равен разности $(k+1)$-го и k-го членов, а последние четыре цифры разности можно определить по последним четырем цифрам уменьшаемого и вычитаемого. Отсюда следует, что если для некоторых номеров k и n покажется, что $a_k = a_{n+k}$, $a_{k+1} = a_{n+k+1}$, то тогда $a_{k-1} = a_{n+k-1}$, $a_{k-2} = a_{n+k-2}$, ..., $a_1 = a_{n+1}$. Но так как $a_1 = 0$, то это будет означать, что $a_{n+1} = 0$, т. е. что в ряде Фибоначчи на $(n+1)$-м месте стоит число, оканчивающееся четырьмя нулями.

Остается показать, что среди $10^8 + 1$ пар

$$\begin{array}{ll} a_1, & a_2, \\ a_2, & a_3, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{10^8}, & a_{10^8+1}, \\ a_{10^8+1}, & a_{10^8+2} \end{array}$$

найдутся хотя бы две одинаковые. Но это непременно будет так, ибо все числа a_1, a_2, a_3, ..., a_{10^8+2} не превышают 10^2, а из 10^4 чисел $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 9999$ можно составить только $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ различных пар (ибо первое число может принимать 10^4 различных значений и второе число может принимать 10^4 различных значений).

Примечание. Можно даже точно указать первое из чисел ряда Фибоначчи, оканчивающееся четырьмя нулями; номер этого числа 7501 (см. книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы», составляющую вып. 6 «Библиотеки математического кружка», задачу 174 и следствия из нее).

96. Рассмотрим 1001 число

$$0 \cdot \alpha = 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,\ 1000\alpha$$

и возьмем дробную часть каждого из этих чисел (разность между данным числом и наибольшим целым числом, не превосходящим данного). Эти дробные части будут представлять собой 1001 число, не превосходящее 1 (дробная часть числа, разумеется, всегда меньше 1). Разделим теперь отрезок числовой оси от 0 до 1 на 1000 равных отрезков длины $\frac{1}{1000}$ (к каждому отрезку мы будем причислять его левый конец, но не причислять правый) и рассмотрим распределение точек, изображающих наши дробные части, по этим отрезкам. Так как число отрезков равно 1000, а число точек 1001, то по крайней мере в одном отрезке будут находиться две точки. Но это означает, что существуют два таких неравных числа p и q (оба не превосходящие 1000), что разность дробных долей чисел $p\alpha$ и $q\alpha$ меньше $\frac{1}{1000}$.

Пусть, например, $p > q$. Рассмотрим число $(p-q)\alpha = p\alpha - q\alpha$. Так как $p\alpha = P + d_1$, $q\alpha = Q + d_2$, где P и Q — целые числа, d_1 и d_2 — дробные доли $p\alpha$ и $q\alpha$, то $(p-q)\alpha = (P-Q) + d - d_1$ отличается от целого числа $P - Q$ меньше чем на $\frac{1}{1000}$. Но это означает, что дробь $\frac{P-Q}{p-q}$ отличается от α меньше чем на $0,001 \cdot \frac{1}{p-q}$.

97. Прежде всего очевидно, что ни одна из рассматриваемых дробей не равна целому числу: действительно, если бы, например, какая-то дробь $\frac{k(m+n)}{m}$ (k — одно из чисел 1, 2, 3, …, $m-1$) была целым числом, то $m+n$ должно было бы иметь общие делители с числом m (ибо $k < m$ и не может делиться на m); но тогда и число $n = (m+n) - m$ не было бы взаимно просто с m. Далее никакие две из этих дробей не равны друг другу: если бы было

$$\frac{k(m+n)}{m} = \frac{l(m+n)}{n}$$

(k — одно из чисел 1, 2, ..., $m-1$; l — одно из чисел 1, 2, ..., $n-1$), то мы имели бы

$$\frac{k}{m} = \frac{l}{n}; \quad m = \frac{k}{l}n$$

и снова m и n не были бы взаимно простыми (так как $l < n$ и не может делиться на n).

Рассмотрим теперь некоторое целое положительное число A, меньшее $m+n$. Дроби

$$\frac{m+n}{m}, \quad \frac{2(m+n)}{m}, \quad \ldots, \frac{k(m+n)}{m}$$

остаются меньше A, пока $k(m+n) < Am$ или $k < \dfrac{Am}{m+n}$; число таких дробей, очевидно, равно целой части $\left[\dfrac{Am}{m+n}\right]$ числа $\dfrac{Am}{m+n}$ *). Точно так же дроби

$$\frac{m+n}{n}, \ \frac{2(m+n)}{n}, \ \ldots, \ \frac{l(m+n)}{n}$$

остаются меньше A, пока $l < \dfrac{An}{m+n}$; число таких дробей равно целой части $\left[\dfrac{An}{m+n}\right]$ числа $\dfrac{An}{m+n}$. Числа $\dfrac{Am}{m+n}$ и $\dfrac{An}{m+n}$ оба не целые, ибо m, n и $m+n$ попарно взаимно просты; сумма этих двух чисел равна A:

$$\frac{Am}{m+n} + \frac{An}{m+n} = A.$$

Но если сумма двух чисел α и β, не являющихся целыми, равна целому числу A, то $[\alpha] + [\beta] = A - 1$; доказательство этого предложения сразу следует из рис. 7. Таким образом,

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right] + \left[\frac{An}{m+n}\right] = A - 1,$$

откуда следует, что в интервале $(0, A)$ числовой оси имеется ровно $A-1$ наших дробей.

---

*) Относительно обозначений см. с. 26.

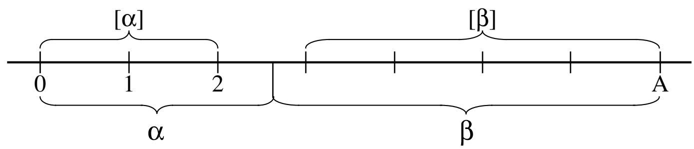


Рис. 7

Из доказанного сразу вытекает утверждение задачи. Действительно, положим сначала $A = 1$; мы получим, что в интервале $(0, 1)$ вовсе нет наших дробей. Далее, пусть $A = 2$; из того, что в интервале $(0, 2)$ имеется одна дробь, вытекает, что одна дробь есть в интервале $(1, 2)$. Затем положим $A = 3$; из того, что в интервале $(0, 3)$ содержатся две дроби, т. е. на одну больше, чем в интервале $(0, 2)$, вытекает, что в интервале $(2, 3)$ имеется одна из наших дробей. Продолжая рассуждать таким же образом, мы полностью докажем требуемое предложение.

98. Первое решение. Если число a заключено в интервале $\frac{1000}{m} \geqslant a > \frac{1000}{m+1}$, то всего имеется, очевидно, m целых чисел, не превосходящих 1000, кратных a (а именно, $a, 2a, 3a, \ldots, ma$). Поэтому если мы обозначим через k_1 число тех из наших чисел, которые заключены между 1000 и $\frac{1000}{2}$; через k_2 — число чисел, заключенных между $\frac{1000}{2}$ и $\frac{1000}{3}$; k_3 — число чисел, заключенных между $\frac{1000}{3}$ и $\frac{1000}{4}$, и т. д., то мы будем иметь всего

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots$$

чисел, не превосходящих 1000 и кратных хотя бы одному из наших чисел. Но по условию задачи все эти кратные различны; следовательно,

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots < 1000.$$

Теперь остается заметить, что сумма обратных величин всех наших чисел меньше чем

$$k_1 \frac{1}{\frac{1000}{2}} + k_2 \frac{1}{\frac{1000}{3}} + k_3 \frac{1}{\frac{1000}{4}} + \ldots = \frac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots}{1000}$$

(здесь мы заменили k_1 наибольших из наших чисел на $\frac{1000}{2}$ следующие k_2 чисел — на $\frac{1000}{3}$; следующие k_3 чисел — на $\frac{1000}{4}$ и т. д.) Но

$$\begin{aligned} &2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots = \\ &\qquad = (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots) + (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots) = \\ &\qquad\qquad = (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots) + n < 1000 + n < 2000; \end{aligned}$$

следовательно, сумма обратных величин всех наших чисел меньше 2.

Второе решение. Приведем здесь еще один изящный вариант того же рассуждения. Число членов ряда 1, 2, … …, 1000, делящихся на целое число a_k, очевидно, равно целой части $\left[\frac{1000}{a_k}\right]$ дроби $\frac{1000}{a_k}$ *).Так как наименьшее общее кратное любых двух из чисел a_1, a_2, …, a_n больше 1000, то среди чисел 1, 2, 3, …, 1000 не найдется ни одного, делящегося одновременно на два из чисел a_1, a_2, …, a_n. Отсюда вытекает, что число членов ряда 1, 2, 3, …, 1000, делящихся хотя бы на одно из чисел a_1, a_2, a_3, …, a_n, равно сумме

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \left[\frac{1000}{a_3}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{a_n}\right].$$

Так как в ряду 1, 2, 3,…, 1000 всего имеется 1000 чисел, то должно быть

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \left[\frac{1000}{a_3}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{a_n}\right] \leqslant 1000.$$

Но целая часть дроби отличается от самой дроби меньше чем на единицу, т. е.

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] > \frac{1000}{a_1} - 1, \quad \left[\frac{1000}{a_2}\right] > \frac{1000}{a_2} - 1, \ \ldots, \ \left[\frac{1000}{a_n}\right] > \frac{1000}{a_n} - 1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1000}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{1000}{a_2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1000}{a_n} - 1\right) < 1000,$$

*) Относительно обозначений см. с. 27.

т. е.

$$\frac{1000}{a_1}+\frac{1000}{a_2}+\frac{1000}{a_3}+\ldots+\frac{1000}{a_n}<1000+n<2000,$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<2.$$

Примечание. Оценку настоящей задачи можно значительно уточнить. Рассмотрим все кратные наших чисел, не превосходящие 500. Очевидно, k_1 из наших чисел будут сами больше 500; k_2+k_3 чисел будут не больше 500, но больше $\frac{500}{2}$; k_4+k_5 чисел будут не больше $\frac{500}{2}$, но больше $\frac{500}{3}$ и т. д. Отсюда, в точности, как в первом решении задачи, заключаем, что общее число чисел, не превосходящих 500 и кратных хотя бы одному из заданных n чисел, равно

$$(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots;$$

следовательно,

$$(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots<500.$$

Отметим теперь, что разность $500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]$ выражает число чисел, не превосходящих 500 и не кратных ни одному из наших чисел, а разность $1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots)$ — число чисел, не превосходящих 1000 и не кратных ни одному из наших чисел. Следовательно,

$$500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]<\\<1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots),$$

откуда получаем

$$(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)+\ldots<500.$$

Теперь остается только заметить, что

$$2k_1+3k_2+4k_3+5k_4+6k_5+7k_6+\ldots<\\<(k_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+\ldots)+\\+[(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)+\ldots]<1000+500=1500,$$

и, следовательно, сумма обратных величин всех наших чисел, меньшая $\dfrac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots}{1000}$, наверное, меньше $1\,\dfrac{1}{2}$.

Аналогично, рассматривая кратные наших чисел, не превосходящие 333, можно доказать, что сумма обратных величин всех наших чисел даже меньше $1\,\dfrac{1}{5}$.

Отметим еще, что число 1000 в условии этой задачи можно заменить любым другим целым числом.

99. Рассмотрим, как образуется разложение простой дроби $\dfrac{q}{p}$ в периодическую десятичную дробь[*]

$$\frac{q}{p} = \overline{A,\, a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots}$$

Очевидно, что A есть частное от деления q на p:

$$q = Ap + q_1,$$

где остаток q_1 меньше p. Далее, $\overline{Aa_1}$ есть частное от деления $10q$ на p ($\overline{Aa_1}$ составлено из цифр числа A и цифры a_1):

$$10q = \overline{Aa_1} \cdot p + q_2, \quad \text{где} \quad q_2 < p.$$

Точно так же

$$10^2 \cdot q = \overline{Aa_1a_2} \cdot p + q_3, \ldots, \quad 10^k \cdot q = \overline{Aa_1a_2 \ldots a_k} \cdot p + q_{k+1}, \ldots$$

Период дроби начнется снова в тот момент, когда при делении какого-либо числа $10^k q$ на p мы получим тот же остаток $q_{k+1} = q_1$, что и при делении числа q на p. Таким образом, число k цифр в периоде дроби определится как наименьшая степень 10, такая, что $10^k q$ дает при делении на p тот же самый остаток, что и q. Последнее означает, что разность $10^k q - q = (10^k - 1)q$ делится на p или что разность $10^k - 1$ делится на p (ибо q, разумеется, взаимно просто с p).

Предположим теперь, что k четно: $k = 2l$; из того, что разность $10^{2l} - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1)$ делится на p, следует, что либо $10^l - 1$ делится на p, либо $10^l + 1$ делится на p. Но $10^l - 1$ не может делиться на p, так как в противном случае 10^l давало бы при делении на p тот же самый остаток, что и q, и

[*] См. сноску на с. 134.

период дроби $\frac{q}{p}$ равнялся бы l, а не $k = 2l$. Таким образом, мы заключаем, что $10^l + 1$ делится на p.

Из последнего результата следует, что сумма $\frac{10^l q}{p} + \frac{q}{p}$ есть целое число. Но

$$\frac{10^l q}{p} + \frac{q}{p} = \overline{A\,a_1a_2\ldots a_l,\, a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_{2l}a_1a_2\ldots a_l\ldots} + \\ + \overline{A,\, a_1a_2\ldots a_la_{l+1}\ldots a_{2l}\ldots};$$

таким образом, сумма дробей

$$\overline{0,\, a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_{2l}a_1a_2\ldots a_l\ldots} + \overline{0,\, a_1a_2\ldots a_la_{l+1}\ldots a_{2l}\ldots}$$

есть целое число. Так как каждая из этих дробей меньше 1 и больше нуля, то эта сумма должна равняться $1 = 0,999\ldots$, что возможно только в том случае, если

$$a_1 + a_{l+1} = 9, \quad a_2 + a_{l+2} = 9, \quad \ldots, \quad a_l + a_{2l} = 9.$$

Из последних соотношений сразу следует, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2l}}{2l} = \frac{9}{2}.$$

Если же k нечетно, то равенство $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = \frac{9}{2}$, очевидно, невозможно, так как знаменатель дроби, стоящей в левой части этого равенства, не делится на 2.

100. Число цифр в периодах дробей $\frac{a_n}{p^n}$ и $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ равно наименьшим целым положительным числам k и l, таким, что $10^k - 1$ делится на p^n, соответственно $10^l - 1$ делится на p^{n+1} (см. решение предыдущей задачи). Составим теперь разность

$$(10^l - 1) - (10^k - 1) = 10^k(10^{l-k} - 1).$$

Из того, что эта разность делится на p^n, следует, что $10^{l-k} - 1$ делится на p^n. Покажем теперь, что из того, что $10^{l-k} - 1$ делится на p^n и $10^k - 1$ делится на p^n, следует, что и $10^d - 1$, где d есть общий наибольший делитель чисел $l - k$ и k, делится на p^n.

Действительно, пусть $l-k=qk+r$. В таком случае имеем

$$10^{l-k}-1=10^{qk+r}-1=10^r(10^{qk}-1)+(10^r-1).$$

Но $10^{qk}-1=(10^k)^q-1^q$ делится на 10^k-1, т. е делится на p^n; следовательно, и 10^r-1 делится на p^n. Точно так же показывается, что и $10^{r_1}-1$, где r_1 есть остаток от деления k на r, делится на p^n; что $10^{r_2}-1$, где r_2 есть остаток от деления r на r_1, делится на p^n; что $10^{r_3}-1$, где r_3 есть остаток от деления r_1 на r_2, делится на p^n и т. д*). Но нетрудно показать, что ряд чисел $r_1, r_1, r_2, \ldots$ должен закончиться числом d. Действительно, так как $l-k$ и k делятся на d, то и $r=(l-k)-qk$ делится на d; так как k и r делятся на d, то и r_1 делится на d; так как r и r_1 делятся на d, то и r_2 делится на d, и т. д.; следовательно, все числа нашего ряда делятся на d. С другой стороны, если последнее число в этом ряду есть r_k (т. е r_{k-1} делится на r_k, так что следующий за r_k остаток уже равен нулю), то r_{k-1} делилось бы на r_k; r_{k-2} делилось бы на r_k (ибо r_{k-1} и r_k делятся на r_k); r_{k-3} делилось бы на r_k (ибо r_{k-2} и r_{k-1} делятся на r_k) и т. д.; наконец, k и $l-k$ делились бы на r_k. Но в таком случае неравенство $r_k>d$ противоречило бы тому, что d есть общий **наибольший** делитель $l-k$ и k.

По условию k есть **наименьшее** целое число, такое, что 10^k-1 делится на p^n. Поэтому из того, что 10^d-1 тоже делится на p^n, следует, что $d=k$, $l-k$ кратно k и, значит, l кратно k; $l=km$.

Разложим теперь 10^l-1 на множители:

$$10^l-1=10^{km}-1=$$
$$=(10^k-1)(10^{(m-1)^k}+10^{(m-2)^k}+\ldots+10^k+1).$$

Так как 10^k-1 делится на p^n, то 10^k дает при делении на p^n остаток 1, откуда следует, что и $10^{2^k}=10^k\cdot 10^k$ дает при делении на p^n остаток 1 и $10^{3^k}=10^{2^k}\cdot 10^k$ дает при делении на p^n остаток 1 и т. д. Следовательно, каждый член суммы, стоящей в скобках, дает при делении на p^n остаток 1 и таким образом, вся сумма дает остаток m. Отсюда следует, что если

*) Этот процесс получения ряда последовательных остатков $r_1, r_2, r_3, \ldots$ носит название **алгоритма Евклида**.

$10^k - 1$ не делилось на p^{n+1}, то наименьшее значение l, такое, что $10^l - 1$ делится на p^{n+1}, равно pk; при этом $10^{pk} - 1$ делится на p^{n+1}, но не делится на p^{n+2} (ибо выражение в скобках не делится на p^2).

Отсюда и вытекает утверждение задачи.

101. 1) Пусть x — любое действительное число. Тогда его можно представить в виде суммы $x = [x] + \alpha$, где α — неотрицательное число, меньшее единицы. Представим теперь y в виде $y = [y] + \beta$ $(0 \leqslant \beta < 1)$. Тогда $x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$. Так как $\alpha + \beta \geqslant 0$, то из этого равенства видно, что $[x] + [y]$ есть целое число, не превосходящее $x + y$. А так как $[x + y]$ есть наибольшее из таких целых чисел, то $[x + y] \geqslant [x] + [y]$.

2) Первое решение. Представим x в виде $[x] + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Пусть целое число $[x]$ при делении на n дает в частном q и в остатке r: $[x] = qn + r$ $(0 \leqslant r \leqslant n - 1)$. В таком случае имеем

$$\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}, \quad \left[\frac{[x]}{n}\right] = q, \qquad x = qn + r + \alpha = qn + r_1,$$

где $r_1 = r + \alpha < n$, $\dfrac{x}{n} = q + \dfrac{r_1}{n}$, $\left[\dfrac{x}{n}\right] = q = \left[\dfrac{[x]}{n}\right]$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Рассмотрим все целые числа, делящиеся на n и не бóльшие x. Их число, очевидно, равно $\left[\dfrac{x}{n}\right]$. Рассмотрим так же все целые числа, делящиеся на n и не бóльшие x. Их число равно $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]$. Но так как это — одни и те же числа, то их количества равны, следовательно,

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

3) Первое решение. Представим x в виде $x = [x] + \alpha$. Так как $0 \leqslant \alpha < 1$, то α содержится между некоторыми двумя соседними из дробей $\dfrac{0}{n}, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n}$. Пусть эти дроби будут $\dfrac{k}{n}$ и $\dfrac{k+1}{n}$, т. е. пусть

$$\frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}.$$

Далее имеем

$$x + \frac{n-k-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k-1}{n} < \\ < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-k-1}{n} = [x] + 1,$$

$$x + \frac{n-k}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k}{n} \geqslant [x] + \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = [x] + 1,$$

$$x + \frac{n-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-1}{n} < \\ < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-1}{n} = [x] + \frac{n+k}{n} < [x] + 2.$$

Отсюда следует, что

$$[x] \leqslant \left[x + \frac{1}{n}\right] \leqslant \ldots \leqslant \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right] < [x] + 1,$$

$$[x] + 1 \leqslant \left[x + \frac{n-k}{n}\right] \leqslant \ldots \leqslant \left[x + \frac{n-1}{n}\right] < [x] + 2,$$

т. е.

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n}\right] = \ldots = \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right],$$

$$\left[x + \frac{n-k}{n}\right] = \ldots = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [x] + 1.$$

Так как первых чисел $n - k$, а вторых k, то

$$[x] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = (n-k)[x] + k([x] + 1) = n[x] + k.$$

Но тому же равна и целая часть числа nx. Действительно, так как $k \leqslant n\alpha < k + 1$, то $n\alpha = k + \beta$, где $0 \leqslant \beta < 1$. Следовательно,

$$[nx] = [n[x] + n\alpha] = [n[x] + k + \beta] = n[x] + k.$$

Таким образом, доказано, что

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Второе решение. Рассмотрим левую часть равенства. Если $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$, то все числа x, $x+\frac{1}{n}$, …, $x+\frac{n-1}{n}$ меньше 1, а целая часть от них равна 0; $[nx]$ тоже равно 0. Поэтому для таких x равенство верно.

Пусть теперь x произвольное. Если увеличить x на $\frac{1}{n}$, то все слагаемые из одной части сдвинутся на одно место вправо, а последнее слагаемое $\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$ перейдет в $[x+1]$, которое на 1 больше чем $[x]$. Значит, с увеличением x на $\frac{1}{n}$ левая часть увеличится на 1. Правая часть с увеличением x на $\frac{1}{n}$ тоже увеличивается на 1. Для любого x можно найти такое число α, заключенное между 0 и $\frac{1}{n}$ $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{1}{n}\right)$, что x отличается от α на $\frac{m}{n}$, где m — целое число. Отсюда следует, что равенство сохраняется при любом x.

102. Отметим все точки плоскости с обеими целыми координатами («целые точки»), для которых $1 \leqslant x \leqslant q-1$, $1 \leqslant y \leqslant p-1$ (x и y — координаты точек). Эти точки лежат внутри прямоугольника $OABC$, длины сторон кото-

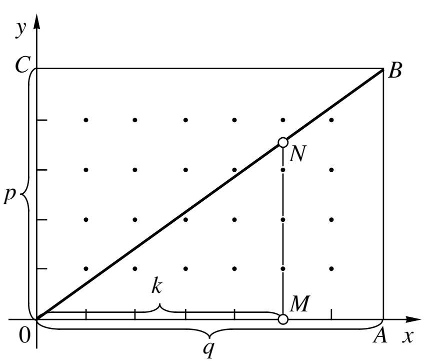


Рис. 8

рого равны $OA = q$ и $OC = p$ (рис. 8); число всех точек равно $(q-1)(p-1)$. Проведем диагональ OB прямоугольника. Ясно, что на этой диагонали не будет расположена ни одна «целая» точка $\Big($координаты x и y всех точек диагонали OB связаны соотношением $\dfrac{x}{y} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{q}{p}$; но так как q и p взаимно простые, то не существует целых положительных чисел $x < p$ и $y < q$, таких, что $\dfrac{x}{y} = \dfrac{q}{p}\Big)$. Заметим теперь, что число «целых» точек, имеющих абсциссу, равную k (k — какое-то целое положительное число, меньшее q), и расположенных под диагональю OB, равно целой части длины отрезка MN, изображенного на рис. 8. Так как $MN = \dfrac{OM}{OA} \cdot AB = \dfrac{kp}{q}$, то это число равно $\left[\dfrac{kp}{q}\right]$. Следовательно, сумма

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

равна общему числу всех «целых» точек, расположенных под диагональю OB. Но всего внутри прямоугольника имеется $(q-1)(p-1)$ «целых» точек; из симметрии расположения этих точек относительно центра прямоугольника $OABC$ следует, что ровно половина из них расположена под диагональю OB (здесь существенно, что на самой диагонали не лежит ни одна из точек). Таким образом,

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(q-1)(p-1)}{2}.$$

Точно так же доказывается, что

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

103. Первое решение. При $n = 1$ мы в левой и правой частях равенств имеем по одному члену, равному 1; следовательно, в этом случае равенства справедливы. Докажем теперь, что если наше равенство справедливо для какого-то значения n, то оно будет справедливо и для значения $n+1$; в силу принципа математической индукции, отсюда будет следовать, что равенство справедливо при всех значениях n.

Отметим, что если $n+1$ не делится на k:

$$n+1=qk+r,$$

где остаток r заключен между 1 и $k-1$, то $n=qk+r'$, где $r'=r-1$, т. е. $0\leqslant r'\leqslant k-2$; отсюда следует, что в этом случае величины $\left[\dfrac{n+1}{k}\right]$ и $\left[\dfrac{n}{k}\right]$ совпадают (обе они равны q). Если же $n+1$ делится на k: $n+1=qk$, то, очевидно, $\left[\dfrac{n+1}{k}\right]=q$, $\left[\dfrac{n}{k}\right]=q-1$, т. е. $\left[\dfrac{n+1}{k}\right]=\left[\dfrac{n}{k}\right]+1$. Таким образом:

$$\left[\frac{n+1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right],\ \text{если } k \text{ не есть делитель числа } n+1\ ;$$

$$\left[\frac{n+1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right]+1,\ \text{если } k \text{ не есть делитель числа } n+1\ .$$

А отсюда вытекает, что:

а) $$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=$$
$$=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n+1}\right]+\tau_{n+1},$$

т. е. если

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n,$$

то

$$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n+\tau_{n+1};$$

б) $$\left[\frac{n+1}{1}\right]+2\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+(n+1)\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=$$
$$=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+(n+1)\left[\frac{n}{n+1}\right]+\sigma_{n+1},$$

т. е. если

$$\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right]=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n,$$

то

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] + \ldots + (n+1)\left[\frac{n+1}{n+1}\right] = \\ = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1}.$$

Второе решение. Число чисел ряда 1, 2, 3, ..., n, делящихся на какое-то выбранное число k, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$ $\Big($это будут числа k, $2k$, $3k$, ..., $\left[\frac{n}{k}\right] k\Big)$; сумма делителей k всех таких чисел равна $k\left[\frac{n}{k}\right]$. Отсюда следует, что:

а) Сумма $\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{k}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$ равна числу чисел ряда 1, 2, 3, ..., n, делящихся на 1, плюс число чисел этого ряда, делящихся на 2, ..., плюс число чисел этого ряда, делящихся на n. Но этому же равна сумма $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$.

б) Сумма $1\left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + k\left[\frac{n}{k}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right]$ равна сумме делителей 1 всех чисел ряда 1, 2, 3, ..., n плюс сумма делителей 2 всех чисел этого ряда, плюс сумма делителей 3 всех чисел этого ряда, ..., плюс сумма делителей n всех чисел этого ряда. Но этому же равна и сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n$.

Третье решение. Приведем еще изящное геометрическое решение задачи, близкое ко второму решению. Рассмотрим равностороннюю гиперболу (график обратной пропорциональности) $y = \frac{k}{x}$, или, что то же самое, $xy = k$ (точнее, ветвь этой гиперболы, расположенную в первом координатном углу; см. рис. 9, *а*)).

Отметим, кроме того, в первом координатном углу все точки с целыми координатами. Тогда, если x есть делитель числа k, то на равносторонней гиперболе $xy = k$ есть целочисленная точка с абсциссой x. Обратно, если гипербола $xy = k$ проходит через целочисленную точку с абсциссой x, то x есть делитель числа k. Таким образом, число τ_k делителей числа k равно числу целочисленных точек, лежащих на гиперболе $xy = k$; сумма делителей σ_k этого числа равна сумме абсцисс целочисленных точек, лежащих на гиперболе $xy = k$. Далее, воспользуемся еще тем, что все гиперболы $xy = 1$, $xy = 2$,

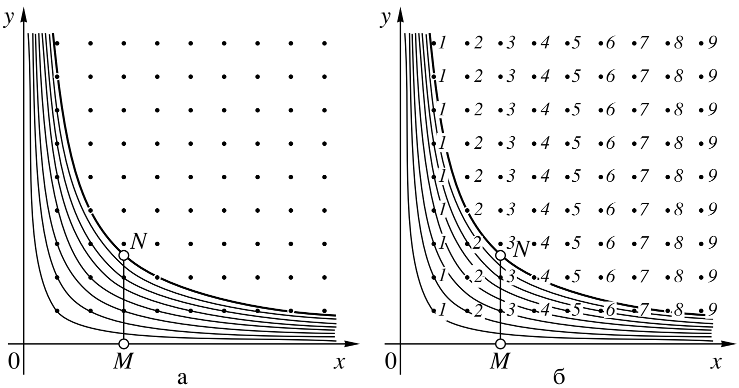


Рис. 9

$xy = 3$, ..., $xy = n - 1$ расположены ниже гиперболы $xy = n$. Отсюда можно сделать следующие выводы.

а) Сумма $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n$ равна числу всех целочисленных точек, лежащих под гиперболой $xy = n$ (и на самой гиперболе). Но, с другой стороны, ни одна из этих точек не имеет абсциссы, большей n; число же целочисленных точек с абсциссой k, расположенных под гиперболой, равно целой части длины отрезка MN, изображенного на рис. 9, а), т. е. $\left[\frac{n}{k}\right]$, так как $MN = \frac{n}{k}$ (ср. с решением задачи 102). Таким образом, имеем

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

б) Припишем каждой целочисленной точке номер, равный ее абсциссе (рис. 9, *б*); в таком случае сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n$ равна сумме номеров всех целочисленных точек, расположенных под гиперболой $xy = n$. С другой стороны, сумма номеров всех таких точек, имеющих абсциссу k, равна $k\left[\frac{n}{k}\right]$. Таким образом, имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3\left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right].$$

104. Очевидно, что $(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$ есть целое число; действительно, если $(2+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, где a_n и b_n — целые числа, то $(2-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ (это вытекает из формулы бинома Ньютона, а также может быть доказано по принципу математической индукции). Так как $(2-\sqrt{2})^n < 1$, то отсюда следует, что

$$[(2+\sqrt{2})^n] = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n - 1$$

и, следовательно,

$$(2+\sqrt{2})^n - [(2+\sqrt{2})^n] = 1 - (2-\sqrt{2})^n.$$

Но так как $(2-\sqrt{2}) < 1$, то, взяв степень n достаточно большой, можно сделать выражение $(2-\sqrt{2})^n$ сколь угодно малым. А если $(2-\sqrt{2})^n < 0,000001$, то

$$(2+\sqrt{2})^n - [(2+\sqrt{2})^n] = 1 - (2-\sqrt{2})^n > 0,999999.$$

105. а) Первое решение. Так как $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ есть целое число $(2-\sqrt{3})^n < 1$, то

$$[(2+\sqrt{3})^n] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$$

(сравните с решением задачи 104). Но, раскрыв скобки по формуле бинома Ньютона, получим, что

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2(2^n + C_n^2 2^{n-2}\cdot 3 + C_n^4 2^{n-4}\cdot 3^2 + \ldots)$$

делится на 2 и, следовательно, $[(2+\sqrt{3})^n] = (2+\sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$ нечетно.

Второе решение. Число $(2+\sqrt{3})^n$ можно представить в виде $a_n + b_n\sqrt{3}$, где a_n и b_n — целые числа. Докажем, что

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего для $n=1$ имеем $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ и $2^2 - 3\cdot 1 = 1$.

Далее предположим, что для некоторого n

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3},$$

где $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$; в таком случае имеем

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}.$$

Отсюда $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$; $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Следовательно,

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

Тем самым доказано, что $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ при любом n.

Отсюда следует, что

$$[a_n + b_n\sqrt{3}] = a_n + [b_n\sqrt{3}] = a_n + [\sqrt{3b_n^2}] =$$
$$= a_n + [\sqrt{a_n^2 - 1}] = a_n + (a_n - 1) = 2a_n - 1,$$

т. е. $[(2+\sqrt{3})^n] = [a_n + b_n\sqrt{3}]$ нечетно.

б) Заметим, что

$$[(1+\sqrt{3})^n] = \begin{cases} (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - 1 & \text{при } n \text{ четном,} \\ (1+\sqrt{3})^n + (1-(\sqrt{3})^n & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Действительно, стоящая в нашей формуле справа сумма является целым числом (см. первое решение задачи а)). При n четном $0 < (1-\sqrt{3})^n < 1$, а при n нечетном $-1 < (1-\sqrt{3})^n < 0$.

Рассмотрим теперь отдельно случаи четного и нечетного n.

1) n четно, $n = 2m$; тогда

$$[(1+3\sqrt{3})^{2m}] = (1+\sqrt{3})^{2m} + (1-\sqrt{3})^{2m} - 1 =$$
$$= \{(1+\sqrt{3})^2\}^m + \{(1-\sqrt{3})^2\}^m - 1 =$$
$$= (4+2\sqrt{3})^m + (4-2\sqrt{3})^m - 1 = 2^m\{(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m\} - 1.$$

Но стоящее в фигурных скобках число является, очевидно, целым, и следовательно, число $[(1+\sqrt{3})^{2m}] = 2^m N - 1$ всегда нечетно. Таким образом, при четном n наивысшая степень 2, на которую делится $[(1+\sqrt{3})^n]$, равна нулю.

2) n нечетно, $n = 2m+1$; тогда

$$[(1+\sqrt{3})^{2m+1}] = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} =$$
$$= (4+2\sqrt{3})^m(1+\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3})^m(1-\sqrt{3}) =$$
$$= 2^m\{(2+\sqrt{3})^m(1+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^m(1-\sqrt{3})\} =$$
$$= 2^m\{((2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m) + \sqrt{3}\,((2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m)\}.$$

Пусть $(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}$, где a_m и b_m — целые числа; тогда $(2-\sqrt{3})^m = a_m - b_m\sqrt{3}$. Подставив эти значения, получим

$$[(1+\sqrt{3})^{2m+1}] = 2^m\{a_m + b_m\sqrt{3} + a_m - b_m\sqrt{3} + \\ + \sqrt{3}(a_m + b_m\sqrt{3} - a_m + b_m\sqrt{3})\} = \\ = 2^m(2a_m + 6b_m) = 2^{m+1}(a_m + 3b_m).$$

Но $a_m + 3b_m$ нечетно. Действительно,

$$(a_m+3b_m)(a_m-3b_m) = a_m^2 - 9b_m^2 = (a_m^2 - 3b_m^2) - 6b_m^2 = 1 - 6b_m^2$$

(см. второе решение задачи а)). Так как $1 - 6b_m^2$ нечетно, то оба множителя $(a_m + 3b_m)$ и $(a_m - 3b_m)$ нечетны. Следовательно, наивысшая степень 2, на которую делится $[(1+\sqrt{3})^n]$ при нечетном $n = 2m+1$, равна

$$m+1 = \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} + 1.$$

106. Из того, что $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$ — целое число и $-1 < (2-\sqrt{5})^p < 0$ (ибо p нечетно), следует, что

$$[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$$

(сравните с решениями задач 104 и 105). По формуле бинома Ньютона имеем

$$(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p = \\ = 2(2^p + C_p^2 2^{p-2}5 + C_p^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1} 2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}),$$

так что

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = 2(C_p^2 2^{p-2}5 + C_p^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1} 2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}).$$

Но все биномиальные коэффициенты

$$C_p^2 = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}, \quad C_p^4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \quad \ldots, \quad C_p^{p-1} = p$$

делятся на простое число p (ибо числитель выражения для C_p^k делится на p, а знаменатель не делится). Значит, и разность $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ делится на p, что и требовалось доказать.

107. $C_n^p = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$. Из p последовательных целых чисел n, $n-1$, $n-2$, …, $n-p+1$ одно и только одно число делится на p; обозначим это число буквой N. В таком случае $\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{N}{p}$ и разность, стоящая в условии задачи, принимает вид

$$\frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(n-p+1)}{p!} - \frac{N}{p}.$$

Отметим теперь, что числа n, $n-1$, …, $N+1$, $N-1$, … …, $n-p+1$ дают при делении на p всевозможные остатки 1, 2, 3, …, $p-1$ (p последовательных целых чисел от $n-p+1$ до n дают при делении на p все остатки 0, 1, 2, …, $p-1$, причем каждый из них по одному разу). Отсюда следует, что разность

$$n(n-1)\ldots(N+1)(N-1)\ldots(n-p+1)-(p-1)!$$

делится на p (для доказательства достаточно перемножить почленно все равенства $n = k_1p + a_1, n-1 = k_2p + a_2$, … …, $N+1 = k_ip + a_i$, $N-1 = k_{i+1}p + a_{i+1}$, …, $n-p+1 = k_{p-1}p + a_{p-1}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — целые числа, а a_1, a_2, … …, a_{p-1} равны числам 1, 2, …, $p-1$, взятым в каком-то неизвестном нам порядке). Умножая эту разность на целое число $\frac{N}{p}$, получим

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p} - \frac{N(p-1)!}{p};$$

новая разность, разумеется, будет по-прежнему делиться на p. Разделив, наконец, оба члена последней разности на $(p-1)!$, мы придем к требуемому результату (частное от деления на $(p-1)!$ также будет делиться на p, ибо $(p-1)!$ взаимно просто с p).

108. Пусть α и β — два числа, удовлетворяющих условию задачи. Выберем какое-нибудь целое число N и рассмотрим те члены последовательности $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, …, которые не больше N; пусть это будут $[\alpha], [2\alpha], \ldots, [n\alpha]$. В таком случае $[n\alpha] \leqslant N$, $[(n+1)\alpha] > N$, откуда следует, что $n\alpha < N+1$, $(n+1)\alpha \geqslant N+1$, $N+1 > n\alpha \geqslant N+1-\alpha$, или

$$n\alpha = N + l, \quad \text{где} \quad 1 > l \geqslant 1-\alpha.$$

Точно так же покажем, что если m есть число членов последовательности $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, …, которые меньше N, то

$$m\beta = N + l', \text{ где } 1 > l' \geqslant 1 - \beta.$$

Так как по условию среди чисел $[\alpha]$, $[2\alpha]$, …, $[n\alpha]$; $[\beta]$, $[2\beta]$, …, $[m\beta]$ должны встретиться по одному разу все числа 1, 2, 3, …, N, то $n + m = N$. Отсюда получаем $\dfrac{N+l}{\alpha} + \dfrac{N+l'}{\beta} = N$, или $N\left[1 - \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)\right] = \dfrac{l}{\alpha} + \dfrac{l'}{\beta}$; $\dfrac{1}{N} = \left(\dfrac{l}{\alpha} + \dfrac{l'}{\beta}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)$. Но из неравенств для l и l' следует $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} > \dfrac{l}{\alpha} + \dfrac{l'}{\beta} \geqslant \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} - 2$. Обозначив теперь сумму $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ через t и разделив все члены предыдущего неравенства на N, мы получим неравенство

$$\frac{t}{N} > 1 - t \geqslant \frac{t-2}{N},$$

которое должно выполняться при всех (сколь угодно больших!) значениях N. Но так как крайние члены этого неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми по абсолютной величине, то неравенство возможно только в том случае, если $1 - t = 0$, откуда $t = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Далее легко видеть, что числа α и β должны быть иррациональными, так как, если бы, например, мы имели $\alpha = \dfrac{p}{q}$, то из равенства $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ следовало бы, что $\beta = \dfrac{p}{p-q}$, а в этом случае было бы $[q\alpha] = [(p-q)\beta]$, что противоречит условию задачи.

Предположим теперь, что α и β — иррациональные числа, такие, что $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Так как в этом случае $\alpha > 1$, $\beta > 1$, то ни среди чисел $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, …, ни среди чисел $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, … не может встретиться двух равных между собой.

Докажем теперь, что для каждого целого числа N можно найти или такое целое число n, что $[n\alpha] = N$, или такое целое число m, что $[m\beta] = N$, причем обе эти возможности не могут одновременно иметь места. Действительно, пусть $[(n-1)\alpha] < N \leqslant [n\alpha]$, $[(m-1)\beta] < N \leqslant [m\beta]$. Из этих неравенств следует

$$n\alpha - \alpha < N, \quad n\alpha > N; \quad m\beta - \beta < N, \quad m\beta > N$$

(ни $n\alpha$, ни $m\beta$ не могут точно равняться числу N, так как α и β иррациональны), т. е.

$$n\alpha = N + d, \quad m\beta = N + d',$$

где

$$0 < d < \alpha, \quad 0 < d' < \beta.$$

Отсюда вытекает, что

$$n + m = \frac{N}{\alpha} + \frac{d}{\alpha} + \frac{N}{\beta} + \frac{d'}{\beta} = \\ = N\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta}\right) = N + \left(\frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta} = n + m - N$$

есть целое число. Но так как $0 < \dfrac{d}{\alpha} < 1$, $0 < \dfrac{d'}{\beta} < 1$, то $0 < \dfrac{d}{\alpha} + \dfrac{d'}{\beta} < 2$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta} = 1,$$

которое, в силу того, что $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, возможно только в том случае, когда одно из чисел, d, d' меньше 1, а второе больше 1. Но это и значит, что из чисел $[n\alpha] = [N + d]$, $[m\beta] = [N + d']$, которые оба не меньше N, одно равно N, а второе больше N.

109. Первое решение. Очевидно, что $(\alpha) = \left[\alpha + \dfrac{1}{2}\right]$; таким образом, равенство, которое нам требуется доказать, принимает вид

$$N = \left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{8} + \frac{1}{2}\right] + \ldots$$

Пусть теперь

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

(a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 равны 0 или 1) — разложение числа N по степеням двойки (запись N в двоичной системе счисления). В таком случае, очевидно,

$$\left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 + \frac{a_0 + 1}{2}\right] = \\ = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 + a_0,$$

$$\left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \ldots + \frac{a_1 + 1}{2} + \frac{a_0}{4}\right] = \\ = a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \ldots + a_1,$$

. . . .

$$\left[\frac{N}{2^n} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n + \frac{a_{n-1} + 1}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \ldots + \frac{a_0}{2^n}\right] = a_n + a_{n-1},$$

$$\left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{a_0 + 1}{2} + \frac{a_{n-1}}{4} + \ldots + \frac{a_0}{2^{n+1}}\right] = a_n,$$

$$\left[\frac{N}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{N}{2^{n+3}} + \frac{1}{2}\right] = \ldots = 0$$

(напоминаем, что a_n, …, a_0 равны 0 или 1). Таким образом, имеем

$$\left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right] + \ldots = \\ = a_n(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1 + 1) + \\ + a_{n-1}(2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1 + 1) + \ldots + a_1(1 + 1) + a_0 = \\ = a_n 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0 = N,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Очевидно, что число нечетных чисел, не превосходящих N, равно $\dfrac{N}{2}$, если N четно, и равно

$\dfrac{N+1}{2} = \left[\dfrac{N}{2}\right] + 1$, если N нечетно, т. е. равно $\left(\dfrac{N}{2}\right)$. Точно так же число не превосходящих N четных чисел, не делящихся на 4, равно $\left[\dfrac{N}{4}\right]$, если N делится на 4 или дает при делении на 4 остаток 1, и равно $\left[\dfrac{N}{4}\right]+1$, если N дает при делении на 4 остаток 2 или 3; другими словами, это число всегда равно $\left(\dfrac{N}{4}\right)$. Точно так же число не превосходящих N чисел, делящихся на 4, но не делящихся на 8, равно $\left[\dfrac{N}{8}\right]$, если N делится на 8 или дает при делении на 8 остатки 1, 2 или 3, и равно $\left[\dfrac{N}{8}\right] + 1$ в противном случае, т. е. это число всегда равно $\left(\dfrac{N}{8}\right)$. Аналогично доказывается, что $\left(\dfrac{N}{16}\right)$ равно числу не превосходящих N чисел, делящихся на 8 и не делящихся на 16; $\left(\dfrac{N}{32}\right)$ равно числу не превосходящих N чисел, делящихся на 16, но не делящихся на 32, и т. д. Таким образом мы переберем все целые числа от 1 до N; следовательно,

$$\left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \ldots = N,$$

что и требовалось доказать.

110. а) Пусть a — первая, а b — последняя цифра искомого числа N. Тогда это число равно $1000a + 100a + 10b + b = 1100a+11b = 11(100a+b)$. Так как число N является точным квадратом, то из того, что оно делится на 11, вытекает, что оно делится и на 121, т. е. $\dfrac{N}{11} = 100a + b$ делится на 11. Но

$$100a + b = 99a + (a + b) = 11 \cdot 9a + (a + b).$$

Следовательно, $a + b$ делится на 11. Так как и a и b не больше 9 и a не равно 0, то $1 \leqslant a + b \leqslant 18$, а потому $a + b = 11$.

Отсюда

$$100a + b = 11 \cdot 9a + 11 = 11(9a + 1),$$

$$\frac{N}{121} = \frac{100a + b}{11} = 9a + 1.$$

Так как N — точный квадрат, то $\frac{N}{121}$ — также точный квадрат. Но из чисел вида $9a+1$, где a меняется от 1 до 9, только $9 \cdot 7 + 1 = 64$ является точным квадратом. Следовательно, $N = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$.

б) Пусть a — цифра десятков этого числа, а b — цифра единиц. Тогда число равно $10a + b$, а число, записанное этими же цифрами в обратном порядке, равно $10b+a$. В силу условия задачи, $10a + b + 10b + a = 11(a + b) = k^2$.

Отсюда следует, что k^2 делится на 11, поэтому $a+b$ также делится на 11. Так как $a + b \leqslant 18$, то это возможно лишь в случае, если $a + b = 11$, $k^2 = 121$. Таким образом, искомыми числами являются

$$29,\ 38,\ 47,\ 56,\ 65,\ 74,\ 83,\ 92.$$

111. Обозначим двузначное число, образованное первыми двумя цифрами искомого числа N, через a, а число, образованное его двумя последними цифрами, — через b. В таком случае $N = 100a + b$, так что условие задачи дает

$$100a + b = (a + b)^2,$$

или

$$99a = (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1). \qquad (*)$$

Итак, произведение $(a + b)(a + b - 1)$ должно делиться на 99. Рассмотрим теперь отдельные возможные случаи.

1°. $a + b = 99$, $a + b - 1 = \frac{a}{k}$. Так как a и b — двузначные числа, то $k \leqslant 2$, причем случай $k = 2$ сразу приводит к не удовлетворяющим основному равенству $(*)$ значениям $a = 99$, $b = 99$. Таким образом, приходится считать, что

$$k = 1, \quad a + b = 99, \quad a = a + b - 1 = 98,$$
$$N = 9801 = (98 + 1)^2.$$

2°. $a + b = 11m$, $a + b - 1 = 9n$, $mn = a$. В этом случае имеем $9n = 11m - 1$. Из того, что $11m-1$ делится на 9, следует, что число m дает при делении на 9 остаток 5 (непосредственной проверкой убеждаемся, что если бы m давало при делении на 9 какой-либо другой остаток, то $11m - 1$ не делилось бы на 9).

Итак, $m = 9t+5$, откуда следует, что $9n = 99t+54$, $n = 11t+6$. Теперь имеем

$$a = mn = (91 + 5)(11 + 6) = 99t^2 + 109t + 30.$$

Так как a число двузначное, то отсюда сразу вытекает, что $t = 0$. Следовательно, $a = 30$, $a + b = 11m = 55$, $b = 25$, $N = 3025 = (30 + 25)^2$.

3°. $a + b = 9m$, $a + b - 1 = 11n$, $mn = a$. Исследование, аналогичное тому, которое мы провели в случае 2°, дает единственный ответ $N = 2025 = (20 + 25)^2$.

4°. $a+b = 33m$, $a+b-1 = 3n$ или $a+b = 3m$, $a+b-1 = 33n$, что невозможно, так как $a + b$ и $a + b - 1$ — числа взаимно простые.

5°. $a+b-1 = 99k$, $a+b = \dfrac{a}{k}$. В этом случае имеем $a+b-1 = 99$, $a+b = 100$, $a = \dfrac{(a + b)(a + b - 1)}{99} = 100$, что невозможно.

Итак, условию задачи удовлетворяют лишь числа 9801, 3025 и 2025.

112. а) Четырехзначное число, записываемое четырьмя четными цифрами, может начинаться с цифр 2, 4, 6 или 8; другими словами, оно заключено между 1999 и 3000 или между 3999 и 5000, или между 5999 и 7000, или между 7999 и 9000. Поэтому корень квадратный из этого числа заключается между 44 и 55 или между 63 и 71, или между 77 и 84, или между 89 и 95. Заметим еще, что так как $(10x+y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$, то при $0 \leqslant y \leqslant 9$ цифра десятков числа $(10x + y)^2$ четна или нечетна одновременно с цифрой десятков числа y^2. Поэтому корень квадратный из искомого числа не может оканчиваться цифрами 4 и 6.

Так как корень квадратный из искомого числа четен, то он может равняться лишь одному из следующих 10 чисел:

$$48,\ 50,\ 52,\ 68,\ 70,\ 78,\ 80,\ 82,\ 90 \text{ и } 92.$$

Непосредственная проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют числа:

$$68^2 = 4624;\ 78^2 = 6084;\ 80^2 = 6400;\ 92^2 = 8464.$$

б) Рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к решению задачи а), показывают, что вовсе не существует четырехзначных чисел, являющихся полными квадратами и записывающихся четырьмя нечетными цифрами.

113. а) Обозначим цифры сотен, десятков и единиц искомого числа N соответственно через x, y, и z, так что $N = 100x + 10y + z$. В таком случае условие задачи дает

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!.$$

Отметим, что $7! = 5040$ есть число четырехзначное; поэтому ни одна цифра числа N не может превосходить 6. Следовательно, само число N не превосходит 700, откуда вытекает, что ни одна его цифра не может превосходить 5 (ибо $6! = 720 > 700$). Хотя бы одна цифра числа N равна 5, так как даже $3 \cdot 4! = 72 < 100$, а N трехзначно. При этом x не может быть равно 5, так как даже $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Отсюда следует также, что x не превосходит 3. Далее можно утверждать, что x не превосходит 2, так как даже $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Но число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то x не может быть больше 1, ибо даже $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Более того, так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, то мы заключаем, что y не может превосходить 4; следовательно, $z = 5$, так как хотя бы одна цифра числа N должна равняться 5. Таким образом, мы имеем $x = 1$, $4 \geqslant y \geqslant 0$ и $z = 5$; это позволяет легко обнаружить единственное решение задачи: $N = 145$.

б) Искомое число N не может иметь больше чем три цифры, так как даже $4 \cdot 9^2 = 324$ — число трехзначное. Поэтому мы можем написать $N = 100x+10y+z$, где x, y, z — цифры числа; при этом x или даже x и y одновременно могут быть равны нулю.

Из условия задачи имеем $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$, откуда

$$(100 - x)x + (10 - y)y = z(z - 1). \qquad (*)$$

Из последнего равенства прежде всего следует, что $x = 0$; в противном случае число, стоящее в левой части равенства, не меньше чем $90(x \geqslant 1$, $100 - x \geqslant 90$, $(10 - y)y \geqslant 0$, а число, стоящее справа, не больше чем $9 \cdot 8 = 72$ (ибо $z \leqslant 9$). Следовательно, уравнение $(*)$ имеет вид $(10 - y)y = z(z - 1)$. Легко проверить, что это последнее равенство не удовлетворяется ни при каких целых положительных x и y, не превосходящих 9, если только $y \neq 0$. Если $y = 0$, то мы имеем единственное очевидное решение $z = 1$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственное число $N = 1$.

114. а) Очевидно, что искомое число N не может иметь более четырех цифр, так как сумма цифр пятизначного числа не превосходит $5 \cdot 9 = 45$, а $45^2 = 2025$ — число четырехзначное. Далее, так как $4 \cdot 9 = 36$, а $36^2 = 1296$, то при N четырехзначном первая цифра N не превосходит 1. Но $1 + 3 \cdot 9 = 28$, а $28^2 = 784$ трехзначно; значит, N вообще не может быть четырехзначным числом. Итак, мы можем предположить, что $N = 100x + 10y + z$, где x, y, z — цифры искомого числа; при этом возможно, что $x = 0$ или даже $x = y = 0$.

Теперь условие задачи можно записать в виде

$$100x + 10y + z = (x + y + z)^2,$$

или

$$99x + 9y = (x + y + z)^2 - (x + y + z) = \\ = (x + y + z)(x + y + z - 1).$$

Таким образом, мы видим, что либо $x + y + z$, либо $x + y + z - 1$ делится на 9 (каждое из этих двух чисел делиться на 3 не может, так как они взаимно простые). Но $1 \leqslant x+y+z \leqslant 27$. Рассмотрим теперь отдельно все представляющиеся случаи.

1°. $x + y + z - 1 = 0$; $99x + 9y = 0$, $x = y = 0$, $z = 1$; $N = 1$.

2°. $x + y + z = 9$; $99x + 9y = 9 \cdot 8 = 72$, $x = 0$, $9y = 72$, $y = 8$, $z = 1$; $N = 81 (= (8 + 1)^2)$.

3°. $x + y + z - 1 = 9$; $99x + 9y = 9 \cdot 10 = 90$, $x = 0$, $9y = 90$, что невозможно.

4°. $x + y + z = 18$; $99x + 9y = 18 \cdot 17 = 306$, $x = 3$, $y = 1$, $z = 18 - (3 + 1) = 14$, что невозможно.

5°. $x + y + z - 1 = 18$; $99x + 9y = 19 \cdot 18 = 342$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 19 - (3 + 5) = 11$, что невозможно.

6°. $x + y + z = 27$; $99x + 9y = 27 \cdot 26 = 702$, $x = 7$, $y = 1$, $z = 27 - (7 + 1) = 19$, что невозможно.

Итак, условию задачи удовлетворяют только числа 1 и 81.

б) Куб трехзначного числа может содержать не более девяти цифр; поэтому сумма цифр куба этого числа не превосходит $9 \cdot 9 = 81 < 100$. Отсюда следует, что искомое число не может быть трехзначным; аналогично показывается, что оно не может содержать и больше трех цифр. Итак, искомое число обязательно будет однозначным или двузначным.

Куб двузначного числа не может иметь более шести цифр; поэтому сумма цифр куба не превосходит $6 \cdot 9 = 54$. Итак, искомое число не может превосходить 54. Но если куб числа, не превосходящего 54, даже и имеет шесть цифр, то первая цифра его равна 1; поэтому сумма цифр куба не превосходит $5 \cdot 9 + 1 = 46$. Итак, искомое число не превосходит 46.

Если число не превосходит 46, то куб его содержит не более пяти цифр, и так как он меньше 99999, то сумма цифр куба не превосходит $4 \cdot 9 + 8 = 44$; так как куб числа 44 есть пятизначное число, оканчивающееся на 4, то и 44 больше суммы цифр своего куба. Итак, искомое число не превосходит 43.

Далее, так как сумма цифр каждого числа дает при делении на 9 такой же остаток, как и само число, то искомое число и его куб должны давать при делении на 9 одинаковые остатки. Но это возможно только в том случае, если искомое число дает при делении на 9 остаток $-1, 0$ или 1.

Итак, искомое число не превосходит 43 и дает при делении на 9 остаток $-1, 0$ или 1. Этим условиям удовлетворяют лишь следующие 13 чисел:

$$1;\ 8,\ 9,\ 10;\ 17,\ 18,\ 19;\ 26,\ 27,\ 28;\ 35,\ 36,\ 37.$$

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют числа

$$1(1^3 + 1), \quad 8(8^3 = 512), \quad 17(17^3 = 4193),$$
$$18(18^3 = 5832), \quad 26(26^3 = 17576), \quad 27(27^3 = 19683).$$

115. а) Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x < 5$ единственными решениями нашего уравнения будут числа $x = 1$, $y = \pm 1$ и $x = 3$, $y = \pm 3$. Докажем теперь, что при $x \geqslant 5$ решений нет. Для этого заметим, что $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ оканчивается цифрой 3, а $5!, 6!, 7!, \ldots$ все оканчиваются нулем. Таким образом, при $x \geqslant 5$ сумма $1! + 2! + \ldots + x!$ оканчивается цифрой 3, а поэтому не может равняться квадрату целого числа y (никакой квадрат целого числа не оканчивается на 3).

б) Рассмотрим два случая.

1°. $z = 2n$ — четное число. Этот случай легко сводится к предыдущей задаче, ибо $y^{2n} = (y^n)^2$. Таким образом, при четном z решения таковы:

$$x = 1;\ y = \pm 1;\ z \text{ любое четное;}$$
$$x = 3;\ y = \pm 3;\ z = 2.$$

2°. z — нечетное число. При $z = 1$ годится любое значение x, причем $y = 1! + 2! + \ldots + x!$ Пусть $z \geqslant 3$. Заметим, что $1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8! = 46233$. Число 46 233 делится на 9, но не делится на 27, а при $n \geqslant 9$ число $n!$ делится на 27. Сумма $9!+10!+\ldots+x!$ делится на 27; поскольку, однако, $1!+2!+\ldots+8!$ делится на 9, но не делится на 27, вся сумма $1! + 2! + \ldots + x!$ при $x \geqslant 8$ делится на 9, но не делится на 27. Для того чтобы y^z делилось на 9, необходимо, чтобы y делилось на 3. Но тогда y^z делится на 27 (ибо $z \geqslant 3$) и, следовательно, при $x \geqslant 8$, $z \geqslant 3$ решений в целых числах нет. Остается рассмотреть случай $x < 8$. Имеем $1! = 1 = 1^z$, где z — любое натуральное число; $1!+2! = 3$, т. е. не равно никакой целой, отличной от 1 степени никакого натурального числа; $1! + 2! + 3! = 3^2$, и, далее,

$$\begin{aligned}
&1! + 2! + 3! + 4! = 33,\\
&1! + 2! + \ldots + 5! = 153,\\
&1! + 2! + \ldots + 6! = 873,\\
&1! + 2! + \ldots + 7! = 5913.
\end{aligned}$$

Ни одно из чисел 33, 153, 873 и 5913 не является целой, отличной от единицы степенью никакого натурального числа. Таким образом, при нечетном z окончательно имеем лишь следующие решения:

$$x = 1,\ y = 1,\ z \text{ любое нечетное;}$$

x любое натуральное, $y = 1! + 2! + \ldots + x!,\ z = 1$.

116. Пусть
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^n.$$

Обозначим наибольшую степень двойки, на которую делятся все четыре числа a, b, c и d, через p. Сократив обе части нашего равенства на 2^{2p}, мы получим

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p},$$

где из четырех чисел a_1, b_1, c_1, d_1 хотя бы одно является нечетным.

Если из четырех чисел a_1, b_1, c_1, d_1 только одно или три являются нечетными, то $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$ нечетно и наше равенство невозможно. Если из чисел a_1, b_1, c_1, d_1 два, например $a_1=2k+1$ и $b_1=2l+1$, являются нечетными, а остальные два, $c_1=2m$ и $d_1=2m$, четны, то мы имеем

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2+4n^2= \\ =2[2(k^2+k+l^2+l+m^2+n^2)+1],$$

что противоречит тому, что $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=2^{n-2p}$, не имеет нечетных делителей (выражение в квадратных скобках не может равняться единице, так как в противном случае мы имели бы $k=l=m=n=0$, $c_1=d_1=0$ и $c=d=0$). Если же все четыре числа $a_1=2k+1$, $b_1=2l+1$, $c_1=2m+1$, $d_1=2n+1$ нечетны, то мы имеем

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2+ \\ +4m+1+4n^2+4n+1= \\ =4\,[k(k+l)+l(l+1)+m(m+1)+n(n+1)+1].$$

Но произведение двух последовательных целых чисел всегда четно (один из сомножителей обязательно четен). Следовательно, выражение в квадратных скобках нечетно, и, значит, оно равно 1. Таким образом, $n-2p=2$, $n=2p+2$ и $k=l=m=n=0$, $a_1=b_1=c_1=d_1=1$, $a=b=c=d=2^p$.

Итак, если n есть число нечетное, то 2 вовсе не разлагается на сумму четырех квадратов; если $n=2p$ четно, то 2^n допускает единственное разложение

$$2^{2p}=(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2.$$

117. а) Первое решение. Уравнение

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

удовлетворяется значениями $x=0$, $y=0$, $z=0$. При этом если одно из чисел x, y, z равно 0, то и остальные должны быть равны 0, ибо сумма их квадратов в этом случае равна 0.

Пусть теперь все числа x, y, z, удовлетворяющие нашему уравнению, отличны от 0. Каждое из них можно представить в виде

$$x = 2^\alpha x_1, \quad y = 2^\beta y_1, \quad z = 2^\gamma z_1,$$

где x_1, y_1, z_1 нечетны (если какое-нибудь из чисел x, y или z нечетно, то соответствующий показатель степени 2 равен 0).

Так как x, y, z входят в наше уравнение симметрично, то можно считать, что x делится на наименьшую степень 2, а z на наибольшую, т. е. что

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma.$$

Выясним, на какую степень 2 делится левая часть нашего равенства.

1°. Если $\alpha < \beta \leqslant \gamma$ или же $\alpha = \beta = \gamma$, то после вынесения за скобки 2^{2^α} в скобках будет стоять сумма нечетного и двух четных чисел или же сумма трех нечетных чисел, т. е. нечетное число.

2°. Если же $\alpha = \beta < \gamma$, то можно написать

$$x = 2^\alpha(2k+1), \quad y = 2^\alpha(2l+1), \quad z = 2^\alpha \cdot 2m.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = 2^{2^\alpha}[(2k+l)^2 + (2l+1)^2 + (2m)^2] = \\ = 2^{2^\alpha}(4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2) = \\ = 2^{2^{\alpha+1}}[2(k^2+k+l^2+l+m^2)+1], \end{aligned}$$

т. е. после вынесения за скобки $2^{2^\alpha+1}$ в скобках остается нечетное число.

С другой стороны, правая часть равенства делится на $2^{\alpha+\beta+\gamma+1}$. Но правая часть равенства должна делиться на такую же степень 2, что и левая.

В случае 1° отсюда следует, что $2\alpha = \alpha+\beta+\gamma+1$. Так как $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то из этого равенства следует абсурдное неравенство $2\alpha \geqslant 3\alpha+1$.

В случае 2° отсюда следует, что $2\alpha+1 = \alpha+\beta+\gamma+1$. Так как $\alpha = \beta < \gamma$, то отсюда следует неравенство $2\alpha+1 > 3\alpha+1$, которое также не может иметь места.

Следовательно, не существует решений в целых числах уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$, отличных от решения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Второе решение. Так как сумма квадратов чисел x, y и z четна, то либо все эти числа четны, либо одно из них четно, а два нечетны. Но в последнем случае сумма $x^2+y^2+z^2$ делилась бы только на 2, а произведение $2xyz$ — на 4 (сравните с первым решением задачи). Итак, мы можем считать, что x, y и z четны: $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$. Подставляя эти значения в наше исходное уравнение и сокращая на 4, получаем

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1.$$

Отсюда, в точности как выше, выводим, что числа x_1, y_1, z_1 все четные. Но в таком случае, обозначив $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, мы для чисел $x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{x}{4}$, $y_2 = \frac{y}{4}$, $z_2 = \frac{z}{4}$ получим уравнение

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2,$$

откуда, как прежде, выводится, что эти числа тоже четные.

Продолжая тот же процесс, мы заключаем, что все числа

$$x,\, y,\, z; \quad x_1 = \frac{x}{2},\, y_1 = \frac{y}{2},\, z_1 = \frac{z}{2}; \quad x_2 = \frac{x}{4},\, y_2 = \frac{y}{4},\, z_2 = \frac{z}{4};$$
$$x_3 = \frac{x}{8},\, y_3 = \frac{y}{8},\, z_3 = \frac{z}{8}; \quad \ldots; \quad x_k = \frac{x}{2^k},\, y_k = \frac{y}{2^k},\, z_k = \frac{z}{2^k}; \quad \ldots$$

четные (числа x_k, y_k, z_k должны удовлетворять уравнению $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = 2^{k+1}x_ky_kz_k$). Но это возможно только в том случае, если $x = y = z = 0$.

б) Так же, как и выше, доказывается, что единственным решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv$ в целых числах является решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $v = 0$.

Здесь специального рассмотрения заслуживает случай, когда наивысшие степени 2, на которые делятся x, y, z и v, одинаковы, т. е. когда

$$x = 2^\alpha(2k+1), \quad y = 2^\alpha(2l+1),$$
$$z = 2^\alpha(2m+1), \quad v = 2^\alpha(2n+1),$$

где α — целое неотрицательное число, а k, l, m и n — целые числа.

Тогда

$$x^2+y^2+z^2+v^2=2^{2\alpha}\left[(4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1)+\right.$$
$$\left.+(4m^2+4m+1)+(4n^2+4n+1)\right]=$$
$$=2^{2\alpha+2}(k^2+k+l^2+l+m^2+m+n^2+n+1)=$$
$$=2^{2\alpha+2}\left[k(k+1)+l(l+1)+m(m+1)+n(n+1)+1\right].$$

Но выражение в квадратных скобках обязательно нечетно (см. выше, с. 213, 214). Поэтому наивысшая степень 2, на которую делится левая часть равенства, равна $2\alpha+2$. Правая же часть делится на $24^{4\alpha+1}$. Поэтому должно выполняться равенство $2\alpha+2=4\alpha+1$, что невозможно при целых α.

Примечание. Второе решение задачи б) аналогично второму решению задачи а) и предоставляется читателю.

118. а) Пусть x, y, z — какие-то три целых положительных числа, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+y^2+z^2=kxyz. \qquad (*)$$

Покажем прежде всего, что всегда можно считать справедливыми неравенства

$$x\leqslant\frac{kyz}{2},\quad y\leqslant\frac{kxz}{2},\quad z\leqslant\frac{kxy}{2} \qquad (**)$$

(т. е., другими словами, что ни одно из слагаемых, стоящих в левой части уравнения $(*)$, не превосходит половины правой части). Действительно, если бы было, например, $z>\dfrac{kxy}{2}$, то мы рассмотрели бы не числа x, y, z, а меньшие числа x, y и $z_1=kxy-z$, которые, как нетрудно видеть, тоже удовлетворяют уравнению $(*)$:

$$x^2+y^2+(kxy-z)^2=kxy(kxy-z).$$

Если из этих новых чисел какое-нибудь опять будет больше произведения двух других, умноженного на $\dfrac{k}{2}$, то мы проведем снова аналогичную замену и так будем поступать до тех пор, пока не станут выполняться условия $(**)$ (после этого наш процесс уже не приведет к уменьшению чисел x, y, z).

Будем считать, что $x \leqslant y \leqslant z$. Прежде всего из того, что $y \leqslant z \leqslant \dfrac{kxy}{2}$, следует

$$1 \leqslant \frac{kx}{2}, \quad kx \geqslant 2.$$

Уравнение $(*)$, очевидно, можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2.$$

Так как $z \leqslant \dfrac{kxy}{2}$, то при замене в левой части последнего равенства числа z на $y \leqslant z$ эта левая часть возрастает (или, в случае $y = z$, не меняется); следовательно,

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - y\right)^2 \geqslant \frac{k^2x^2y^2}{4}.$$

Отсюда, раскрывая скобки, получаем:

$$x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2.$$

Так как по условию $x \leqslant y$, то тем более

$$y^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2,$$

т. е.

$$kx \leqslant 3.$$

Таким образом, мы имеем $2 \leqslant kx \leqslant 3$, т. е. kx равно 2 или 3. Но если $kx = 2$, то уравнение $(*)$ принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2yz \quad \text{или} \quad x^2 + (y - z)^2 = 0,$$

откуда $x = 0$ и $kx = 0$, а не 2. Следовательно, $kx = 3$ и, значит, k может равняться только 1 или 3. Нетрудно убедиться на простых примерах, что эти значения k являются возможными (см. решение задачи б)).

б) Продолжим рассуждения, которые привели к решению задачи а). Выше мы имели $x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2$, так как $kx = 3$, то это неравенство можно переписать в виде

$$x^2 + 2y^2 \geqslant 3y^2, \text{ или } x^2 \geqslant y^2.$$

Но мы предполагали, что $x \leqslant y$; следовательно, $x = y$. Полагая теперь в основном уравнении $(*)$ $x = y$, $kx = 3$, мы получим

$$2x^2 + z^2 = 3xz, \text{ или } (z - x)(z - 2x) = 0.$$

Таким образом, $z = x$, или $z = 2x$. Но так как $z \leqslant \frac{kxy}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3x}{2}$, то z не может равняться $2x$; следовательно, $z = x$. Итак, мы видим, что если только выполняются условия $(**)$, то должно быть $x = y = z$. Но так как $kx = 3$, то x может быть равно только 1 или 3. Соответственно этому получаем два решения уравнения $(*)$

$$x = y = z = 1 \quad (k = 3),$$
$$x = y = z = 3 \quad (k = 1).$$

В решении задачи а) мы видели, что всякую тройку чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $(*)$, можно последовательными подстановками вида $z_1 = kxy - z$ привести к тройке чисел, удовлетворяющих неравенствам $(**)$. Но если $z_1 = kxy - z$, то $z = kxy - z_1$; поэтому каждое решение уравнения $(*)$ можно получить из выписанных выше наименьших решений последовательными подстановками вида $z_1 = kxy - z$. В частности, таким образом, получаем следующие решения уравнения $(*)$, не превосходящие 1000.

1°. Случай $k = 3$:

x	$=$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	5	5
y	$=$	1	1	2	5	13	34	89	233	5	29	169	13	29
z	$=$	1	2	5	13	34	89	233	610	29	169	985	194	433

2°. Случай $k = 1$:

x	$=$	3	3	3	3	3	3	3	6	6	15
y	$=$	3	3	6	15	39	102	267	15	87	39
z	$=$	3	6	15	39	102	267	699	87	507	582

(то, что решения, отвечающие значению $k = 1$, получаются из решений, отвечающих значению $k = 3$, простым умножением чисел x, y и z на 3, сразу следует из того, что так связаны между собой н а и м е н ь ш и е решения уравнений $x^2+y^2+z^2 = xyz$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$).

119. Требуется найти решения в целых числах системы уравнений

$$x^2 + 125 = uy,$$
$$y^2 + 125 = vx$$

(дополнительно в задаче требуется, чтобы числа x и y были взаимно простыми и не превосходили 1000). Докажем, что каждое решение этой системы уравнений такое, что x и y взаимно просты, определяет не одну пару чисел, квадрат каждого из которых, увеличенный на 125, делится на второе, а три пары таких чисел. Точнее, покажем, что пары чисел x, u и y, v тоже удовлетворяют этому условию: $x^2 + 125$ делится на u, $u^2 + 125$ делится на x и аналогично для пары y, v.

Прежде всего из равенства $x^2 + 125 = uy$ сразу следует, что $x^2 + 125$ действительно делится на u. Далее, из этого же равенства получаем

$$u^2y^2 = x^4 + 250x^2 + 125^2, \quad u^2(vx - 125) = x^4 + 250x^2 + 125^2,$$

и, наконец,

$$x(u^2v - x^3 - 250x) = 125(u^2 + 125),$$

откуда следует, что $u^2 + 125$ делится на x (x взаимно просто с 125, ибо иначе x и y не были бы взаимно простыми). Наконец, отметим, что числа x и u тоже взаимно простые: если бы x и u имели общий простой делитель d, то $125 = uy - x^2$ тоже делилось бы на d (т. е. $d = 5$), а следовательно, и y делилось бы на d (так как $y^2 = vx - 125$). Точно так же показывается, что и числа y, v взаимно простые и такие, что квадрат каждого из них, увеличенный на 125, делится на второе число.

Обозначим наши числа x, y, u, v так: $x = x_0$, $y = x_1$, $u = x_{-1}$, $v = x_2$. Если $u^2 + 125 = x_{-2}x$, то пара чисел u, x_{-2}, т. е. x_{-1}, x_{-2} тоже удовлетворяет условию задачи. Точно так же, если $v^2 + 125 = x_3y$, то пара чисел v, x_3, т. е. x_2, x_3 тоже удовлетворяет этому условию. Таким образом, мы видим, что, исходя из каждой пары чисел, удовлетворяющих условию задачи, можно построить бесконечную в обе стороны цепочку чисел

$$\ldots\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,$$

каждые два соседних из которых дают решение задачи

$$\frac{x_\alpha^2+125}{x_{\alpha+1}}=x_{\alpha-1},\qquad \frac{x_{\alpha+1}^2+125}{x_\alpha}=x_{\alpha+2}.$$

Отметим еще, что для этой цепочки отношение суммы соседних с данным двух членов к этому члену есть постоянное число:

$$\frac{x_{\alpha-1}+x_{\alpha+1}}{x_\alpha}=\frac{x_{\alpha-1}x_{\alpha+1}+x_{\alpha+1}^2}{x_\alpha x_{\alpha+1}}=\frac{(x_\alpha^2+125)+x_{\alpha+1}^2}{x_\alpha x_{\alpha+1}}=$$
$$=\frac{x_\alpha^2+(x_{\alpha+1}^2+125)}{x_\alpha x_{\alpha+1}}=\frac{x_\alpha^2+x_\alpha x_{\alpha+2}}{x_\alpha x_{\alpha+1}}=\frac{x_\alpha+x_{\alpha+2}}{x_{\alpha+1}}.$$

Это замечание очень удобно использовать для последовательного вычисления членов цепочки; если обозначим $\dfrac{x_{\alpha-1}+x_{\alpha+1}}{x_\alpha}$ через t, то, очевидно, будем иметь

$$x_{\alpha+1}=tx_\alpha-x_{\alpha-1},\quad x_{\alpha-1}=tx_\alpha-x_{\alpha+1}.$$

Теперь надо найти метод, при помощи которого можно определить все такие цепочки решений. Отметим прежде всего, что если $x_{\alpha+1}\geqslant x_\alpha$, то $x_{\alpha+2}=\dfrac{x_{\alpha+1}^2+125}{x_\alpha}>\dfrac{x_{\alpha+1}^2}{\alpha_\alpha}\geqslant x_{\alpha+1}$, и если $x_{\alpha-1}\geqslant x_\alpha$, то $x_{\alpha-2}\geqslant x_{\alpha-1}$; поэтому каждая цепочка решений идет в обе стороны, возрастая от какого-то наименьшего своего члена (или двух равных между собой, наименьших членов; впрочем, легко видеть, что два соседних члена цепочки решений могут быть равны между собой только в том случае, если оба они равны 1). Пусть x_0 есть наименьший член цепочки решений:

$$x_1\geqslant x_0,\quad x_{-1}\geqslant x_0.$$

Докажем, что $x_0<\sqrt{125}<12$.

Отметим прежде всего, что фигурирующее выше число t — целое число, большее 2. Действительно, из равенства

$$t=\frac{x_{\alpha-1}+x_{\alpha+1}}{x_\alpha}=\frac{x_\alpha+x_{\alpha+2}}{x_{\alpha+1}}$$

следует, что t — целое число: x_α и $x_{\alpha+1}$ взаимно просты и, следовательно, $t=\dfrac{x_{\alpha-1}+x_{\alpha+1}}{x_\alpha}$ не может иметь в знаменателе никаких делителей $x_{\alpha+1}$ и $t = \dfrac{x_\alpha + x_{\alpha+2}}{x_{\alpha+1}}$ не может иметь в знаменателе никаких делителей x_α. Далее,

$$t = \frac{x_\alpha^2 + x_{\alpha+1}^2 + 125}{x_\alpha x_{\alpha+1}} > \frac{x_\alpha^2 + x_{\alpha+1}^2}{x_\alpha x_{\alpha+1}} \geqslant 2,$$

ибо $x_\alpha^2 + x_{\alpha+1}^2 \geqslant 2x_\alpha x_{\alpha+1}$ (так как $x_\alpha^2 + x_{\alpha+1}^2 - 2x_\alpha x_{\alpha+1} = (x_\alpha - x_{\alpha+1})^2 \geqslant 0$). Таким образом, мы заключаем, что $t \geqslant 3$. Теперь, так как

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_0)(x_{-1} - x_0) = x_1 x_{-1} + x_0^2 - x_0 x_1 - x_0 x_{-1} = \\ &= x_1 x_{-1} - x_0^2 - x_0(x_1 - x_0) - x_0(x_{-1} - x_0) \leqslant x_1 x_{-1} - x_0^2 = 125,\end{aligned}$$

то хотя бы одно из (неотрицательных) чисел $x_1 - x_0$ и $x_{-1} - x_0$ не превосходит 11; предположим для определенности, что $x_1 - x_0 \leqslant 11$. Далее, имеем

$$t = \frac{x_0^2 + x_1^2 + 125}{x_0 x_1},$$

$$t - 2 = \frac{x_0^2 + x_1^2 + 125 - 2x_0 x_1}{x_0 x_1} = \frac{(x_1 - x_0)^2 + 125}{x_0[x_0 + (x_1 - x_0)]}.$$

Но $t \geqslant 3$, $t - 2 \geqslant 1$; следовательно, $(x_1 - x_0)^2 + 125 \geqslant x_0^2 + x_0(x_1 - x_0)$, что было бы невозможно, если бы было $x_0 \geqslant 12 > (x_1 - x_0)$ (ибо в таком случае $x_0^2 > 125$, $x_0(x_1 - x_0) > (x_1 - x_0)^2$).

Теперь остается только перепробовать в качестве x_0 все числа, меньшие 12 и взаимно простые с 125; при этом x_1 есть такое число, что $x_0^2 + 125$ делится на x_1 (т. е x_1 есть делитель числа $x_0^2 + 125$) и $x_1^2 + 125$ делится на x_0. При этом так как $x_0^2 + 125 = x_1 x_{-1}$, то, приняв за x_1 меньшее из соседних с x_0 чисел цепочки, мы будем иметь

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{x_0^2 + 125}.$$

Нетрудно проверить, что все пары x_0, x_1, удовлетворяющие нашим условиям, исчерпываются следующими:

$$1,\ 1\left(t=\frac{1^2+1^2+125}{1\cdot 1}=127\right);\quad 1,\ 2\left(t=\frac{1^2+2^2+125}{1\cdot 2}=65\right);$$
$$1,\ 3\left(t=\frac{1^2+3^2+125}{1\cdot 3}=45\right);\quad 1,\ 6\left(t=\frac{1^2+6^2+125}{1\cdot 6}=27\right);$$
$$1,\ 7\left(t=\frac{1^2+7^2+125}{1\cdot 7}=25\right);\quad 1,\ 9\left(t=\frac{1^2+9^2+125}{1\cdot 9}=23\right);$$
$$2,\ 3\left(t=\frac{2^2+3^2+125}{2\cdot 3}=23\right);\quad 6,\ 7\left(t=\frac{6^2+7^2+125}{6\cdot 7}=5\right).$$

Это приводит к следующим цепочкам решений:

$\ldots$, 15001, 126, 1, 1, 126, 15001, $\ldots$;

$\ldots$, 4094, 63, 1, 2, 129, 8383, $\ldots$;

$\ldots$, 1889, 42, 1, 3, 134, 6027, $\ldots$;

$\ldots$, 15261, 566, 21, 1, 6, 161, 4341, $\ldots$;

$\ldots$, 10826, 449, 18, 1, 7, 174, 4343, $\ldots$;

$\ldots$, 7369, 321, 14, 1, 9, 206, 4729, $\ldots$;

$\ldots$, 22658, 987, 43, 2, 3, 67, 1538, $\ldots$;

$\ldots$, 2501, 522, 109, 23, 6, 7, 29, 138, 661, 3167, $\ldots$

Таким образом, все возможные пары взаимно простых целых положительных чисел x, y, меньших 1000, такие, что x^2+125 делится на y, а y^2+125 делится на x, даются следующей таблицей:

$x =$	126	1	63	1	2	42	1	3	566	21	1	6
$y =$	1	1	1	2	129	1	3	134	21	1	6	161

$x =$	449	18	1	7	321	14	1	9	987	43	2	3
$y =$	18	1	7	174	14	1	9	206	43	2	3	67

$x =$	522	109	23	6	7	29	138
$y =$	109	23	6	7	29	138	661

120. Задача состоит в том, чтобы решить в целых положительных числах следующую систему уравнений (x, y, z и u —

искомые числа):

$$\begin{aligned} x^2+y+z+u&=(x+v)^2,\\ y^2+x+z+u&=(y+w)^2,\\ z^2+x+y+u&=(z+t)^2,\\ u^2+x+y+z&=(u+s)^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y+z+u&=2vx+v^2,\\ x+z+u&=2wy+w^2,\\ x+y+u&=2tz+t^2,\\ x+y+z&=2su+s^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Сложив все уравнения $(*)$, получим

$$(2v-3)x+(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u+v^2+ \\ +w^2+t^2+s^2=0. \quad (**)$$

Отметим прежде всего, что из равенства $(**)$ следует, что хотя бы одно из чисел $2v-3$, $2w-3$, $2t-3$, $2s-3$ отрицательно, — иначе мы имели бы в левой части этого равенства сумму положительных чисел. Предположим, например, что $2v-3<0$. Это возможно только в том случае, если $v=0$ или $v=1$. В первом случае первое уравнение системы $(*)$ сразу дает $y+z+u=0$, что невозможно, если y, z, u положительны. Поэтому надо считать, что все числа v, w, t, s положительны и $v=1$. В таком случае равенство $(**)$ перепишется в виде

$$x=(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u++w^2+t^2+s^2+1. \quad (***)$$

Рассмотрим теперь разные возможные случаи.

1°. Числа x, y, z, u все попарно различны. В этом случае и числа v, w, t, s все попарно различны; действительно, считая, например, что $v=w$, мы получим, вычитая друг из друга первые два равенства $(*)$ $y-x=2v(x-y)$, что невозможно при v положительном и $x\neq y$. Далее, первое из равенств $(*)$ в предположении $v=1$ дает $2x=y+z+u-1$, $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$, что несовместимо с равенством $(***)$, где коэффициенты при y, z и u в правой части — целые положительные (ибо w, t, s не могут быть равны 1, так как они не равны v, а $v=1$). Итак, этот случай является невозможным.

2°. Два из чисел x, y, z, u равны между собой; остальные различны. Здесь надо отдельно рассмотреть два подслучая.

А) $z = u$. В этом случае $t = s$. Равенство $(***)$ и первое уравнение $(*)$ здесь принимают вид

$$x = (2w-3)y + 2(2t-3)z + w^2 + 2t^2 + 1,$$
$$2x = y + 2z - 1;$$

эти равенства по-прежнему несовместимы.

Б) $x = y$. Здесь $w = v = 1$. Равенство $(**)$ и первое из равенств $(*)$ в этом случае соответственно имеют вид

$$2x = (2t-3)z + (2s-3)u + t^2 + s^2 + 2,$$
$$x = z + u - 1.$$

Подставляя второе из этих равенств в первое, имеем

$$(2t-5)z + (2s-5)u + t^2 + s^2 + 4 = 0, \qquad (****)$$

откуда следует, что хотя бы одно из двух чисел $2t-5$, $2s-5$ должно быть отрицательным. Пусть $2t-5<0$; так как $t>0$ и $t \neq 1$ (ибо $v=1$; $t \neq v$, так как $z \neq x$), то, следовательно, $t = 2$. Теперь, прибавляя к третьему уравнению $(*)$ удвоенное первое уравнение, находим $4z + 4x + 6 = 4x + 2z + 3u$, т. е. $z = \dfrac{3}{2}u - 3$. Полагая в уравнении $(****)$ $t = 2$, $z = \dfrac{3}{2}u - 3$, получим

$$(4s-13)u + 2s^2 + 22 = 0.$$

Отсюда ясно, что $4s-13<0$. Так как $s>0$, $s \neq 1$, $s \neq 2$, то, очевидно, $s = 3$. Подставляя все эти значения в уравнения $(*)$, получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$x + z + u = 2x + 1,$$
$$2x + u = 4z + 4,$$
$$2x + z = 6u + 9,$$

из которой легко находим $x(=y) = 96$, $z = 57$, $u = 40$.

3°. Среди чисел x, y, z, u имеются две пары попарно равных. Пусть, например, $x = y$, $z = u$. В таком случае первое уравнение $(*)$ дает $x = 2z - 1$; подставляя этот результат в уравнение $(**)$:

$$x = (2t - 3)z + t^2 + 1,$$

находим

$$(2t - 5)z + t^2 + 2 = 0.$$

Отсюда следует, что $2t - 5 < 0$, или так как $t > 0$, $t \neq 1$, то $t = 2$. Теперь уравнения $(*)$ принимают вид

$$x + 2z = 2x + 1,$$
$$2x + z = 4z + 4,$$

откуда $x(= y) = 11$, $z(= u) = 6$.

4°. Три из чисел x, y, z, u равны между собой. Здесь тоже приходится отдельно рассматривать два подслучая.

А) $y = z = u$. В этом случае уравнение $(***)$ и первое уравнение $(*)$ принимают вид

$$x = 3(2w - 3)y + 3w^2 + 1, \quad 2x = 3y - 1$$

и, очевидно, являются несовместимыми.

Б) $x = y = z$. Первое уравнение $(*)$ дает в рассматриваемом случае

$$2x + u = 2x + 1,$$

откуда $u = 1$; последнее уравнение $(*)$ дает

$$3x = 2su + s^2 = 2s + s^2, \quad x = \frac{s(s+2)}{3}.$$

Но x — целое число; следовательно, или s или $s + 2$ должно делиться на 3, т. е. $s = 3k$, $x = k(3k + 2)$, или $s = 3k - 2$, $x = (3k - 2)k$; здесь k — произвольное целое число.

5°. Все числа x, y, z, u равны между собой. В этом случае первое уравнение $(*)$ сразу дает $3x = 2x + 1$, $x = 1$.

Итак, мы получаем следующие решения задачи:

$$x = y = 96,\ z = 57,\ u = 40; \quad x = y = 11,\ z = u = 6;$$
$$x = y = z = k(3k \pm 2),\ u = 1; \quad x = y = z = u = 1.$$

121. Обозначая искомые числа через x и y, имеем

$$x + y = xy,$$

или

$$xy - x - y + 1 = 1,$$
$$(x-1)(y-1) = 1.$$

Но так как единицу можно только двумя способами разложить в произведение целых множителей, то сразу получаем

$$x - 1 = 1, \quad y - 1 = 1; \quad x = 2, \quad y = 2,$$

или

$$x - 1 = -1, \quad y - 1 = -1; \quad x = 0, \quad y = 0.$$

122. Прежде всего устанавливаем, что хотя бы одно из трех чисел x, y и z, таких, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

должно быть меньше 4: если бы все эти числа были $\geqslant 4$, то сумма $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ была бы $\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Таким образом, если считать, что $x \leqslant y \leqslant z$, то для x остаются возможными только два значения: $x = 2$ и $x = 3$ (ибо $x > 1$). Рассмотрим эти две возможности в отдельности.

1) $x = 2$; тогда $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. Приведя дроби к общему знаменателю и отбросив знаменатель, имеем

$$yz - 2y - 2z = 0,$$
$$yz - 2y - 2z + 4 = 4,$$

или

$$(y-2)(z-2) = 4.$$

Так как y и z больше 1, то $y - 2$ и $z - 2$ не могут быть отрицательны и возможны только следующие случаи:

а) $y - 2 = 2,\ z - 2 = 2;\ y = 4,\ z = 4.$

б) $y - 2 = 1,\ z - 2 = 4;\ y = 3,\ z = 6.$

2) $x = 3$; тогда $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$, или

$$2yz - 3y - 3z = 0, \quad 4yz - 6y - 6z + 9 = 9,$$
$$(2y-3)(2z-3) = 9.$$

Так как $y \geqslant x = 3$, $2y - 3 \geqslant 3$, $2z - 3 \geqslant 3$, то возможен только один случай:

$$2y - 3 = 3, \quad 2z - 3 = 3; \quad y = 3, \quad z = 3.$$

Таким образом, все решения задачи даются следующими равенствами:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

123. а) Если $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$, то, избавляясь от знаменателя дроби, мы получим

$$ax + ay = xy,$$

или

$$xy - ax - ay + a^2 = a^2,$$
$$(x - a)(y - a) = a^2.$$

Последнее уравнение имеет $2\nu - 1$ решений в целых числах, где ν есть число делителей числа a^2 (включая 1 и само a^2): для того чтобы получить все эти решения, надо выписать 2ν возможных систем вида $x - a = d$, $y - a = \frac{a^2}{d}$ и $x - a = -d$, $y - a = -\frac{a^2}{d}$ (где d есть делитель числа a^2), кроме системы $x - a = -a$, $y - a = -a$, которая приводит к абсурдному в условиях данной задачи результату $x = 0$, $y = 0$.

Если $a = 14$, то $a^2 = 196$ и делители числа $a^2 = 196$ имеют вид

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28,\ 49,\ 98,\ 196.$$

Соответственно этому мы получаем следующие 17 решений нашего уравнения:

x	15	16	18	21	28	42	63	112	210	13	12
y	210	112	63	42	28	21	18	16	15	−182	−84

x	10	7	−14	−35	−84	−182
y	−35	−14	7	10	12	13

б) Заданное уравнение можно привести к виду

$$(x - z)(y - z) = z^2 \tag{$*$}$$

(см. решение задачи а)). Пусть теперь t общий наибольший делитель трех чисел x, y и z, т. е. $x = x_1t$, $y = y_1t$, $z = z_1t$, где x_1, y_1 и z_1 взаимно просты. Далее обозначим через m общий наибольший делитель чисел x_1 и z_1 и через n — общий наибольший делитель чисел y_1 и z_1, т. е. положим $x_1 = mx_2$, $z_1 = mz_2$; $y_1 = ny_2$, $z_1 = nz_2$, где x_2 и z_2, y_2 и z_2 взаимно просты. Числа m и n взаимно просты, ибо x_1, y_1 и z_1 взаимно просты. Так как z_1 делится и на m и на n, то можем положить $z_1 = mnp$.

Подставим теперь в основное уравнение $(*)$ $x = mx_2t$, $y = ny_2t$, $z = mnpt$. По сокращении на mnt^2 будем иметь

$$(x_2 - np)(y_2 - mp) = mnp^2. \qquad (**)$$

Но x_2 взаимно просто с p, ибо m есть общий наибольший делитель чисел $x_1 = mx_2$ и $z_1 = mnp$; аналогично y_2 взаимно просто с p. По раскрытии же скобок в уравнении $(**)$ мы получаем, что $x_2y_2 = x_2mp + y_2np$ делится на p. Отсюда следует, что $p = 1$, и наше уравнение принимает вид

$$(x_2 - n)(y_2 - m) = mn.$$

Здесь x_2 взаимно просто с n, ибо три числа $x_1 = mx_2$, $y_1 = ny_2$ и $z_1 = mn$ взаимно просты. Следовательно, $x_2 - n$ взаимно просто с n, а следовательно, $y_2 - m$ делится на n. Аналогично, $x_2 - n$ делится на m. Таким образом, $x_2 - n = \pm m$, $y_2 - m = \pm n$, $x_2 = \pm y_2 = \pm m + n$ и, следовательно,

$$x = m(m+n)t, \quad y = \pm n(m+n)t, \quad z = mnt,$$

где m, n, t — произвольные целые числа.

124. а) Из равенства $x^y = y^x$ видно, что простые делители чисел x и y одни и те же:

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \quad y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — простые числа. Тогда ввиду нашего равенства

$$\alpha_1 y = \beta_1 x, \quad \alpha_2 y = \beta_2 x, \ \dots, \alpha_n y = \beta_n x.$$

Будем считать, что $y > x$; тогда из написанных равенств следует, что

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2, \ \dots, \alpha_n < \beta_n.$$

Следовательно, y делится на x, $y = kx$, где k целое. Подставим это значение y в наше равенство:

$$x^{kx} = (kx)^x.$$

Отсюда, извлекая корень x-й степени, получим

$$x^k = kx, \text{ или } x^{k-1} = k.$$

Так как $y > x$, то $k > 1$, откуда $x > 1$. Но легко видеть, что $2^{2-1} = 2$, а при $x > 2$ или $k > 2$ всегда $x^{k-1} > k$. Действительно, при $k > 2$, $x \geqslant 2$

$$x^{k-1} \geqslant 2^{k-1} > k,$$

так как уже $2^{3-1} > 3$, а при $k = 2$, $x > 2$

$$x^{k-1} = x > 2 = k.$$

Поэтому единственным решением нашего уравнения в целых положительных числах будет $x = 2$, $k = 2$, $y = kx = 4$.

б) Обозначим отношение $\dfrac{y}{x}$ через k, тогда $y = kx$. Подставляя это выражение для y в наше уравнение, получим

$$x^{kx} = (kx)^x,$$

или, извлекая из обеих частей корень степени x и затем деля на x,

$$x^{k-1} = k,$$

откуда

$$x = k^{\frac{1}{k-1}}, \quad y = kk^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Пусть рациональное число $\dfrac{1}{k-1}$ равно несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$. Подставляя это выражение для $\dfrac{1}{k-1}$ в наши формулы, получим

$$k - 1 = \frac{q}{p}, \quad k = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}, \quad \frac{k}{k-1} = \frac{p+q}{q};$$

$$x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}, \quad y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}.$$

Так как p и q взаимно просты, то, для того чтобы x и y были рациональными числами, необходимо, очевидно, чтобы из целых чисел p и $p+q$ можно было извлечь корень степени q. Но так как при $q \geqslant 2$ и $p = n^q$ будет иметь место неравенство

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2}n^{q-2} + \ldots,$$

то это возможно только при $q = 1$.

Итак, все положительные рациональные числа, удовлетворяющие нашему уравнению, даются формулой

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p, \quad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1},$$

где p — произвольное целое число (кроме 0 и -1).

125. Пусть n — число восьмиклассников, m — число очков, набранных каждым из них. В таком случае число очков, набранных всеми участниками турнира, равно $mn + 8$. Это число равно числу сыгранных партий. Так как участников турнира $n + 2$ и каждый играл по одному разу с каждым из $n + 1$ остальных, то ими всего было сыграно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий (в произведении $(n+2)(n+1)$ каждая партия учитывается 2 раза). Таким образом, мы получаем

$$mn + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

или, после несложных преобразований,

$$n(n + 3 - 2m) = 14.$$

Здесь n — целое число; число в скобках также целое (ибо m либо целое, либо дробь с знаменателем 2).

Так как n — делитель 14, то n может быть равно одному из чисел 1, 2, 7, 14. Значения $n = 1$ и $n = 2$ мы должны отбросить, так как в этом случае общее число участников не превышает 4 и два семиклассника не могли бы набрать вдвоем 8 очков.

Остается $n = 7$ и $n = 14$.

Если $n = 7$, то $7(7 + 3 - 2m) = 14$; $m = 4$.

Если $n = 14$, то $14(14 + 3 - 2m) = 14$; $m = 8$.

126. Пусть девятиклассников было n и набрали они m очков. Тогда десятиклассников было $10n$ и набрали они $4{,}5m$ очков. Всех же участников турнира было $11n$ и набрали они $5{,}5m$ очков.

Общее число набранных всеми очков равно числу сыгранных партий. Партий сыграно было $\dfrac{11n(11n-1)}{2}$. Отсюда

$$5{,}5m = \frac{11n(11n-1)}{2},$$

и, следовательно,

$$m = n(11n - 1).$$

Каждый десятиклассник сыграл $11n - 1$ партий (ибо число участников турнира равно $11n$), а потому n девятиклассников могли набрать $n(11n-1)$ очков только в случае, если каждый из них выиграл все партии. Это возможно лишь при $n = 1$ (так как два девятиклассника не могут одновременно выиграть друг у друга). Итак, получаем единственное решение $n = 1$, $m = 10$.

127. По условию задачи имеем

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p,$$

где a, b, c — целые числа и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Обозначим $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$; тогда будем иметь

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z),$$

или, возведя обе части равенства в квадрат,

$$xyz = 4(x+y+z).$$

Здесь x, y и z — или целые положительные числа, или же половины нечетных целых чисел. Но второй случай невозможен, так как тогда слева у нас стояло бы дробное число, а справа целое. Итак, x, y и z целые.

Пусть теперь $x \geqslant y \geqslant z$. Из нашего уравнения найдем, что

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4};$$

следовательно, мы будем иметь

$$\frac{4y+4z}{yz-4} \geqslant y.$$

Последнее неравенство можно умножить на $yz-4$ (ясно, что $yz-4>0$, ибо иначе x было бы отрицательным) и рассматривать как квадратное неравенство относительно y:

$$y^2z-8y-4z \leqslant 0, \text{ т. е. } (y-y_1)(y-y_2) \leqslant 0, \tag{$*$}$$

где y_1 и y_2 — корни уравнения $zy^2-8y-4z=0$, зависящие, разумеется, от z:

$$y_1 = \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}, \quad y_2 = \frac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z}.$$

Но y_2 отрицательно и, значит, всегда $y-y_2>0$ (ибо y положительно); следовательно, для того чтобы выполнялось неравенство $(*)$, надо чтобы было

$$y-y_1 \leqslant 0, \quad y \leqslant \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}.$$

Итак, имеем $yz \leqslant 4+\sqrt{16+4z^2}$, откуда и подавно $z^2-4 \leqslant \leqslant \sqrt{16+4z^2}$ (ибо $z \leqslant y$). Возведя обе части в квадрат, получим

$$z^4-8z^2+16 \leqslant 16+4z^2; \quad z^4 \leqslant 12z^2,$$

что, очевидно, выполняется только при $z \leq 3$.

Рассмотрим теперь ряд возможных случаев.

1°. $z=1$, $y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4}}{1} < 9$; $x = \dfrac{4y+4z}{yz-4} = \dfrac{4y+4}{y-4}$ будет целым положительным только, если $y=5$ (в этом случае $x=24$), $y=6$ (в этом случае $x=14$), $y=8$ (в этом случае $x=9$).

2°. $z=2$, $y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4\cdot 4}}{2} < 5$; $x = \dfrac{4y+4z}{yz-4} = \dfrac{4y+8}{2y-4} = \dfrac{2y+4}{y-2}$ будет целым и не меньшим y только, если $y=3$ (в этом случае $x=10$) и $y=4$ (в этом случае $x=6$).

3°. $z=3$, $y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4\cdot 9}}{3} < 4$. При $z=y=3$ $x = \dfrac{4y+4z}{yz-4}$ не будет целым.

Итак, мы получили следующие пять решений задачи:

x	y	z	$x+y+z=p$	a	b	c
24	5	1	30	6	25	29
14	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10

128. а) Задача, очевидно, сводится к решению в целых числах уравнения

$$x^2+y^2=z^2.$$

Если t есть общий наибольший делитель чисел x, y и z, то, сократив наше уравнение на t^2, мы получим совершенно такое же уравнение, где x, y и z уже взаимно просты. Поэтому мы можем считать с самого начала x, y и z взаимно простыми. При этом и каждые два из этих чисел будут взаимно простыми, так как иначе и третье должно было бы делиться на их общий делитель.

Отсюда, в частности, заключаем, что никакие два из чисел x, y и z не могут быть четными. Далее, если бы x и y были оба нечетными: $x=2k+1$, $y=2l+1$, то мы имели бы

$$x^2+y^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=2[2(k^2+l^2+k+l)+1],$$

в то время как квадрат целого числа z должен быть либо нечетным (если z нечетно), либо делиться на 4 (если z четно). Поэтому одно из двух чисел x, y должно быть четным, а второе нечетным; предположим, например, что $x=2x_1$ четно.

Перепишем теперь наше уравнение в виде

$$(2x_1)^2=z^2-y^2, \quad \text{или} \quad x_1^2=\frac{z+y}{2}\cdot\frac{z-y}{2}.$$

Пусть $\dfrac{z+y}{2}=u$, $\dfrac{z-y}{2}=v$; тогда $z=u+v$, $y=u-v$. Целые числа u и v (напомним, что z и y оба нечетны) должны быть взаимно простыми, иначе z и y не были бы взаимно простыми. А если так, то из того, что их произведение $uv = x_1^2$ есть полный квадрат, следует, что каждое из них в отдельности представляет собой полный квадрат: $u = a^2$, $v = b^2$. Теперь окончательно имеем

$$z = u + v = a^2 + b^2, \quad y = u - v = a^2 - b^2, \quad x_1 = \sqrt{uv} = ab,$$

или, если не требовать, чтобы x, y и z были взаимно простыми:

$$x = 2tab, \quad y = t(a^2 - b^2), \quad z = t(a^2 + b^2),$$

где a и b — произвольные взаимно простые между собой целые числа и $a > b$, а t — произвольное целое число.

Эти формулы и дают решение задачи.

б) Обозначим стороны треугольника через x, y и z (z — сторона, лежащая против угла в 60°). В таком случае по теореме косинусов получим $z^2 = x^2 + y^2 - xy$.

Нам надо решить в целых числах это уравнение. Быстрее всего приводит к этой цели следующий искусственный прием.

Отметим, что наше уравнение можно записать также в следующем виде:

$$[4z + (x + y)]^2 = [2z + 2(x + y)]^2 + [3(x - y)]^2,$$

или

$$w^2 = u^2 + v^2,$$

где $u = 2z + 2(x + y)$, $v = 3(x - y)$, $w = 4z + (x + y)$. Теперь результат задачи а) позволяет сразу написать:

$$u = 2tab, \quad v = t(a^2 - b^2), \quad w = t(a^2 + b^2),$$

где a, b — какие-то два взаимно простых числа, t тоже целое.

Итак имеем

$$\begin{gathered} 4z + (x + y) = t(a^2 + b^2), \\ 2z + 2(x + y) = 2tab, \\ 3(x - y) = t(a^2 - b^2). \end{gathered}$$

Решая эту систему трех уравнений третьей степени с тремя неизвестными x, y и z, получим

$$\begin{gathered} 6z = 2t(a^2 + b^2) - 2tab, \quad 3(x + y) = 4tab - t(a^2 + b^2), \\ 3(x - y) = t(a^2 - b^2) \end{gathered}$$

и, окончательно,

$$x=\frac{1}{3}\,tb(2a-b),\quad y=\frac{1}{3}\,ta(2b-a),\quad z=\frac{1}{3}\,t(a^2+b^2-ab).$$

Для того чтобы даваемые этими формулами значения x, y, z были целыми, необходимо, чтобы по крайней мере одно из чисел t, $a+b$ делилось на 3. [Если $t=3t_1$, то полученные формулы можно переписать в виде

$$x=t_1b(2a-b),\quad y=t_1a(2b-a),\quad z=t_1(a^2+b^2-ab);$$

если $a+b$ делится на 3, то либо $a=3a_1+1$, $b=3b_1+2$ и

$$x=t(3b_1+2)(2a_1-b_1),\quad y=t(3a_1+1)(2b_1-a_1+1),$$
$$z=t(3a_1^2+3b_1^2-3a_1b_1+3b_1+1),$$

либо $a=3a_1+2$, $b=3b_1+1$ и

$$x=t(3b_1+1)(2a_1-b_1+1),\quad y=t(3a_1+2)(2b_1-a_1),$$
$$z=t(3a_1^2+3b_1^2-3a_1b_1+3a_1+1).]$$

Для того чтобы полученные формулы имели смысл, необходимо, чтобы было $2a>b$, $2b>a$, т. е. $\frac{a}{2}<b<2a$; при этих условиях наибольшее из трех чисел x, y, z (если $a>b$, это будет число x) будет меньше суммы двух других, т. е. из отрезков длин x, y, z можно будет образовать треугольник.

в) Из теоремы косинусов получаем

$$z^2=x^2+y^2+xy,$$

где z — сторона треугольника, лежащая против угла в 120°; x и y — две другие стороны.

Это соотношение можно представить в виде

$$[4z+(x-y)]^2=[2z+2(x-y)]^2+[3(x+y)]^2.$$

Отсюда аналогично решению задачи б) получаем

$$x=\frac{1}{3}\,ta(a-2b),\quad y=\frac{1}{3}\,tb(2a-b),\quad z=\frac{1}{3}\,t(a^2+b^2-ab),$$

где a и b — какие-то взаимно простые числа, такие, что $a > 2b$, и по крайней мере одно из чисел t, $a + b$ делится на 3.

129. Пусть в треугольнике ABC (стороны которого равны a, b, c, а углы — A, B и C) $B = nA$. Тогда $C = 2d - (n+1)A$, и, следовательно, в силу теоремы синусов

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin nA}{\sin A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin(n+1)A}{\sin A}.$$

а) $n = 2$. Так как

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A, \quad \sin 3A = 4\cos^2 A\sin A - \sin A,$$

то в этом случае

$$\frac{b}{a} = 2\cos A, \quad \frac{c}{a} = (2\cos A)^2 - 1. \tag{$*$}$$

Но $2\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$ и, следовательно, в треугольнике с целочисленными сторонами $2\cos A$ всегда будет рационально. Пусть $2\cos A = \dfrac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Тогда, в силу соотношений $(*)$,

$$a : b : c = q^2 : pq : (p^2 - q^2).$$

Если p и q взаимно просты, то три числа q^2, pq и $p^2 - q^2$ не имеют отличного от единицы общего делителя. Отсюда вытекает, что для всех треугольников, удовлетворяющих условию $B = 2A$ с целочисленными несократимыми (т. е. не имеющими отличного от единицы общего наибольшего делителя) сторонами, длины сторон выражаются формулами

$$a = q^2, \quad b = pq, \quad c = p^2 - q^2,$$

где p и q — взаимно простые числа.

Для того чтобы приведенные формулы действительно определяли стороны треугольника, для которого $B = 2A$, числа p и q должны удовлетворять следующему условию: угол $A = \arccos\dfrac{p}{2q}$ должен быть заключен в пределах $0 < A < 60^\circ$ (A должно быть меньше 60°, так как $A + B + C = 3A + C = 180^\circ$). Так как $\cos 0 = 1$ и $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, то это условие можно переписать в виде $2 > \dfrac{p}{q} > 1$. Наименьшие целые числа p и q, удовлетворяющие этому условию, — $p = 3$, $q = 2$. Отсюда следует, что наименьшим треугольником с целочисленными сторонами, удовлетворяющим условию $B = 2A$, будет треугольник со сторонами $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$.

Перейдем теперь к задачам б) и в). Здесь нам понадобятся выражения для $\sin 5A$, $\sin 6A$ и $\sin 7A$ через тригонометрические функции угла A. Применив несколько раз теорему сложения для синусов (или воспользовавшись общей формулой задачи 222, б); см. с. 52), можно после ряда преобразований получить следующие формулы:

$$\sin 5A = (2\cos A)^4 \sin A - 3(2\cos A)^2 \sin A + \sin A,$$
$$\sin 6A = [(2\cos A)^2 - 1]\,[(2\cos A)^2 - 3]2\cos A + \sin A,$$
$$\sin 7A = [(2\cos A)^2 - 2]\,[(2\cos A)^2 - 3]4\cos^2 A \sin A - \sin A.$$

Далее решение проводится совершенно так же, как и в случае задачи а).

Положим $2\cos A = \dfrac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа; тогда из формул для $\sin 5A$, $\sin 6A$ и $\sin 7A$ будет следовать, что для всех треугольников с целочисленными несократимыми сторонами, удовлетворяющих условию $B = nA$, где $n = 5$ или 6, длины сторон выражаются формулами:

б) при $n = 5$

$$a = q^5, \quad b = q(p^4 - 3p^2q^2 + q^4), \quad c = p(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2);$$

в) при $n = 6$

$$a = q^6, \quad b = pq(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2),$$
$$c = p^2(p^2 - 2q^2)(p^2 - 3q^2) - q^6$$

(p и q — взаимно простые целые числа).

Для того чтобы определенные по этим формулам числа действительно были сторонами треугольника, для которого $B = nA$, числа p и q должны быть такими, что:

б$'$) при $n = 5$ $\quad 0 < \arccos \dfrac{p}{2q} < 30^\circ$;

в$'$) при $n = 6$ $\quad 0 < \arccos \dfrac{p}{2q} < \dfrac{180^\circ}{7} \approx 25^\circ 43'$.

Так как $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то при $n = 5$ числа p и q должны удовлетворять условию $2 > \dfrac{p}{q} > \sqrt{3} = 1,732\ldots$ Наименьшие целые числа q и p, удовлетворяющие этому условию, — $q = 4$, $p = 7$ $\left(q \text{ должно быть не менее чем } 4, \text{ так как } \dfrac{p}{q} \text{ отличается от целого числа менее чем на } \dfrac{1}{3}\right)$.

Следовательно, наименьшим треугольником с целочисленными сторонами, для которого $B = 5A$, будет треугольник со сторонами

$$a = 1024, \quad b = 1220, \quad c = 231.$$

При $n = 6$ числа p и q должны удовлетворять условию $2 > \dfrac{p}{q} > 2\cos\dfrac{180^\circ}{7}$. По таблицам находим, что

$$2\cos\frac{180^\circ}{7} \approx 2\cos 25^\circ 43' \approx 1,802.$$

Следовательно, должно быть $2 > \dfrac{p}{q} > 1,802$. Наименьшие целые числа q и p, удовлетворяющие этому условию, это $q = 6$, $p = 11$. Подставляя эти q и p в нашу формулу, найдем, что наименьшим треугольником с целочисленными сторонами, для которого $B = 6A$, будет треугольник со сторонами

$$a = 46\,656, \quad b = 72\,930, \quad c = 30\,421.$$

130. Предположим, что имеется такой прямоугольный треугольник, катеты которого равны x^2 и y^2, а гипотенуза z, где x, y и z — целые числа. При этом мы можем считать, что числа x^2, y^2 и z — попарно взаимно простые и, следовательно, что

$$x^2 = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

где a и b — какие-то взаимно простые целые числа; $a > b$ (см. решение задачи 128, а)). Второе из этих равенств можно переписать так:

$$a^2 = b^2 + y^2,$$

в силу чего a, b и y можно представить формулами

$$b = 2tu, \quad y = t^2 - u^2, \quad a = t^2 + u^2,$$

где t и u — какие-то простые числа (здесь мы снова пользуемся результатом задачи 128, а)). А в таком случае имеем

$$x^2 = 2(t^2+u^2)\cdot 2tu; \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = tu(t^2+u^2).$$

Но t и u взаимно просты между собой, а значит, взаимно просты и с числом t^2+u^2; следовательно, из того, что произведение $tu(t^2+u^2)$ представляет собой полный квадрат, следует, что каждый из множителей в отдельности является полным квадратом:

$$t = x_1^2, \quad u = y_1^2, \quad t^2+u^2 = z_1^2.$$

Последнее равенство показывает, что существует прямоугольный треугольник, катеты которого равны $t = x_1^2$ и $u = y_1^2$, а гипотенуза z_1. Здесь x_1, y_1 и z_1 — снова целые положительные числа и, что особенно важно, $z_1 < z$ (так как даже $z_1^4 = (t^2+u^2)^2 = a^2 < a^2+b^2 = z$. Таким образом, мы видим, что если существует какой-то прямоугольный треугольник, катеты которого суть квадраты целых чисел, а гипотенуза равна целому числу, то существует и другой такой треугольник с *меньшей гипотенузой*. Повторяя то же самое рассуждение, мы построим цепь таких треугольников, гипотенузы которых делаются все меньше и меньше. А так как все эти гипотенузы выражаются целыми числами, то мы в конце концов придем к треугольнику, гипотенуза которого равна 1, что, разумеется, невозможно (если гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, то катеты не могут равняться квадратам целых чисел). Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

131. Обозначим левую часть равенства через A, а правую — через B. Тогда

$$n!\cdot A = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot A = (2n)!,$$

$$n!\cdot B = (2^n\cdot n!)\cdot[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)] = \\ = (2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)\cdot[1\cdot 3\ldots(2n-1)] = (2n)!$$

(относительно обозначений см. с. 18). Отсюда $A = B$.

132. а) Воспользуемся очевидной формулой

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\qquad \ldots,\qquad \frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Складывая почленно все эти равенства, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}.$$

б) Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right],$$

которая повторяется непосредственно, приведением ее правой части к общему знаменателю.

Отсюда имеем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right),\qquad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right),$$

$$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right),\qquad \ldots$$
$$\ldots,\qquad \frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}\right].$$

Складывая почленно все эти равенства, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n}\right].$$

б) Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right],$$

в справедливости которой убеждаемся непосредственной проверкой. Отсюда имеем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\right),$$

$$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\right),$$

. . . .

$$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\\ =\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right].$$

Складывая все эти равенства почленно, получаем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right].$$

Примечание. Если догадаться, какой вид должны иметь окончательные формулы (и это не очень трудно сделать, если непосредственно просуммировать заданные ряды для нескольких малых значений n), то доказать справедливость формул можно также по методу математической индукции (сравните с решением задачи 133).

Можно доказать также, что вообще

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots (p+1)}+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)(n-p+3)\ldots n}=\\ =\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots (p-1)}-\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)(n-p+4)\ldots n}\right].$$

(доказательство аналогично решению задач а)–в)).

133. Проще всего доказываются эти равенства методом математической индукции. Предоставляя читателю самостоятельно провести вычисления для сумм а) и б), мы здесь ограничимся доказательством общего равенства в), из которого соотношения задач а) и б) вытекают как частные случаи.

Это равенство справедливо при $n = 1$, так как

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p(p+1)}{p+1}.$$

Предположим, что оно справедливо для некоторого n:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p + \ldots + n(n+1) \ldots (n+p-1) = \frac{n(n+1) \ldots (n+p)}{p+1}.$$

В таком случае

$$\begin{aligned}1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p + 2 \cdot 3 \ldots p(p+1) + \ldots \\ \ldots + n(n+1) \ldots (n+p-1) + (n+1) \ldots (n+p-1)(n+p) = \\ = \frac{n(n+1) \ldots (n+p)}{p+1} + (n+1) \ldots (n+p) = \\ = \frac{n(n+1) \ldots (n+p) + (p+1)(n+1) \ldots (n+p)}{p+1} = \\ = \frac{(n+1) \ldots (n+p)(n+p+1)}{p+1}.\end{aligned}$$

По принципу индукции заключаем, что наше равенство справедливо для любого целого n.

134. Первое решение. а) Напишем ряд равенств

$$\begin{aligned}1^3 &= 1^3,\\ 2^3 = (1+1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,\\ 3^3 = (2+1)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,\\ 4^3 = (3+1)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1.\end{aligned}$$

Складывая все эти равенства и отбрасывая в сумме одинаковые члены, стоящие слева и справа, получим

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \\ + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n.$$

Отсюда

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=$$
$$=\frac{(n+1)^3-1-3(1+2+3+\ldots+n)-n}{3}=$$
$$=\frac{2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

б) Напишем ряд равенств:

$$\begin{aligned}
1^4&=1^4,\\
2^4=(1+1)^4&=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1,\\
3^4=(2+1)^4&=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1,\\
4^4=(3+1)^4&=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^4&=n^4+4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1.
\end{aligned}$$

Складывая все эти равенства и отбрасывая в сумме одинаковые члены, стоящие слева и справа, получим

$$(n+1)^4=1^4+4\cdot(1^3+2^3+\ldots+n^3)+$$
$$+6(1^2+2^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)+n.$$

Отсюда, используя результат задачи а), имеем

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=$$
$$=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-1-6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\,\frac{n(n+1)}{2}-n\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\{[(n+1)^2-1]\cdot[(n+1)^2+1]-n(n+1)(2n+1)-$$
$$-2n(n+1)-n\}=$$
$$=\frac{n}{4}\,[(n+2)(n^2+2n+2)-(n+1)(2n+1)-2(n+1)-1]=$$
$$=\frac{n}{4}\,[(n+1)(n^2+2n+2-2n-1-2)+(n^2+2n+2-1)]=$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\,\big[(n^2-1)+(n+1)\big]=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

в) Аналогично решениям задач а) и б), используя формулу $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$, получаем равенство

$$(n+1)^5 = 1^5 + 5(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) + \\ + 10(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + (10(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \\ + 5(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

из которого, используя формулы задач а) и б), находим

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

г) Обозначим:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(см. задачу б)). В таком случае имеем

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = \\ = [1^3 + 2^3 + \ldots + (2n)^3] - 2^3[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3] = \\ = S_{2n} - 8S_n = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \\ = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2[(2n+1)^2 - 2(n+1)^2] = \\ = n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2) = n^2(2n^2 - 1).$$

Второе решение. а) Рассмотрим следующую квадратную таблицу:

1-я	строка	1	2	3	k	n
2-я	строка	1	2	3	k	n
3-я	строка	1	2	3	k	n
k-я	строка	1	2	3	k	n
n-я	строка	1	2	3	k	n

Сумма всех чисел таблицы, стоящих в одной строке, равна $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, т. е. $\dfrac{n(n+1)}{2}$, а следовательно, сумма всех чисел таблицы равна $n\dfrac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, будем суммировать числа таблицы, объединяя их так, как указано жирными линиями. Очевидно, в k-й строке и k-м столбце таблицы стоят числа, общая сумма которых есть

$$1+2+\ldots+(k-1)+k\cdot k=\frac{(k-1)k}{2}+k^2=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k,$$

Суммируя по всем подобным участкам таблицы, получаем:

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+\ldots+n)=\frac{n^2(n+1)}{2},$$

откуда

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{2}{3}\left[\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{4}\right]=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

б) Рассмотрим следующую таблицу:

1-я	строка	1^2	2^2	3^2		k^2	n^2
2-я	строка	1^2	2^2	3^2		k^2	n^2
3-я	строка	1^2	2^2	3^2		k^2	n^2
k-я	строка	1^2	2^2	3^2		k^2	n^2
n-я	строка	1^2	2^2	3^2		k^2	n^2

Сумма всех чисел таблицы, стоящих в одной строке, равна $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, т. е. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (см. решение задачи а)); следовательно, общая сумма всех чисел таблицы равна $\dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$. С другой стороны, сумма чисел, стоящих в k-й строке и k-м столбце, равна

$$1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2+k\cdot k^2=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+k^3= \\ =\frac{4}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k.$$

Отсюда получаем

$$\frac{4}{3}\,(1^3+2^3+\ldots+n^3)-\frac{1}{2}\,(1^2+2^2+\ldots+n^2)+ \\ +\frac{1}{6}\,(1+2+\ldots+n)=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6},$$

откуда после несложных преобразований, используя результат задачи а), выводим

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

в) Задача может быть решена совершенно аналогично задачам а) и б), если рассмотреть квадратную таблицу, в каждой строке которой написаны числа 1^3, 2^3, …, n^3. Предоставляем читателю самостоятельно провести все выкладки.

Примечание. Если догадаться, какой вид должны иметь формулы, доказательство которых составляет содержание задач 134, а)–г), то проверить справедливость этих формул можно с помощью метода математической индукции.

135. Прибавим к сумме, стоящей в левой части равенства, единицу. Тогда получим

$$[(1+a)+b(1+a)]+c(1+a)(1+b)+\ldots \\ \ldots+l(1+a)(1+b)\ldots(1+k)=[(1+a)(1+b)+ \\ +c(1+a)(1+b)]+d(1+a)(1+b)(1+c)+\ldots \\ \ldots+l(1+a)(1+b)\ldots(1+k)=[(1+a)(1+b)(1+c)+ \\ +d(1+a)(1+b)(1+c)]+\ldots+l(1+a)(1+b)\ldots(1+k)= \\ =(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)+\ldots \\ \ldots+l(1+a)(1+b)\ldots(1+k)=\ldots \\ \ldots=(1+a)(1+b)(1+c)\ldots(1+l),$$

что и требовалось доказать.

Если $a = b = c = \ldots = l$, то получим

$$a + a(1+a) + a(1+a)^2 + a(1+a)^3 + \ldots$$
$$\ldots + a(1+a)^{n-1} = (1+a)^n - 1,$$

где n есть количество чисел a, b, $c, \ldots, l$, или, обозначая $1+a$ через x, $a = x - 1$,

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = x^n - 1,$$

т. е. формулу для суммы геометрической прогрессии.

136. а) К сумме, которую нам надо определить, прибавим единицу. Получим

$$\begin{aligned}(1! + 1\cdot 1!) + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! &=\\ = (2! + 2\cdot 2!) + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! &=\\ = (3! + 3\cdot 3!) + \ldots + n\cdot n! = 4! + \ldots + n\cdot n! &=\\ = (n! + n\cdot n!) &= (n+1)!;\end{aligned}$$

следовательно,

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Примечание. Этот результат можно было сразу получить из формулы задачи 135, положив в ней $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, …, $l = n$.

б) К сумме, которую нам надо определить, прибавим $C_{n+1}^0 = 1$. Воспользовавшись тем, что $C_m^l + C_m^{l+1} = C_{m+1}^{l+1}$, получим

$$\begin{aligned}(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1) + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k &=\\ = (C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2) + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k &=\\ = (C_{n+3}^2 + C_{n+3}^3) + \ldots + C_{n+k}^k &=\\ = (C_{n+4}^3 + \ldots + C_{n+k}^k = \ldots &= C_{n+k+1}^k;\end{aligned}$$

следовательно,

$$C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k - 1.$$

Примечание. Этот результат можно было бы сразу получить из равенства задачи 135, положив в нем $a = \frac{n+1}{1}$, $b = \frac{n+1}{2}$, $c = \frac{n+1}{3}$, …, $l = \frac{n+1}{k}$.

137. Из определения логарифма легко получить формулу

$$\frac{1}{\log_b a} = \log_a b.$$

Действительно, если $\log_b a = y$, то имеем

$$b^y = a \quad \text{или} \quad a^{\frac{1}{y}} = b, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{y} = \log_a b.$$

Теперь наше равенство можно записать в виде

$$\log_N 2 + \log_N 3 + \ldots + \log_N 100 = \log_N (2 \cdot 3 \ldots 100),$$

откуда видно, что оно является непосредственным следствием формулы для логарифма произведения чисел.

138. Эта сумма равна $\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Доказательство легко провести методом математической индукции. Прежде всего наше утверждение справедливо при $n = 1$. Далее, предположим, что оно уже доказано для $n-1$ чисел a. Во всех $n!$ членах суммы S можно вынести за скобку выражение

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

так как последний множитель знаменателя каждого члена суммы равен сумме всех чисел a_1, a_2, …, a_n. Далее, группируя в скобках отдельно $(n-1)!$ членов, соответствующих перестановкам индексов, в которых на последнем месте стоит индекс 1, $(n-1)!$ членов, соответствующих перестановкам индексов, в которых на последнем месте стоит индекс 2, и т. д., мы получим в скобках n отдельных сумм, каждая из которых представляет собой сумму такого же вида, как и рассматриваемая, составленную для $n-1$ чисел a_2, a_3, …, a_n; a_1, a_3, …, a_n

и т. д. Применяя к этим суммам правило суммирования, справедливое по сделанному предположению, мы получим

$$S = \frac{1}{a_1 + \ldots + a_n} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{a_2 a_3 \ldots a_n} + \frac{1}{a_1 a_3 \ldots a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \right) =$$
$$= \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \right) = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

что и требовалось доказать.

139. а) Умножим наше выражение на $1 - \frac{1}{3}$:

$$\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] \times$$
$$\times \left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) =$$
$$= \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{81}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) =$$
$$= \left[\left(1 - \frac{1}{81}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) = \ldots$$
$$\ldots = \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right)\left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) = 1 - \frac{1}{3^{2^{n+1}}}.$$

Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) =$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{3^{2^{n+1}}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right).$$

б) Умножим наше выражение на $\sin \alpha$:

$$(\sin \alpha \cos \alpha) \cos 2\alpha) \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n \alpha =$$
$$= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha \cos 2\alpha) \cos 4\alpha) \ldots \cos 2^n \alpha =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 4\alpha \cos 4\alpha)\ldots \cos 2^n\alpha = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{2^n}\sin 2^n\alpha \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}}.$$

Поэтому

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

140. Легко проверить, что $2^{10} = 1024$; таким образом, $2^{100} = 1024^{10}$. Так как $1000^{10} = 10^{30}$ представляет собой число, составленное из единицы с 30 нулями, а $1024^{10} > 1000^{10}$, то число $2^{100} = 1024^{10}$ не может иметь меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} =$$
$$= \frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40} <$$
$$< \frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{37}{36}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{35}{34}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{33}{32}\cdot\frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10,$$

так как

$$\frac{41}{40} < \frac{40}{39} < \frac{39}{38}\ldots \quad \text{и т. д.}$$
$$\left(\text{ибо}\ \ \frac{41}{40} = 1 + \frac{1}{40}; \quad \frac{40}{39} = 1 + \frac{1}{39}\ \ \text{и т. д.}\right).$$

Таким образом,

$$2^{100} = 1024^{10} < 10\cdot 1000^{10},$$

откуда следует, что 2^{100} содержит меньше 32 цифр. Итак, число 2^{100} состоит из 31 цифры.

Примечание. Эту задачу очень легко решить, если пользоваться логарифмами: так как $\log 2 = 0,30103$, то $\log 2^{100} = 100\log 2 = 30{,}103$, и, следовательно, число 2^{100} имеет 31 цифру. Смысл задачи состоит в том, чтобы получить тот же результат, не пользуясь логарифмами.

141. а) Первое решение. Обозначим произведение $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100}$ через A и рассмотрим еще произведение $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{98}{99}$. Так как

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \quad \ldots, \quad \frac{98}{99} > \frac{97}{98}, \quad 1 > \frac{99}{100},$$

то $B > A$. Но

$$A\cdot B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

Отсюда следует, что

$$A^2 < AB = \frac{1}{100}, \quad \text{а значит,} \quad A < \frac{1}{10}.$$

Далее, $B < 2A = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ldots\frac{99}{100}$, ибо

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5} < \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{7} < \frac{7}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{98}{99} < \frac{99}{100}.$$

Следовательно,

$$A\cdot 2A > AB = \frac{1}{100}, \quad \text{и, значит,} \quad A > \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

Второе решение. Обозначим, как выше,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100} = A.$$

Тогда

$$A^2 = \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\ldots\frac{99^2}{100^2},$$

откуда

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\ldots\frac{99^2-1}{100^2} < A^2 < \frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\ldots\frac{99^2}{100^2-1}.$$

Разлагая теперь числители дробей слева и знаменатели дробей справа по формуле разности квадратов, получим

$$\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}\cdots\frac{98\cdot 100}{100\cdot 100} < A^2 < \frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{5\cdot 7}\cdots\frac{99\cdot 99}{99\cdot 101},$$

или, после сокращения,

$$\frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101};\quad \frac{1}{10\sqrt{2}} < A < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Совершенно так же можно доказать и более общее соотношение

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

б) Докажем, что при $n > 1$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Доказательство проще всего провести методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}.$$

Предположим теперь, что для какого-то значения n

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\dfrac{2n+1}{2n+2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}.$$

Но

$$\left(\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{12n^3+28n^2+20n+4} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(12n^3+28n^2+19n+4)+n} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n} < \frac{1}{3n+4},$$

откуда следует, что

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Отсюда, в силу принципа индукции, заключаем, что при всяком n

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

причем равенство достигается только при $n = 1$.

Подставим теперь в последнее неравенство $n = 50$. Мы получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{3\cdot 50+1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} = \frac{1}{12,288\dots},$$

что даже сильнее того, что нам требовалось доказать.

142. Имеем

$$\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots 100}{2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\dots 50)\cdot 2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\dots 50)} =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots 100}{(2\cdot 4\cdot 6\dots 100)\cdot(2\cdot 4\cdot 6\dots 100)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots 99}{(2\cdot 4\cdot 6\dots 100)}.$$

Далее остается только применить результат задачи 141, а).

143. Требуется определить, что больше, $101^n - 99^n$ или 100^n. Составим соотношение

$$\frac{100^n - 99^n}{100^n} = \frac{(100+1)^n - (100-1)^n}{100^n} =$$
$$= \frac{2(C_n^1\cdot 100^{n-1} + C_n6^3\cdot 100^{n-3} + \dots)}{100^n} =$$
$$= 2\left(\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{31\cdot 100^3} + \dots\right).$$

Отсюда сразу ясно, что это отношение больше 1 при $n \geqslant 50$. Покажем, что при $n = 49$ оно тоже больше 1:

$$2\left(\frac{49}{100} + \frac{49 \cdot 48 \cdot 47}{3! \cdot 100^3} + \ldots\right) > 2\left(\frac{49}{100} + \frac{18424}{100^3}\right) > \\ > 2\left(\frac{49}{100} + \frac{100^2}{100^3}\right) = 1.$$

Покажем теперь, что при $n = 48$ наше отношение будет уже меньше 1. Действительно,

$$2\left(\frac{48}{100} + \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3! \cdot 100^3} + \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5! \cdot 100^5} + \ldots\right) <$$

$$< 2\left(\frac{48}{100} + \frac{48^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 100^3} + \right. \\ \left. + \frac{48^5}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 3)100^5} + \frac{48^7}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3)100^7} + \ldots\right) =$$

$$= 2\left(\frac{48}{100} + \frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^3 + \frac{1}{6^2}\left(\frac{48}{100}\right)^5 + \ldots\right) <$$

$$< 2\frac{\dfrac{48}{100}}{1 - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{48}{100}\right)^2} = \frac{9600}{9616} < 1.$$

Тем более, при $n < 48$ отношение будет меньше 1.

Итак, окончательно получаем: $99^n + 100^n$ больше чем 101^n при $n \leqslant 48$ и меньше чем 101^n при $n > 48$.

144. Докажем предварительно, что произведение n последовательных целых чисел больше чем квадратный корень из произведения крайних чисел в степени n. Обозначим эти числа через a, $a + 1$, …, $a + n - 1$. Тогда k-м числом от начала будет $a + k - 1$, k-м от конца будет $a + n - k$. Их произведение есть

$$(a + k - 1)(a + n - k) = a^2 = an - a + (k - 1)(n - k) \geqslant \\ \geqslant a^2 + an - a = a(a + n - 1),$$

где равенство может достигаться только при $k = 1$ или $k = n$. Другими словами, произведение двух чисел, равноотстоящих от концов (в случае нечетного n эти два числа могут, в частности, оба равняться среднему числу), всегда больше чем произведение крайних. Но тогда произведение всех чисел

$$a(a+1)\ldots(a+n-1) \leqslant [a(a+n-1)]^{\frac{n}{2}} = [\sqrt{a(a+n-1)}]^n,$$

где знак равенства имеет место только при $n = 1$ или $n = 2$.

Докажем теперь, что $300! > 100^{300}$. Имеем

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\ldots 25 &> \sqrt{25^{25}} = 5^{25}, \\ 26\ldots 50 &> (\sqrt{26\cdot 50})^{25} > 35^{25}, \\ 51\ldots 100 &> (\sqrt{51\cdot 100})^{50} > 70^{50}, \\ 101\ldots 200 &> \sqrt{100^{100}}\cdot\sqrt{200^{100}} = 10^{200}\cdot 2^{50}, \\ 201\ldots 300 &> \sqrt{200^{100}}\cdot\sqrt{300^{100}} = 10^{200}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}. \end{aligned}$$

Перемножая левые и правые части неравенств, получим

$$\begin{aligned} 300! &> 5^{25}\cdot 35^{25}\cdot 70^{50}\cdot 10^{400}\cdot 2^{100}\cdot 3^{50} = \\ &= 5^{50}\cdot 7^{25}\cdot 5^{50}\cdot 14^{50}\cdot 10^{400}\cdot 2^{100}\cdot 3^{50} = 10^{500}\cdot 7^{25}\cdot 14^{50}\cdot 3^{50} = \\ &= 10^{500}\cdot 21^{25}\cdot 42^{25}\cdot 14^{25} > 10^{500}\cdot 20^{25}\cdot 40^{25}\cdot 14^{25} = \\ &= 10^{550}\cdot 2^{25}\cdot 4^{25}\cdot 14^{25} = 10^{550}\cdot 112^{25} = \\ &= 10^{600}\cdot 1,12^{25} > 10^{600} = 100^{300}. \end{aligned}$$

Примечание. Более общий результат сформулирован в условии задачи 148.

145. Докажем, что для любого целого положительного $k \leqslant n$

$$1 + \frac{k}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Доказательство проведем методом индукции. Для $k = 1$ оно очевидно. Пусть теперь оно справедливо для некоторого k; докажем его для $k + 1$. Имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n};$$

заметим, что здесь мы не пользовались тем, что $k \leqslant n$. Следовательно, это неравенство справедливо для любого целого положительного k. Полагая теперь $k \leqslant n$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3} =$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

ибо $n(k+1) > k^2$ при $n \geqslant k$.

Подставив в выведенные неравенства значение $k = n$, получим

$$2 = 1+\frac{n}{n} \leqslant \left(1=\frac{1}{n}\right)^{n} < 1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2} = 3.$$

146. В силу результата предыдущей задачи

$$(1,000001)^{1000000} = \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} > 2.$$

147. Очевидно, имеем

$$\frac{(1001)^{999}}{(1000)^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1001} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1001} < 3\cdot\frac{1}{1001} < 1$$

(см. задачу 145) и, следовательно,

$$1000^{1000} > 1001^{999}.$$

148. Пусть неравенства задачи справедливы для некоторого n. Чтобы показать справедливость их для $n+1$, достаточно проверить справедливость следующих неравенств:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{2}\right)^{n} \geqslant n+1 \geqslant \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^{n}.$$

После сокращения на $n+1$ эти неравенства приводятся к неравенствам $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, которые следуют из неравенств $2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Остается только заметить, что для n, равного 6, утверждение задачи справедливо, ибо

$$\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729, \quad 6! = 720, \quad \left(\frac{6}{3}\right)^6 = 2^6 = 64.$$

149. а) По формуле бинома Ньютона имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\,\frac{1}{n} + C_n^2\,\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^{n-1}\,\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!}\,\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\,\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

и, аналогично,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Из сравнения этих выражений сразу следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

откуда и вытекает утверждение задачи.

б) Составим отношение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \\ = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n}}{n^{2n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Но при $n \geqslant 2$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1 - n\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^6} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\,\frac{1}{n^8} - \ldots = \\ = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)}{n^3} - \left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right] - \ldots \leqslant \\ \leqslant 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^3}.$$

С другой стороны,

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^4} < 1.$$

Следовательно, $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1$, и, значит,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} < 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n},$$

откуда и следует утверждение задачи.

150. Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. Докажем, что

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (*)$$

при любом целом положительном n. Действительно, при $n = 1$ это неравенство, очевидно, выполняется: $1! = 1 > \frac{1}{e}$. Предположим теперь, что неравенство $(*)$ уже доказано, и покажем, что в таком случае будет выполняться неравенство

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

В силу результата задачи 149, а)

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1.$$

Используя неравенство $(*)$, получаем

$$(n+1)! = (n+1)n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{n^n e}{(n+1)^n} =$$
$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

В силу принципа математической индукции, отсюда вытекает, что неравенство $(*)$ верно при любом целом положительном n.

2°. Перейдем к неравенству

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n. \qquad (**)$$

Нам надо доказать, что это неравенство выполняется для всех целых n, больших 6. С помощью логарифмических таблиц (особенно удобны здесь таблицы натуральных логарифмов) нетрудно проверить, что при $n = 7$ неравенство $(**)$ справедливо:

$$7! < 7\left(\frac{7}{e}\right)^7,$$

т. е. $6! < \left(\frac{7}{e}\right)^7$, ибо $\ln 6! = \ln 720 \approx 6{,}58$, а

$$\ln\left(\frac{7}{e}\right)^7 = 7(\ln 7 - 1) \approx 6{,}62.$$

Предположим теперь, что неравенство $(**)$ уже доказано. В силу результата задачи 149, б)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e, \quad \text{т. е.} \quad \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} < 1.$$

А теперь из неравенства $(**)$ выводим

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)n\left(\frac{n}{e}\right)^n =$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\frac{n^{n+1}e}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} < (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

т. е. будет верно аналогичное неравенство, в котором n заменено на $n+1$. Так как при $n = 7$ неравенство $(**)$ верно, то отсюда, в силу принципа математической индукции, вытекает, что оно будет верно при любом целом n, большем 6, что и требовалось доказать.

151. Воспользуемся тем, что в сумме $S = x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$ при $x > 1$ наибольшим является первый член и наименьшим — последний, а при $x < 1$ — наоборот. Отсюда следует, что

$$(k+1)x^k > S > k+1, \text{ если } x > 1;$$
$$(k+1)x^k > S < k+1, \text{ если } x < 1.$$

Умножив теперь обе части полученных неравенств на $x-1$, имеем при $x \neq 1$

$$(k+1)x^k(x-1) > x^{k+1} - 1 > (k+1)(x-1).$$

Положим теперь в этом неравенстве $x = \dfrac{p}{p-1}$; тогда найдем

$$\frac{(k+1)p^k}{(p-1)^{k+1}} > \frac{p^{k+1}-(p-1)^{k+1}}{(p-1)^{k+1}} > \frac{(k+1)(p-1)^k}{(p-1)^{k+1}};$$

аналогично, положив $x = \dfrac{p+1}{p}$, получим

$$\frac{(k+1)(p+1)^k}{p^{k+1}} > \frac{(p+1)^{k+1}-p^{k+1}}{p^{k+1}} > \frac{(k+1)p^k}{p^{k+1}}.$$

Отсюда имеем

$$(p+1)^{k+1}-p^{k+1} > (k+1)p^k > p^{k+1}-(p-1)^{k+1},$$

или, положив здесь последовательно $p = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\begin{gathered}
2^{k+1}-1^{k+1} > (k+1)1^k > 1^{k+1}-0,\\
3^{k+1}-2^{k+1} > (k+1)2^k > 2^{k+1}-1^{k+1},\\
4^{k+1}-3^{k+1} > (k+1)3^k > 3^{k+1}-2^{k+1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^{k+1}-n^{k+1} > (k+1)n^k > n^{k+1}-(n-1)^{k+1}.
\end{gathered}$$

Сложив все эти неравенства, получим

$$(n+1)^{k+1}-1 > (k+1)(1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k) > n^{k+1},$$

или, разделив все члены неравенства на $k+1$,

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}}\right]\frac{1}{k+1}n^{k+1} >$$
$$> 1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k > \frac{1}{k+1}n^{k+1}.$$

Но отсюда и следует неравенство, которое требовалось доказать.

152. а) Прежде всего, очевидно,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{2n^2+2(n-2)}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}\right]<$$
$$<\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}\right]}_{(n+1)\text{ раз}}=$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n},$$

откуда и вытекает второе утверждение задачи.

б) Отметим прежде всего, что

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Теперь получаем

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$
$$<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{2n-1\text{ раз}}+\frac{1}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2} + \frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-2)^2} + \ldots + \frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right] >$$
$$> \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2} + \frac{4n+2}{(2n+1)^2} + \ldots + \frac{4n+2}{(2n+1)^2}\right]}_{(2n+1)\text{ раз}} =$$
$$= \frac{1}{2}\,(2n+1)\,\frac{4n+2}{(2n+1)^2} = 1.$$

153. Прежде всего докажем, что

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Действительно,

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

и аналогично доказывается вторая часть неравенства.

Теперь имеем

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} > 1 + 2\,[(\sqrt{3}-\sqrt{2}) +$$
$$+ (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})] =$$
$$= 1 + 2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{2}) > 2\cdot 1001 - \sqrt{8} + 1 >$$
$$> 2000 - 3 + 1 = 1998.$$

Аналогично,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 1 + 2\,[(\sqrt{2}-1) +$$
$$+ (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + \sqrt{1\,000\,000} - \sqrt{999\,999}) =$$
$$= 1 + 2(\sqrt{1\,000\,000}-1) = 1 + 2\cdot 999 = 1999.$$

Следовательно, целая часть суммы

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$$

равна 1998.

б) Совершенно аналогично решению задачи а) получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{10\,000}}&+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>\\ &>2\,[(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000})+(\sqrt{10\,002}-\sqrt{10\,001})+\ldots\\ &\ldots+(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})]=\\ &=2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{10\,000})>2(1000-100)=1800,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{10\,000}}&+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<\\ &<2\,[(\sqrt{10\,000}-\sqrt{9999})+(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000})+\ldots\\ &\ldots+(\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{999\,999})=\\ &=2(\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{9999})=2000-\sqrt{39\,996}<\\ &<2000-199,98=1800,02.\end{aligned}$$

Следовательно, сумма $\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$ с точностью до $0,02$ будет равна 1800.

154. Прежде всего отметим, что из сравнения двух выражений

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+2\,\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},$$

$$\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{1}{n}\right)^3=1+2\,\frac{1}{n}+\frac{4}{3}\,\frac{1}{n^2}+\frac{8}{27}\,\frac{1}{n^3}$$

следует, что при каждом целом положительном n

$$\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Отсюда имеем $1 + \frac{2}{3}\frac{1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$. Умножая это последнее неравенство на $n^{\frac{2}{3}}$, получаем

$$n^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}} > (n+1)^{\frac{2}{3}}$$

и, окончательно,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right].$$

Аналогично,

$$\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^3 = 1 - 2\frac{1}{n} + \frac{4}{3}\frac{1}{n^2} - \frac{8}{27}\frac{1}{n^3} > \\ > 1 - 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$\left(\text{так как } \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} - \frac{8}{27}\frac{1}{n^3} > \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} \geqslant 0\right)$, откуда следует

$$1 - \frac{2}{3}\frac{1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}} > (n-1)^{\frac{2}{3}},$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right].$$

Теперь можем написать

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}} > \\ > \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + (\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{5^2}) + \ldots \\ \ldots + (\sqrt[3]{1\,000\,001^2} - \sqrt[3]{1\,000\,000^2})] = \\ = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1\,000\,002\,000\,001} - \sqrt[3]{16}\right) > \frac{3}{2}\cdot 10\,000 - \sqrt[3]{54} > \\ > 15\,000 - 4 = 14\,996.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}<$$
$$<\frac{3}{2}[(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2})+(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+\ldots$$
$$\ldots+(\sqrt[3]{1\,000\,000^2}-\sqrt[3]{999\,999^2})]=$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1\,000\,000\,000\,000}-\sqrt[3]{9})<\frac{3}{2}(10\,000-2)=14\,997.$$

Таким образом, целая часть суммы

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$$

равна 14 996.

155. а) Очевидно, имеем

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{1000\cdot 1001}=$$
$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)=$$
$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>0,1-0,001=0,099$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1000}=$$
$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<$$
$$<0,112-0,001=0,111.$$

Следовательно, сумма $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}$ с точностью до $0,006$ равна $0,105$.

б) Отметим прежде всего, что

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}>\frac{1}{10!}=\frac{1}{3\,628\,800}\approx 0,000000275.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}<$$
$$<\frac{1}{9}\left\{\frac{9}{10!}+\frac{10}{11!}+\frac{11}{12!}+\ldots+\frac{999}{1000!}\right\}=$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10-1}{10!}+\frac{11-1}{11!}+\frac{12-1}{12!}+\ldots+\frac{1000-1}{1000!}\right\}=$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{10!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{11!}-\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{999!}-\frac{1}{1000!}\right\}=$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{1000!}\right)<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9!}=\frac{1}{3\,265\,920}\approx 0,000000305.$$

Таким образом, сумма $\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\ldots+\frac{1}{1000!}$ с точностью до $0,000000015$ равна $0,00000029$.

156. Докажем, что сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

можно сделать больше любого числа N. Будем считать N целым и возьмем $n=2^{2N}$; тогда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\frac{1}{2^{2N-1}+2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{2N}-1}+\frac{1}{2^{2N}}\right)>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{2N\text{ раз}}>N+1$$

(каждая сумма в скобках больше $\frac{1}{2}$ в силу результата задачи 152, а)).

Примечание. Можно было бы так же доказать утверждение задачи, исходя из результата задачи 152, б).

157. Обозначим через n_k число незачеркнутых слагаемых между $\frac{1}{10^k}$ и $\frac{1}{10^{k+1}}$, включая $\frac{1}{10^k}$, но не $\frac{1}{10^{k+1}}$. Если слагаемое $\dfrac{1}{q}$, расположенное между $\dfrac{1}{10^{k-1}}$ и $\dfrac{1}{10^k}$, не было зачеркнуто, то из слагаемых $\dfrac{1}{10q}$, $\dfrac{1}{10q+1}$, $\dfrac{1}{10q+2}$, $\ldots$, $\dfrac{1}{10q+8}$, $\dfrac{1}{10q+9}$, расположенных между $\dfrac{1}{10^k}$ и $\dfrac{1}{10^{k+1}}$, будет зачеркнуто только последнее; если же слагаемое $\dfrac{1}{q}$ было зачеркнуто, то все слагаемые $\dfrac{1}{10q}$, $\dfrac{1}{10q+1}$, $\ldots$, $\dfrac{1}{10q+8}$, $\dfrac{1}{10q+9}$, также будут зачеркнуты. Отсюда следует, что

$$n_k = 9n_{k-1}.$$

Так как $n_0 = 8$ $\left(\text{из слагаемых } 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{9} \text{ зачеркнуто только } \dfrac{1}{9}\right)$, то

$$n_1 = 8\cdot 9 = 72, \quad n_2 = 8\cdot 9^2, \quad \ldots, \quad n_k = 8\cdot 9^k.$$

Пусть теперь в сумме $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ число $n<10^{m+1}$. Дополним ее до суммы $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{10^{m+1}-1}$, вычеркнем члены, знаменатели которых содержат 9, и сгруппируем оставшиеся члены:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{88}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{888}\right)+\ldots \\ \ldots+\left(\frac{1}{10^m}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{88\ldots8}_{(m+1)\text{ раз}}}\right)<$$

$$<1\cdot n_0+\frac{1}{10}\cdot n_1+\frac{1}{100}\cdot n_2+\ldots+\frac{1}{10^{m-1}}\cdot n_{m-1}+\frac{1}{10^m}\cdot n_m,$$

так как вместо каждой скобки поставлено произведение наибольшего слагаемого этой скобки на число членов в скобке. Продолжим эту оценку дальше:

$$1\cdot n_0+\frac{1}{10}\cdot n_1+\frac{1}{100}\cdot n_2+\ldots+\frac{1}{10^{m-1}}\cdot n_{m-1}+\frac{1}{10^m}\cdot n_m=$$
$$=8\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\ldots+\frac{9^{m-1}}{10^{m-1}}+\frac{9^m}{10^m}\right)=$$
$$=8\cdot\frac{1-\dfrac{9^{m+1}}{10^{m+1}}}{1-\dfrac{9}{10}}<8\cdot\frac{1}{1-\dfrac{9}{10}}=8\cdot 10=80.$$

Таким образом, утверждение задачи доказано.

158. а) Предположим, что в сумме $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ число n меньше чем 2^{k+1}. Рассмотрим сумму $1+\frac{1}{2^2}+$ $+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}$ и аналогично решению задачи 156 сгруппируем члены следующим образом:

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\frac{1}{(2^k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}\right)<$$
$$<1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\ldots+\left(\frac{1}{(2^k)^2}\right)\right.\right.=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{1-\dfrac{1}{2^{k+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^k}<2,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Совершенно так же можно показать, что если число α больше 1, то при любом n

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Таким образом, при любом $\alpha > 1$ сумма

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

остается ограниченной, сколь бы большое значение n мы ни брали (из задачи 156 следует, что при $\alpha \leqslant 1$ сумма $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$ может быть сделана сколь угодно большой, если только выбрать достаточно большое значение n).

б) Очевидно, имеем

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$
$$< \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\right) - \frac{1}{4}.$$

Но, в силу результата задачи 132, а)

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

и, следовательно,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1\,\frac{3}{4},$$

что и требовалось доказать.

159. Докажем, прежде всего, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} <$$
$$< \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots \frac{1}{3^k}\right) \times \ldots$$
$$\ldots \times \left(1 + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_l^2} + \ldots + \frac{1}{p_l^k}\right),$$

где k — такое целое число, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, а p_l — наибольшее простое число, не превосходящее n. Действительно, раскроем скобки в правой части неравенства. Так как *каждое* целое число m от 1 до n представимо в виде произведения степеней простых чисел 1, 3, 5, …, p_l:

$$m = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \ldots p_l^{\alpha_l},$$

где все показатели α_1, α_2, α_3, …, α_l — целые неотрицательные числа, не превосходящие, разумеется, k, то в этой сумме встретится член, равный $\frac{1}{m}$, который получится, если взять из первой скобки $\frac{1}{2^{\alpha_1}}$, из второй $\frac{1}{3^{\alpha_2}}$, из третьей $\frac{1}{5^{\alpha_3}}$ и т. д. Поэтому в правой части неравенства после раскрытия скобок будут стоять все слагаемые $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$ и еще какие-то другие положительные слагаемые. Значит, правая часть нашего неравенства, в самом деле, больше левой.

Логарифмируя это неравенство, мы получим

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) <$$
$$< \lg\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)\times\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\times\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right)\right] =$$
$$= \lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right).$$

Но для всякого целого k и целого $p \geqslant 2$

$$\lg\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots+\frac{1}{p^k}\right) < \frac{2\lg 3}{p}.$$

Действительно, имеем

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k} = \frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{1-\frac{1}{p}} < \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} = 1+\frac{1}{p-1}.$$

Но из результата задачи 145 следует

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}<3, \quad 1+\frac{1}{p-1}<\sqrt[p-1]{3}, \quad \lg\left(1+\frac{1}{p-1}\right)<\frac{\lg 3}{p-1},$$

и, очевидно,

$$\frac{2\lg 3}{p}>\frac{\lg 3}{p-1}.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<\frac{2\lg 3}{2}+\frac{2\lg 3}{3}+\frac{2\lg 3}{5}+\ldots+\frac{2\lg 3}{p_l}=$$
$$=2\lg 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right).$$

Если бы существовало такое число N, что для всякого целого положительного l сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}$ была бы меньше N, то для всякого целого положительного числа n выполнялось бы неравенство

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)<$$
$$<2\lg 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right)<2(N-1)\lg 3;$$

отсюда после потенцирования следовало бы, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}<3^{2(N-1)}=N_1,$$

где N_1 не зависит от n. Но в задаче 156 было доказано, что такого числа N_1 не существует; следовательно, не существует и такого числа N, что для всякого целого положительного l

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}<N,$$

где p_l — l-е простое число в ряду натуральных чисел.

160. $\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}=$

$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}=$$
$$=\frac{c^2(a-b)+ab(a-b)-(ac+bc)(a-b)}{abc}=$$
$$=\frac{(a-b)(c^2+ab-ac-bc)}{abc}=\frac{(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]}{abc}=$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)(c-a)}{abc}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Вычислим теперь выражение $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}$. Положим $a'=b-c$, $b'=c-a$, $c'=a-b$. Тогда $b'-c'= c-a-(a-b)=b+c-2a$. По условию $a+b+c=0$, $b+c=-a$. Отсюда $b'-c'=-3a$, $a=-\dfrac{b'-c'}{3}$. Таким же образом можно получить $b=-\dfrac{c'-a'}{3}$, $c=-\dfrac{a'-b'}{3}$. Отсюда

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right).$$

Воспользовавшись выведенной выше формулой, получим

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\,\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-9\,\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Следовательно, если $a+b+c=0$, то

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)+\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=$$
$$=\left[-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]\left[-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]=9.$$

161. $0 = (a+b+c)^3 =$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Отсюда $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, что и требовалось доказать.

162. а) Первое решение. Имеем

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 + c^3 - 3abc - 3ab(a+b) =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3ab(c+a+b) =$$
$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) =$$
$$= [(a+b)+c][(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) =$$
$$= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] =$$
$$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$$
$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Второе решение. Заменив в обозначениях задачи 161 букву a на x, мы получим, что $x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc = 0$, если $x + b + c = 0$. Таким образом, уравнение $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 = 0$ имеет корень $x = -b - c$, откуда следует, что многочлен $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$ делится на $x - (-b-c) = x+b+c$. Заменив в этом результате снова букву x на a, мы получим, что $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ делится на $a + b + c$. Выполнив непосредственно деление (для чего удобно рассматривать многочлены $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$ и $a + b + c$ расположенными по степеням буквы a), мы придем к прежнему результату:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

б) Первое решение. Имеем

$$[(a+b+c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) =$$
$$= [(a+b+c) - a][(a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2] -$$
$$- (b+c)(b^2 - bc + c^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= (b+c)\{[(a+b+c)^2 - b^2] + a(a+c) + (ab+bc) + (a^2-c^2)\} = \\
&= (b+c)\{[(a+b+c)-b][(a+b+c)+b] + a(a+c) + \\
&\qquad\qquad + b(a+c) + (a+c)(a-c)\} = \\
&\qquad = (b+c)(a+c)(a+b+c+b+a+b+a-c) = \\
&\qquad\qquad = 3(b+c)(a+c)(a+b).
\end{aligned}$$

Второе решение. Заменим в рассматриваемом выражении букву a на x: $(x+b+c)^3 - x^3 - b^3 - c^3$. При $x = -b$ наше выражение обращается в нуль; следовательно, уравнение $(x+b+c)^3 - x^3 - b^3 - c^3 = 0$ имеет корень $x = -b$, и $(x+b+c)^3 - x^3 - b^3 - c^3$ делится на $x+b$. Возвращаясь теперь к первоначальным обозначениям, мы можем заключить, что $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ делится на $a+b$.

Точно так же показывается, что $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ делится на $a+c$ и $b+c$. Так как наше выражение — третьей степени относительно a, b и c, то оно может отличаться от произведения $(a+b)(a+c)(b+c)$ только численным множителем:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = k(a+b)(a+c)(b+c).$$

Для определения этого множителя достаточно приравнять в левой и правой частях последней формулы коэффициенты при каком-либо члене, например при a^2b (или положить в обеих частях равенства, например $a=0$, $b=c=1$); при этом получаем $k=3$.

163. Воспользуемся полученным в задаче 162 а) равенством $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ и подставим в него вместо α, β и γ соответственно $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}\sqrt[3]{bc}) = \\
&\qquad\qquad = a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Теперь уже нетрудно избавиться от последнего радикала в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)^3-27abc}\times$$
$$\times\left[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right].$$

164. Выше мы видели (см. задачу 162, б)), что $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ отличается от произведения $(a+b)(a+c)(b+c)$ лишь численным множителем; поэтому достаточно доказать, что $(a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$ делится на $a+b$, $a+c$ и $b+c$. Но это доказывается в точности так же, как доказывалось во втором решении задачи 162, б), что $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ делится на $a+b$, $a+c$ и $b+c$.

165. $$a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=$$
$$=\frac{(a^3)^5-1}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$
$$=\frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$
$$=\frac{(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{a^4+a^3+a^2+a+1}.$$

Но непосредственное деление дает

$$\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}=a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1$$

и, следовательно,

$$a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1).$$

166. Первое решение. Обозначим наши многочлены соответственно через B и A. В таком случае имеем

$$B-A=(x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+(x^{7777}-x^7)+$$
$$+(x^{6666}-x^6)+(x^{5555}-x^5)+(x^{4444}-x^4)+$$
$$+(x^{3333}-x^3)+(x^{2222}-x^2)+(x^{1111}-x)=$$

$$= x^9[(x^{10})^{999}-1] + x^8[(x^{10})^{888}-1] + x^7[(x^{10})^{777}-1] + \\ + x^6[(x^{10})^{666}-1] + x^5[(x^{10})^{555}-1] + x^4[(x^{10})^{444}-1] + \\ + x^3[(x^{10})^{333}-1] + x^2[(x^{10})^{222}-1] + x[(x^{10})^{111}-1].$$

Но каждое выражение в скобках делится на $x^{10}-1$, а следовательно, и на $A = \dfrac{x^{10}-1}{x-1}$. Таким образом, мы видим, что $B - A$ делится на A, а значит, и B делится на A.

Второе решение.

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \\ = \frac{x^{10}-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_9)}{x-1} = \\ = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_9),$$

где $\alpha_k = \cos\dfrac{2k\pi}{10} + i\sin\dfrac{2k\pi}{10}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$, ибо корни уравнения $x^{10}-1=0$ (корни десятой степени из единицы) имеют именно такой вид (см. с. 51). Следовательно, для того чтобы доказать наше утверждение, достаточно проверить, что

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + \\ + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$$

делится на каждый из множителей $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ..., $(x-\alpha_9)$. Но последнее равносильно тому, что уравнение

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + \\ + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1 = 0 \quad (*)$$

имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_9$. Проверим, что эти корни действительно удовлетворяют уравнению $(*)$: так как $\alpha_k^{10} = 1$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9)$, то

$$\alpha_k^{9999} = \alpha_k^{9990+9} = (\alpha_k^{10})^{999}\alpha_k^9 = \alpha_k^9, \\ \alpha_k^{8888} = \alpha_k^{8880+8} = (\alpha_k^{10})^{888}\alpha_k^8 = \alpha_k^8, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_k^{9999}+\alpha_k^{8888}+\alpha_k^{7777}+\alpha_k^{6666}+\alpha_k^{5555}+\alpha_k^{4444}+\alpha_k^{3333}+\alpha_k^{2222}+\\+\alpha_k^{1111}+1=\alpha_k^9+\alpha_k^8+\alpha_k^7+\alpha_k^6+\alpha_k^5+\alpha_k^4+\alpha_k^3+\alpha_k^2+\alpha_k+1=0$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9).$$

167. Подберем такие два числа a и b, чтобы иметь равенство

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx.$$

Для этого достаточно, чтобы было $a^3+b^3=q$, $ab=-\dfrac{p}{3}$; из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными нетрудно определить a и b. Имеем $a^3+b^3=q$, $a^3b^3=-\dfrac{p^3}{27}$; отсюда следует, что a^3 и b^3 — корни квадратного уравнения $z^2-qz-\dfrac{p^3}{24}=0$ и, следовательно*),

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.\tag{$*$}$$

Теперь, в силу результата задачи 162, а), имеем

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx=\\=(a+b+x)(a^2+b^2+x^2-ab-ax-bx).$$

Следовательно, решение нашего кубического уравнения сводится к решению уравнения первой степени

$$a+b+x=0,$$

*) Числа a и b, определяемые по формулам $(*)$, являются действительными, если $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geqslant 0$. Если же $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$, то под знаком корня третьей степени в формулах $(*)$ будут комплексные числа. В этом случае числа a и b тоже являются комплексными; их можно отыскать, например, с помощью формулы для корня n-й степени из комплексного числа (см. с. 51). При этом за a можно с равным основанием принять любое из трех значений корня кубического из комплексного числа $\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$, тогда b определим из соотношения $ab=-\dfrac{p}{3}$.

Подробнее об этом см., например, книгу Р. О. Кузьмина и Д. К. Фаддеева, цитируемую на с. 52.

откуда имеем
$$x_1 = -a - b,$$
или
$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$
и квадратного уравнения
$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 - ab = 0;$$
отсюда следует
$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\,i, \quad x_3 = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\,i,$$
где a и b определяются формулами $(*)$.

168. Первое решение. Обозначим $\sqrt{a+x}$ через y; получим систему из двух уравнений
$$\sqrt{a+x} = y, \quad \sqrt{a-y} = x.$$

Возведем эти уравнения в квадрат:
$$a + x = y^2, \quad a - y = x^2.$$

Вычтем из первого второе:
$$x + y = y^2 - x^2,$$
или
$$x^2 - y^2 + x + y = (x+y)(x-y+1) = 0.$$

Отсюда имеются две возможности:

1) $x + y = 0$; $y = -x$ и $x^2 - x - a = 0$, откуда
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}\,;$$

2) $x - y + 1 = 0$; тогда $y = x + 1$ и $x^2 + x + 1 - a = 0$, откуда
$$x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}\,.$$

Можно убедиться проверкой, что при соответствующем выборе знака у каждого из радикалов, встречающихся в исходном уравнении, корни x_1, x_2, x_3 и x_4 удовлетворяют этому уравнению *).

Второе решение. Освободимся от радикалов в нашем уравнении:

$$a - \sqrt{a+x} = x^2,$$
$$(a-x^2)^2 = a+x,$$
$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению четвертой степени. Однако это последнее уравнение является квадратным по отношению к a. Решим это уравнение относительно a, т. е. примем на время, что x нам известно, а наоборот, a требуется определить:

$$a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0,$$

$$a = \frac{2x^2+1 \pm \sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^4+4x}}{2} = \\ = \frac{2x^2+1 \pm \sqrt{4x^2+4x+1}}{2} = \frac{2x^2+1 \pm (2x+1)}{2},$$
$$a_1 = x^2+x+1, \quad a_2 = x^2 - x.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение

$$a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0$$

имеет корни

$$a_1 = x^2+x+1, \quad a_2 = x^2 - x,$$

откуда согласно общим свойствам квадратных уравнений

$$a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = (a-a_1)(a-a_2) = \\ = (a-x^2-x-1)(a-x^2+x).$$

*) Если же, как это иногда делается, считать все корни положительными, то уравнение будет иметь единственный корень $x_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, если $a \geqslant 1$, и вовсе не будет иметь корней, если $a < 1$.

Таким образом, наше уравнение принимает вид

$$(x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1) = 0$$

и легко решается:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}},$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

169. Первое решение. Обозначим

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = y, \quad -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = y_1.$$

В таком случае наше уравнение принимает вид

$$y = y_1.$$

Выразим теперь x через y_1. Простое вычисление дает

$$x = y_1^2 + 2ay_1 + \frac{1}{16}.$$

Таким образом, мы видим, что x выражается через y_1 точно таким же образом, как y через x. Отсюда следует, что если мы начертим графики функций

$$y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16},$$

$$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}},$$

то эти графики (параболы) будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 10; каждой точке $x = x_0$, $y = y_0$ первого графика отвечает симметричная относительно биссектрисы координатного угла точка $x = y_0$, $y_1 = x_0$ второго графика). Точки пересечения этих двух графиков отвечают таким значениям x, что $y = y_1$, т. е. корням нашего уравнения; эти точки обязательно лежат на оси симметрии обеих кривых, т. е. удовлетворяют условию

$$y = x = y_1.$$

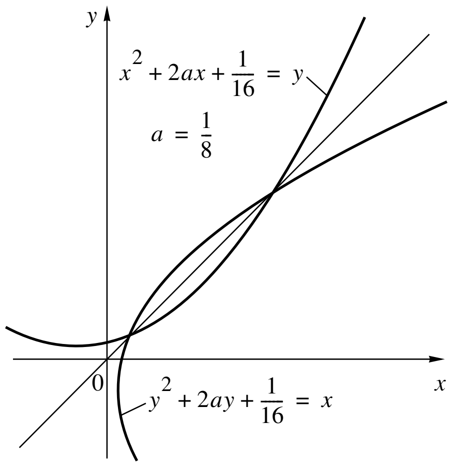


Рис. 10

Решая уравнение $y = x$, т. е.

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x,$$

мы получаем

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

Можно убедиться проверкой, что при $0 < a < \dfrac{1}{4}$ оба эти корня являются действительными и удовлетворяют исходному уравнению.

Второе решение. Эту задачу можно решить и более обычным путем. Избавляясь от радикала в уравнении, получим

$$\left(x^2 + 2ax + a + \frac{1}{16}\right)^2 = a^2 + x - \frac{1}{16},$$

или после раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$x^4+4ax^3+\left(4a^2+2a+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(4a^2+\frac{1}{4}\,a-1\right)x+\\ +\frac{a}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16^2}=0.$$

Левую часть получившегося уравнения можно разложить на множители:

$$\left[x^4+(2a-1)x^3+\frac{1}{16}\,x^2\right]+\\ +\left[(2a+1)x^3+(4a^2-1)x^2+\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{16}\right)x\right]+\\ +\left[\left(2a+\frac{17}{16}\right)x^2+\left(4a^2+\frac{a}{8}-\frac{17}{16}\right)x+\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16^2}\right)\right]=\\ =\left[x^2+(2a-1)x+\frac{1}{16}\right]\left[x^2+(2a+1)x+\left(2a+\frac{17}{16}\right)\right].$$

Отсюда сразу получаем решения:

$$x^2+(2a-1)x+\frac{1}{16}=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}};$$

$$x^2+(2a+1)x+2a+\frac{17}{16}=0,$$

$$x_{3,4}=-\frac{1+2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+2a}{2}\right)^2-2a-\frac{17}{16}}.$$

При $0<a<\dfrac{1}{4}$ первые два корня являются действительными и удовлетворяют исходному уравнению; последние два корня комплексные.

170. а) Для того чтобы при действительном x левая часть уравнения была действительна, необходимо, чтобы все подкоренные выражения были положительны. Обозначая эти положительные подкоренные выражения, начиная с последнего (т. е. с $3x$) и до первого, через $y_1^2, y_2^2, y_3^2, \ldots, y_{n-1}^2, y_n^2$, будем иметь

$$\begin{gathered} 3x = x + 2x = y_1^2, \\ x + 2y_1 = y_2^2, \\ x + 2y_2 = y_3^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x + 2y_{n-2} = y_{n-1}^2, \\ x + 2y_{n-1} = y_n^2, \end{gathered}$$

где все числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ действительны и положительны. Само исходное уравнение в новых обозначениях примет вид

$$y_n = x.$$

Докажем теперь, что $y_1 = x$. Действительно, предположим, например, что $x > y_1$. В таком случае из сравнения первого и второго из наших равенств будет следовать, что $y_1 > y_2$. Точно так же из сравнения второго и третьего равенств находим, что $y_2 > y_3$; далее, аналогично получаем, что

$$y_3 > y_4 > \ldots > y_{n-1} > y_n.$$

Таким образом, при $x > y_1$ будем иметь $x > y_n$, что противоречит уравнению. Аналогично доказывается, что и при $x < y_1$ не может быть $y_n = x$ (в этом случае обязательно $x < y_n$).

Так как $y_1^2 = 3x$, то, следовательно, должно быть

$$3x = x^2,$$

откуда сразу получаем два единственно возможных значения x:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0.$$

Проверка показывает, что оба эти значения удовлетворяют нашему уравнению.

Примечание. Наметим здесь еще один метод решения уравнения

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2x}}}}}_{n \text{ радикалов}} = x. \qquad (*)$$

Подставим в левую часть этого уравнения вместо последнего числа x его выражение, даваемое равенством $(*)$; получим

$$x = \underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2x}}}}}_{2n \text{ радикалов}}.$$

Далее, снова заменяя последнее x подобным же образом, будем иметь

$$x = \underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2x}}}}}_{3n \text{ радикалов}} =$$
$$= \underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2x}}}}}_{4n \text{ радикалов}} = \ldots$$

На основании этого мы можем записать

$$x = \sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots}}} =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2x}}}}}_{N \text{ радикалов}}. \quad (**)$$

Отсюда получаем

$$x = \sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots}}} =$$
$$= \sqrt{x + 2\left[\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots}}}\right]} = \sqrt{x + 2x}, \quad (*\,*\,*)$$

откуда имеем $x = \sqrt{3x}$, $x^2 = 3x$ и, следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. В частности, это решение сразу показывает, что корни уравнения $(*)$ не зависят от n (ибо уравнение $(**)$ не зависит от n).

Приведенное рассуждение в таком виде нельзя, разумеется, считать решением задачи, поскольку не доказано существование предела (*) и не обоснованы преобразования (**). Однако, это рассуждение можно сделать совсем строгим.

б) Будем последовательно упрощать дробь, стоящую слева:

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x};\quad 1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1};$$

$$1+\frac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=1+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1};\quad \ldots$$

Окончательно мы получим какое-то уравнение вида

$$\frac{ax+b}{cx+d}=x,$$

где a, b, c и d — неизвестные нам целые числа. Это уравнение равносильно *квадратному уравнению* $x(cx+d)=$ $=ax+b$; отсюда следует, что наше исходное уравнение может иметь *не больше двух* различных корней (тождеством это уравнение быть не может, так как иначе ему удовлетворяли бы *любые* значения x, а $x=0$, очевидно, уравнению не удовлетворяет).

Но два корня нашего уравнения нетрудно найти. Действительно, предположим, что x таково, что

$$1+\frac{1}{x}=x.$$

В таком случае, последовательно упрощая нашу дробь, мы будем получать

$$1+\frac{1}{x}=x;\quad 1+\frac{1}{x}=x;\quad 1+\frac{1}{x}=x;\quad \ldots$$

и окончательно придем к тождеству

$$x=x.$$

Таким образом, мы видим, что корни уравнения $1+\dfrac{1}{x}=x$, или $x^2-x-1=0$, т. е.

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

удовлетворяют заданному уравнению. Никаких других корней это уравнение иметь не может.

Примечание. Наметим здесь еще один метод решения рассматриваемого уравнения (сравните с примечанием к решению задачи а)). Подставим в левую часть уравнения вместо x его выражение в виде многоэтажной дроби, даваемое самим уравнением. При этом мы получим точно такое же уравнение, где, однако, в многоэтажной дроби слева знак дроби будет повторяться $2n$ раз. Продолжая далее тот же процесс, мы будем приходить к таким же уравнениям, где слева будет стоять дробь, имеющая все больше и больше «этажей». На этом основании мы можем написать

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+1+\cfrac{1}{1}}}}}_{\text{Знак дроби повторяется } N \text{ раз}}, \qquad (*)$$

где слева стоит бесконечное выражение. Отсюда получаем

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} = \cfrac{1}{1+\left[\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}\right]} = \frac{1}{1+x}, \qquad (**)$$

т. е. то же квадратное уравнение для x, которое фигурировало и в приведенном выше решении задачи. Такое решение исходного уравнения сразу показывает, что корни его не могут зависеть от n.

Приведенное рассуждение в таком виде нельзя считать решением задачи, так как не доказано существование предела $(*)$ и равенство x этому пределу и не обоснованы преобразования $(**)$. Однако это рассуждение можно сделать вполне строгим.

171. Имеем

$$x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-4\sqrt{x-1}+4 = \\ = (\sqrt{x-1})^2 - 4\sqrt{x-1}+4 = (\sqrt{x-1}-2)^2$$

и, аналогично,

$$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1-6\sqrt{x-1}+9 = (\sqrt{x-1}-3)^2.$$

Таким образом, наше уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1$$

или, так как мы считаем все корни положительными,

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1,$$

где $|y|$ обозначает абсолютную величину числа y.

Рассмотрим теперь несколько случаев.

1°. Если $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1} \geqslant 3$, $x-1 \geqslant 9$, $x \geqslant 10$, то $|\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2$, $|\sqrt{x-1}-3| = \sqrt{x-1}-3$, и уравнение принимает вид

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,$$

откуда

$$2\sqrt{x-1}=6,$$
$$x-1=9, \quad x=10.$$

2°. Если $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3 \leqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1} \geqslant 2$, $x \geqslant 5$, но $x-1 \leqslant 3$, $x \leqslant 10$, то $|\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2$, $|\sqrt{x-1}-3| = -\sqrt{x-1}+3$, и уравнение превращается в тождество

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1.$$

Таким образом, нашему уравнению удовлетворяют все значения x между $x=5$ и $x=10$.

3°. Если $\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3 \leqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1} \geqslant 2$, $x \geqslant 5$, то $|\sqrt{x-1}-2| = -\sqrt{x-1}+2$, $|\sqrt{x-1}-3| = -\sqrt{x-1}+3$, и уравнение принимает вид

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1,$$

откуда

$$2\sqrt{x-1}=4,$$
$$x-1=4, \quad x=5.$$

4°. Случай $\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$, очевидно, невозможен.

Таким образом, решением этого уравнения служат **все** x между $x=5$ и $x=10$, т. е. $5 \leqslant x \leqslant 10$.

172. Для того чтобы решить это уравнение, мы будем искать сначала его корни, лежащие на отрезке от 2 до ∞, затем на отрезках от 1 до 2, от 0 до 1, от -1 до 0 и от $-\infty$ до -1.

1°. Пусть $x \geqslant 2$. Тогда $x+1>0$, $x>0$, $x-1>0$, $x-2 \geqslant 0$; поэтому $|x+1|=x+1$, $|x|=x$, $|x-1|=x-1$; $|x-2|=x-2$, и мы получаем уравнение

$$x+1-x+3(x-1)-2(x-2)=x+2,$$

которое удовлетворяется **тождественно**.

Таким образом, любое число, большее либо равное 2, является корнем нашего уравнения.

2°. Пусть $1 \geqslant x < 2$. Тогда $x+1>0$, $x>0$, $x-1 \geqslant 0$ и $x-2<0$ и, значит,

$$|x+1|=x+1, \quad |x|=x, \quad |x-1|=x-1,$$
$$|x-2|=-(x-2).$$

Таким образом, мы получаем уравнение

$$x+1-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2.$$

Отсюда $4x=8$, $x=2$, т. е. лежит вне отрезка $1 \leqslant x < 2$. Следовательно, наше уравнение не имеет корней, больших либо равных 1, но меньших 2.

3°. Пусть, далее, $0 \leqslant x < 1$. Тогда имеем

$$|x+1|=x+1, \quad |x|=x,$$
$$|x-1|=-(x-1), \quad |x-2|=-(x-2).$$

Значит,

$$x+1-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2, \quad x=-1,$$

т. е. лежит вне отрезка $0 \geqslant x < 1$.

Получаем, что корней, больших либо равных 0, но меньших 1, нет.

4°. Пусть теперь $-1 \leqslant x < 0$. Тогда

$$|x+1| = x+1, \quad |x| = -x,$$
$$|x-1| = -(x-1), \quad |x-2| = -(x-2);$$
$$x+1+x-3(x-1)+2(x-2) = x+2,$$

что невозможно, т. е. на этом участке также нет корней.

5°. Наконец, пусть $x < -1$. При этом

$$|x+1| = -(x+1), \quad |x| = -x,$$
$$|x-1| = -(x-1), \quad |x-2| = -(x-2);$$
$$-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2) = x+2,$$
$$x = -2.$$

Получаем еще один корень $x = -2$.

Окончательно уравнению удовлетворяют: число -2 и любое число, большее либо равное 2.

Примечание. Результаты настоящей задачи становятся совершенно ясными, если изобразить график функции

$$y = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - (x+2).$$

На рис. 11 изображены тонкими линиями графики функций $y_1 = |x+1|$, $y_2 = -|x|$, $y_3 = 3|x-1|$, $y_4 = -2|x-2|$ и $y_5 = -(x+2)$ и жирной линией — график функции $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ («сложение графиков»). Из этого чертежа сразу видно, что y обращается в нуль на луче $x \geqslant 2$ и еще в одной точке $x = -2$.

173. Из первого уравнения системы немедленно получаем

$$y^2 = x^2, \quad y = \pm x.$$

Подставляя это значение y^2 во второе уравнение, имеем

$$(x-a)^2 + x^2 = 1 \tag{$*$}$$

— квадратное уравнение, которое, вообще говоря, дает два значения x. Так как каждому значению x отвечают два значения y, то всего система имеет четыре решения.

Число решений системы уменьшается до трех, если одно из значений x равно нулю: нулевому значению x (и только нулевому значению) соответствует единственное значение $y = 0$, а не два разных значения $y = \pm x$. Подставляя $x = 0$ в уравнение ($*$), получаем

$$a^2 = 1, \quad a = \pm 1;$$

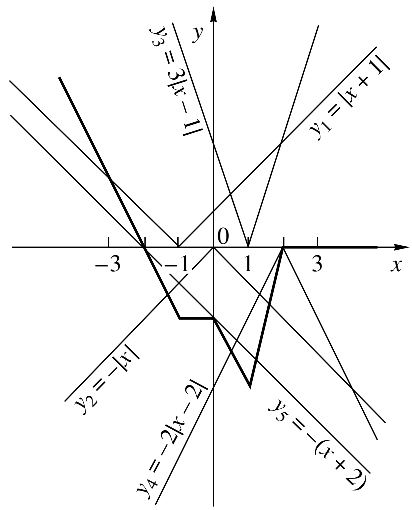


Рис. 11

только при этих значениях a система имеет три решения.

Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение для x имеет одно-единственное значение. Для того чтобы квадратное уравнение

$$(x-a)^2 + x^2 = 1, \quad \text{или} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0,$$

имело единственный корень (два совпадающих значения корня), надо, чтобы было

$$a^2 - 2(a^2-1) = 0, \quad a^2 = 2, \quad a = \pm\sqrt{2};$$

при этих значениях a система имеет два решения.

174. а) Решая систему, получаем

$$x = \frac{a^3-1}{a^2-1}, \quad y = \frac{-a^2+a}{a^2-1}.$$

Отсюда видно, что если $a+1 \neq 0$ и $a-1 \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$, $y = \dfrac{-a}{a+1}$. Если

$a = -1$ или $a = +1$, то наши формулы теряют смысл; в первом случае мы приходим к системе

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ \;\; x - y = 1, \end{cases}$$

которая противоречива (не имеет решений), во втором случае — к системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений (x произвольно, $y = 1 - x$).

б) Решая систему, получаем

$$\frac{a^4 - 1}{a^2 - 1}, \quad y = \frac{-a^3 + a}{a^2 - 1}.$$

Таким образом, и здесь, если $a^2 - 1 \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = a^2 + 1$, $y = -a$. В случаях же $a = -1$ и $a = 1$ мы приходим к системам

$$\begin{cases} -x + y = -1, \\ \;\; x - y = 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

которые имеют бесконечно много решений.

в) Из первого и второго уравнений получаем

$$y + z = 1 - ax, \quad ay + z = a - x;$$

рассматривая эти два равенства как систему двух уравнений с двумя неизвестными y и z, имеем

$$y = \frac{a - x - 1 + ax}{a - 1} = \frac{(a-1)(1+x)}{a-1},$$
$$z = \frac{a(1 - ax) - a + x}{a - 1} = \frac{-x(a^2 - 1)}{a - 1}.$$

Таким образом, если $a \neq 1$, то $y = 1 + x$, $z = -(1 + a)x$; подставляя эти значения y и z в третье уравнение, находим

$$x + (1 + x) - a(1 + a)x = a^2, \quad x(2 - a - a^2) = a^2 - 1,$$
$$-x(a + 2)(a - 1) = a^2 - 1.$$

Поэтому при $a-1 \neq 0$, $a+2 \neq 0$ система имеет единственное решение

$$x = -\frac{a^2-1}{(a+2)(a-1)} = -\frac{a+1}{a+2}, \quad y = 1 + x = \frac{1}{a+2},$$
$$z = -(a+1)x = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

В случаях $a = 1$ и $a = -2$ мы приходим соответственно к системам

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=1, \\ x+y+z=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -2x+y+z=1, \\ x-2y+z=-2, \\ x+y-2z=4, \end{cases}$$

первая из которых имеет бесконечно много решений, а вторая не имеет ни одного решения (складывая первые два уравнения второй системы, мы получаем $-x-y+2z=-1$, что противоречит третьему уравнению).

175. Вычитая второе уравнение из первого и шестое из пятого и приравнивая два полученных выражения для x_2-x_3, получим

$$\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3) = \alpha_4(\alpha_2-\alpha_3),$$

или

$$(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3) = 0.$$

Точно так же, составляя по два различных выражения для разностей x_1-x_2 и x_1-x_3, получим еще два соотношения:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) = 0, \qquad (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) = 0.$$

Из первого из полученных трех соотношений следует, что $\alpha_1 = \alpha_4$ или $\alpha_2 = \alpha_3$. Предположим для определенности, что $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Из второго соотношения следует, что $\alpha_1 = \alpha$ или $\alpha_4 = \alpha$. Каждое из этих равенств обращает третье соотношение в тождество. Таким образом, *для того чтобы наша система была совместной, необходимо, чтобы три из четырех величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ были равны между собой.*

Предположим теперь, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_4 = \beta$. Вспоминая те выражения для разностей x_1-x_2,

$x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$, при помощи которых мы получили соотношения между α_1, α_2, α_3 и α_4, немедленно получаем

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Обозначим теперь $x_1 = x_2 = x_3$ просто через x, а x_4 — через y. В таком случае наши шесть уравнений с четырьмя неизвестными перейдут в два уравнения с двумя неизвестными

$$2x = \alpha^2,$$
$$x + y + \alpha\beta,$$

откуда

$$x = \frac{a^2}{2}; \quad y = \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Примечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что более общая система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_m = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_{m+1} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} + x_{n+m-2} + \ldots + x_{n-1} + x_n = \alpha_{n+m-1}\alpha_{n+m-2}\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n, \end{cases}$$

состоящая из C_n^m уравнений с n неизвестными $(n > m+1)$, будет разрешима только в следующих случаях:

1°. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ $\Big($в этом случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \dfrac{a^n}{n}$, $x_n = \alpha^{n-1}\left(\beta - \dfrac{n-1}{n}\alpha\right)\Big)$;

2°. $n - m + 1$ или больше из величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю (в этом случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$).

176. Из первого уравнения получаем

$$x = 2 - y;$$

подставляем во второе:

$$2y - y^2 - z^2 = 1,$$

или

$$z^2 + y^2 - 2y + 1 = 0,$$

или

$$z^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Каждое из слагаемых последнего равенства неотрицательно и, следовательно, равно нулю. Отсюда

$$z = 0, \quad y = 1$$

и, значит,

$$x = 1.$$

Таким образом, система имеет единственное действительное решение.

177. а) Заметим прежде всего, что если x_0 является корнем уравнения, то $-x_0$ есть также корень. Следовательно, отрицательных корней столько же, сколько и положительных. Далее, число 0 есть корень уравнения. Таким образом, нам достаточно найти число положительных корней. Отметим теперь, что если $\frac{x}{100} = \sin x$, то

$$|x| = 100|\sin x| \leqslant 100 \cdot 1 = 100.$$

Мы получаем, что корень уравнения не может быть по абсолютной величине больше 100.

Разделим участок оси Ox от $x = 0$ до $x = 100$ на отрезки длиной 2π (последний отрезок может иметь меньшую длину) и подсчитаем число корней нашего уравнения на каждом из этих отрезков. Обратимся к рис. 12.

На первом отрезке (от 0 до 2π) имеется один положительный корень (и один корень нуль), на каждом следующем, исключая последний, — по два корня. Для того чтобы определить число корней на последнем отрезке, оценим его размеры: $\frac{100}{2\pi}$ заключается, очевидно, между 15 и 16 $\left(\frac{100}{15} = 6{,}66\ldots\ldots > 2\pi; \frac{100}{16} = 6{,}25 < 2\pi\right)$; следовательно, всего мы имеем 15 отрезков длины 2π и один неполный отрезок. Длина этого последнего отрезка равна $100 - 15 \cdot 2\pi > 5 > \pi$, следовательно, на этом отрезке целиком помещается положительная полуволна синусоиды и, значит, на нем тоже имеются два корня.

Итак, мы всего имеем $1 + 14 \cdot 2 + 2 = 31$ положительный корень нашего уравнения. Столько же имеется отрицательных корней, и еще один корень равен нулю.

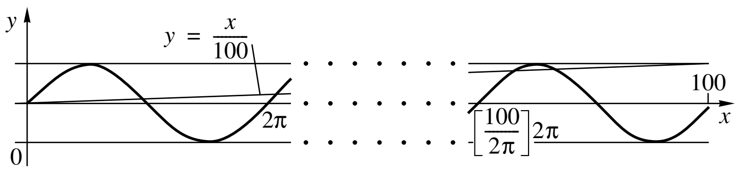


Рис. 12

Окончательно общее число корней равно $31 \cdot 2 + 1 = 63$.

б) Решение этой задачи аналогично решению задачи а). Прежде всего очевидно, что если $\sin x = \lg x$, то $x \leqslant 10$ (в противном случае левая часть нашего равенства не больше 1, а правая — больше). Так как $2 \cdot 2\pi > 10$, то на участке оси Ox от $x = 0$ до $x = 10$ помещаются одна полная волна синусоиды $y = \sin x$ и часть следующей волны (рис. 13). График $y = \lg x$, очевидно, пересекает первую волну синусоиды в одной точке. Далее, так как $2\pi + \dfrac{\pi}{2} < 10$, то в точке $x = \dfrac{5\pi}{2}$ имеем $\sin x = 1 > \lg x$ и, значит, график $y = \lg x$ пересекает первую половину второй положительной полуволны; так как в точке $x = 10$ $\lg x = 1 > \sin x$, то он должен пересечь и вторую половину этой полуволны. Таким образом, мы заключаем, что уравнение $\sin x = \lg x$ имеет всего три корня.

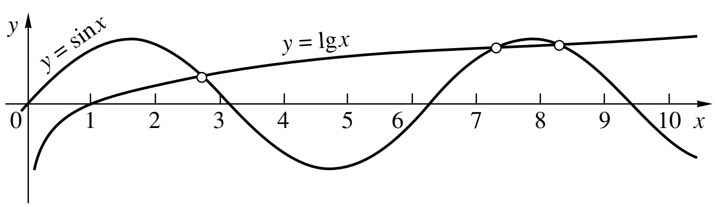


Рис. 13

178. Предложение задачи является справедливым при $n = 1$ и $n = 2$, ибо

$$x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2, \quad x_1 + x_2 = 6,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (6)^2 - 2 \cdot 1 = 34.$$

Далее мы имеем

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = \\ = 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - 1 \cdot (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}),$$

или

$$x_1^n + x_2^n = 5(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + [(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})]. \quad (*)$$

Из этой формулы прежде всего следует, что если $x_1^{n-2} + x_2^{n-2}$ и $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ — целые числа, то и $x_1^n+x_2^n$ — целое число, откуда, в силу принципа математической индукции, вытекает первое утверждение задачи.

Пусть теперь n есть первое натуральное число, такое, что $x_1^n + x_2^n$ делится на 5. Из формулы $(*)$ следует, что в этом случае разность $(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$ также должна делиться на 5. Но, заменив в формуле $(*)$ n на $n-1$, мы получим:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = 5(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) + (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) - (x_1^{n-3} + x_2^{n-3}),$$

откуда следует, что

$$x_1^{n-3} + x_2^{n-3} = 5(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) - [(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})]$$

тоже должно делиться на 5, что противоречит предположению о том, что для всех чисел m, меньших n, $x_1^m + x_2^m$ не делится на 5. Отсюда следует, что такого целого положительного n, для которого $x_1^n + x_2^n$ делится на 5, вовсе не может существовать. Легко видеть, что утверждение задачи верно и для целых отрицательных n: если $n < 0$, то $x_1^n + x_2^n = \frac{1}{x_1^{-n}} + \frac{1}{x_2^{-n}} = \frac{x_1^{-n} + x_2^{-n}}{(x_1x_2)^{-n}} = x_1^{-n} + x_2^{-n}$ — целое число, не делящееся на 5, так как $-n > 0$.

179. Предположим, что сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000}$ содержит n положительных и $1000-n$ отрицательных членов. В таком случае все попарные произведения n положительных членов $\left(\text{их, очевидно, будет } \frac{n(n-1)}{2}\right)$ и все попарные произведения $1000 - n$ отрицательных членов (их число равно

$\left.\dfrac{(1000-n)(1000-n-1)}{2}\right)$ будут положительными, а произведения положительных членов на отрицательные (их будет $n(1000-n)$) отрицательны. Условие задачи требует, чтобы было

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2}=n(1000-n),$$

или

$$\frac{n^2-n+(1000-n)^2-(1000-n)}{2}=1000n-n^2,$$

$$2n^2-2000n+\frac{999\,000}{2}=0,$$

$$n=\frac{1000\pm\sqrt{1\,000\,000-999\,000}}{2}=\frac{1000\pm\sqrt{1000}}{2},$$

а, это, очевидно, невозможно.

В случае второго выражения мы, рассуждая аналогично, придем к условию

$$n=\frac{10\,000\pm\sqrt{10\,000}}{2}=\frac{10\,000\pm 100}{2}.$$

Отсюда следует, что это выражение может содержать равное число положительных и отрицательных удвоенных произведений; для этого достаточно, чтобы исходный многочлен содержал $\dfrac{10\,000+100}{2}=5050$ положительных членов и $\dfrac{10\,000-100}{2}=4950$ отрицательных (или 5050 отрицательных членов и 4950 положительных).

180. Прежде всего имеем

$$(\sqrt{2}-1)^1=\sqrt{2}-\sqrt{1},$$
$$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}.$$

Докажем теперь, что если только

$$(\sqrt{2}-1)^{2k-1}=B\sqrt{2}-A=\sqrt{2B^2}-\sqrt{A^2}$$

можно представить в виде $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, т. е. если $2B^2-A^2=$ $=1$, то и число

$$(\sqrt{2}-1)^{2k+1}=B'\sqrt{2}-A'$$

можно представить в таком виде, т. е. $2B'^2 - A'^2 = 1$. Для этого достаточно заметить, что

$$(\sqrt{2}-1)^{2k+1} = (\sqrt{2}-1)^{2k-1}(\sqrt{2}-1)^2 = \\ = (B\sqrt{2} - A)(3 - 2\sqrt{2}) = (3B + 2A)\sqrt{2} - (4B + 3A);$$

следовательно,

$$B' = 3B + 2A, \quad A' = 4B + 3A,$$

$$2B'^2 - A'^2 = 2(3B + 2A)^2 - (4B + 3A)^2 = \\ = 18B^2 + 24AB + 8A^2 - 16B^2 - 24AB - 9A^2 = 2B^2 - A^2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же показывается, что если число $(\sqrt{2}-1)^{2k} = C - D\sqrt{2}$ можно представить в виде $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$, то $(\sqrt{2}-1)^{2k+2} = C' - D'\sqrt{2}$ можно представить в таком виде.

Отсюда, в силу принципа математической индукции, вытекает утверждение задачи.

181. Если $(A+B\sqrt{3})^2 = C+D\sqrt{3}$, то $C = A^2+3B^2$, $D = 2AB$ и $(A - B\sqrt{3})^2 = A^2 + 3B^2 - 2AB\sqrt{3} = C - D\sqrt{3}$. Следовательно, если бы было $(A+B\sqrt{3})^2 = 99\,999+111\,111\sqrt{3}$, то было бы также $(A - B\sqrt{3})^2 = 99\,999 - 111\,111\sqrt{3}$, что невозможно, так как $99\,999 - 111\,111\sqrt{3}$ меньше нуля, а квадрат каждого действительного числа больше нуля.

182. Предположим, что $\sqrt[3]{2} = p+q\sqrt{r}$, и возведем обе части этого равенства в куб. В таком случае получим

$$2 = p^3 + 3p^2q\sqrt{r} + 3pq^2r + q^3r\sqrt{r},$$

или

$$2 = p(p^2 + 3q^2r) + q(3p^2 + q^2r)\sqrt{r}.$$

Покажем теперь, что если $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, то $\sqrt[3]{2}$ есть р а ц и о н а л ь н о е число. Действительно, если $q = 0$, то $\sqrt[3]{2} = p$ есть рациональное число. Если $q \neq 0$ и $3p^2 + q^2r \neq 0$, то из последнего равенства следует

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p(p^2 + 3q^2r)}{q(3p^2 + q^2r)},$$

откуда
$$\sqrt[3]{2} = p + q\frac{2 - p(p^2 + 3q^2 r)}{q(3p^2 + q^2 r)},$$
т. е. опять рационально. Если же $3p^2 + q^2 r = 0$, то
$$q^2 r = -3p^2, \quad 2 = p[p^2 + 3(-3p^2)] = -8p^3,$$
и опять $\sqrt[3]{2} = -2p$ есть число рациональное.

Таким образом, нам остается только показать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом. Это доказательство хорошо известно. В самом деле, если $\sqrt[3]{2}$ равен несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$, то $2 = \dfrac{m^3}{n^3}$, $m^3 = 2n^3$. Таким образом, число m^3 (а также и m) есть четное число, следовательно, оно делится на 8. В таком случае $n^3 = \dfrac{m^3}{2}$ тоже должно быть четным, а следовательно, и n четно, что противоречит предположению о несократимости дроби $\dfrac{m}{n}$. Итак, предположение, что $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ привело нас к абсурду.

183. а) Обозначим $1,00000000004$ через α, $1,00000000002$ через β. В таком случае фигурирующие в условии задачи выражения примут вид $\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ и $\dfrac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$. Так как $\alpha > \beta$, то, очевидно,
$$\frac{1+\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} = \frac{1+\beta}{\beta^2},$$
$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha} = 1 : \left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right) > 1 : \left(\frac{1+\beta}{\beta^2}\right) = \frac{\beta^2}{1+\beta},$$
$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha} > 1 + \frac{\beta^2}{1+\beta} = \frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}$$
и, наконец,
$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} = 1 : \left(\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}\right) < 1 : \left(\frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}\right) = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}.$$
Таким образом, второе из двух выражений больше первого.

б) Обозначим фигурирующие в условии задачи выражения соответственно через A и B. Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{a^n}{1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}} = \\ = 1 + \frac{1}{\dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}}{a^n}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \dfrac{1}{a}};$$

$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{b^{n-1}} + \ldots + \dfrac{1}{b}}.$$

Отсюда сразу следует, что $\dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B}$ и, следовательно, $B > A$.

184. Будем исходить из формулы

$$(X - a)^2 - (x - a)^2 = X^2 - x^2 - 2a(X - x).$$

Следовательно,

$$[(X - a_1)^2 + (X - a_2)^2 + \ldots + (X - a_n)^2] - \\ - [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2] = \\ = n(X^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(X - x).$$

Если положить в последнем выражении $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, то оно будет положительным; действительно, мы будем иметь

$$[(X - a_1)^2 + (X - a_2)^2 + \ldots + (X - a_n)^2] - \\ - [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2] = \\ = n(X^2 - x^2) - 2nx(X - x) = n(X^2 - x^2 - 2Xx + 2x^2) = \\ = n(X - x)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что искомым значением x является

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

185. а) Мы имеем всего три существенно различных расположения.

1°. a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\Phi_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2.$$

2°. a_1, a_3, a_2, a_4:

$$\Phi_2 = (a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2.$$

3°. a_1, a_2, a_4, a_3:

$$\Phi_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2.$$

Но легко видеть, что

$$\Phi_3 - \Phi_1 = -2a_2a_4 - 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 = \\ = 2(a_2 - a_1)(a_3 - a_4) < 0,$$

$$\Phi_3 - \Phi_2 = -2a_1a_2 - 2a_3a_4 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 = \\ = 2(a_3 - a_1)(a_2 - a_4) < 0.$$

Следовательно, требуемое расположение имеет вид a_1, a_2, a_4, a_3.

б) Первое решение. Рассмотрим выражение

$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \ldots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^2 + (a_{i_n} - a_{i_1})^2,$$

где $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ — наши n чисел, расположенные в требуемом порядке. Пусть a_{i_α}, a_{i_β} $(\alpha < \beta)$ — какие-то два из этих чисел. Мы утверждаем, что *если* a_{i_α} *больше* (*или, наоборот, меньше*) a_{i_β}, то $a_{i_{\alpha-1}}$ *больше* (*соответственно меньше*) $a_{i_{\beta+1}}$ *).

Действительно, если бы это было не так, т. е. если бы было $(a_{i_\alpha} - a_{i_\beta})(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$, то перестановка, изменяющая порядок чисел $a_{i_\alpha}, a_{i_{\alpha+1}}, a_{i_{\alpha+2}}, \ldots, a_{i_\beta}$ на обратный, уменьшила бы величину суммы Φ (так как разность новой суммы Φ' и первоначальной суммы Φ будет, очевидно, равна

$$\Phi' - \Phi = -2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_\beta} - 2a_{i_\alpha}a_{i_{\beta+1}} + 2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_\alpha} + 2a_{i_\beta}a_{i_{\beta+1}} = \\ = 2(a_{i_\alpha} - a_{i_\beta})(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}})\big).$$

*) Здесь мы условно считаем $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_n}$.

Это замечание позволяет получить полное решение задачи. Прежде всего, так как циклическая перестановка всех чисел (т. е. перестановка, при которой сохраняется порядок чисел, выписанных одно за другим *по кругу*) не меняет величины суммы Φ, то мы можем считать, что a_{i_1} есть наименьшее из наших чисел a_1, т. е. $i_1 = 1$. Отсюда можно вывести, что a_{i_2} и a_{i_n} есть два следующих по величине числа. Действительно, если бы было, например, $a_{i_\beta} < a_{i_2}$ $(\beta \neq n)$, то мы имели бы $(a_{i_2} - a_{i_\beta})(a_{i_1} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$, а если бы было $a_{i_\beta} < a_{i_n}$ $(\beta \neq 2)$, то мы имели бы $(a_{i_1} - a_{i_{\beta-1}})(a_{i_n} - a_{i_\beta}) < 0$. Так как можно изменить порядок следования в цепочке $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}, a_{i_1}$ на обратный без того, чтобы изменить сумму Φ, то мы можем считать, что $a_{i_2} < a_{i_n}$, $i_2 = 2$, $i_n = 3$.

Далее мы утверждаем, что числа $a_{i_3} < a_{i_{n-1}}$ следуют по величине за уже использованными числами a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_n}: действительно, если бы было, например, $a_{i_3} > a_{i_\beta}$ $(\beta \neq 1,\, 2;\, n-1,\, n)$, то мы имели бы $(a_{i_3} - a_{i_\beta})(a_{i_2} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$. А так как, кроме того, должно быть $(a_{i_3} - a_{i_{n-1}})(a_{i_2} - a_{i_n}) > 0$, то $a_{i_3} < a_{i_{n-1}}$, т. е. $a_{i_3} = a_4$, $a_{i_{n-1}} = a_5$.

Точно так же показывается, что числа a_{i_4} и $a_{i_{n-2}}$ — следующие по величине за уже использованными и $a_{i_4} < a_{i_{n-2}}$ (т. е. $i_4 = 6$, $i_{n-2} = 7$), что числа a_{i_5} и $a_{i_{n-3}}$ — следующие по величине за ранее использованными и $a_{i_5} < a_{i_{n-3}}$ $(i_5 = 8,\, i_{n-3} = 9)$ и т. д. Окончательно приходим к следующему расположению чисел:

$$\text{при } n = 2k \text{ четном } \quad a_1 \begin{array}{c} \diagup\; a_2 - a_4 - a_6 - \ldots - a_{n-2} \;\diagdown \\ \\ \diagdown\; a_3 - a_5 - a_7 - \ldots - a_{n-1} \;\diagup \end{array} a_n,$$

$$\text{при } n = 2k+1 \text{ нечетном } \quad a_1 \begin{array}{l} \diagup\; a_2 - a_4 - a_6 - \ldots - a_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ \diagdown\; a_3 - a_5 - a_7 - \ldots - a_n \end{array}$$

(черточки указывают порядок следования чисел; так, например, для n четного имеем расположение $a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-2}$, a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_7, a_5, a_3).

Второе решение. Если каким-либо образом догадаться, что искомое расположение имеет такой вид, как указано в конце первого решения, то доказательство этого факта можно получить при помощи метода математической индукции. Действительно, при $n = 4$ доказательство получается весьма просто (см. решение задачи а)). Предположим теперь, что для какого-то четного n мы уже доказали, что сумма Φ_n, соответствующая выписанному в конце первого решения расположению чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, меньше суммы Φ'_n, соответствующей любому другому расположению. Покажем теперь, что сумма Φ_{n+1}, соответствующая выписанному выше расположению $n+1$ чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, меньше суммы Φ'_{n+1}, соответствующей какому-либо другому расположению $n+1$ чисел. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} - \Phi_n = (a_n - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_{n-1})^2 - (a_n - a_{n-1})^2 =\\ = 2a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} - 2a_{n-1}a_{n+1} + 2a_{n-1}a_n =\\ = 2(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}).\end{aligned}$$

С другой стороны, если в расположении, отвечающем сумме Φ'_{n+1}, число a_{n+1} стояло между какими-то числами a_α и a_β и Φ'_n отвечает расположению n чисел, которое получается из расположения $n+1$ чисел, приводящего к сумме Φ'_{n+1}, вычеркиванием числа a_{n+1}, то

$$\begin{aligned}\Phi'_{n+1} - \Phi'_n = (a_n - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_\beta)^2 - (a_\alpha - a_\beta)^2 =\\ = 2a_{n+1}^2 - 2a_\alpha a_{n+1} - 2a_\beta a_{n+1} + 2a_\alpha a_\beta =\\ = 2(a_{n+1} - a_\alpha)(a_{n+1} - a_\beta) \geqslant \Phi_{n+1} - \Phi_n.\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что

$$\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} = [\Phi_n - \Phi'_n] + [(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - (\Phi'_{n+1} - \Phi'_n)] \leqslant 0$$

(выражение в первой скобке неположительно в силу предположения индукции, а во второй — по доказанному). При этом, если сумма Φ'_{n+1} отличается от Φ_{n+1}, то либо $\Phi_n - \Phi'_n < 0$ (и, следовательно, $\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} < 0$), либо $(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - (\Phi'_{n+1} - \Phi'_n) < 0$ (и, следовательно, опять $\Phi_{n+1} < \Phi'_{n+1}$). Аналогично осуществляется переход от n к $n+1$, если n нечетно.

Третье решение. Задача имеет также несложное геометрическое решение. Изобразим числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \ldots < a_n$ точками $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ на числовой оси; отрезки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$ обозначим соответственно через $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}$. В таком случае сумма

$$\begin{aligned}\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \ldots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^2 + (a_{i_n} - a_{i_1})^2 =\\ = A_{i_1}A_{i_2}^2 + A_{i_2}A_{i_3}^2 + \ldots + A_{i_{n-1}}A_{i_n}^2 + A_{i_n}A_{i_1}^2\end{aligned}$$

равна сумме квадратов длин звеньев «ломаной» $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\ldots$ $\ldots A_{i_{n-1}}A_{i_n}A_{i_1}$ (все звенья которой лежат на одной прямой; рис. 14,*а*)).

Так как наша замкнутая ломаная покрывает весь отрезок A_1A_n, то каждый из отрезков $A_kA_{k+1} = d_k$ минимум два

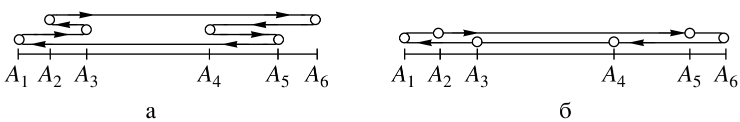


Рис. 14

раза входит в нашу ломаную (один раз в направлении от A_k к A_{k+1}, второй раз — в обратном направлении). Поэтому, в каком бы порядке мы ни располагали точки, сумма Φ, если выразить ее через отрезки $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ и раскрыть скобки, обязательно содержит член $2d_k^2$, а следовательно, и все члены $2d_1^2, 2d_2^2, \ldots, 2d_{n-1}^2$. Далее, пусть $A_{k-1}A_k = d_{k-1}$ и $A_kA_{k+1} = d_k$ — два соседних из рассматриваемых отрезков. Очевидно, что если звено ломаной, покрывающее отрезок A_kA_{k+1} в направлении от A_k к A_{k+1}, начинается в точке A_k, то звено, покрывающее этот отрезок в обратном направлении, не может кончаться в точке A_k; поэтому во всех случаях должно существовать звено, которое покрывает одновременно отрезки $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1}. А отсюда вытекает, что сумма Φ во всех случаях должна содержать член $2d_{k-1}d_k$, а следовательно, и все члены $2d_1d_2, 2d_2d_3, \ldots, 2d_{n-2}d_{n-1}$.

Теперь остается только заметить, что в случае, если расположение точек таково, как указано в конце первого решения задачи, то

$$\Phi = 2d_1^2 + 2d_2^2 + \ldots + 2d_{n-1}^2 + 2d_1d_2 + 2d_2d_3 + \ldots + 2d_{n-2}d_{n-1}$$

(рис. 14, *б*)). Отсюда и из сказанного выше вытекает, что в этом случае сумма Φ будет наименьшей.

186. а) Отметим, прежде всего, что мы с самого начала можем считать все $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ положительными; в противном случае мы изменили бы знаки отрицательных чисел на противоположные; левая часть неравенства при этом не изменится, а правая может только увеличиться. Рассмотрим

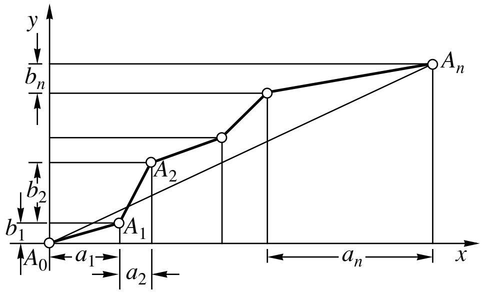


Рис. 15

теперь ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_n$, такую, что проекции отрезков A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ на ось Ox равны соответственно a_1, a_2, …, a_n, а проекции этих же отрезков на ось Oy — b_1, b_2, …, b_n; при этом пусть каждая вершина ломаной расположена правее и выше предшествующей (рис. 15). В таком случае из теоремы Пифагора следует, что

$$A_0A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},\ A_1A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2},\ \ldots,\ A_{n-1}A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$
$$A_0A_n = \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)^2},$$

откуда и получаем неравенство задачи.

Ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$ будет *равна* отрезку A_0A_n только в том случае, если все звенья этой ломаной являются продолжениями одно другого (ломаная является отрезком прямой). Нетрудно видеть, что это обстоятельство будет иметь место в том случае, если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$; лишь в этом случае имеет место равенство

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}.$$

б) Обозначим через h высоту пирамиды, через $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ — стороны основания $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P)$ и через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — длины перпендикуляров, опущенных из основания высоты на стороны основания $\Bigl(\dfrac{1}{2}\,a_1b_1 + \dfrac{1}{2}\,a_2b_2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{1}{2}\, a_n b_n = S\Big)$. В таком случае боковая поверхность Σ пирамиды будет равна

$$\frac{1}{2}\, a_1 \sqrt{b_1^2 + h^2} + \frac{1}{2}\, a_2 \sqrt{b_2^2 + h^2} + \ldots + \frac{1}{2}\, a_n \sqrt{b_n^2 + h^2}.$$

Но согласно равенству задачи а)

$$2\Sigma = \sqrt{(a_1 b_1)^2 + (a_1 h)^2} + \sqrt{(a_2 b_2)^2 + (a_2 h)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{(a_n b_n)^2 + (a_n h)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 + (a_1 h + a_2 h + \ldots + a_n h)^2} =$$
$$= \sqrt{4S^2 + h^2 P^2},$$

причем равенство достигается только, если $a_1 b_1 : a_2 b_2 : \ldots$ $\ldots : a_n b_n = a_1 h : a_2 h : \ldots : a_n h$, т. е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Отсюда и вытекает утверждение задачи.

187. Рассмотрим отдельно случай n четного и случай n нечетного.

1°. Число n четно. Построим ступенчатую ломаную $A_1 A_2 A_3 \ldots$ $\ldots A_n A_{n+1} A_{n+2}$ так, чтобы длины всех отрезков $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $\ldots$ $\ldots$, $A_{n+1} A_{n+2}$ равнялись единице и отрезки $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, $\ldots$, $A_{n-1} A_n$, $A_{n+1} A_{n+2}$ были бы параллельны между собой и перпендикулярны к отрезкам $A_2 A_3$, $A_4 A_5$, $\ldots$ $\ldots$, $A_n A_{n+1}$ (рис. 16; на нем $n = 4$). На каждом из отрезков $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ или на его продолжении возьмем точку B_i так, чтобы длина отрезка $B_i A_{i+1}$ равнялась a_i (a_{n+1} мы полагаем здесь равным a_1, т. е. B_{n+1} выберем так,

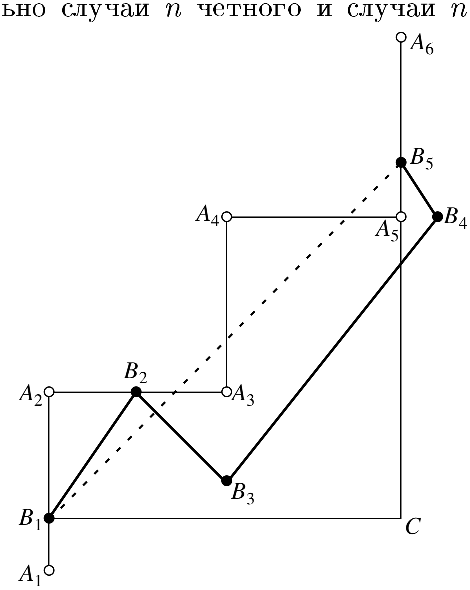


Рис. 16

чтобы было $B_{n+1}A_{n+2} = a_1$); при этом точку B_i мы будем располагать левее или ниже точки A_{i+1}, если $a_i > 0$, и правее или выше точки A_{i+1}, если $a_i < 0$ (на рис. 16 $0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1$, $a_3 > 1$, $a_4 < 0$). Проведем теперь ломаную $B_1B_2\ldots B_{n+1}$. По теореме Пифагора

$$B_iB_{i+1} = \sqrt{B_iA_{i+1}^2 + B_{i+1}A_{i+1}^2}.$$

Но $B_iA_{i+1} = a_i$ и, как легко видеть, $B_{i+1}A_{i+1} = |1 - a_{i+1}|$; следовательно,

$$B_iB_{i+1} = \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2}.$$

Таким образом, интересующая нас сумма

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1-a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1-a_1)^2}$$

равна длине ломаной $B_1B_2B_3\ldots B_{n+1}$.

Очевидно, что длина ломаной $B_1B_2B_3\ldots B_{n+1}$ всегда не меньше, чем длина отрезка B_1B_{n+1}. Вычислим теперь длину этого отрезка. С этой целью построим прямоугольный треугольник B_1CB_{n+1} (рис. 16). Тогда

$$B_1C = A_2A_3 + A_4A_5 + \ldots + A_nA_{n+1} = \frac{n}{2},$$
$$CB_{n+1} = A_1A_2 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n = \frac{n}{2}$$

(ибо $A_1B_1 = A_{n+1}B_{n+1} = |1 - a_1|$). Отсюда

$$B_1B_{n+1} = \sqrt{(B_1C)^2 + (CB_{n+1})^2} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{n\sqrt{2}}{2},$$

что и доказывает требуемое равенство.

Теперь уже легко выяснить, в каком случае в этом неравенстве знак $\geqslant$ можно заменить знаком равенства. Для этого необходимо, чтобы все точки B_2, B_3, …, B_n лежали на прямой B_1B_{n+1} (т. е. B_i должно совпадать с точкой пересечения прямых B_1B_{n+1} и A_iA_{i+1}). Так как прямая B_1B_{n+1} образует угол 45° с прямой B_1C (ибо $B_1C = CB_{n+1}$), то это будет при

$$B_1A_2 = A_2B_2 = B_3A_4 = A_4B_4 = \ldots = B_{n-1}A_n = A_nB_n,$$

т. е. при $a_1 = (1 - a_2) = a_3 = (1 - a_4) = \ldots = a_{n-1} = (1 - a_n)$. Итак, при n четном равенство достигается при

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a, \quad a_2 = a_4 = \ldots = a_n = 1 - a,$$

где a может быть любым.

2°. Число n нечетно*). Положим $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, ..., $a_{2_n} = a_n$ и рассмотрим сумму

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots \\ \ldots + \sqrt{a_{2n-1}^2 + (1 - a_{2n})^2} + \sqrt{a_{2n}^2 + (1 - a_1)^2},$$

которая, очевидно, будет равна удвоенной сумме:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots \\ \ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2}$$

(каждое слагаемое этой последней суммы в первой сумме встречается дважды). Но по уже доказанному первая сумма $\leqslant \dfrac{2n\sqrt{2}}{2}$; отсюда вытекает, что

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots \\ \ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geqslant \frac{n\sqrt{2}}{2},$$

т. е. мы получили требуемое неравенство.

Знак равенства в последнем неравенстве имеет место только, если

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 1 - a_2 = 1 - a_4 = \ldots = 1 - a_{2n}$$

(см. выше случай 1°). Но так как у нас $a_1 = a_{n+1}$ и n нечетно, то последнее равенство возможно только, если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}.$$

*) Мы предоставляем читателю выяснить на примере $n = 3$, почему доказательство, проведенное для четного n, не проходит для n нечетного.

188. Первое решение. Обе части равенства положительны, поэтому, возводя их в квадрат, получим

$$1 - x_1^2 + 1 - x_2^2 + 2\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \leqslant 4 - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2),$$

т. е.

$$2\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \leqslant 2 - 2x_1x_2, \quad \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \leqslant 1 - x_1x_2.$$

Возведем опять обе части в квадрат:

$$1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^2x_2^2 \leqslant 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2;$$

перенося все члены направо, получим $0 \leqslant (x_1 - x_2)^2$.

Последнее неравенство очевидно; равенство здесь имеет место лишь при $x_1 = x_2$. Отсюда вытекает, что исходное неравенство всегда имеет место и обращается в равенство лишь при $x_1 = x_2$.

Второе решение. Эта задача имеет и геометрическое решение; аналогичные решения можно найти и для многих значительно более сложных задач. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 17). Координаты x, y точек этой окружности будут связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$.

Отметим теперь на оси Ox две точки M_1 и M_2, имеющие абсциссы x_1 и x_2; так как $|x_1| \leqslant 1$ и $|x_2| \leqslant 1$, то обе эти точки будут расположены внутри (или на границе) единичной окружности. Восстановим в этих точках перпендикуляры к оси абсцисс до пересечения их с верхней полуокружностью в точках N_1 и N_2; тогда, очевидно, $M_1N_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$ и $M_2N_2 = \sqrt{1 - x_2^2}$. Заметим теперь, что абсциссу $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ будет иметь середи-

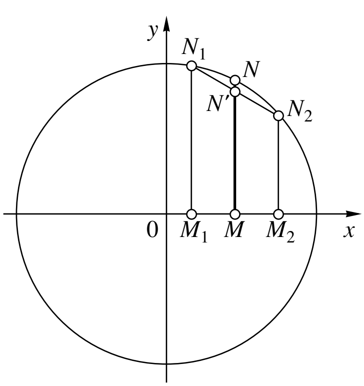


Рис. 17

на M отрезка M_1M_2 *). Отсюда вытекает, что величина $\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$ будет равна длине отрезка MN, где N есть точка пересечения с окружностью перпендикуляра к оси абсцисс, восстановленного в точке M. Но сумма $M_1N_1 + M_2N_2$ равна удвоенной длине средней линии $N'M$ трапеции $M_1N_1N_2M_2$, т. е. меньше, чем удвоенная длина отрезка MN. Тем самым нужное нам равенство доказано; из доказательства видно, что это неравенство обращается в равенство, лишь если точки M_1 и M_2 совпадают, т. е. если $x_1 = x_2$.

Примечание. Прием, примененный во втором решении задачи 188, позволяет выводить много интересных неравенств. Так, например, рассмотрим сферу с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 18); и пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки

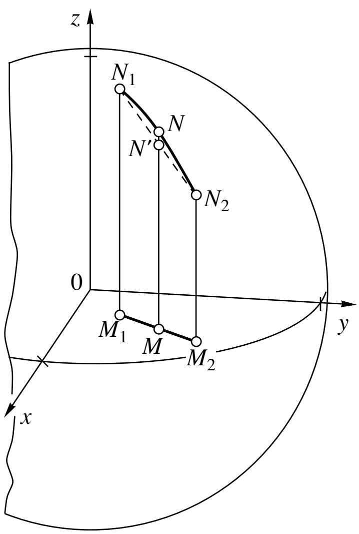


Рис. 18

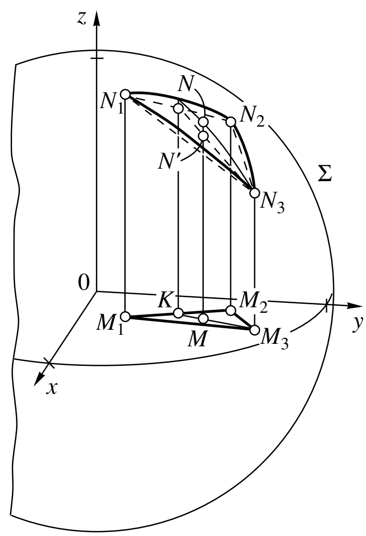


Рис.19

плоскости Oxy, расположенные внутри или на границе сферы, N_1

*) Это утверждение очевидно, если x_1 и x_2 положительны; легко проверить, что оно остается справедливым и при любых значениях x_1 и x_2. (Заметим, впрочем, что приведенное в условии задачи неравенство достаточно доказать для положительных x_1 и x_2: действительно, если x_1 и x_2 неположительны, то, заменив эти числа их абсолютными значениями, мы не изменим левой части неравенства, а правую уменьшим.)

и N_2 — точки пересечения со сферой перпендикуляров к плоскости Oxy, восстановленных в точках M_1 и M_2, N и N' — точки пересечения перпендикуляра, восстановленного к плоскости Oxy в середине M отрезка M_1M_2, со сферой и с отрезком N_1N_2. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M_1 и M_2, то

$$M_1N_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2},$$

$$M_2N_2 = \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2},$$

$$MN = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2},$$

$$MN' = \frac{1}{2}(M_1N_1 + M_2N_2),$$

и из того, что $MN' \leqslant MN$, вытекает, что

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} \leqslant \leqslant 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}, \qquad (*)$$

если только все подкоренные выражения положительны; равенство здесь имеет место только в том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т. е. когда точки M_1 и M_2 совпадают.

Точно так же, восстановив к плоскости Oxy перпендикуляры в трех точках M_1, M_2 и M_3 и в точке M пересечения медиан треугольника $M_1M_2M_3$ (рис. 19), придем к неравенству

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{1 - x_3^2 - y_3^2} \leqslant \leqslant 3\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2}, \qquad (**)$$

выражающему, что отрезок MN' не превосходит отрезка MN. Неравенство $(**)$ тоже имеет место во всех случаях, когда все подкоренные выражения положительны; равенство здесь имеет место, лишь когда $x_1 = x_2 = x_3$ и $y_1 = y_2 = y_3$, т. е. когда точки M_1, M_2 и M_3 все совпадают между собой.

Заменяя сферу конусом, вершина которого совпадает с началом координат, осью служит ось Oz и угол при вершине равен $90°$ (рис. 20), получим равенство

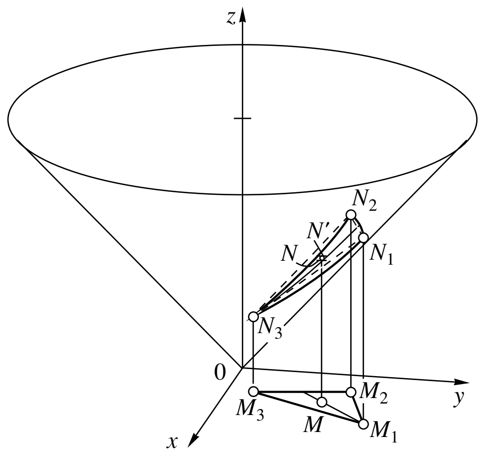


Рис. 20

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2} \geqslant \geqslant 3\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2}, \quad (***)$$

справедливое при любых x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; равенство здесь будет иметь место только в том случае, когда $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$, т. е. когда точки N_1, N_2 и N_3 лежат на одной образующей конуса. Алгебраическое доказательство неравенств $(*)$, $(**)$ и $(***)$ представляет очень большие трудности.

189. Так как $\sin\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right)$, то

$$\cos\sin x - \sin\cos x = \cos\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right) = = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}.$$

Но

$$|\cos x+\sin x| = \sqrt{\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x} = = \sqrt{1+\sin 2x} \leqslant \sqrt{2}$$

$(|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}$, только если $\sin 2x = 1)$ и точно так же

$$|\cos x - \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \\ = \sqrt{1 - \sin 2x} \leqslant \sqrt{2}$$

$(|\cos x - \sin x| = \sqrt{2}$, только если $\sin 2x = -1)$. А так как $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} = 1,57$ больше, чем $\sqrt{2} \approx 1,41$, то отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} > 0, \quad \frac{\pi}{2} > \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2} > 0,$$

значит, как $\cos\frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2}$, так и $\cos\frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2}$ всегда положительны. Таким образом, разность $\cos\sin x -$ $- \sin\cos x$ всегда положительна, т. е. $\cos\sin x$ при любом x больше, чем $\sin\cos x$.

190. а) Обозначим $\log_2 \pi = a$, $\log_5 \pi = b$. Из равенства $2^a = \pi$, $5^b = \pi$ получаем

$$\pi^{\frac{1}{a}} = 2, \quad \pi^{\frac{1}{b}} = 5, \quad \pi^{\frac{1}{a}} \cdot \pi^{\frac{1}{b}} = 2 \cdot 5 = 10, \quad \pi^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 10.$$

Но $\pi^2 \approx 3{,}14^2 < 10$, откуда следует справедливость неравенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$, что и требовалось доказать.

б) Обозначим $\log_2 \pi = a$, $\log_\pi 2 = b$. В таком случае имеем $2^a = \pi$, $\pi^b = 2$; из второго равенства вытекает $2^{\frac{1}{b}} = \pi$, или $b = \frac{1}{a}$. Теперь наше неравенство принимает вид

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}} > 2, \quad \frac{a^2 + 1}{a} > 2, \quad a^2 + 1 > 2a,$$

или

$$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 > 0.$$

Последнее неравенство является очевидным.

191. П е р в о е р е ш е н и е. Требуется доказать, что если $\beta > \alpha$, то, а) $\sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha$; но, очевидно,

$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < 2\,\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1 = \beta - \alpha$$

(ибо для каждого отличного от нуля угла x первой четверти $\sin x < x$, $\cos x < 1$*));

б) $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha$; но, очевидно,

$$\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$$

(ибо для каждого отличного от нуля угла x первой четверти $\operatorname{tg} x > x$).

Второе решение. Рассмотрим здесь только задачу а), так как решение задачи б) совершенно аналогично.

Проведем единичную окружность с центром в точке O, и пусть дуга AE равна α и дуга AF равна β. Если EM и FP — перпендикуляры, опущенные из точек E и F на радиус OA (рис. 21), то

$$S_{\triangle OEA} = \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\triangle OFA} = \frac{1}{2}\sin\beta,$$

$$S_{\text{сект}OEA} = \frac{1}{2}\,\alpha,$$

$$S_{\text{сект}OFA} = \frac{1}{2}\,\beta,$$

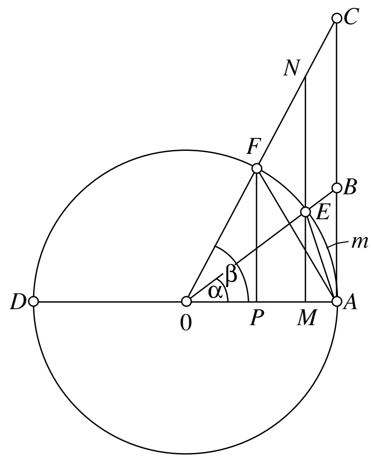


Рис. 21

где буква S, как обычно, означает площадь. Отсюда следует, что

$$\alpha - \sin\alpha = 2S_{\text{сегм}AmE}, \quad \beta - \sin\beta = 2S_{\text{сегм}AEF},$$

и, следовательно,

$$\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta.$$

*) См., например, ниже с. 319.

192. Пусть AE и AF — дуги единичной окружности с центром в точке O, равные соответственно α и β, B и C — точки пересечения перпендикуляра, восстановленного в точке A к диаметру OA, с прямыми OE и OF, M и N — точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки E на диаметр OA с прямыми OA и OF (см. рис. 21). Тогда имеем

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta,$$
$$S_{\text{сект}OAE} = \frac{1}{2}\alpha, \quad S_{\text{сект}OAF} = \frac{1}{2}\beta,$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} = \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\text{сект}OAF}}.$$

Но, как нетрудно видеть,

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}} < \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\text{сект}OEF}}.$$

Действительно,

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}} < \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OEM}}, \qquad \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\text{сект}OEF}} > \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\text{сект}OEN}},$$
$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OEM}} = \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OEN}}.$$

Из того, что $\dfrac{S_{\triangle OBC}}{S_{\text{сект}OEF}} > \dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}}$, следует, что

$$\frac{S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC}}{S_{\text{сект}OAE} + S_{\text{сект}OEF}} > \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}},$$

т. е. что

$$\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\text{сект}OAF}} > \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\text{сект}OAE}},$$

что и требовалось доказать.

193. Пусть $\arcsin\cos\arcsin x = \alpha$. Угол α заключен в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, ибо $0 \leqslant \cos\arcsin x \leqslant 1$ $\left(\text{так как } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. Далее, $\sin\alpha = \cos\arcsin x$; следовательно,

$$\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ и } x = \sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha.$$

Точно так же, если $\arccos \sin \arccos x = \beta$, то $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (ибо $0 \leqslant \sin \arccos x \leqslant 1$, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$) и $\cos \beta = \sin \arccos x$; следовательно,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta \text{ и } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm \sin \beta.$$

Из того, что $\cos \alpha = \sin \beta$ $(= \pm x)$, заключаем:

$$\alpha + \beta = \arcsin \cos \arcsin x + \arccos \sin \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

194. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31} \cos 31x + a_{30} \cos 30x + a_{29} \cos 29x + \ldots \\ \ldots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x \qquad (*)$$

при всех значениях x принимает только положительные значения. Заменим в этой сумме x на $x + \pi$; мы придем к выражению

$$\cos 32(x + \pi) + a_{31} \cos 31(x + \pi) + a_{30} \cos 30(x + \pi) + \\ + a_{29} \cos 29(x + \pi) + \ldots + a_2 \cos 2(x + \pi) + a_1 \cos (x + \pi) = \\ = \cos 32x - a_{31} \cos 31x + a_{30} \cos 30x - a_{29} \cos 29x + \ldots \\ \ldots + a_2 \cos 2x - a_1 \cos x, \qquad (**)$$

которое тоже должно принимать при всех значениях x положительные значения. А в таком случае и полусумма выражений $(*)$ и $(**)$, равная

$$\cos 32x + a_{30} \cos 30x + \ldots + a_4 \cos 4x + a_2 \cos 2x,$$

тоже будет принимать при всех x только положительные значения.

Теперь заменим в последнем выражении x на $x + \frac{\pi}{2}$, получим

$$\cos 32\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + a_{30} \cos 30\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + +a_{28} \cos 28\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots \\ \ldots + a_4 \cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + a_2 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \cos 32x - a_{30} \cos 30x + a_{28} \cos 28x - \ldots + a_4 \cos 4x - a_2 \cos 2x.$$

Составив полусумму двух последних выражений, найдем, что $\cos 32x + a_{28}\cos 28x + a_{24}\cos 24x + \ldots + a_8\cos 8x + a_4\cos 4x$ тоже должно принимать при всех x только положительные значения.

Заменяя в последнем выражении x на $x + \dfrac{\pi}{4}$ и составляя полусумму полученного выражения и первоначального, мы придем к сумме

$$\cos 32x + a_{24}\cos 24x + a_{16}\cos 16x + a_8\cos 8x;$$

заменяя в ней x на $x + \dfrac{\pi}{8}$ и складывая полученное выражение с первоначальным, мы придем к сумме

$$\cos 32x + a_{16}\cos 16x;$$

наконец, точно так же убеждаемся, что выражение

$$\cos 32x$$

тоже должно принимать при всех значениях x только положительные значения. Но при $x = \dfrac{\pi}{32}$ последнее выражение равно -1. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

195. Будем исходить из формулы для синуса половинного угла:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2 - 2\cos\alpha},$$

где знак корня берется в соответствии с известным правилом знаков для синуса. Пользуясь этой формулой, мы будем последовательно определять синусы углов

$$a_1 45^\circ,\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2}\right)\cdot 45^\circ,\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4}\right)\cdot 45^\circ,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\cdot 45^\circ.$$

Предположим, что мы уже определили синус угла

$$\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ принимают какие-то значения, равные 1 или -1. Так как

$$2\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$= \left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ\right],$$

где знак плюс соответствует $a_1 = +1$, а знак минус соответствует $a_1 = -1$, и

$$\cos\left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ\right] =$$
$$= -\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ,$$

то мы можем после этого определить синус следующего угла:

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$= \pm\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ}.$$

При этом следует иметь в виду, что так как все рассматриваемые углы по абсолютной величине меньше 90° (ибо даже $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\cdot 45^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2^n}\,90^\circ$ меньше 90°), а знак этих углов определяется знаком a_1, то корень квадратный в последних формулах следует брать со знаком плюс или минус в зависимости от знака a_1. Другими словами, можно написать

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$= a_1\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ}.$$

Теперь, прежде всего, очевидно, что

$$2\sin a_1 45^\circ = a_1\sqrt{2}.$$

Отсюда последовательно получаем:

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2}\right)\cdot 45^\circ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2}},$$

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4}\right)\cdot 45^\circ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2}}},$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\frac{a_1a_2a_3a_4}{8}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$= a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+a_4\sqrt{2}}}},$$

. . . .

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$= a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}},$$

что и требовалось доказать.

196. Предположим, что разложение заданного выражения по степеням x имеет вид

$$(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744} =$$
$$= A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n,$$

где A_0, A_1, A_2, …, A_n — не известные нам коэффициенты, сумму которых требуется определить, а n — степень этого выражения (которая, как легко видеть, равна $743\cdot 2+744\cdot 2 = 2974$). Положим в этом равенстве $x=1$; тогда получим

$$1^{743}\cdot 1^{744} = A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n.$$

Таким образом, искомая сумма равна 1.

197. Раскрыв скобки и сделав приведение подобных членов в двух рассматриваемых выражениях, мы получим два многочлена относительно x. Заменим теперь в наших выражениях x на $-x$. При этом нам придется заменить x на $-x$ также и в полученных многочленах, т. е. в каждом из них оставить прежние коэффициенты при x в четных степенях и заменить знаки коэффициентов на обратные при x в нечетных степенях. В частности, коэффициенты при x^{20} при этой операции не изменятся. Таким образом, мы видим, что наши два многочлена имеют те же коэффициенты при x^{20}, что и многочлены, получаемые при раскрытии скобок и приведении подобных членов в выражениях $(1+x^2+x^3)^{1000}$ и $(1-x^2-x^3)^{1000}$.

Но ясно, что первый из этих новых многочленов имеет больший коэффициент при x^{20}. Действительно, при раскрытии скобок в первом выражении мы получим исключительно положительные коэффициенты при различных степенях x, и при приведении подобных членов все эти коэффициенты будут складываться. Во втором выражении при раскрытии скобок мы получим при различных степенях x коэффициенты, имеющие те же абсолютные величины, что и коэффициенты первого многочлена, но знаки их могут быть плюс или минус, и при приведении подобных членов у нас произойдет уменьшение коэффициентов.

Итак, после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражениях $(1+x^2-x^3)^{1000}$ и $(1-x^2+x^3)^{1000}$ мы получим в первом из них больший коэффициент при x^{20}, чем во втором.

198. Утверждение задачи непосредственно вытекает из следующих преобразований:

$$\begin{aligned}(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100})&\times\\ \times (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100}) &=\\ = [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) - x(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98})]&\times\\ \times [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) - x(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98})] &=\\ = (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100})^2 - x^2(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98})^2&.\end{aligned}$$

199. а) Согласно формуле суммы геометрической прогрессии и формуле Ньютона имеем

$$\begin{aligned}(1 + x)^{1000} + x(1 + x)^{999} + x^2(1 + x)^{998} + \ldots + x^{1000} &=\\ = \frac{\dfrac{x^{1001}}{1+x} - (1 + x)^{1000}}{\dfrac{x}{1+x} - 1} = \frac{x^{1001} - (1 + x)^{1000}}{x - 1 - x} &=\\ = (1 + x)^{1001} - x^{1001} &=\\ = 1 + 1001x + C_{1001}^2 x^2 + C_{1001}^3 x^3 + \ldots + 1001x^{1000}&.\end{aligned}$$

Таким образом, искомый коэффициент равен

$$C_{1001}^{50} = \frac{1001!}{50! \cdot 951!}.$$

б) Обозначим наше выражение через $P(x)$. Тогда имеем

$$(1+x)P(x)-P(x)=[(1+x)^2+2(1+x)^3+\ldots$$
$$\ldots+999(1+x)^{1000}+1000(1+x)^{1001}]-[(1+x)+2(1+x)^2+$$
$$+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}]=1000(1+x)^{1001}-$$
$$-[(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{1000}]=$$
$$=1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{1+x-1}=$$
$$=1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x}.$$

Отсюда

$$P(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}=$$
$$=1000[1001+C_{1001}^2x+C_{1001}^3x^2+\ldots+1001x^{999}+x^{1000}]-$$
$$-[C_{1001}^2+C_{1001}^3x+C_{1001}^4x^2+\ldots+1001x^{998}+x^{999}].$$

Таким образом, искомый коэффициент равен

$$1000C_{1001}^{51}-C_{1001}^{52}=\frac{1000\cdot 1001!}{51!\cdot 950!}-\frac{1001!}{52!\cdot 949!}=$$
$$=\frac{1001!}{52!\cdot 950!}[52\cdot 1000-950]=\frac{51\,050\cdot 1001!}{52!\cdot 950!}.$$

200. Найдем прежде всего свободный член, который получится, если в выражении

$$\underbrace{(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\text{ раз}}$$

раскрыть скобки и привести подобные члены. Он равен значению этого выражения при $x=0$, т. е.

$$\underbrace{(\ldots(((-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\text{ раз}}=$$
$$=\underbrace{(\ldots((4-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k-1\text{ раз}}=$$

$$= \underbrace{(\ldots((4-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k-2\ \text{раза}} = \ldots$$

$$\ldots = ((4-2)^2-2)^2 = (4-2)^2 = 4.$$

Обозначим теперь через A_k — коэффициент при x, через B_k — коэффициент при x^2 и через $P_k x^3$ — сумму членов, которые содержат x в более высоких степенях. Тогда имеем

$$\underbrace{(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\ \text{раз}} = P_k x^3 + B_k x^2 + A_k x + 4.$$

С другой стороны,

$$\underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{[(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2-2]^2}_{k-1\ \text{раз}} =$$

$$= [(P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 4) - 2]^2 =$$

$$= (P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 2)^2 =$$

$$= (P_{k-1}^2 x^6 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^5 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x^4 +$$

$$+ (4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})x^3 + (4B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + 4A_{k-1}x + 4 =$$

$$= [P_{k-1}^2 x^3 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^2 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x +$$

$$+ (4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})]x^3) + (4B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + 4A_{k-1}x + 4.$$

Отсюда

$$A_k = 4A_{k-1}, \quad B_k = 4A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}.$$

Так как $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, то $A_1 = -4$. Следовательно, $A_2 = -4 \cdot 4 = -4^2$, $A_3 = -4^3$, …, и вообще $A_k = -4^k$.

Вычислим теперь B_k:

$$B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1} = A_{k-1}^2 + 4(A_{k-2}^2 + 4B_{k-2}) =$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2(A_{k-3}^2 + 4B_{k-3}) =$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + 4^3(A_{k-4}^2 + 4B_{k-4}) = \ldots$$

$$\ldots = A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \ldots + 4^{k-3}(A_2^2 + 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1.$$

Подставляя сюда

$$B_1 = 1, \quad A_1 = -4, \quad A_2 = -4^2,$$
$$A_3 = -4^3, \quad \ldots, \quad A_{k-1} = -4^{k-1},$$

получим

$$\begin{aligned} B_k = 4^{2^{k-2}} + 4 \cdot 4^{2^{k-4}} + 4^2 \cdot 4^{2^{k-6}} + \ldots + 4^{k-2} \cdot 4^2 + 4^{k-1} \cdot 1 = \\ = 4^{2^{k-2}} + 4^{2^{k-3}} + 4^{2^{k-4}} + \ldots + 4^{k+1} + 4^k + 4^{k-1} = \\ = 4^{k-1}(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{k-2} + 4^{k-1} = \\ = 4^{k-1}\frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{4^{2^{k-1}} - 4^{k-1}}{3}. \end{aligned}$$

201. а) Первое решение. Так как при любом целом положительном k двучлен $x^k - 1$ делится на $x - 1$, то

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = (x - 1) + (x^3 - 1) + \\ + (x^9 - 1) + (x^{27} - 1) + (x^{81} - 1) + (x^{243} - 1) + 6$$

дает при делении на $x - 1$ остаток 6.

Второе решение. Обозначим частное от деления $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на $x - 1$ через $q(x)$ и остаток через r. Тогда

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x - 1) + r.$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$, получим $6 = r$.

б) Аналогично второму решению предыдущей задачи предположим, что $q(x)$ есть частное от деления нашего многочлена на $x^2 - 1$, а $r_1 x + r_2$ есть искомый остаток (остаток от деления многочлена на квадратный трехчлен является двучленом первой степени):

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x^2 - 1) + r_1 x + r_2.$$

Полагая в последнем равенстве $x = 1$ и $x = -1$, мы получаем

$$6 = r_1 + r_2, \ -6 = -r_1 + r_2, \ \text{откуда } r_1 = 6, \ r_2 = 0.$$

Таким образом, искомый остаток равен $6x$.

202. Пусть $p(x)$ есть наш неизвестный многочлен, $q(x)$ — частное от деления этого многочлена на $(x - 1)(x - 2)$, $r(x) = ax + b$ — искомый остаток:

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)q(x) + ax + b. \qquad (*)$$

По условию задачи имеем

$$p(x) = (x-1)q_1(x) + 2, \text{ откуда } p(1) = 2;$$
$$p(x) = (x-2)q_2(x) + 1, \text{ откуда } p(2) = 1.$$

Подставляя теперь в равенство $(*)$ $x = 1$ и $x = 2$, получаем

$$2 = p(1) = a + b,$$
$$1 = p(2) = 2a + b,$$

откуда

$$a = -1, \quad b = 3.$$

Таким образом, искомый остаток есть $-x + 3$.

203. Многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ можно разложить на множители; он равен $(x^2+1)(x^2+x+1)$. Отсюда легко усмотреть, что этот многочлен является делителем многочлена

$$x^{12} - 1 = (x^6-1)(x^6+1) = \\ = (x^3-1)(x^3+1)(x^2-1)(x^4-x^2+1),$$

а именно

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = \frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)} = \\ = \frac{x^{12}-1}{x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1}.$$

Разделить $x^{1951} - 1$ на $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ — это то же самое, что разделить $x^{1951} - 1$ на $x^{12} - 1$, а затем результат помножить на $x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 - 1$. Но легко видеть, что

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1} = \\ = x^{1939} + x^{1927} + x^{1915} + x^{1903} + \ldots + x^{19} + x^7 + \frac{x^7-1}{x^{12}-1}$$

(в этом легко убедиться, если произвести деление «углом» по правилам деления расположенных многочленов или если заметить, что $x^{1951} - 1 = x^7[(x^{12})^{162} - 1] + x^7 - 1$ и воспользоваться известной формулой деления разности четных степеней двух одночленов на разность оснований). Отсюда следует, что искомый коэффициент совпадает с коэффициентом при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939}+x^{1927}+\ldots+x^{31}+x^{19}+x^{7}+\frac{x^{7}-1}{x^{12}-1}\right)\times$$
$$\times\,(x^{8}-x^{7}-x^{6}+2x^{5}-2x^{3}+x^{2}+x-1),$$

который равен -1.

204. а) Обозначим $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ через x. В таком случае имеем

$$x^2=2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6},$$

откуда

$$x^2-5=2\sqrt{6},$$
$$x^4-10x^2+25=24,$$
$$x^4-10x^2+1=0.$$

Это и есть искомое уравнение.

б) Обозначим $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ через x. В таком случае имеем

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3},$$
$$x^2=2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9},$$
$$x^3=2\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{3}+3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{9}+3.$$

Из этих трех неравенств нетрудно исключить две из трех входящих в них иррациональных величин $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{9}$ и получить соотношение, связывающее какой-либо один из этих радикалов с x, x^2 и x^3. Так, из первого и второго равенств имеем

$$\sqrt[3]{3}=x-\sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{9}=x^2-2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=x^2-2-2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})=$$
$$=x^2+2-2\sqrt{2}x.$$

Подставляя эти значения в третье равенство, получаем

$$x^3=2\sqrt{2}+6(x-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(x^2+2-2\sqrt{2}x)+3,$$

откуда

$$x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2).$$

Теперь осталось только возвести последнее равенство в квадрат, перенести все члены в одну сторону и привести подобные члены:

$$x^6 + 36x^2 + 9 + 12x^4 - 6x^3 - 36x = 18x^4 + 24x^2 + 8,$$
$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Это и есть уравнение, которое нам требовалось получить.

205. Имеем

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = 1; \quad \gamma + \delta = -q, \quad \gamma\delta = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = \\
&\qquad = [(\alpha - \gamma)(\beta + \delta)][(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)] = \\
&\qquad = (\alpha\beta + \alpha\delta - \beta\gamma - \gamma\delta)(\alpha\beta + \beta\delta - \alpha\gamma - \gamma\delta) = \\
&\qquad = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma) = \alpha\beta\delta^2 - \alpha^2\gamma\delta - \beta^2\gamma\delta + \alpha\beta\gamma^2 = \\
&\qquad = \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = [(\delta + \gamma)^2 - 2\delta\gamma] - [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] = \\
&\qquad = (q^2 - 2) - (p^2 - 2) = q^2 - p^2.
\end{aligned}$$

206. Если α и β — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = \\
&\quad = [(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)][(\delta - \alpha)(\delta - \beta)] = (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q).
\end{aligned}$$

Но

$$\gamma + \delta = -P, \quad \gamma\delta = Q,$$

и, значит,

$$\begin{aligned}
&(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q) = \\
&\quad = \gamma^2\delta^2 + p\gamma^2\delta + q\gamma^2 + p\gamma\delta^2 + p^2\gamma\delta + pq\gamma + q\delta^2 + pq\delta + q^2 = \\
&\quad = (\gamma\delta)^2 + p\gamma\delta(\gamma + \delta) + q[(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta] + p^2\gamma\delta + pq(\gamma + \delta) + q^2 = \\
&\quad = Q^2 - pPQ + q(P^2 - 2Q) + p^2Q - pqP + q^2 = \\
&\quad = Q^2 + q^2 - pP(Q + q) + qP^2 + p^2Q - 2qQ.
\end{aligned}$$

207. Первое решение. Вычислим из второго уравнения коэффициент a и подставим его в первое уравнение. Тогда получим

$$a = -(x^2 + x),$$
$$x^2 - (x^2 + x)x + 1 = 0,$$
$$x^3 - 1 = 0,$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Отсюда имеем

$$x_1 = 1, \qquad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно, так как $a = -(x^2 + x)$, то $a_1 = -2$, $a_{2,3} = 1$.

Второе решение. Используя результат задачи 206, мы можем утверждать, что, для того чтобы наши уравнения имели хотя бы один общий корень, необходимо и достаточно, чтобы обращалось в нуль выражение

$$a^2 + 1 - a \cdot 1(a + 1) + 1 + a^3 - 2a = a^3 - 3a + 2 =$$
$$= (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2).$$

Отсюда получаем

$$a_1 = -2, \quad a_{2,3} = 1.$$

208. Пусть $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$. Полагая в обеих частях равенства $x = -b$, получим

$$(-b - a)(-b - 10) + 1 = (-b + b)(-b + c) = 0.$$

Отсюда

$$(b + a)(b + 10) + 1 = -1.$$

Так как a и b целые, то $b + a$ и $b + 10$ также целые. Но -1 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел только одним способом $-1 = (+1)(-1)$. Поэтому имеются только две возможности:

1) $b + 10 = 1$, $b = -9$; тогда $b + a = -9 + a = -1$, т. е. $a = 8$:

$$(x - 8)(x - 10) + 1 = (x - 9)^2.$$

2) $b+10=-1$, $b=-11$; тогда $b+a=-11+a=1$, т. е. $a=12$:

$$(x-12)(x-10)+1=(x-11)^2.$$

209. Так как многочлен четвертой степени можно разложить или в произведение многочлена первой степени и многочлена третьей степени или в произведение двух многочленов второй степени, то нам следует рассмотреть отдельно два случая:

$$\text{А)}\quad x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x+p)(x^3+qx^2+rx+s) \quad (*)$$

(коэффициенты в правой части равенства при x в первом множителе и при x^3 во втором множителе оба равны 1 или оба равны -1, так как в произведении этих множителей коэффициент при x^4 должен быть равен коэффициенту при x^4 в выражении $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$, т. е. 1; равенство же $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(-x+p_1)(-x^3+q_1x^2+r_1x+s_1)$ можно привести к виду $(*)$, умножив оба сомножителя правой части на -1).

Положив в равенстве $(*)$ последовательно $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ и учитывая, что 1 разлагается на множители только двумя способами $1=1\cdot 1=(-1)\cdot(-1)$, мы получим, что четыре различных числа $0+p=p$, $a+p$, $b+p$ и $c+p$ (напоминаем, что числа 0, a, b, c все различны) могут иметь только два значения $+1$ и -1, что невозможно.

Б) $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$.

Отсюда, как и выше, получаем, что при $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ оба многочлена, как x^2+px+q, так и x^2+rx+s, принимают значения 1 или -1. Но квадратный трехчлен x^2+px+q не может принимать одно и то же значение при трех различных значениях x (в противном случае квадратное уравнение $x^2+px+q-a=0$ имело бы три различных корня), откуда следует, что при двух из четырех значений $x=0$, $x=a$, $x=b$, $x=c$ этот трехчлен принимает значение 1, а при двух других — значение -1. Предположим, что $0^2+p\cdot 0+q=q=1$, и пусть $x=a$ есть то из значений $x=a$, $x=b$ и $x=c$, при котором этот трехчлен принимает то же самое значение 1; в таком случае при $x=b$ и $x=c$ он принимает значение -1. Итак, мы имеем

$$a^2+pa+1=1,\quad b^2+pb+1=-1,\quad c^2+pc+1=-1.$$

Из $a^2 + pa = a(a + p) = 0$ следует, что $a + p = 0$, $p = -a$ (ибо, по предположению, $a \neq 0$). Таким образом, два последних равенства принимают вид

$$b^2 - ab = b(b - a) = -2, \quad c^2 - ac = c(c - a) = -2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$b^2 - ab - c^2 + ac = (b - c)(b + c) - a(b - c) = \\ = (b - c)(b + c - a) = 0,$$

откуда, так как $b \neq c$, имеем $b + c - a = 0$, $a = b + c$, $b - a = -c$, $c - a = -b$. Теперь из равенства

$$b(b - a) = -bc = -2$$

получаем следующие значения для b, c и a:

$$b = 1, \quad c = 2, \quad a = b + c = 3,$$

$$x(x - a)(x - b)(x - c) + 1 = x(x - 3)(x - 1)(x - 2) + 1 = \\ = (x^2 - 3x + 1)^2;$$

$$b = -1, \quad c = -2, \quad a = b + c = -3,$$

$$x(x - a)(x - b)(x - c) + 1 = x(x + 3)(x + 1)(x + 2) + 1 = \\ = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Аналогично, если $x^2 + px + q$ принимает при $x = 0$ и $x = a$ значение -1, при $x = b$ и $x = c$ значение $+1$, то мы имеем

$$q = -1, \quad a^2 + pa - 1 = -1, \quad b^2 + pb - 1 = 1, \\ c^2 + pc - 1 = 1,$$

откуда

$$p = -a,\ b(b - a) = c(c - a) = 2,\ b^2 - ab - c^2 + ac = 0, \\ (b - c)(b + c - a) = 0,\ a = b + c,\ b - a = -c,\ -bc = 2.$$

Мы получаем, таким образом, еще две возможные системы значений для a, b и c:

$$b = 2, \quad c = -1, \quad a = b + c = 1,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c) = x(x-1)(x-2)(x+1)+1 = \\ = (x^2-x-1)^2;$$

$$b=1, \quad c=-2, \quad a=b+c=-1,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c) = x(x+1)(x-1)(x+2)+1 = \\ = (x^2+x-1)^2.$$

Другое решение этой задачи приведено в заключительной части решения задачи 210, б).

210. а) Предположим, что

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)-1 = p(x)q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, сумма степеней которых равна n; можно считать, что в обоих этих многочленах старший коэффициент равен 1 (сравните с решением предыдущей задачи). Подставляя в это равенство значения $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, …, $x=a_n$ и учитывая, что -1 разлагается на два целых множителя единственным образом: $-1 = 1\cdot(-1)$, мы получим, что при каждом из рассматриваемых значений x $p(x)=1$, $q(x)=-1$, или наоборот. Таким образом, мы видим, что сумма $p(x)+q(x)$ равна нулю при $x = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Итак, уравнение $p(x)+q(x)=0$ имеет своими корнями $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, …, $x_n=a_n$; отсюда следует, что многочлен $p(x)+q(x)$ делится на $x-a_1$, $x-a_2$, …, $x-a_n$, а следовательно, и на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Но степень уравнения $p(x)+q(x)=0$, равная наибольшей степени многочленов $p(x)$, $q(x)$, меньше n (n есть степень выражения $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$). Отсюда следует, что $p(x)+q(x)$ не может делиться на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, а следовательно, разложение, существование которого мы предположили, невозможно.

б) Предположим, что

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+1 = p(x)\,q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, старшие коэффициенты которых равны 1. Подставив в это равенство значения $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, …, $x=a_n$, мы получим, что при каждом из рассматриваемых значений x

$$p(x)=1,\ q(x)=1 \quad \text{или} \quad p(x)=-1,\ q(x)=-1.$$

Таким образом, $p(x)-q(x)$ обращается в нуль при n различных значениях x, и, следовательно, во-первых, $p(x)-q(x)\equiv 0$, $p(x)\equiv q(x)$ (сравните с решением задачи а)) и, во-вторых, число n четно: $n=2k$, где k есть степень каждого из многочленов $p(x)=q(x)$. Перепишем теперь равенство в виде

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{2k})=[p(x)]^2-1,$$

или

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{2k})=[p(x)+1][p(x)-1].$$

Итак, произведение двух многочленов $p(x)+1$ и $p(x)-1$ обращается в нуль при $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, …, $x=a_{2k}$. Следовательно, при каждом из этих значений x обращается в нуль хотя бы один из сомножителей, а это значит, что или $p(x)+1$ или $p(x)-1$ делится на $x-a_1$, или $p(x)+1$ или $p(x)-1$ делится на $x-a_2$ и т. д. Так как многочлен степени k не может делиться на произведение больше чем k различных выражений вида $x-a_i$ и так как из того, что многочлен степени k со старшим коэффициентом 1 делится на произведение k выражений вида $x-a_i$, следует, что он равен этому произведению, то мы можем утверждать, что $p(x)+1$ равно произведению k из $2k$ сомножителей левой части последнего равенства, а $p(x)-1$ равно произведению остальных k сомножителей.

Предположим, например, что

$$p(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2k-1}),$$
$$p(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2k}).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$2=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2k-1})-(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2k}).$$

Подставив сюда, например, $x=a_2$, мы получим разложение числа 2 в произведение k целых множителей:

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_{2k-1}).$$

Так как число 2 нельзя разложить в произведение больше чем трех различных множителей, то отсюда сразу следует, что $k\leqslant 3$. Но случай $k=3$ тоже является невозможным по следующей причине. Число 2 может быть разложено в произведение трех различных сомножителей только одним способом:

$2 = 1\cdot(-1)\cdot(-2)$. Предположим, что $k = 3$, $a_1 < a_3 < a_5$. Тогда $2 = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_5)$, где $a_2 - a_1 > a_2 - a_3 > a_2 - a_5$, и, следовательно, $a_2 - a_1 = 1$, $a_2 - a_3 = -1$, $a_2 - a_5 = -2$. Подставив в формулу

$$2 = (x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) - (x - a_2)(x - a_4)(x - a_6)$$

$x = a_4$, мы придем к другому разложению 2 на три различных множителя: $2 = (a_4 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5)$, где тоже $a_4 - a_1 > a_4 - a_3 > a_4 - a_5$. Отсюда следует, что $a_4 - a_1 = 1$, $a_4 - a_3 = -1$, $a_4 - a_5 = -2$ и, значит, $a_4 = a_2$, что противоречит условию задачи.

Итак, возможными являются только два случая: $k = 2$ и $k = 1$.

1°. Если $k = 1$, то мы имеем

$$2 = (x - a_1) - (x - a_2),$$

откуда $a_2 = a_1 + 2$, и, обозначая a_1 просто через a, получим

$$(x - a_1)(x - a_2) + 1 = (x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2$$

(ср. с решением задачи 208).

2°. Если $k = 2$, то имеем

$$2 = (x - a_1)(x - a_3) - (x - a_2)(x - a_4),$$

где будем считать $a_1 < a_3$, $a_2 < a_4$. Подставляя в последнее равенство $x = a_2$ и $x = a_4$, получим

$$2 = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3), \quad a_2 - a_1 > a_2 - a_3,$$
$$2 = (a_4 - a_1)(a_4 - a_3), \quad a_4 - a_1 > a_4 - a_3.$$

Но 2 можно разложить на два множителя, следующих в убывающем порядке, только двумя способами: $2 = 2 \cdot 1$ и $2 = (-1) \cdot (-2)$. Так как, кроме того, $a_2 - a_1 < a_4 - a_1$, то мы имеем

$$(a_2 - a_1) = -1, \quad a_2 - a_3 = -2,$$
$$(a_4 - a_1) = 2, \quad a_4 - a_3 = 1,$$

откуда, обозначая a_1 через a, получим

$$a_2 = a - 1, \quad a_3 = a + 1, \quad a_4 = a + 2,$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1 = \\ = (x-a)(x-a+1)(x-a-1)(x-a-2)+1 = \\ = [x^2-(2a-1)x+a^2+a-1]^2$$

(ср. с решением задачи 209).

211. Аналогично решению предыдущей задачи из предполагаемого равенства

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2\dots(x-a_n)^2+1 = p(x)q(x), \qquad (*)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — какие-то многочлены с целыми коэффициентами (и с коэффициентами при старших членах, равными 1), следует, что либо $p(x)=1$, $q(x)=1$, либо $p(x)=-1$, $q(x)=-1$ при каждом из значений $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, ..., $x=a_n$. Покажем, что многочлен $p(x)$ (и, разумеется, так же и $q(x)$) может быть либо при всех значениях $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ равен 1, либо при всех этих значениях x равен -1.

В самом деле, если бы, например, многочлен $p(x)$ при $x=a_i$ принимал значение 1, а при $x=a_j$ — значение -1, то при некотором промежуточном значении x, заключенном между a_i и a_j, он обращался бы в нуль (если график функции $y = p(x)$ при $x=a_i$ находится сверху от оси Ox, а при $x=a_j$ оказывается снизу от этой оси, то непрерывная кривая $y = p(x)$ где-то между $x=a_i$ и $x-a_j$ пересекает ось Ox), что невозможно, ибо левая часть равенства $(*)$ всегда $\geqslant 1$ и потому в нуль обратиться не может.

Предположим, что как $p(x)$, так и $q(x)$ при $x=a_1$, $x = a_2$, ..., $x=a_n$ принимают значения 1. В таком случае как $p(x)-1$, так и $q(x)-1$ обращаются в нуль при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ и, следовательно, $p(x)-1$ и $q(x)-1$ делятся на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Так как сумма степеней многочленов $p(x)$ и $q(x)$ равна степени

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1,$$

т. е. $2n$, то

$$p(x)-1=(x-a_1)\dots(x-a_n), \quad q(x)-1=(x-a_1)\dots(x-a_n)$$

(ср. с решением предыдущей задачи).

Таким образом, мы приходим к равенству

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x)=$$
$$=[(x-a_1)\dots(x-a_n)+1][(x-a_1)\dots(x-a_n)+1]=$$
$$=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+$$
$$+2(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)+1,$$

откуда

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\equiv 0,$$

что неверно. Точно так же доказывается, что $p(x)$ и $q(x)$ не могут принимать в точках $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ значения -1 (в этом случае мы получили бы $p(x)=q(x)=(x-a_1)\times\times(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$).

Итак, мы видим, что предположенное в начале решения задачи разложение выражения

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$$

в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами на самом деле невозможно.

212. Пусть многочлен $P(x)$ равен 7 при $x=a$, $x=b$, $x=c$ и $x=d$. В таком случае уравнение $P(x)-7=0$ имеет четыре целых корня a, b, c и d. Это значит, что многочлен $P(x)-7$ делится на $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ [*)], т. е.

$$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x),$$

где $p(x)$ может равняться 1.

Предположим теперь, что многочлен $P(x)$ принимает при целом значении $x=A$ значение 14. Подставив $x=A$ в последнее равенство, мы получим:

$$7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A),$$

[*)] Пусть $P(x)-7$ дает при делении на $x-a$ остаток r:

$$P(x)-7=(x-a)Q(x)+r.$$

Подставляя в это равенство $x=a$, получаем $7-7=0+r$, т. е. $r=0$, и, значит, $P(x)-7=(x-a)Q(x)$ делится на $x-a$.

что невозможно, так как целые числа $A-a$, $A-b$, $A-c$ и $A-d$ все различны, а 7 нельзя разложить в произведение пяти множителей, из которых по крайней мере четыре отличны друг от друга.

213. Если многочлен седьмой степени $P(x)$ разлагается в произведение двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, то степень хотя бы одного из сомножителей не больше 3; будем считать, что этим сомножителем является $p(x)$. Если $P(x)$ при семи целых значениях x принимает значение ± 1, то $p(x)$ при тех же значениях x тоже принимает значение ± 1 (так как $p(x)q(x) = P(x)$). Среди семи целых значений x, при которых $p(x)$ принимает значения ± 1, найдутся четыре таких, при которых $p(x)$ принимает значение 1, или четыре таких, при которых $p(x)$ принимает значение -1. В первом случае уравнение третьей степени $p(x)-1=0$ имеет четыре корня, во втором случае уравнение $p(x)+1=0$ имеет четыре корня. Ни то, ни другое не может иметь места, так как, например, в первом случае $p(x)-1$ должно было бы делиться на многочлен четвертой степени (сравните с решением задачи 210, а)).

214. Пусть p и q — два целых числа, одновременно четных или нечетных. Тогда разность $P(p)-P(q)$ четна. Действительно, выражение

$$P(p)-P(q) = a_0(p^n - q^n) + \\ + a_1(p^{n-1} - q^{n-1} + \ldots + a_{n-2}(p^2 - q^2) + a_{n-1}(p-q)$$

делится на четное число $p-q$.

В частности, при p четном разность $P(p)-P(0)$ четна. Но по условию $P(0)$ нечетно; следовательно, $P(p)$ также нечетно, а потому $P(p) \neq 0$. Аналогично при p нечетном разность $P(p)-P(1)$ четна; так как по условию $P(1)$ нечетно, то отсюда, как и выше, следует, что $P(p) \neq 0$.

Следовательно, $P(x)$ не может обращаться в нуль ни при каком целом значении x (как четном, так и нечетном), т. е. многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

215. Предположим, что уравнение $P(x) = 0$ имеет рациональный корень $x = \dfrac{k}{l}$, т. е. $P\left(\dfrac{k}{l}\right) = 0$. Разложим многочлен

$P(x)$ по степеням $x-p$, т. е. запишем его в виде

$$P(x)=c_0(x-p)^n+c_1(x-p)^{n-1}+ \\ +c_2(x-p)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}(x-p)+c_n,$$

где c_0, c_1, c_2, …, c_n — некоторые целые числа, которые нетрудно найти, если известны a_0, a_1, …, a_n (c_0 равно старшему коэффициенту a_0 многочлена $P(x)$, c_1 — старшему коэффициенту многочлена $P(x)-c_0(x-p)^n$ степени $n-1$, c_2 — старшему коэффициенту многочлена $P(x)-c_0(x-p)^n-c_1(x-p)^{n-1}$ степени $n-2$ и т. д.). Подставив $x=p$ в последнее выражение для $P(x)$, мы получим $c_n=P(p)=\pm 1$.

Подставив в это выражение $x=\dfrac{k}{l}$ и умножив результат на l^n, мы получим

$$l^nP\left(\frac{k}{l}\right)=c_0(k-pl)^n+c_1l(k-pl)^{n-1}+ \\ +c_2l^2(k-pl)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}l^{n-1}(k-pl)+c_nl^n=0,$$

откуда следует, что если $P\left(\dfrac{k}{l}\right)=0$, то

$$\frac{c_nl^n}{k-pl}=\frac{\pm l^n}{k-pl}=-c_0(k-pl)^{n-1}-c_1l(k-pl)^{n-2}-\ldots \\ \ldots-c_{n-2}l^{n-2}(k-pl)-c_{n-1}l^{n-1}$$

есть целое число. Но так как pl делится на l, а k взаимно просто с l $\left(\text{иначе дробь } \dfrac{k}{l} \text{ можно было бы сократить}\right)$, то $k-pl$ взаимно просто с l, а следовательно, $k-pl$ взаимно просто и с l^n. Отсюда следует, что $\dfrac{\pm l^n}{k-pl}$ может быть целым числом только, если $k-pl=\pm 1$.

Точно так же докажем, что и $k-ql=\pm 1$.

Вычтя теперь равенство $k-pl=\pm 1$ из равенства $k-ql=\pm 1$, мы получим

$$(p-q)l=0 \quad \text{или} \quad (p-q)l=\pm 2.$$

Но $(p-q)l > 0$, так как $p > q$ и $l > 0$, а следовательно, $(p-q)l = 2$, $k - pl = -1$, $k - ql = 1$.

Итак, если $p - q > 2$, то уравнение $P(x) = 0$ вовсе не может иметь рациональных корней. Если же $p - q = 2$ или $p - q = 1$, то рациональный корень $\frac{k}{l}$ может существовать. При этом, складывая равенства

$$k - pl = -1, \quad k - ql = 1,$$

мы получаем

$$2k - (p+q)l = 0, \quad \frac{k}{l} = \frac{p+q}{2},$$

что и требовалось доказать.

216. а) Предположим, что наш многочлен можно разложить на множители с целыми коэффициентами:

$$x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + \ldots + 2220x^2 + 2222 =$$
$$= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0) \times$$
$$\times (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_0),$$

где $m + n = 2222$. В таком случае $a_0 b_0 = 2222$ и, следовательно, из двух целых чисел a_0, b_0 одно является четным, а другое нечетным. Предположим, что a_0 есть четное число, а b_0 — нечетное. Мы утверждаем, что в таком случае все коэффициенты многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ должны быть четными. Действительно, предположим, что a_k есть первый с конца нечетный коэффициент этого многочлена. Коэффициент при x^k в произведении

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0)$$

будет равен

$$a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \ldots + a_0 b_k \qquad (*)$$

(в случае, если $k > m$, эта сумма окончится членом $a_{k-m}b_m$). Этот коэффициент равен соответствующему коэффициенту при x^k в исходном многочлене, т. е. равен нулю, если k нечетно, и представляет собой четное число, если k четно (ибо все коэффициенты многочлена, заданного в условии задачи, кроме первого, четны, а $k \leqslant n < 2222$). Но так как, по предположению, все числа a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}, …, a_0 четны, то в сумме

$(*)$ все члены, кроме первого, четны и, следовательно, четным должно быть и произведение $a_k b_0$, что невозможно, так как a_k и b_0 нечетны.

Таким образом, мы видим, что все коэффициенты многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ должны быть четны, что противоречит тому, что $a_n b_m$ должно равняться единице. Следовательно, неверно и наше предположение о возможности разложения данного многочлена в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

б) Положим $x = y = 1$. В таком случае мы получим

$$x^{250} + x^{249} + x^{248} + \ldots + x + 1 =$$
$$= (y+1)^{250} + (y+1)^{249} + \ldots + (y+1) + 1 =$$
$$= \frac{(y+1)^{251} - 1}{(y+1) - 1} = \frac{1}{y}[(y+1)^{251} - 1] =$$
$$= y^{250} + 251y^{249} + C_{251}^2 y^{248} + C_{251}^3 y^{247} + \ldots + C_{251}^2 y + 251.$$

Дальше, используя то, что все, кроме первого, коэффициенты полученного многочлена делятся на простое число 251 $\left(\text{ибо } C_{251}^k = \dfrac{251 \cdot 250 \cdot 249 \ldots (251-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}\right)$ и что свободный член многочлена, равный 251, не делится на 251^2, мы можем почти дословно повторить рассуждения решения задачи а), заменив лишь четность и нечетность коэффициентов делимостью на 251. Таким образом, мы докажем, что если бы наш многочлен разлагался в произведение двух множителей, то все коэффициенты одного из сомножителей должны были бы делиться на 251, что невозможно, ибо первый коэффициент нашего многочлена равен 1.

217. Запишем многочлены в виде

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$
$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m.$$

Так как по условию в произведении не все коэффициенты делятся на 4, то у обоих многочленов все коэффициенты не могут быть четными. Следовательно, у одного из них, например у многочлена B, не все коэффициенты четные. Допустим, что в многочлене A тоже есть нечетные коэффициенты. Рассмотрим первый из них (имеющий наименьший номер); пусть это будет коэффициент многочлена a_s. Пусть, далее, первый нечетный коэффициент многочлена B будет b_k. Рассмотрим коэффициент при x^{k+s} в произведении многочленов A и B. Степень x^{k+s} в произведении могла получиться только из таких степеней x, сумма показателей которых равна $k+s$; следовательно, этот коэффициент равен

$$a_0 b_{k+s} + a_1 b_{k+s-1} + \ldots + a_{s-1} b_{k+1} + a_s b_k + \\ + a_{s+1} b_{k-1} + \ldots + a_{s+k} b_0.$$

В этой сумме все произведения, стоящие до члена $a_s b_k$, четны, так как четны все числа a_0, a_1, ..., a_{s-1}. Также четны все произведения, стоящие после $a_s b_k$, так как b_{k-1}, b_{k-2}, ..., b_0 — четные числа. Произведение же $a_s b_k$ — число нечетное, так как и a_s и b_k — числа нечетные. Следовательно, и наша сумма нечетна, что противоречит тому, что в произведении все коэффициенты четны. Таким образом, предположение, что у многочлена A есть нечетные коэффициенты, неверно, и, следовательно, все коэффициенты A — четные числа. А это и требовалось доказать.

218. Докажем, что при любом рациональном, но не целом значении x многочлен $P(x)$ не может быть целым числом, а значит, не равен нулю, ибо нуль — целое число.

Пусть $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты. Тогда

$$P(x) = x^n + a_1 + x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \\ = \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = \\ = \frac{p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n}{q^n} = \\ = \frac{p^n + q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1})}{q^n}.$$

Число p^n, как и p, взаимно просто с q; следовательно, $p^n + q(a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1})$ также взаимно просто с q, а значит, и с q^n. Поэтому у нас получилась несократимая дробь, которая не может быть равна целому числу.

219. Пусть N — некоторое целое число и $P(N) = M$. При любом целом k

$$P(N+kM) - P(N) = a_0[(N+kM)^n - N^n] + \\ + a_1[(N+kM)^{n-1} - N^{n-1}] + \ldots + a_{n-1}[(N+kM) - N]$$

делится на kM (ибо $(N+kM)^l - N^l$ делится на $(N+kM) - N = kM$), а значит, и на M; поэтому при любом целом k $P(N+kM)$ делится на M.

Таким образом, если доказать, что среди значений $P(N + kM)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ встречаются числа, отличные от $\pm M$, то тем самым будет доказано, что не все они являются простыми. Но многочлен $P(x)$ n-й степени принимает любое значение A, самое большее для n различных значений x (ибо иначе уравнение n-й степени $P(x) - A = 0$ имело бы больше n корней). Таким образом, среди первых $2n+1$ значений $P(N+kM)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ имеется по крайней мере одно, отличное от $+M$ и $-M$.

220. Заметим прежде всего, что каждый многочлен n-й степени $P(x)$ можно представить в виде суммы многочленов

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \ \ldots, \ P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

взятых с некоторыми коэффициентами:

$$P(x) = b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \ldots + b_1 P_1(x) + b_0 P_0(x).$$

Для доказательства этого заметим, что если $\frac{b_n}{n!}$ равно старшему коэффициенту многочлена $P(x)$, то $P(x)$ и $b_n P_n(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n; если, кроме того, $\frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ равно старшему коэффициенту $P(x) - b_n P_n(x)$, то $P(x)$ и $b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n и x^{n-1}; если, кроме того, $\frac{b_{n-2}}{(n-2)!}$ равно старшему коэффициенту многочлена $P(x) - b_n P_n(x) - b_{n-1} P_{n-1}(x)$, то $P(x)$ и

$b_nP_n(x)+b_{n-1}P_{n-1}(x)+b_{n-2}P_{n-2}(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n, x^{n-1} и x^{n-2} и т. д.; таким образом, можно определить $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ так, чтобы многочлены $P(x)$ и $b_nP_n(x)+b_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+b_1P_1(x)+b_0P_0(x)$ полностью совпадали.

Пусть теперь многочлен n-й степени $P(x)$ таков, что $P(0)$, $P(1), \ldots, P(n)$ — целые числа. Как и всякий многочлен, его можно представить в виде

$$P(x)=b_0P_0(x)+b_1P_1(x)+b_2P_2(x)+\ldots+b_nP_n(x).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&P_1(0)=P_2(0)=\ldots=P_n(0)=\\&\quad=P_2(1)=P_3(1)=\ldots=P_n(1)=P_3(2)=\ldots=P_n(2)=\ldots\\&\qquad\ldots=P_{n-1}(n-2)=P_n(n-2)=P_n(n-1)=0,\end{aligned}$$

$$P_0(0)=P_1(1)=P_2(2)=\ldots=P_{n-1}(n-1)=P_n(n)=1.$$

Поэтому

$$P(0)=b_0P_0(0),\ \text{откуда } b_0=P(0);$$
$$P(1)=b_0P_0(1)+b_1P_1(1),\ \text{откуда } b_1=P(1)-b_0P_0(1);$$
$$P(2)=b_0P_0(2)+b_1P_1(2)+b_2P_2(2),$$

откуда

$$b_2=P(2)-b_0P_0(2)-b_1P_1(2);$$

....

$$P(n)=b_0P_0(n)+b_1P_1(n)+\ldots+b_{n-1}P_{n-1}(n)+b_nP_n(n),$$

откуда

$$b_n=P_n-b_0P_0(n)-b_1P_1(n)-\ldots-b_{n-1}P_{n-1}(n).$$

Таким образом, все коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются целыми числами.

221. а) Из решения задачи 220 следует, что подобный многочлен можно представить в виде суммы многочленов $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ с *целыми* коэффициентами. Отсюда и из того, что многочлены $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ принимают целые значения при *каждом* целом x (см. задачу 49, а)), следует утверждение задачи.

б) Если многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

принимает целые значения при $x = k,\ \ k+1,\ \ k+2,\ \ldots$ $\ldots,\ k+n$, то многочлен $Q(x) = P(x+k) = a_n(x+k)^n + a_{n-1}(x+k)^{n-1} + \ldots + a_1(x+k) + a_0$ принимает целые значения при $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$. В силу задачи а) отсюда следует, что $Q(x)$ принимает целые значения при всех целых x. А отсюда мы заключаем, что и многочлен $P(x) = Q(x-k)$ принимает целые значения при всех целых x.

в) Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ принимает целые значения при $x = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2$. Тогда многочлен

$$Q(x) = P(x^2) = a_n(x^2)^n + a_{n-1}(x^2)^{n-1} + \ldots\ldots + a_1(x^2) + a_0$$

степени $2n$ принимает целые значения при $2n+1$ последовательных значениях $x = -n,\ -(n-1),\ -(n-2),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ n$. В самом деле, очевидно,

$$Q(0) = P(0), \quad Q(1) = Q(-1) = P(1), \quad Q(2) = Q(-2) = P(4),$$
$$Q(3) = Q(-3) = P(9), \quad \ldots, \quad Q(n) = Q(-n) = P(n^2),$$

а все эти числа по условию являются целыми. Следовательно, в силу задачи б) многочлен $Q(x)$ принимает целые значения при каждом целом значении x. А это и означает, что $P(k^2) = Q(k)$ при любом целом k есть число целое.

Примером может служить многочлен $P(x) = \dfrac{x(x-1)}{12}$, для которого

$$Q(x) = P(x^2) = \frac{x^2(x^2-1)}{12} = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{12} =$$
$$= 2\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

222. а) Используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, будем иметь

$$\begin{aligned}\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \\ &= \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha i\sin\alpha + 10\cos^3\alpha(i\sin\alpha)^2 + \\ &+ 10\cos^2\alpha(i\sin\alpha)^3 + 5\cos\alpha(i\sin\alpha)^4 + (i\sin\alpha)^5 = \\ &= (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha) + \\ &+ i(5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha).\end{aligned}$$

Приравнивая действительные и мнимые части слева и справа, получаем требуемые формулы.

б) Аналогично решению задачи а) имеем

$$\begin{aligned}\cos n\alpha + i\sin n\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \\ &= \cos^n\alpha + C_n^1\cos^{n-1}\alpha i\sin\alpha + C_n^2\cos^{n-2}\alpha(i\sin\alpha)^2 + \\ &+ C_n^3\cos^{n-3}\alpha(i\sin\alpha)^3 + C_n^4\cos^{n-4}\alpha(i\sin\alpha)^4 + \ldots = \\ &= (\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots) + \\ &+ i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots).\end{aligned}$$

Отсюда и вытекают нужные формулы.

223. Согласно формулам задачи 222, б) имеем

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} = \frac{6\cos^5\alpha\sin\alpha - 20\cos^3\alpha\sin^3\alpha + 6\cos\alpha\sin^5\alpha}{\cos^6\alpha - 15\cos^4\alpha\sin^2\alpha + 15\cos^2\alpha\sin^4\alpha - \sin^6\alpha}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на $\cos^6\alpha$, получаем искомую формулу:

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 20\operatorname{tg}^3\alpha + 6\operatorname{tg}^5\alpha}{1 - 15\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}.$$

224. Уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$ перепишем в виде

$$x^2 + 1 = 2x\cos\alpha \quad \text{или} \quad x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0.$$

Значит,

$$x = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Отсюда вытекает, что

$$x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha,$$
$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha} = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha.$$

После сложения получим

$$x^n = \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

225. Рассмотрим сумму

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi] + [\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)] + \\ + [\cos(\varphi+2\alpha) + i\sin(\varphi+2\alpha)] + \ldots \\ \ldots + [\cos(\varphi+n\alpha) + i\sin(\varphi+n\alpha)].$$

Наша задача сводится к вычислению коэффициентов при мнимой и действительной частях этой суммы. Обозначая $\cos\varphi + i\sin\varphi$ через α и $\cos\alpha + i\sin\alpha$ через x и применяя формулу для приведения комплексных чисел и формулу Муавра, найдем, что рассматриваемая сумма равна

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n = \frac{ax^{n+1} - a}{x - 1} = \\ = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha - 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1} = \\ = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\frac{[(\cos(n+1)\alpha - 1) + i\sin(n+1)\alpha]}{[(\cos\alpha - 1) + i\sin\alpha]} = \\ = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\times \\ \times \frac{-2\sin^2\dfrac{(n+1)}{2}\alpha + 2i\sin\dfrac{(n+1)}{2}\alpha\cos\dfrac{(n+1)}{2}\alpha}{-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + 2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \\ = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\times \\ \times \frac{2i\sin\dfrac{(n+1)}{2}\alpha\left[\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha + i\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\right]}{2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\left[\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right]} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\times$$

$$\times\frac{\left(\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha + i\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\right)\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\alpha\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{n}{2}\alpha\right)\right]$$

(здесь снова используется формула умножения комплексных чисел, а также то, что $\cos\dfrac{\alpha}{2} - i\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)$). Отсюда сразу следуют требуемые формулы.

226. Воспользуемся тем, что $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Отсюда, используя результат предыдущей задачи, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha + n] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha} - 1\right] + \frac{n}{2} = \frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{n-1}{2}.$$

А так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha =$$

$$= n - \frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

227. Требуется вычислить действительную часть и коэффициент при мнимой части суммы

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha) + C_n^1\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + C_n^2(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + \ldots$$
$$\ldots + (\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha).$$

Обозначая $\cos\alpha + i\sin\alpha$ через x и используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, преобразуем эту сумму следующим образом:

$$x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + x^{n+1} = x(x+1)^n =$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + 1 + i\sin\alpha)^n =$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n =$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) =$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha + i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right).$$

Отсюда следует, что

$$\cos\alpha + C_n^1\cos 2\alpha + C_n^2\cos 3\alpha + \ldots + \cos(n+1)\alpha =$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha,$$

$$\sin\alpha + C_n^1\sin 2\alpha + C_n^2\sin 3\alpha + \ldots + \sin(n+1)\alpha =$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha.$$

228. Воспользуемся формулой

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)].$$

Отсюда следует, что нашу сумму можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m-n)\pi}{p} + \cos\frac{2(m-n)\pi}{p} + \cos\frac{3(m-n)\pi}{p} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \cos\frac{(p-1)(m-n)\pi}{p}\right] - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m+n)\pi}{p} +\right.$$
$$\left.+ \cos\frac{2(m+n)\pi}{p} + \cos\frac{3(m+n)\pi}{p} + \ldots + \cos\frac{(p-1)(m+n)\pi}{p}\right].$$

Но сумма

$$\cos\frac{k\pi}{p} + \cos\frac{2k\pi}{p} + \cos\frac{3k\pi}{p} + \ldots + \cos\frac{(p-1)k\pi}{p}$$

равна $p-1$, если k делится на $2p$ (в этом случае каждое слагаемое суммы равно 1); в случае же, когда k не делится на $2p$, эта сумма, в силу результата задачи 225, равна

$$\frac{\sin\frac{pk\pi}{2p}\cos\frac{(p-1)k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}}-1=\sin k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2p}\right)}{\sin\frac{k\pi}{2p}}-1=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } k \text{ нечетно},\\ -1, & \text{если } k \text{ четно}.\end{cases}$$

Отметим еще, что оба числа $m+n$ и $m-n$ будут четны или нечетны одновременно; в частности, если $m+n$ и $m-n$ делится на $2p$, то и $m+n$ и $m-n$ — четные числа. Отсюда вытекает равенство, требуемое условием задачи.

229. Рассмотрим уравнение $x^{2n+1}-1=0$, корни которого

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{4\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4\pi}{2n+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \cos\frac{4n\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4n\pi}{2n+1}.$$

Так как коэффициент при x^{2n} в уравнении равен нулю, то сумма всех этих корней равна нулю:

$$\left[1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right]+$$
$$+i\left[\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right]=0.$$

Следовательно, выражение в каждой скобке равно нулю, т. е., в частности,

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}=-1.$$

Но

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=\cos\frac{4n\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1}=\cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}$$

и т. д.; значит,

$$2\left[\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right]=-1,$$

т. е.

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

Примечание. Можно также решать эту задачу, исходя из формул задачи 225.

230. а) В силу результата задачи 222, б) имеем

$$\sin(2n+1)\alpha=C_{2n+1}^1(1-\sin^2\alpha)^n\sin\alpha-\\-C_{2n+1}^3(1-\sin^2\alpha)^{n-1}\sin^3\alpha+\ldots+(-1)^n\sin^{2n+1}\alpha.$$

Отсюда вытекает, что числа

$$0,\quad \sin\frac{\pi}{2n+1},\quad \sin\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \sin\frac{n\pi}{2n+1},$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)=-\sin\frac{\pi}{2n+1},\quad \sin\left(-\frac{2\pi}{2n+1}\right)=\\=-\sin\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \sin\left(-\frac{n\pi}{2n+1}\right)=-\sin\frac{n\pi}{2n+1}$$

являются корнями следующего уравнения $(2n+1)$-й степени:

$$C_{2n+1}^1(1-x^2)^nx-C_{2n+1}^3(1-x^2)^{n-1}x^3+\ldots+(-1)^nx^{2n+1}=0.$$

Следовательно, числа

$$\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad \sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

являются корнями такого уравнения n-й степени:

$$C_{2n+1}^1(1-x)^n-C_{2n+1}^3(1-x)^{n-1}x+\ldots+(-1)^nx^n=0.$$

б) Заменим в формуле задачи 222, б) n на $2n+1$ и запишем ее в следующем виде:

$$\sin(2n+1)\alpha=\sin^{2n+1}\alpha(C_{2n+1}^1\operatorname{ctg}^{2n}\alpha-C_{2n+1}^3\operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha+\\+C_{2n+1}^5\operatorname{ctg}^{2n-4}\alpha-\ldots).$$

Отсюда следует, что при $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}, \dfrac{2\pi}{2n+1}, \dfrac{3\pi}{2n+1}, \ldots$ $\ldots, \dfrac{n\pi}{2n+1}$ имеет место равенство

$$C_{2n+1}^1 \operatorname{ctg}^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \operatorname{ctg}^{2n-4}\alpha - \ldots = 0,$$

т. е. что числа $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \operatorname{ctg}^2\dfrac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями следующего уравнения n-й степени:

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \ldots = 0.$$

231. а) Сумма корней уравнения n-й степени

$$x^n - \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1}x^{n-1} + \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1}x^{n-2} - \ldots = 0$$

(см. решение задачи 230, б)) равна коэффициенту при x^{n-1}, взятому с обратным знаком (см. с. 51), т. е.

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1} = \\ = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

б) Так как $\operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1$, то из формулы задачи а) следует

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots \\ \ldots + \operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

232. а) Первое решение. Числа

$$\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \quad \sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \quad \ldots, \quad \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

являются корнями уравнения n-й степени, полученного в решении задачи 230, а). Коэффициент при старшем члене x^n этого уравнения равен $(-1)^n[C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}+1]$. Но сумма в квадратных скобках составляет половину от общей суммы биноминальных коэффициентов $1+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^{2n}+$ $+\,1$, равной, как известно, $(1+1)^{2n+1}=2^{2n+1}$; следовательно, коэффициент при x^n в нашем уравнении равен $(-1)^n 2^{2n}$. Далее, свободный член этого уравнения есть $C_{2n+1}=2n+1$. Но произведение корней уравнения n-й степени равно свободному члену приведенного уравнения (уравнения с коэффициентом при старшем члене, равным единице), умноженному на $(-1)^n$, т. е. равно свободному члену, умноженному на $(-1)^n$ и деленному на коэффициент при старшем члене. Отсюда имеем

$$(-1)^n \sin^2\frac{\pi}{2n+1}\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}=(-1)^n\frac{2n+1}{2^{2n}}$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Второе решение. Корни уравнения $x^{2n}-1=0$ равны

$$1,\ \ -1,\ \ \cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},\ \ \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n},\ \ \ldots,\ \ \cos\frac{(2n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Поэтому имеем

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\left(x-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}\right)\times$$
$$\times\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-\right.$$
$$\left.-\,i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{(n+1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)\times\ldots$$
$$\ldots\times\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Но $\cos\dfrac{(2n-k)\pi}{n} = \cos\dfrac{k\pi}{n}$, $\sin\dfrac{(2n-k)\pi}{n} = -\sin\dfrac{k\pi}{n}$; отсюда следует, что

$$\left(x-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}\right)\times \\ \times\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}\right) = x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1,$$

$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times \\ \times\left(x-\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}\right) = x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1,$$

. . . .

$$\left(x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\times \\ \times\left(x-\cos\frac{(n+1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right) = x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1.$$

Поэтому разложение многочлена $x^{2n}-1$ на множители можно переписать так:

$$x^{2n}-1 = (x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\times \\ \times\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Отсюда

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1 = \\ = \left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\times\ldots \\ \ldots\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Положив здесь $x = 1$ и воспользовавшись тем, что $2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, получим

$$n = 4^{n-1}\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\dots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

откуда вытекает, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

б) Требуемый результат может быть получен совершенно аналогично первому или второму решению задачи а); однако мы здесь не будем повторять этих решений, а сразу выведем нужные формулы из формул задачи а).

Так как

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} = \sin\frac{2n\pi}{2n+1}, \quad \sin\frac{3\pi}{2n+1} = \sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},$$
$$\sin\frac{5\pi}{2n+1} = \sin\frac{(2n-4)\pi}{2n+1}, \quad \dots,$$

то

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\sin\frac{6\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{2n\pi}{2n+1} =$$
$$= \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

см. задачу а)). Разделив эту формулу почленно на

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

и воспользовавшись тем, что

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1} = 2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1},$$

$$\sin\frac{4\pi}{2n+1}=2\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad \sin\frac{2n\pi}{2n+1}=2\sin\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1},$$
получаем
$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$$

Аналогично имеем
$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$
Но $\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$, $\sin\frac{2\pi}{n}=\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$, …, $\sin\frac{\pi}{n}=1$; поэтому:

при $n=2k+1$ нечетном
$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}\ldots\sin\frac{k\pi}{2k+1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}\right)^2=\frac{n}{2^{n-1}};$$
при $n=2k$ четном
$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{2k}\sin\frac{2\pi}{2k}\ldots\sin\frac{(k-1)\pi}{2k}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{k}}{2^{k-1}}\right)^2=\frac{n}{2^{n-1}}$$
(см. задачу а)). Отсюда получаем
$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\frac{n}{2^{n-1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Примечание. Разделив формулы задач 232 а) и б) одну на другую, получим:
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\ldots\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}=1.$$

Впрочем, второе из этих равенств совершенно очевидно, так как $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{(n-k)\pi}{2n}=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}=1$ при $k=1, 2, \ldots, n-1$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Из этого равенства и второй формулы задачи 232а) можно было просто вывести формулу $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Можно также получить эти формулы аналогично первому решению задачи 232 а).

233. Покажем, что для любого положительного угла, меньшего $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

Имеем (рис. 22)

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$
$$S_{\text{сект}AOB}=\frac{1}{2}\alpha,$$
$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

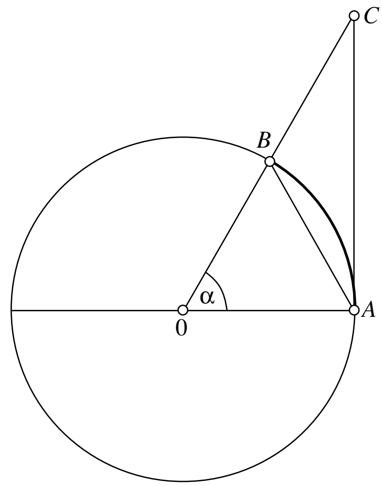


Рис. 22

(радиус круга принимаем равным единице, углы измеряются в радианах). Но так как $S_{\triangle AOB}<S_{\text{сект}AOB}<S_{\triangle AOC}$, то $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$. Из того, что $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, следует, что $\operatorname{ctg}\alpha<\frac{1}{\alpha}<\operatorname{cosec}\alpha$. Поэтому из формул задач 231, а) и б) вытекает

$$\frac{n(2n-1)}{3}=$$
$$=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}<$$
$$<\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{3\pi}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2<$$
$$<\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1}+$$
$$+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

Разделив все члены последнего двойного неравенства на $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$, будем иметь

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<$$
$$<\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6},$$

что и требовалось доказать.

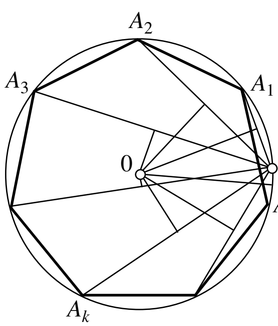


Рис. 23

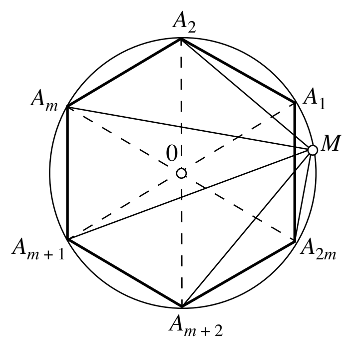


Рис. 24

234. а) Предположим, что точка M взята на дуге A_1A_n окружности (рис. 23). Обозначим дугу MA_1 через α; в таком случае дуги MA_2, MA_3, …, MA_n соответственно равны $\alpha+\frac{2\pi}{n}$, $\alpha+\frac{4\pi}{n}$, …, $\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}$. Но длина хорды AB окружности радиуса R равна $2R\sin\frac{AB}{2}$ (это можно легко усмотреть из равнобедренного треугольника AOB, где O — центр окружности). Отсюда видно, что интересующая нас сумма равна

$$4R^2\left[\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Вычислим теперь выражение в квадратных скобках. Пользуясь известной формулой $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, получим, что это выражение равно

$$S = \frac{n}{2} - \left[\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Но по формуле задачи 225 имеем

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) =$$
$$= \frac{\sin\pi\cos\left(\alpha + \dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}} = 0,$$

следовательно, $S = \dfrac{n}{2}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Примечание. При $n = 2m$ четном (рис. 24) утверждение задачи является очевидным, так как в силу теоремы Пифагора

$$MA_1^2 + MA_{m+1}^2 = MA_2^2 + MA_{m+2}^2 = \ldots = MA_m^2 + MA_{2m}^2 = 2R^2.$$

б) Пусть A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n — перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2, …, A_n на прямую OM (рис. 25, а). В таком случае по известной теореме имеем

$$MA_k^2 = MO^2 + OA_k^2 - 2MO\cdot OB_k = l^2 + R^2 - 2l\cdot OB_k$$

($k = 1, 2, \ldots, n$), где отрезки OB_k берутся со знаками плюс или минус в зависимости от того, расположена точка B_k на луче OM или вне его. Следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 =$$
$$= n(l^2 + R^2) - 2l(OB_1 + OB_2 + \ldots + OB_n).$$

Но если $\angle MOA_1 = \alpha$, то

$$OB_1 = OA_1\cos\angle A_1OM = R\cos\alpha, \quad OB_2 = R\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right),$$
$$OB_3 = R\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right), \quad \ldots, \quad OB_n = R\cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

А так как в решении задачи а) было показано, что

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0,$$

то $OB_1 + OB_2 + \ldots + OB_n = 0$; отсюда и вытекает утверждение задачи.

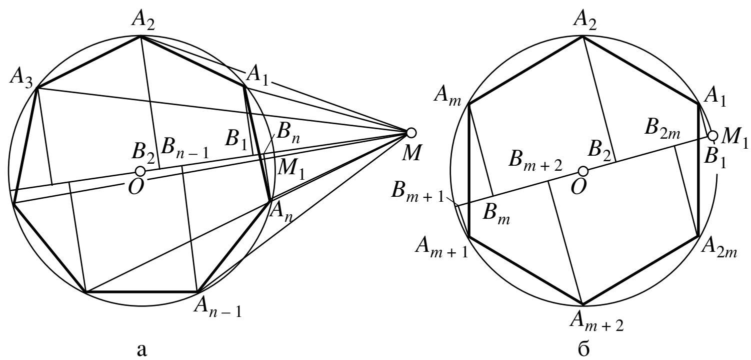


Рис. 25

Примечание. При $n = 2m$ четном (рис. 25, б)) утверждение задачи доказывается геометрически; в этом случае $OB_1 + OB_{m+1} = OB_2 + OB_{m+2} = \ldots = OB_m + OB_{2m} = 0$.

в) Пусть M_1 — проекция точки M на плоскость n-угольника (рис. 26). В таком случае имеем $MA_k^2 = M_1A_k^2 + MM_1^2$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и, следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = M_1A_1^2 + M_1A_2^2 + \ldots + M_1A_n^2 + n \cdot MM_1^2.$$

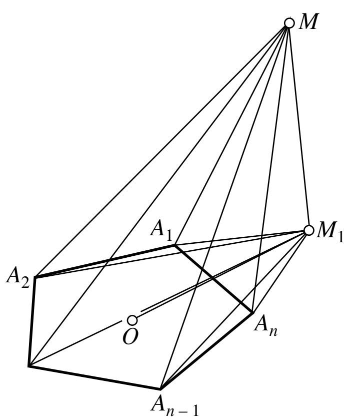


Рис. 26

Но $M_1A_1^2 + M_1A_2^2 + \ldots + M_1A_n^2 = n(R^2 + OM_1^2)$ (см. задачу б)) и $l^2 = OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2$. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

235. а) Утверждение задачи сразу следует из теоремы задачи 234, а), если учесть, что при n четном четные (и нечетные) вершины n-угольника сами служат вершинами вписанных в окружность правильных $\frac{n}{2}$-угольников.

б) Пусть $n = 2m + 1$. Из решения задачи 234, а) выводим, что достаточно доказать равенство между собой следующих сумм:

$$S_1 = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{2m+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{2m+1}\right) + \ldots \\ \ldots + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2m\pi}{2m+1}\right),$$

$$S_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2m+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2m+1}\right) + \ldots \\ \ldots + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{2m+1}\right).$$

Но согласно задаче 225 имеем

$$S_1 = \frac{\sin\frac{(m+1)\pi}{2m+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{m\pi}{2m+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2m+1}},$$

$$S_2 = \frac{\sin\frac{m\pi}{2m+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2m+1} + \frac{(m-1)\pi}{2m+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2m+1}} = S_1,$$

что и доказывает теорему.

236. а) В силу задачи 234, а) сумма квадратов расстояний от точки окружности, описанной около правильного n-угольника, до всех его вершин равна $2nR^2$. Предполагая, что M совпадает с A_1, получаем, что сумма всех сторон и диагоналей n-угольника, выходящих из одной вершины, равна $2nR^2$. Если умножить эту сумму на n (число вершин n-угольника), то мы получим удвоенную сумму всех сторон и диагоналей

n-угольника (так как каждая сторона или диагональ имеет два конца, то она будет фигурировать в такой сумме дважды). Отсюда искомая сумма равна $\frac{n}{2} \cdot 2nR^2 = n^2R^2$.

б) Сумма всех сторон и диагоналей правильного многоугольника, выходящих из одной вершины A_1, равна

$$2R\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \\ = 2R\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2R\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

(ср. задачу 235, б)). Умножая эту сумму на n и деля пополам, получаем требуемый результат: $Rn\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

в) Произведение всех сторон и всех диагоналей n-угольника, выходящих из одной вершины, очевидно, равно

$$2^{n-1}R^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1}R^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

(см. задачу 232, а)). Возводя это произведение в n-ю степень и извлекая затем квадратный корень, получаем требуемый результат.

237. Вычислим сумму 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей 100-угольника, выходящих из одной вершины A_1. Задача сводится к нахождению суммы

$$\Sigma = \left(2R\sin\frac{\pi}{100}\right)^{50} + \left(2R\sin\frac{2\pi}{100}\right)^{50} + \ldots + \left(2R\sin\frac{99\pi}{100}\right)^{50}$$

(ср. с решением задачи 234, а)). Таким образом, нам надо суммировать 50-е степени синусов некоторых углов. Но

$$\sin^{50}\alpha = \left(\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (\cos\alpha - i\sin\alpha)}{2i}\right)^{50} = \\ = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^{50}}{-2^{50}} = -\frac{1}{2^{50}}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{50},$$

где обозначено $\cos\alpha + i\sin\alpha = x$; в таком случае $\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{x}$. Следовательно,

$$\sin^{50}\alpha = -\frac{1}{2^{50}}\left(x^{50} - C_{50}^1 x^{49}\frac{1}{x} + C_{50}^2 x^{48}\frac{1}{x^2} - \ldots \right.$$
$$\ldots + C_{50}^{24}x^{26}\frac{1}{x^{24}} - C_{50}^{25}x^{25}\frac{1}{x^{25}} + C_{50}^{26}x^{24}\frac{1}{x^{26}} - \ldots$$
$$\left.\ldots + C_{50}^{48}x^2\frac{1}{x^{48}} - C_{50}^{49}x\frac{1}{x^{49}} + \frac{1}{x^{50}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2^{50}}\left[\left(x^{50} + \frac{1}{x^{50}}\right) - C_{50}^1\left(x^{48} + \frac{1}{x^{48}}\right) + \right.$$
$$\left. + C_{50}^2\left(x^{46} + \frac{1}{x^{46}}\right) - \ldots + C_{50}^{24}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - C_{50}^{25}\right] =$$
$$= -\frac{1}{2^{50}}(2\cos 50\alpha - 2C_{50}^1\cos 48\alpha + 2C_{50}^2\cos 46\alpha - \ldots$$
$$\ldots + 2C_{50}^{24}\cos 2\alpha + C_{50}^{25})$$

$\Big[$здесь использовано то, что $x^k + \frac{1}{x^k} = (\cos k\alpha + i\sin k\alpha) + (\cos k\alpha - i\sin k\alpha) = 2\cos k\alpha\Big]$.

Итак, сумма Σ может быть переписана следующим образом:

$$\Sigma = -R^{50}\left[2\left(\cos 50\frac{\pi}{100} + \cos 50\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 50\frac{99\pi}{100}\right) - \right.$$
$$- 2C_{50}^2\left(\cos 48\frac{\pi}{100} + \cos 48\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 48\frac{99\pi}{100}\right) +$$
$$+ 2C_{50}^2\left(\cos 46\frac{\pi}{100} + \cos 46\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 46\frac{99\pi}{100}\right) -$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left. + 2C_{50}^{24}\left(\cos 2\frac{\pi}{100} + \cos 2\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 2\frac{99\pi}{100}\right) - 99C_{50}^{25}\right] =$$
$$= -R^{50}\left[2s_1 - 2C_{50}^1 s_2 + 2C_{50}^2 s_3 - \ldots + 2C_{50}^{24}s_{25} - 99C_{50}^{25}\right],$$

где через s_1, s_2, …, s_{25} обозначены суммы, стоящие в круглых скобках. Но из формулы задачи 225 сразу следует, что $s_1 = s_2 = \ldots = s_{25} = -1$. Следовательно, имеем

$$\Sigma = R^{50}(2 - 2C_{50}^1 + 2C_{50}^2 - \ldots + 2C_{50}^{24} + 99C_{50}^{25}) =$$
$$= R^{50}(1 - C_{50}^1 + C_{50}^2 - C_{50}^3 + \ldots + C_{50}^{24} - C_{50}^{25} + C_{50}^{26} - \ldots$$
$$\ldots + C_{50}^{48} - C_{50}^{49} + 1 + 100C_{50}^{25}) =$$
$$= R^{50}[(1-1)^{50} + 100C_{50}^{25}] = 100C_{50}^{25}R^{50}.$$

Отсюда сразу получаем, что сумма 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей 100-угольника равна

$$\frac{100\Sigma}{2} = 5000C_{50}^{25}R^{50} = \frac{5000 \cdot 50!}{(25!)^2}R^{50}.$$

238. Воспользуемся тем, что в треугольнике с целочисленными сторонами $2\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$ всегда есть число рациональное. Предположим, что $A = \dfrac{m}{n} \cdot 180^\circ$, где m и n — целые числа. Тогда $\cos nA = \cos 180^\circ m = (-1)^m$.

Докажем теперь, что $2\cos nA$ при любом целом n можно представить в виде многочлена степени n относительно $2\cos A$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице:

$$2\cos nA = (2\cos A)^n + a_1(2\cos A)^{n-2} + a_2(2\cos A)^{n-4} + \ldots,$$

где a_1, a_2, … — целые числа. Это утверждение можно вывести из первой формулы задачи 222, б) или доказать методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$ и $n = 2$ оно верно, так как

$$2\cos A = 2\cos A, \quad 2\cos 2A = (2\cos A)^2 - 2.$$

Но в силу известной формулы

$$\cos(n+2)A + \cos nA = 2\cos A\cos(n+1)A,$$

так что

$$\cos(n+2)A = 2\cos A\cos(n+1)A - \cos nA,$$

откуда сразу следует, что если наше утверждение верно для значений n и $n+1$, то оно верно также и для значения $n+2$.

Так как для $n = 1$ и $n = 2$ это утверждение справедливо, то отсюда следует, что оно верно для всех значений n.

Подставляя в полученную формулу $2\cos A = x$ и $\cos nA = (-1)^m$, мы получим следующее уравнение относительно неизвестного x:

$$x^n + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-4} + \ldots - 2(-1)^n = 0.$$

Таким образом, x есть рациональный корень (ибо в нашем случае $x = 2\cos A$ рационально) уравнения с целыми коэффициентами и коэффициентами при старшем члене, равным единице. Но все рациональные корни такого уравнения являются целыми числами (см. задачу 218); следовательно, $x = 2\cos A$ должно быть целым числом. Так как $-1 \leqslant \cos A \leqslant 1$, то остаются только возможности $\cos A = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$, т. е. A может быть равен 60°, 90° и 120° (из всех углов, больших нуля и меньших $\pi = 180^\circ$, только для этих углов $2\cos A$ является целым).

То, что углы в 60°, 90° и 120° действительно могут встречаться в треугольниках с целочисленными сторонами, можно показать на простых примерах. Известно, что треугольник со сторонами $(3, 4, 5)$ будет прямоугольным, т. е. будет иметь угол, равный 90°. В треугольнике со сторонами (1, 1, 1) все углы будут, очевидно, равны 60°. Наконец, можно проверить (например, при помощи теоремы косинусов), что треугольник со сторонами (3, 8, 7) будет иметь угол, равный 60° (таким будет угол, заключенный между сторонами, равными 3 и 8), а треугольник со сторонами (3, 5, 7) будет иметь тупой угол, равный 120° (см. также выше задачу 128).

239. а) Предположим, что отношение $\theta = \arccos\dfrac{1}{p}$ к 180° есть число рациональное, т. е. что $\theta = \dfrac{m}{n}\cdot 180^\circ$, где m и n — целые числа, которые, конечно, можно считать взаимно простыми. Воспользуемся второй формулой задачи 222, б)

$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \\ + C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \ldots$$

В нашем случае $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{p^2-1}}{p}$ и $\sin n\theta = \sin 180^\circ m = 0$. Подставляя эти значения в последнее равенство, будем иметь

$$0 = \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^n}\left\{n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(p^2-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}(p^2-1)^2 - \ldots\right\}.$$

Так как $p \neq 1$, то $\dfrac{\sqrt{p^2-1}}{p^n} \neq 0$ и, следовательно, должна равняться нулю сама сумма, стоящая в фигурных скобках. Поскольку все члены этой суммы, кроме первого, — целые четные числа (p^2-1 четно, ибо p нечетно), то и первый член должен быть четным. Итак, n есть число четное $n = 2k$ и, следовательно, m — число нечетное.

Из нечетности m следует, что $\cos k\theta = \cos\dfrac{n\theta}{2} = \cos\dfrac{m}{2}\pi = 0$. Воспользуемся теперь первой формулой задачи 222, б):

$$\cos k\theta = \cos^k\theta - C_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta + C_k^4\cos^{k-4}\theta\sin^4\theta - \ldots$$

Подставляя сюда $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{p^2-1}}{p}$, $\cos k\theta = 0$, будем иметь

$$0 = \frac{1}{p^k}\{1 - C_k^2(p^2-1) + C_k^4(p^2-1)^2 - \ldots\}.$$

Но здесь все слагаемые в скобках, кроме первого, являются целыми числами, а первое слагаемое равно единице, т. е. является нечетным числом. Следовательно, полученное равенство невозможно. Полученное противоречие доказывает, что отношение $\theta = \arccos\dfrac{1}{p}$ к 180° не может быть рациональным числом.

б) Предположим, что $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{p}{q}$ содержит рациональное число градусов, т. е. что θ представимо в виде $\theta = \dfrac{m}{n}180^\circ$, где m и n — целые числа. Будем считать, что p и q взаимно просты; это, конечно, законно, так как нас интересует лишь отношение $\dfrac{p}{q}$.

Воспользуемся формулами

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$
$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta.$$

Так как у нас $\theta = \dfrac{m}{n}180^\circ$, то $\sin n\theta = \sin 180^\circ m = 0$ и, следовательно,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta - i\sin\theta)^n.$$

Разделив обе части этого равенства на $\cos^n\theta$ $\quad(\cos\theta \neq 0$, ибо $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{p}{q}$, где $q \neq 0)$, получим

$$(1 + i\operatorname{tg}\theta)^n = (1 - i\operatorname{tg}\theta)^n,$$

т. е.

$$\left(1 + i\,\frac{p}{q}\right)^n = \left(1 - i\,\frac{p}{q}\right)^n,$$

или, после умножения на q^n,

$$(q + ip)^n = (q - ip)^n.$$

Покажем теперь, что это равенство невозможно при p и q целых, взаимно простых, $p \neq 0$, $q \neq 0$, и p и q, не равных одновременно ± 1. С этой целью перепишем его в виде

$$\begin{aligned}(q - ip)^n &= [(q - ip) + 2ip]^n = \\ &= (q - ip)^n + C_n^1(q - ip)^{n-1}2ip + C_n^2(q - ip)^{n-2}(2ip)^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + C_n^{n-1}(q - ip)(2ip)^{n-1} + (2ip)^n.\end{aligned}$$

Отбрасывая здесь член $(q - ip)^n$ слева и справа, сокращая на $2ip$ и перенося $(2ip)^{n-1}$ в левую часть, получим

$$\begin{aligned}-(2ip)^{n-1} = (q - ip)\{C_n^1(q - ip)^{n-2} + C_n^2(q - ip)^{n-3}2ip + \ldots \\ \ldots + C_n^{n-1}(2ip)^{n-2}\}.\end{aligned}$$

С обеих сторон этого равенства стоит по комплексному числу. Приравнивая модули этих комплексных чисел и воспользовавшись тем, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, мы найдем, что

$$(2p)^{2n-2} = (q^2 + p^2)B,$$

где B есть модуль выражения, стоящего в фигурных скобках в правой части предшествующего равенства. B равно сумме квадратов вещественной и мнимой частей числа

$$C_n^1(q-ip)^{n-2}+C_n^2(q-ip)^{n-3}2ip+\ldots+C_n^{n-1}(2ip)^{n-2}$$

и, следовательно, является целым числом. Итак, мы видим, что $(2p)^{2n-2}$ делится на p^2+q^2. Но так как p и q взаимно просты, то p^2+q^2 не имеет общих множителей с p и q, значит, на p^2+q^2 должно делиться 2^{2n-2}. Числа p и q или оба нечетны, или же одно из них четно, а второе нечетно; если p и q разной четности, то p^2+q^2 будет нечетным, а если $p=2r+1$ и $q=2s+1$ (оба нечетны), то $p^2+q^2=2(2r^2+2r+2s^2+2s+1)$ будет четным, но будет содержать нечетный множитель $2(r^2+r+s^2+s)+1$. Этот нечетный множитель обращается в единицу лишь при $p=\pm1$, $q=\pm1$; следовательно, во всех остальных случаях 2^{2n-2} не может делиться на p^2+q^2, т. е. $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{p}{q}$ не может содержать рационального числа градусов.

240. Первое решение. Пусть a не делится на p. В таком случае числа a, $2a$, $3a$, …, $(p-1)a$ тоже не будут делиться на p и все будут давать при делении на p разные остатки: действительно, если бы ka и la $(p-1\geqslant k>l)$ давали бы при делении на p одинаковые остатки, то разность $ka-la=(k-l)a$ делилась бы на p, что невозможно, так как p простое, a не делится на p и $k-l$ меньше p. Но все возможные остатки при делении на p исчерпываются $p-1$ числами 1, 2, 3, …, $p-1$. Таким образом, должно быть

$$a=q_1p+a_1,\quad 2a=q_2p+a_2,$$

$$3a=q_3p+a_3,\quad \ldots,\quad (p-1)a=q_{p-1}p+a_{p-1},$$

где a_1, a_2, …, a_{p-1} — числа 1, 2, …, $p-1$, взятые в каком-то порядке. Перемножая все эти равенства, получим

$$[1\cdot2\ldots(p-1)]a^{p-1}=Np+a_1a_2\ldots a_{p-1},$$

$$[1\cdot2\ldots(p-1)](a^{p-1}-1)=Np.$$

Отсюда следует, что $a^{p-1}-1$ делится на p, а значит, и a^p-a делится на p.

Если a делится на p, то утверждение теоремы Ферма является очевидным.

Второе решение. Теорема является очевидной при $a = 1$, так как в этом случае $a^p - a = 1 - 1 = 0$ делится на любое число. Будем теперь доказывать ее методом математической индукции, т. е. предположим, что нам уже известно, что $a^p - a$ делится на p, и докажем, что в этом случае $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p.

По формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= \\ &= a^p + pa^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + C_p^3 a^{p-3} + \ldots + pa + 1 - a - 1 = \\ &= (a^p - a) + pa^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-2} a^2 + pa.\end{aligned}$$

Но все биномиальные коэффициенты

$$C_p^k = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

делятся на простое число p, так как числитель выписанного выражения содержит множитель p, а знаменатель не содержит этого множителя. А так как, по предположению, и $a^p - a$ делится на p, то $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p.

Приведем еще один изящный вариант того же самого доказательства. В силу того, что все биномиальные коэффициенты C_p^k делятся на p, разность

$$\begin{aligned}(A+B)^p - A^p - B^p &= \\ &= pA^{p-1}B + C_p^2 A^{p-2}B^2 + \ldots + C_p^{p-2} A^2 B^{p-2} + pAB^{p-2},\end{aligned}$$

где A, B — какие угодно целые числа, всегда делятся на p. Последовательным применением этого результата получаем, что

$$\begin{aligned}(A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p &= \\ &= \{[(A+B)+C]^p - (A+B)^p - C^p\} + (A+B)^p - A^p - B^p\end{aligned}$$

всегда делится на p,

$$\begin{aligned}(A+B+C+D)^p - A^p - B^p - C^p - D^p &= \{[(A+B+C)+D]^p - \\ &- (A+B+C)^p - D^p\} + (A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p\end{aligned}$$

всегда делится на p и вообще

$$(A+B+C+\ldots+K)^p - A^p - B^p - C^p - \ldots - K^p$$

всегда делится на p.

Положив теперь в последнем соотношении $A = B = C = \ldots \ldots = K = 1$ и взяв число этих чисел равным a, мы придем к теореме Ферма: $a^p - a$ делится на p.

241. Доказательство теоремы Эйлера совершенно аналогично первому доказательству теоремы Ферма; r чисел, меньших N и взаимно простых с N, мы обозначим через k_1, k_2, k_3, …, k_r. Рассмотрим r чисел k_1a, k_2a, …, k_ra. Все они взаимно просты с N (ибо a взаимно просто с N по условию задачи), и все они дают при делении на N различные остатки (это доказывается в точности так же, как в решении задачи 240). Отсюда следует, что

$$k_1a = q_1N + a_1, \quad k_2a = q_2N + a_2, \quad \ldots, \quad k_ra = q_rN + a_r,$$

где a_1, a_2, …, a_r — это те же числа k_1, k_2, …, k_r, только расположенные в другом порядке. Перемножив все наши равенства, получим

$$k_1k_2\ldots k_ra^r = NM + a_1a_2\ldots a_r, \quad k_1k_2\ldots k_r(a^r - 1) = NM,$$

откуда и следует, что число $a^r - 1$ делится на N.

242. Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего очевидно, что при $n = 1$ предложение задачи справедливо: $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 1 = 3$ и $2^3 - 1 = 7$ не делятся на 5. Докажем еще это предложение для $n = 2$. Пусть 2^k есть наименьшая степень числа 2, дающая при делении на $5^2 = 25$ остаток 1 (т. е. такая, что $2^k - 1$ делится на 25); предположим, что $k < 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$. Если 20 не делится на k, так что $20 = qk + r$, где $r < k$, то мы будем иметь

$$2^{20} - 1 = 2^{qk+r} - 1 = 2^r(2^{qk} - 1) + (2^r - 1).$$

Но $2^{20} - 1$ делится на 25, в силу теоремы Эйлера, а $2^{qk} - 1 = (2^k)^q - 1^q$ делится на $2^k - 1$, т. е., в силу нашего предположения, тоже делится на 25; следовательно, и $2^r - 1$ делится на 25, что противоречит тому, что k есть *наименьшее* число, для которого $2^k - 1$ делится на 25. Итак, k должно быть делителем числа 20, т. е. может равняться только 2, 4, 5 или 10. Но $2^2-1=3$, $2^5-1=31$ и $2^{10}-1=1023$ не делятся даже на 5, а $2^4-1=15$ делится на 5, но не делится на 25. Значит, действительно, и для $n=2$ предложение задачи справедливо.

Предположим теперь, что для какого-то n предложение задачи справедливо, а для значения $n+1$ оно неверно: наименьшее k, такое, что 2^k-1 делится на 5^{n+1}, меньше чем $5^{n+1}-5^n = 4\cdot 5^n$. В точности как выше (для $n=2$), доказывается, что k должно являться делителем числа $4\cdot 5^n$. С другой стороны, аналогично доказывается, что число $5^n-5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$ должно являться делителем числа k; если бы было $k=q\cdot 4\cdot 5^{n-1}+r$, где $r<4\cdot 5^{n-1}$, то число 5^r-1 делилось бы на 5^n, что противоречит предположению о справедливости утверждения задачи для числа n. Таким образом, для k остается единственное возможное значение, а именно: $k=4\cdot 5^{n-1}$.

Так как число $2^{5^{n-1}-5^{n-2}}-1=2^{4\cdot 5^{n-2}}-1$ делится на 5^{n-1} (в силу теоремы Эйлера) и не делится на 5^n (иначе предложение задачи не было бы справедливо для числа n), то $2^{4\cdot 5^{n-2}} = q\cdot 5^{n-1}+1$, где q не делится на 5. Воспользовавшись теперь формулой

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

получим

$$2^{4\cdot 5^{n-1}}-1 = (2^{4\cdot 5^{n-2}})^5-1 = (q\cdot 5^{n-1}+1)^5-1 =$$
$$= 5^{n+1}(q^5\cdot 5^{4n-6}+q^4\cdot 5^{3n-4}+2q^3\cdot 5^{2n-3}+2q^2\cdot 5^{n-2})+q\cdot 5^n,$$

откуда видно, что $2^{4\cdot 5^{n-1}}-1$ не делится на 5^{n+1}. Итак, действительно, из справедливости предположения задачи для какого-то n следует справедливость его и для $n+1$.

243. По теореме Эйлера (см. задачу 241) число $2^{5^{10}-5^9}-1 = 2^{4\cdot 5^9}-1 = 2^{7\,812\,500}-1$ делится на 5^{10}; следовательно, при $n\geqslant 10$ разность $2^{7\,812\,500+n}-2^n = 2^n(2^{7\,812\,500}-1)$ делится на 10^{10}, т. е. последние 10 цифр чисел $2^{7\,812\,500+n}$ и 2^n совпадают. Это означает, что последние 10 цифр чисел ряда $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ повторяются через каждые 7 812 500 чисел, причем эта периодичность начинается с десятого числа этого ряда — числа 2^{10}.

То, что период на самом деле не меньше, чем 7 812 500, следует из результата задачи 242.

Примечание. Аналогично доказывается, что последние n цифр чисел рассматриваемого ряда повторяются через каждые $4 \cdot 5^{n-1}$ чисел, начиная с n-го числа этого ряда (так, например, последние две цифры повторяются, начиная со второго числа через каждые 20 чисел).

244. Докажем даже более общее предложение, а именно, что каково бы ни было целое число N, всегда найдется такая степень числа 2, последние N цифр которой все будут единицами и двойками. Так как $2^5 = 32$ и $2^9 = 512$, то при $N = 1$ и $N = 2$ это утверждение справедливо. Далее доказательство мы проведем при помощи метода математической индукции. Предположим, что последние N цифр числа 2^n являются единицами и двойками, и докажем, что в таком случае найдется степень числа 2, последние $N + 1$ цифр которой являются единицами и двойками. Согласно сделанному предположению $2^n = 10^N a + b$, где b есть N-значное число, записываемое с помощью двух цифр: 1 и 2. Обозначим число $5^N - 5^{N-1} = 4 \cdot 5^{N-1}$ буквой r; тогда согласно теореме Эйлера (задача 241) разность $2^r - 1$ будет делиться на 5^N. Отсюда вытекает, что если целое число k делится на 2^{N+1}, то разность $2^r k - k = k(2^r - 1)$ будет делиться на $2 \cdot 10^N$, т. е. N последних цифр чисел $2^r k$ и k будут совпадать, а $(N+1)$-е с конца цифры этих чисел будут одинаковой четности.

Рассмотрим теперь следующие пять степеней числа 2:

$$2^n,\ 2^{n+r} = 2^r \cdot 2^n,\ 2^{n+2r} = 2^r \cdot 2^{n+r},\ 2^{n+3r} = 2^r \cdot 2^{n+2r},$$
$$2^{n+4r} = 2^r \cdot 2^{n+3r}.$$

Согласно доказанному последние N цифр у всех этих чисел совпадают между собой (т. е. все они оканчиваются тем же числом b, составленным из двоек и единиц, что и число 2^n), а $(N + 1)$-е с конца цифры у всех у них одновременно четны или нечетны. Докажем теперь, что ни у каких двух из этих пяти чисел $(N + 1)$-е с конца цифры не могут быть одинаковыми. Действительно, разность любых двух из наших чисел представима в виде $2^{n+m_1 r}(2^{m_2 r} - 1)$, где $m_1 = 0$, 1, 2 или 3, а $m_2 = 1$, 2, 3 или 4. Если бы эта разность делилась на 10^{N+1}, то число $2^{m_2 r} - 1$ должно было бы делиться на 5^{N+1}; но так как

$$m_2 r = m_2 \cdot (5^N - 5^{N-1}) < 5 \cdot (5^N - 5^{N-1}) = 5^{N+1} - 5^N,$$

то это противоречит результату задачи 242.

Итак, $(N+1)$-е с конца цифры выписанных пяти чисел — это или 1, 3, 5, 7 и 9 (в каком-то неизвестном нам порядке) или же 0, 2, 4, 6 и 8. В обоих случаях хотя бы одного из этих чисел $(N+1)$-я с конца цифра равна 1 или 2. Значит, во всех случаях существует степень числа 2, последние $N+1$ цифр которой все являются единицами и двойками; в силу принципа математической индукции отсюда следует требуемое предложение.

245. Пусть a — какое-нибудь из чисел ряда $2, 3, \ldots, p-2$. Рассмотрим числа

$$a, \ 2a, \ \ldots, \ (p-1)a.$$

Никакие два из этих чисел не могут давать одинаковых остатков при делении на p; следовательно, эти числа дают при делении на p остатки $1, 2, \ldots, p-1$ и притом каждый из этих остатков получается только один раз (сравните с решением задачи 240). В частности, найдется такое целое число b из ряда $1, 2, \ldots, p-1$, что ba при делении на p дает остаток 1. При этом $b \neq 1$ и $b \neq p-1$, ибо $2 \leqslant a \leqslant p-2$, следовательно, при $b = 1$ число $ba = a$ при делении на p дает остаток $a \neq 1$, а при $b = p-1$ число $ba = (p-1)a = pa - a$ при делении на p дает остаток $p - a \neq 1$. Кроме того, $b \neq a$, так как если бы a^2 при делении на p давало остаток 1, то $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ делилось бы на p, что возможно только при $a = 1$ и $a = p-1$. Следовательно, $2 \leqslant b \leqslant p-2$ и $b \neq a$, т. е. все числа $2, 3, \ldots, p-2$ распадаются на пары чисел, произведение которых при делении на p дает остаток 1.

Произведение $2 \cdot 3 \ldots (p-2)$, содержащее $\dfrac{p-3}{2}$ таких пар чисел, тоже дает при делении на p остаток 1. Число $p-1$ при делении на p дает остаток -1. Следовательно, $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-2)(p-1) = [2 \cdot 3 \ldots (p-2)] \cdot (p-1)$ при делении на p дает остаток -1, т. е. $(p-1)! = kp - 1$; $(p-1)! + 1 = kp$. Таким образом, $(p-1)! + 1$ делится на p.

Если p — непростое, то оно имеет простой делитель $q < p$. Тогда $(p-1)!$ делится на q; поэтому $(p-1)!+1$ не делится на q и, значит, не может делиться также и на p.

246. Пусть $p = 4n+1$ — простое число. В силу теоремы Вильсона (задача 245) число

$$(p-1)!+1 = 1\cdot 2\cdot 3\ldots 4n+1$$

делится на p. Заменим теперь в последнем выражении все множители, большие $\dfrac{p-1}{2} = 2n$, через разности числа p и чисел, меньших $\dfrac{p-1}{2}$:

$$\begin{aligned}(p-1)!+1 = 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n(p-2n)(p-2n+1)\ldots(p-1)+1 =\\ = (1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n)\cdot[Ap+(-1)^{2n}2n(2n-1)\ldots 1]+1 =\\ = A_1p+(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n)^2+1.\end{aligned}$$

Так как это число делится на p, то сумма

$$(2n!)^2+1$$

делится на p. Итак, условию задачи удовлетворяет число $x = (2n)! = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)!$.

Примечание. Заметим, что если число x дает при делении на p остаток x_1, то из того, что $x^2+1 = (kp+x_1)^2+1 = (k^2p+2kx_1)p + x_1^2+1$ делится на p, следует, что и x_1^2+1 делится на p. Поэтому в условии задачи можно всегда считать, что число x меньше p, x^2+1 меньше p^2 и частное m от деления x^2+1 на p меньше p.

247. а) Утверждение задачи с очевидностью следует из тождества

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2) = (aa_1+bb_1)^2+(ab_1+ba_1)^2.$$

б) Прежде всего очень легко показать, что никакое число вида $4n+3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов. Действительно, квадрат каждого четного числа имеет вид $4k$, а квадрат нечетного числа — вид $4k+1$ [ибо $(2a+1)^2 = 4(a^2+a)+1$]. Отсюда следует, что сумма квадратов двух четных чисел имеет вид $4n$, сумма квадратов двух нечетных чисел — вид $4n+2$ и, наконец, сумма квадратов четного и нечетного числа — вид $4n+1$. Таким образом, число вида $4n+3$ никак не может быть суммой двух квадратов.

Значительно сложнее доказать, что каждое простое число вида $4n+1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Пусть p — такое число. Из результата задачи 246 мы знаем, что в таком случае существует такое число m, что mp можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел:

$$mp = x^2 + y^2$$

(то, что можно даже считать $y = 1$, нам не понадобится). При этом мы можем считать, что $m < p$ (см. примечание к решению задачи 246). Докажем теперь, что если $m \neq 1$, то его всегда можно уменьшить, т. е. *можно найти такое число n, меньшее m, что произведение np тоже можно представить в виде суммы двух квадратов.*

Указанное предложение почти очевидно, если m *четно*. Действительно, в этом случае сумма $x^2 + y^2$ четна и числа x и y или оба четны или оба нечетные. В обоих случаях имеет место равенство

$$\frac{m}{2} \cdot p = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

т. е. число $\frac{m}{2} \cdot p$ тоже можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Сложнее обстоит дело, если m *нечетно*. Обозначим в этом случае через x_1 и y_1 *наименьшие по абсолютной величине* остатки от деления соответственно x и y на m:

$$x = mr + x_1, \quad y = ms + y_1.$$

Здесь x_1 и y_1 по абсолютной величине меньше $\frac{m}{2}$ (если положительный остаток от деления, например, x на m будет больше $\frac{m}{2}$, мы рассмотрим деление с избытком; соответствующий отрицательный остаток будет по абсолютной величине уже меньше $\frac{m}{2}$; равняться $\frac{m}{2}$ остаток не может, так как m нечетно). В таком случае имеем

$$mp = x^2 + y^2 = (m^2r^2 + 2mrx_1 + x_1^2) + (m^2s^2 + 2msy_1 + y_1^2),$$

откуда следует, что число $x_1^2 + y_1^2$ тоже делится на m:

$$x_1^2 + y_1^2 = mn$$

(легко видеть, что $n = p - mr^2 - 2rx_1 - ms^2 - 2sy_1$).

Отметим, что $n < \frac{m}{2}$; действительно, так как $x_1 < \frac{m}{2}$, $y_1 < \frac{m}{2}$, то

$$mn = x_1^2 + y_1^2 < \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{2}.$$

Кроме того, $n \neq 0$, ибо иначе x и y делились бы оба на m и $mp = x^2 + y^2$ делилось бы на m^2, что невозможно, так как p простое и m отлично от 1 и меньше p.

Докажем теперь, что np можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. В силу тождества, выписанного в решении задачи а), имеем

$$mn \cdot mp = m^2np = (x^2 + y^2)(x_1^2 + y_1^2) = \\ = (xx_1 + yy_1)^2 + (xy_1 - yx_1)^2.$$

Но так как $x = mr + x_1$, $y = ms + y_1$, то числа

$$xx_1 + yy_1 = mrx_1 + x_1^2 + msy_1 + y_1^2 = \\ = mrx_1 + msy_1 + (x_1^2 + y_1^2) = m(rx_1 + sy_1 + n),$$

$$xy_1 - yx_1 = mry_1 + x_1y_1 - msx_1 - x_1y_1 = m(ry_1 - sx_1)$$

делятся на m. Таким образом, получаем

$$np = \left(\frac{xx_1 + yy_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{xy_1 - x_1y}{m}\right)^2,$$

что и доказывает наше утверждение.

Теперь, если n еще тоже не равно 1, то мы можем таким же точно способом уменьшить и это число, т. е. найти такое $n_1 < n$, что n_1p можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Если и $n_1 \neq 1$, то мы найдем $n_2 < n_1$, такое, что n_2p можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Продолжая этот процесс, мы в конце концов докажем, что число $1 \cdot p$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел:

$$p = X^2 + Y^2.$$

А это нам и требовалось доказать.

в) Прежде всего из теоремы задач а) и б) почти сразу вытекает, что если составное число N содержит простые множители вида $4n + 3$ лишь в четных степенях, то N можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Действительно, в таком случае число N можно представить в виде произведения $P^2 \cdot Q$, где все простые множители числа P имеют вид $4n + 3$, а все нечетные простые множители числа Q имеют вид $4n+1$. Так как $2 = 1^2 + 1^2$, то, в силу теоремы задачи б), все простые множители числа Q представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел; в таком случае из теоремы задачи а) следует, что и само число Q представимо в таком виде:

$$Q = x^2 + y^2.$$

А если так, то и число

$$N = P^2 \cdot Q = (Px)^2 + (Py)^2$$

тоже можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Пусть теперь составное число N содержит простой множитель p вида $4n + 3$ в нечетной степени: $N = p^{2k+1} \cdot K$, где K не делится на p. Докажем, что число N нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Действительно, если бы было

$$N = X^2 + Y^2,$$

где X и Y — целые числа, то, сократив X^2, Y^2 и N на квадрат общего наибольшего делителя X и Y, мы пришли бы к равенству

$$M = X_1^2 + Y_1^2,$$

где число M все еще делится на p: $M = M_1p$. Заменив X_1 и Y_1 их остатками x и y от деления на p, мы получили бы равенство

$$mp = x^2 + y^2,$$

где $m < p$ (сравните с примечанием к задаче 246). Но в таком случае в точности, как в решении задачи б), можно было бы доказать, что число p представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел, что невозможно (см. начало решения задачи б)).

248. Если $p = 2$, то $p = 1^2 + 0^2 + 1$. Пусть теперь простое число p нечетно; покажем, что можно найти два числа x и y, оба меньшие, чем $\frac{p}{2}$, удовлетворяющие условию задачи.

Рассмотрим $\frac{p+1}{2}$ чисел $0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Квадраты двух из этих чисел будут давать при делении на p различные остатки; действительно, если было бы

$$x_1^2 = k_1 p + r \quad \text{и} \quad x_2^2 = k_2 p + r,$$

то имело бы место равенство

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (k_1 - k_2)p,$$

т. е. $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ делилось бы на p, что невозможно, так как $x_1 < \frac{p}{2}$, $x_2 < \frac{p}{2}$ и

$$x_1 + x_2 < p, \quad |x_1 - x_2| < p$$

(напоминаем, что p простое).

Итак, $\frac{p+1}{2}$ чисел

$$0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

при делении на p дают $\frac{p+1}{2}$ различных остатков. Отсюда вытекает, что и следующие $\frac{p+1}{2}$ (отрицательных) чисел:

$$-1,\ -1^2,\ -1,\ -2^2 - 1,\ \ldots,\ -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1,$$

также при делении на p дают $\frac{p+1}{2}$ различных остатков (если бы $-x_1^2 - 1$ и $-x_2^2 - 1$ давали одинаковые остатки, то и x_1^2

и x_2^2 давали бы одинаковые остатки)[*)]. Но так как при делении на p могут встречаться лишь p различных остатков (а именно $0, 1, 2, \ldots, p-1$), то ясно, что из $p+1$ чисел

$$0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right),$$
$$-1,\ -1^2-1,\ -2^2-1,\ \ldots,\ -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-1$$

по крайней мере два дают при делении на p одинаковые остатки. В силу доказанного выше из такой пары чисел одно обязательно должно быть вида x^2, а второе — вида $-y^2-1$. Но если $x^2 = kp + r$ и $-y^2 - 1 = lp + r$, то

$$x^2 + y^2 = (k-l)p - 1 = mp - 1,$$

т. е. $x^2 + y^2 + 1 = mp$ делится на p.

Примечание. В условии задачи можно требовать даже, чтобы оба искомые числа x и y не превосходили $\frac{p}{2}$, т. е. чтобы сумма $x^2 + y^2 + 1$ была меньше p^2, и, значит, частное m от деления суммы $x^2 + y^2 + 1$ на p было меньше p.

249. а) Утверждение задачи с очевидностью вытекает из следующего тождества:

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) &= \\ = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 &+ (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + \\ + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 &+ (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2,\end{aligned}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Примечание. Так как тождество настоящей задачи довольно сложно, то интересно указать связь его с более простым тождест-

---

*) Частное k и остаток r от деления положительного или отрицательного целого числа a на число p определяются формулой

$$a = kp + r,$$

где $0 \leqslant r < p$ (если a отрицательно, то и частное k отрицательно).

вом задачи 247, а). Нетрудно видеть, что тождество задачи 247, а) можно обобщить следующим образом:

$$(aa' + bb')(a_1a_1' + b_1b_1') =$$
$$= (aa_1' + bb_1')(a_1a' + b_1b') + (ab_1 - ba_1)(a'b_1' - b'a_1').$$

Если положить теперь в этом последнем тождестве $a = x_1 + ix_2$, $a' = x_1 - ix_2$, $b = x_3 + ix_4$, $b' = x_3 - ix_4$, $a_1 = y_1 + iy_2$, $a_1' = y_1 - iy_2$, $b_1 = y_3 + iy_4$, $b_1' = y_3 - iy_4$, где $i = \sqrt{-1}$, то мы придем к тождеству настоящей задачи.

б) Так как каждое целое число разлагается в произведение простых чисел, то, в силу результата задачи а), нам достаточно доказать, что всякое *простое* число p представимо в виде суммы квадратов четырех целых чисел.

Доказательство этого предложения во всем аналогично решению задачи 247, б). Из результата задачи 248 мы знаем, что существует такое число m, что mp представимо в виде суммы квадратов четырех целых чисел:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

(то, что можно даже считать $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, нам не понадобится). При этом мы можем даже считать, что $m < p$ (см. примечание к решению задачи 248). Покажем теперь, что если $m > 1$, то его всегда можно уменьшить, т. е. можно найти такое число $n < m$, что np также представимо в виде суммы четырех квадратов.

Это доказательство очень просто, если m *четно*. Так как в этом случае $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ четно, то или все x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ четны или два из них нечетны, а два четны, или все они нечетны. Во всех случаях четыре числа x_1, x_2, x_3 и x_4 можно разбить на две пары (скажем, x_1, x_2 и x_3, x_4) одинаковой четности. Тогда числа

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \frac{x_3 + x_4}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x_3 - x_4}{2}$$

будут целыми и мы будем иметь

$$\frac{m}{2} \cdot p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2,$$

т. е. число $\frac{m}{2} \cdot p$ будет тоже представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

Более сложным является случай, когда m нечетно. Обозначим через y_k ($k = 1, 2, 3, 4$) наименьший по абсолютной величине остаток от деления x_k на m (т. е. если положительный остаток от деления x_k на m окажется больше $\frac{m}{2}$, то мы будем производить деление с избытком и рассмотрим отрицательный остаток):

$$x_k = mq_k + y_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

где y_k положительно или отрицательно и $|y_k| < \frac{m}{2}$ (никакое из чисел y_k не может равняться $\frac{m}{2}$, так как m нечетно).

В таком случае

$$x_k^2 = m^2q_k^2 + 2mq_ky_k + y_k^2 = mQ_k + y_k^2 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

где $Q_k = mq_k + 2q_ky_k$ есть целое число. Следовательно,

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mq + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

(здесь $q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$) и

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mn$$

(здесь $n = p - q$). При этом $n < m$, ибо

$$mn = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2,$$

кроме того, $n \neq 0$, ибо иначе все x_k делились бы на m и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_42 = mp$ должно было бы делиться на m^2, что невозможно, так как p — простое и m отлично от 1 и меньше p.

Покажем теперь, что число np тоже представимо в виде суммы четырех квадратов. Мы видим, что каждое из чисел mp и mn представимо в виде суммы четырех квадратов. В силу указанного в решении задачи а) тождества, отсюда вытекает, что и произведение

$$mp \cdot mn = m^2np$$

представимо в виде суммы квадратов четырех чисел:

$$\begin{aligned} m^2np = {} & (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + \\ & + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2)^2 + \\ & + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что обе стороны последнего равенства можно сократить на m^2. С этой целью заменим в правой части этого равенства все x_k на mq_k+y_k. При этом мы сразу получим, что все выражения в скобках в правой части равенства делятся на m: выражение в первой скобке делится на m в силу того, что $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=mn$ делится на m, а выражения в остальных трех скобках делятся на m потому, что после подстановки $x_k=mq_k+y_k$ все произведения вида y_1y_2 и т. д. взаимно уничтожаются. Сократив теперь последнее равенство на m^2, мы получим

$$np=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если число m в равенстве

$$mp=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

не равно 1, то его всегда можно уменьшить, т. е. всегда можно найти положительное $n<m$, для которого выполняется подобное же равенство. Если $n\neq 1$, то мы можем число n еще уменьшить и т. д.; в конце концов мы придем к подобному же равенству, в котором вместо m будет стоять 1:

$$p=X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2.$$

250. Предположим, что

$$4^n(8k-1)=X^2+Y^2+Z^2,$$

где X, Y и Z — целые числа (одно или даже два из которых могут быть нулями). При $n>0$ числа X, Y и Z должны быть все четными: если бы только одно из них было нечетно или все они были нечетными, то сумма $X^2+Y^2+Z^2$ была бы нечетна, а если бы, например, $X=2k+1$ и $Y=2l+1$ были нечетными, а $Z=2m$ четными, то сумма

$$X^2+Y^2+Z^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2m)^2=$$
$$=4(k^2+k+l^2+l+m^2)+2$$

не делилась бы на 4. Положив теперь $\frac{X}{2}=X_1$, $\frac{Y}{2}=Y_1$, $\frac{Z}{2}=Z_1$, мы придем к равенству

$$4^{n-1}(8k-1)=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2.$$

При $n > 1$ $(n-1 > 0)$ точно так же, как раньше, показывается, что все три числа X_1, Y_1 и Z_1 тоже должны быть четными; отсюда получаем равенство

$$4^{n-2}(8k-1) = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2,$$

где X_2, Y_2, Z_2 — целые числа. Продолжая рассуждать точно таким же образом, мы окончательно получим, что и число $8k-1$ представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел:

$$8k - 1 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Из трех чисел x, y, z нечетными должны быть все три или одно; в противном случае сумма $x^2 + y^2 + z^2$ была бы четной. Но квадрат нечетного числа $2n + 1$

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$$

всегда дает при делении на 8 остаток 1 (ибо из двух последовательных чисел n и $n+1$ одно обязательно четно и, значит, $4n(n+1)$ делится на 8); квадрат четного числа дает при делении на 8 остаток 0 (если само число делится на 4) или 4 (если само число не делится на 4). Отсюда следует, что если все числа x, y и z нечетные, то сумма $x^2 + y^2 + z^2$ дает при делении на 8 остаток 3, а если два из них четные, а одно нечетное, то сумма $x^2 + y^2 + z^2$ может давать при делении на 8 остаток 1 или 5. Таким образом, сумма квадратов трех целых чисел никогда не может давать при делении на 8 остаток 7.

251. Воспользуемся тождеством

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4,$$

которое вытекает из формул

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Из этого тождества следует, что

$$\begin{aligned}[(a+b)^4 + (a-b)^4] + [(a+c)^4 + (a-c)^4] +&\\ + [(a+d)^4 + (a-d)^4] + [(b+c)^4 + (b-c)^4] +&\\ + [(b+d)^4 + (b-d)^4] + [(c+d)^4 + (c-d)^4] =&\\ = 6a^4 + 6b^4 + 6c^4 + 6d^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 +&\\ + 12b^2c^2 + 12b^2d^2 + 12c^2d^2 = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.&\end{aligned}$$

Таким образом,

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = \\ = (a+b)^4+(a-b)^4+(a+c)^4+(a-c)^4+(a+d)^4+ \\ +(a-d)^4+(b+c)^4+(b-c)^4+(b+d)^4+(b-d)^4+ \\ +(c+d)^4+(c-d)^4,$$

или словами: если число представляет собой сумму четырех квадратов, то его ушестеренный квадрат представим в виде суммы 12 четвертых степеней целых чисел. Но, в силу результата предыдущей задачи, каждое целое число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел (некоторые из которых могут быть нулями); отсюда следует, что ушестеренный квадрат целого числа может быть представлен в виде суммы 12 четвертых степеней целых чисел (некоторые из которых могут быть нулями).

Произвольное целое число N при делении на 6 дает остаток 0, 1, 2, 3, 4 или 5; таким образом,

$$N = 6n + r,$$

где $r = 0, 1, 2, 3, 4$ или 5. Далее, в силу теоремы задачи 249, б), число n представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел (некоторые из которых могут быть нулями):

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Согласно вышесказанному каждое из чисел $6x^2$, $6y^2$, $6z^2$ и $6t^2$ (представляющих собой ушестеренные квадраты целых чисел) представимо в виде суммы 12 четвертых степеней целых чисел (некоторые из этих чисел могут быть нулями). Таким образом, число

$$6n = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

представимо в виде суммы $4 \cdot 12 = 48$ четвертых степеней целых чисел. А так как $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, т. е.

$$r = 0^4+0^4+0^4+0^4+0^4, \text{ или } r = 1^4+0^4+0^4+0^4+0^4, \\ \text{или } r = 1^4+1^4+0^4+0^4+0^4, \\ \text{или } r = 1^4+1^4+1^4+0^4+0^4, \\ \text{или } r = 1^4+1^4+1^4+1^4+0^4, \\ \text{или } r = 1^4+1^4+1^4+1^4+1^4,$$

то число $N = 6n + r$ представимо в виде $48 + 5 = 53$ четвертых степеней целых чисел, некоторые из которых могут быть нулями, т. е. в виде суммы 53 или меньшего числа четвертых степеней положительных чисел, что и требовалось доказать.

252. Пусть
$$a = x^3 + y^3 + z^3.$$
Из тождества задачи 162, б) имеем
$$(x+y+z)^3 - a = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = \\ = 3(x+y)(x+z)(y+z),$$
или
$$a = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(x+z)(y+z)$$
(см. указание к настоящей задаче). Примем теперь за новые неизвестные
$$x+y+z = Z, \quad x+y = Y \quad \text{и} \quad x;$$
тогда
$$y = Y - x, \quad z = Z - Y$$
и, следовательно,
$$a = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(x+z)(y+z) = \\ = Z^3 - 3Y(x+Z-Y)(Y-x+Z-Y) = \\ = Z^3 - 3Y(Z+x-Y)(Z-x) = Z^3 - 3Y(Z^2-x^2) + 3Y^2(Z-x).$$
Теперь мы можем значительно упростить наше уравнение, предположив, что неизвестные x, Y, Z связаны зависимостью
$$Z^3 - 3Y(Z^2-x^2),$$
или, что равносильно,
$$Z = 3Y\left[1 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2\right]$$
(см. указание к этой задаче). В таком случае наше уравнение примет следующий вид:
$$a = 3Y^2(Z-x) = 3Y^2 Z\left(1 - \frac{x}{Z}\right),$$

или, так как $Z = 3Y\left[1 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2\right]$,

$$a = 9Y^3\left(1 - \frac{x}{Z}\right)^2\left(1 + \frac{x}{Z}\right).$$

Вместо неизвестного x естественно ввести новое неизвестное $X = \frac{x}{Z}$; тогда получим

$$a = 9Y^3(1 - X)^2(1 + X); \quad Z = 3Y(1 - X^2).$$

Введем, наконец, вместо неизвестного Y новое неизвестное: $\overline{Y} = 3Y(1 - X)$. Тогда зависимость, связывающая наши неизвестные, примет вид

$$Z = \overline{Y}(1 + X),$$

а уравнение — вид

$$a = \frac{1}{3}\overline{Y^3}\,\frac{1 + X}{1 - X}.$$

Теперь мы находимся уже у конца решения задачи. Действительно, из последнего уравнения X выражается через a (и $\overline{Y}$) рационально:

$$X = \frac{3a - \overline{Y^3}}{3a + \overline{Y^3}}.$$

Таким образом, мы видим, что если $X = \dfrac{3a - \overline{Y^3}}{3a + \overline{Y^3}}$ и $Z = \overline{Y}(1 + X)$, то

$$a = x^3 + y^3 + z^3,$$

где x, y и z находятся по следующим формулам:

$$x = ZX,$$
$$y = Y - x = \frac{\overline{Y}}{3(1 - X)} - ZX,$$
$$z = Z - Y = Z - \frac{\overline{Y}}{3(1 - X)}.$$

Из этих формул вытекает, в частности, что x, y и z рациональны, если только неизвестное $\overline{Y}$ рационально. $\overline{Y}$ в наших формулах можно выбрать каким угодно (это обстоятельство аналогично тому, что если упростить уравнение $x^3+y^3+z^3=a$ при помощи соотношения $y=-z$, то неизвестное z можно положить каким угодно; см. указание к настоящей задаче).

Таким образом, мы уже нашли решение уравнения

$$x^3+y^3+z^3=a$$

в рациональных числах (и даже сколько угодно таких решений, соответствующих выбору различных рациональных значений $\overline{Y}$). Нам осталось только показать, что $\overline{Y}$ можно выбрать так, чтобы x, y и z были все положительны (здесь нам придется использовать положительность числа a, которой мы до сих пор не пользовались). Выразим $Z=x+y+z$, $Y=x+y$ и $Z-x=y+z$ через $\overline{X}$ и $\overline{Y}$:

$$x+y+z=Z=\overline{Y}(1+X),$$

$$x+y=Y=\frac{\overline{Y}}{3(1-X)},$$

$$y+z=Z-x=(1-X)Z=\overline{Y}(1-X^2),$$

и подставим в эти формулы

$$1-X=1-\frac{3a-\overline{Y^3}}{3a+\overline{Y^3}}=\frac{2\overline{Y^3}}{3a+\overline{Y^3}},$$

$$1+X=1+\frac{3a-\overline{Y^3}}{3a+\overline{Y^3}}=\frac{6a}{3a+\overline{Y^3}};$$

мы получим

$$x+y+z=\frac{6a\overline{Y}}{3a+\overline{Y^3}},$$

$$x+y=\frac{3a+\overline{Y^3}}{6\overline{Y^2}},$$

$$y+z=\frac{12a\overline{Y^4}}{(3a+\overline{Y^3})^2}.$$

Положим теперь в этих формулах $\overline{Y}=\sqrt[3]{3a}$, т. е.

$$3a=\overline{y^3}$$

(это значение $\overline{Y}$, разумеется, может быть иррациональным); тогда получим

$$x+y+z=\overline{Y}, \quad x+y=\frac{1}{3}\overline{Y}, \quad y+z=\overline{Y},$$

т. е.

$$x=0, \quad y=\frac{1}{3}\overline{Y}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3a}, \quad z=\frac{2}{3}\overline{Y}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3a}.$$

Выберем число $\overline{Y}$ так, чтобы оно было рационально и достаточно близко к $\sqrt[3]{3a}$ (можно найти рациональное число $\overline{Y}$, сколь угодно близкое к $\sqrt[3]{3a}$). В таком случае y и z останутся близкими к $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3a}$ и соответственно к $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3a}$, т. е. останутся положительными. Далее, из наших формул находим

$$\frac{x+y+z}{y+z}=\frac{3a+\overline{Y^3}}{2\overline{Y^3}}.$$

Следовательно, если потребовать еще, чтобы выбранное значение $\overline{Y}$ было меньше $\sqrt[3]{3a}$ (т. е. чтобы было $3a>\overline{Y^3}$, $3a+\overline{Y^3}>$ $>2\overline{Y^3}$), то мы будем иметь

$$\frac{x+y+z}{y+z}=\frac{3a+\overline{Y^3}}{2\overline{Y^3}}>1,$$

и, следовательно, число x будет тоже положительным. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Для примера рассмотрим случай $a=\frac{2}{3}$. Полагая в наших формулах $\overline{Y}$, мы легко получим

$$x=\frac{5}{9}, \quad y=\frac{1}{18}, \quad z=\frac{5}{6};$$

действительно,

$$\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{1}{18}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{2}{3}.$$

253. Существование бесконечного числа простых чисел следует из результата задачи 159 (из этой задачи вытекает даже, что простые числа встречаются в ряду всех целых чисел достаточно «часто», например «чаще», чем квадраты; см. примечание к этой задаче). Из результата задачи 65 также можно усмотреть, что простых чисел существует бесконечно много: если бы всего существовало только n простых чисел, то не могло бы быть больше чем n взаимно простых друг с другом чисел. Но наиболее простым доказательством теоремы о бесконечности числа простых чисел является следующее доказательство, принадлежащее еще Евклиду.

Предположим, что имеется всего n простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, ..., p_n. Образуем число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots p_n + 1$. Число N больше всех простых чисел 2, 3, 5, ..., p_n и поэтому должно быть составным. Но так как $N - 1$ делится на 2, 3, 5, 7, ..., p_n, то N взаимно просто со всеми простыми числами. Полученное противоречие и доказывает теорему.

254. а) Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству Евклида бесконечности всех простых чисел. Предположим, что среди чисел вида $4k - 1$ (эти числа составляют первую из рассматриваемых прогрессий) имеется только конечное число простых чисел, а именно: 3, 7, 11, 19, 23, ..., p_n. Составим число

$$N = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \ldots p_n) - 1.$$

Оно больше всех принадлежащих прогрессии простых чисел и, следовательно, должно быть составным. Разложим число N на простые множители. Среди этих множителей не может быть чисел вида $4k-1$, так как число $N+1 = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \ldots p_n)$ делится на все простые числа вида $4k-1$, а следовательно, N взаимно просто со всеми этими числами. Так как N нечетно, то оно должно представлять собой произведение нескольких простых чисел вида $4k + 1$. Но это невозможно, так как произведение двух чисел вида $4k + 1$ имеет тот же вид:

$$(4k_1 + 1)(4k_2 + 1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = \\ = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1,$$

а следовательно, и произведение нескольких чисел вида $4k + 1$ имеет тот же вид, в то время как число N имеет вид $4k - 1$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Аналогично доказывается, что существует бесконечно много простых чисел, принадлежащих прогрессии 5, 11, 17, 23, ... (простых чисел вида $6k - 1$).

б) Доказательство требуемой теоремы несколько сложнее решения задачи а), хотя построено на той же идее.

Предположим, что в ряду 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... имеется только конечное число простых, а именно: 5, 13, 17, ..., p_n. Рассмотрим число

$$N = (5 \cdot 13 \cdot 17 \ldots p_n)^2 + 1.$$

Число N, очевидно, не является полным квадратом (оно на 1 больше полного квадрата) и представляет собой сумму двух квадратов. Отсюда, в силу теоремы задачи 247в), следует, что оно имеет простых делителей вида $4n + 1$. Дальнейший ход рассуждений аналогичен решениям задач 253, 254а).

в) Доказательство настоящей теоремы несколько сложнее доказательств теорем задач а) и б), хотя построено на той же идее.

Предположим, что в ряду чисел $11, 21, 31, 41, 51, 61, \ldots$ имеется только конечное число простых: 11, 31, 41, 61, ..., p_n.

Составим число $N = (11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \ldots p_n)^5 - 1$. Оно взаимно просто со всеми простыми числами 11, 31, 41, ..., p_n, так как число $N + 1$ делится на все эти числа. Обозначим произведение $11 \cdot 31 \cdot 41 \ldots p_n$ через a, тогда

$$N = a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1).$$

Рассмотрим, какие простые делители может иметь второй множитель $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ последнего произведения. Очевидно, что $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ не делится на 2 (сумма пяти нечетных чисел нечетна). Далее, $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ делится на 5, поскольку a оканчивается на 1 (как произведение ряда чисел, каждое из которых оканчивается на 1), a^2, a^3 и a^4 все оканчиваются на 1 и, следовательно, сумма $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ оканчивается на 5. Пусть теперь p есть простой делитель числа $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$, отличный от 5. В таком случае $a - 1$ не может делиться на p, так как иначе a имело бы вид $kp + 1$, следовательно, a^2, a^3 и a^4 (равные соответственно $(kp + 1)^2$, $(kp + 1)^3$ и $(kp + 1)^4$) имели бы такой же вид и число

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = \\ = (kp + 1)^4 + (kp + 1)^3 + (kp + 1)^2 + (kp + 1) + 1$$

давало бы при делении на p остаток 5. Отсюда следует, что $p-1$ должно делиться на 5. Действительно, предположим, например, что $p-1$ дает при делении на 5 остаток 4:

$$p-1=5k+4.$$

Отметим, что в силу теоремы Ферма (задача 240) $a^{p-1}-1$ делится на p. Но в этом случае

$$a^{p-1}-1=a^{5k+4}-1=a^4(a^{5k}-1)+(a^4-1),$$

а так как $a^{5k}-1=(a^5)^k-1^k$ делится на a^5-1, а значит и на p, то и a^4-1 делится на p. Но

$$a^5-1=a(a^4-1)+(a-1);$$

следовательно, если a^5-1 и a^4-1 делятся на p, то и $a-1$ должно было бы делиться на p, что, как мы уже показали выше, невозможно. Аналогично показывается, что число $p-1$ не может давать при делении на 5 остатки 1, 2 или 3.

Итак, $p-1$ делится на 5 и четно ($p-1$ четно, ибо p нечетно); следовательно, $p-1$ делится на 10 и, значит, p имеет вид $10k+1$, т. е. принадлежит нашей прогрессии. Итак, нами установлено, что простыми делителями числа $a^4+a^3+a^2+a+1$ могут быть только число 5 и простые числа вида $10k+1$.

Но число $a^4+a^3+a^2+a+1$, очевидно, больше 5 и не делится на $5^2=25$. Действительно, число a оканчивается на 1 и, следовательно, имеет вид $5k+1$. Далее, по формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}a^4+a^3+a^2+a+1&=(5k+1)^4+(5k+1)^3+(5k+1)^2+\\&+5k+1+1=625k^4+4\cdot125k^3+6\cdot25k^2+4\cdot5k+\\&+1+125k^3+3\cdot25k^2+3\cdot5k+1+25k^2+2\cdot5k+1+\\&+5k+1+1=625k^4+5\cdot125k^3+10\cdot25k^2+10\cdot5k+5=\\&=5\cdot[5(25k^4+25k^3+10k^2+2k)+1].\end{aligned}$$

Отсюда следует, что это число, а следовательно, и число $N=a^5-1$ должно иметь хотя бы один простой делитель вида $10k+1$. Но, по нашему предположению, N взаимно просто со всеми простыми числами вида $10k+1$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Примечание. Отметим, что проведенное доказательство почти без всяких изменений позволяет доказать, что во всякой арифметической прогрессии, составленной из чисел вида $2pk+1$, где p — какое-то нечетное простое число, имеется бесконечно много простых чисел.

255. а) Пусть a и b — стороны прямоугольника; тогда его периметр $P = 2(a+b)$, а площадь $S = ab$. Из неравенства (I) на с. 62 следует

$$S = ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16}.$$

Поскольку правая часть наравенства задана, то площадь S будет наибольшей, когда это неравенство обратится в равенство, что произойдет лишь при $a = b$. Таким образом, из всех прямоугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет квадрат.

б) Задача решается аналогично предыдущей, только здесь задана площадь S — левая часть неравенства, а P выбирается наименьшим, что и достигается при $a = b$.

256. Обозначая через a и b катеты, а через c — гипотенузу прямоугольного треугольника, имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad d = a + b.$$

Но из неравенства (I$'$) на с. 63 следует

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2},$$

т. е.

$$\frac{d}{2} \leqslant \frac{c}{\sqrt{2}},$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

257. В силу неравенства (I) на с. 62 имеем

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = 2.$$

Равенство достигается только при $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$, т. е. если $\alpha = 45^\circ$.

258. Перепишем неравенство (I′) (с. 63) в виде

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2.$$

Полагая в нем

$$x = a + \frac{1}{a}, \quad y = b + \frac{1}{b},$$

получим

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geqslant \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2.$$

Выражение $\frac{1}{ab}$ достигает наименьшего значения, когда произведение ab достигает наибольшего значения. Но согласно неравенству (I) (с. 62)

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{ab} \geqslant 4, \quad 1 + \frac{1}{ab} \geqslant 5.$$

Отсюда

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}5^2 = \frac{25}{2},$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a = b = \frac{1}{2}$.

259. В силу неравенства (I) имеем

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca}.$$

Перемножая эти три неравенства, получаем

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geqslant \sqrt{a^2b^2c^2} = abc.$$

При этом равенство достигается здесь лишь тогда, когда оно достигается в каждом из трех предыдущих неравенств, т. е. при $a = b = c$.

260. Согласно неравенству (I) (с. 62) имеем

$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + bx^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x^2}\cdot bx^2} = 2\sqrt{ab},$$

причем равенство достигается только, если

$$\frac{a}{x^2} = bx^2, \qquad x^2 = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

261. Пусть длины коромыслов весов равны a и b. В таком случае, для того чтобы уравновесить гирю в 1 кг, положенную на чашку, коромысло которой равно a, на вторую чашку надо положить $x = \dfrac{a}{b}$ кг товара (моменты сил тяжести $a \cdot 1$ и $b \cdot x$ должны быть равны). Точно так же гиря в 1 кг, положенная на вторую чашку, уравновешивается $y = \dfrac{b}{a}$ кг товара. Если продавец отвешивает покупателю 1 кг товара на одной чашке и 1 кг на второй чашке, то всего он отпускает

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2\,\text{кг}$$

товара (см. неравенство (I) на с. 62). Таким образом, мы видим, что, отвешивая половину товара на одной чашке и половину на другой чашке весов, продавец отпускает больше товара, чем следует.

262. а) Очевидно, имеем

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать.

б) Следует из определения и неравенства (I) (с. 62).

263. Докажем, что $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant 0$. В силу результата задачи 162, а) имеем

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=$$
$$=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac})=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}+$$
$$+\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}+(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{c^2}=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2]\geqslant 0.$$

При этом знак равенства достигается лишь тогда, когда все три разности в квадратных скобках равны нулю, следовательно, когда $a=b=c$.

264. По формуле Герона площадь треугольника со сторонами a, b, c равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p}\cdot\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — известный полупериметр треугольника. Но, в силу результата предыдущей задачи,

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3=\left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3.$$

Теперь остается заметить, что сторона равностороннего треугольника периметра $2p$ равна $\dfrac{2}{3}p$ и в этом случае

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\left(p-\frac{2}{3}p\right)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3.$$

265. Объем пирамиды равен

$$V=\frac{xyz}{6}.$$

Но согласно неравенству задачи 263 имеем

$$xyz \leqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}.$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от x, y и z, то, пользуясь условием обращения неравенства в равенство, находим

$$x - y = z = \frac{a}{3}.$$

266. Достаточно доказать, что

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) \geqslant (\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}\,)^3.$$

Имеем:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) = a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 + \\ + (a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + (a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2).$$

С другой стороны,

$$(\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}\,)^3 = \\ = a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 + 3\sqrt[3]{a_1^2 a_2^2 a_3^2 b_1 b_2 b_3} + 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3 b_1^2 b_2^2 b_3^2}.$$

Но согласно неравенству задачи 263 имеем

$$\frac{a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1^2 a_2^2 a_3^2 b_1 b_2 b_3},$$
$$\frac{a_1 a_2 b_3 + a_2 b_3 b_1 + a_3 b_1 b_2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3 b_1^2 b_2^2 b_3^2}.$$

Сравнивая последние четыре формулы, получаем требуемое неравенство.

267. Неравенство задачи можно записать в виде

$$a_1 a_2 \ldots a_{2^m} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}.$$

Из неравенства (I) (с. 62) следует

$$a_1 a_2 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2, \qquad (*)$$

аналогично имеем

$$a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2,$$

отсюда

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left[\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Аналогично

$$a_5a_6a_7a_8 \leqslant \left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4;$$

отсюда

$$a_1a_2\ldots a_8 \leqslant \left[\frac{a_1+\ldots+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+\ldots+a_8}{4}\right]^4 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{\frac{a_1+\ldots+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+\ldots+a_8}{4}}{2}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{a_1+\ldots+a_8}{8}\right)^8.$$

Повторяя это рассуждение m раз, найдем

$$a_1a_2\ldots a_{2^m} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2\ldots+a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}, \qquad (**)$$

что и требовалось доказать. Заметим, что, очевидно, в $(*)$ знак равенства достигается лишь в случае $a_1 = a_2$. Используя последовательно это замечание, получим, что неравенство $(**)$ обращается в равенство лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2^m}$.

268. Существует много различных доказательств этой теоремы, однако далеко не все из них элементарны. Ввиду важности теоремы приведем три элементарных доказательства. Первое базируется на результате задачи 267, второе и третье используют метод математической индукции.

Первое доказательство. Докажем, что если теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом верна для $n+1$ положительных чисел, то она верна и для n чисел. Действительно, пусть при всяких $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}},$$

или

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant a_1a_2\ldots a_na_{n+1}.$$

Положим теперь в этом неравенстве

$$a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n};$$

в таком случае

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \\ = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}{n+1} = \\ = \frac{\dfrac{n+1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n+1} \geqslant a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right).$$

Сокращая обе части неравенства на $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ и извлекая корень степени n, приходим к требуемому результату:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Но, в силу результата предыдущей задачи, теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеет место для сколь угодно больших значений n (а именно для всех чисел n вида 2^m). Отсюда и из только что доказанного уже следует, что эта теорема справедлива для всех вообще значений n:

для каждого n можно найти число $2^m > n$, а затем, последовательно переходя от 2^m к $2^m - 1$, от $2^m - 1$ к $2^m - 2$ и т. д., дойти до требуемого значения n.

Из доказательства следует, что если для $n + 1$ чисел неравенство переходит в равенство только когда все числа равны, то и для n чисел равенство будет иметь место только в этом случае. Отсюда и из решения задачи 267 вытекает справедливость последнего замечания в условии задачи.

Примечание. В противоположность методу математической индукции, использующему переход от n к $n+1$, рассуждение, проведенное выше, основано на переходе от $n+1$ к n. Такой путь доказательства математических теорем носит название метода обратной индукции.

Второе доказательство. Проведем теперь доказательство методом математической индукции. Нам надо доказать, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Для $n = 2$ имеем:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}.$$

Допустим, что неравенство уже доказано для любых n положительных чисел. Докажем, что оно справедливо и для $n+1$ чисел. Обозначим эти числа через a_1, a_2, …, a_n, a_{n+1}, причем через a_{n+1} обозначим наибольшее из них. Тогда

$$a_{n+1} \geqslant a_1, \quad a_{n+1} \geqslant a_2, \quad \ldots, \quad a_{n+1} \geqslant a_n$$

и, следовательно,

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Обозначим

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A_n, \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = A_{n+1};$$

тогда

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Но так как $a_{n+1} \geqslant A_n$, то $a_{n+1} = A_n + b$, $b \geqslant 0$; значит,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}.$$

Возведем обе части этого равенства в $(n+1)$-ю степень:

$$(A_{n+1})^{n+1} = \left(A_n + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$= (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{b}{n+1} + \ldots \geqslant$$
$$\geqslant (A_n)^{n+1} + (A_n)^n b = (A_n)^n (A_n + b) = (A_n)^n a_{n+1}.$$

Но так как для n чисел неравенство уже доказано, то

$$(A_n)^n \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n,$$

а поэтому

$$(A_{n+1})^{n+1} \geqslant (A_n)^n a_{n+1} \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$$

и, следовательно,

$$A_{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}.$$

При этом, если не все числа равны между собой, то $b > 0$, а потому неравенство будет строгим.

Третье доказательство. Обозначим a_1 через b_1^n и т. д.; в таком случае неравенство, которое нам надо доказать, примет вид

$$b_1^n + b_2^n + \ldots + b_n^n \geqslant n b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Предположим, что это неравенство уже доказано для каждых n положительных чисел, и покажем, что в этом случае

$$b_1^{n+1} + b_2^{n+1} + \ldots + b_n^{n+1} + b_{n+1}^{n+1} \geqslant (n+1) b_1 b_2 \ldots b_{n+1}.$$

Разделим обе части последнего неравенства на b_{n+1}^{n+1} и обозначим $\dfrac{b_1}{b_{n+1}}$ через c_1 и т. д.; в таком случае будем иметь

$$c_1^{n+1} + c_2^{n+1} + \ldots + c_n^{n+1} + 1 \geqslant (n+1) c_1 c_2 \ldots c_n,$$

или
$$c_1^{n+1}+c_2^{n+1}+\ldots+c_n^{n+1}\geqslant (n+1)c_1c_2\ldots c_n-1.$$
Но по предположению индукции
$$c_1^{n+1}+c_2^{n+1}+\ldots+c_n^{n+1}\geqslant n(c_1c_2\ldots c_n)^{\frac{n+1}{n}}.$$
Таким образом, нам достаточно доказать, что
$$(n+1)c_1c_2\ldots c_n-1\leqslant n(c_1c_2\ldots c_n)^{\frac{n+1}{n}}$$
или, обозначая $\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}$ через k, что
$$(n+1)k^n-1\leqslant nk^{n+1}.$$

Последнее же неравенство вытекает из следующих преобразований:
$$\begin{aligned}(n+1)k^n-1-nk^{n+1}&=-nk^n(k-1)+(k^n-1)=\\&=(k-1)(-nk^n+k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k+1)=\\&=-(k-1)[(k^n-k^{n-1})+(k^n-k^{n-2})+\ldots+(k^n-1)]=\\&=-(k-1)^2[k^{n-1}+k^{n-2}(k+1)+\ldots\\&\ldots+k(k^{n-2}+k^{n-3}+\ldots+k+1)+(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k+1)]\geqslant 0\end{aligned}$$
(при $k>0$ выражение, стоящее в квадратной скобке, очевидно, положительно).

Последнее неравенство обращается в равенство только, если $k=1$. Отсюда методом индукции легко доказать, что равенство будет осуществляться только, если $c_1=c_2=\ldots=c_n=1$, т. е., если $b_1=b_2=\ldots=b_n=b_{n+1}$.

Примечание. Несколько других доказательств этого неравенства читатель может найти в книгах Кречмара, Невяжского и Харди, Литтвуда, Полиа, цитированных во введении к этому циклу задач. Кроме того, неравенство настоящей задачи легко вывести из результатов последующих задач 269, а) и б) и 270, если доказать эти результаты, не опираясь на задачу 268 (см., например, вторые доказательства задач 269, а) и б)).

269. а) Первое доказательство. Пусть эти числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Согласно условию задачи сумма $x_1+x_2+\ldots$

$\ldots + x_n$ задана; следовательно, задано среднее арифметическое этих n чисел
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A.$$

Согласно теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем
$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant A^n,$$
причем равенство достигается только тогда, когда
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A.$$

Таким образом, произведение $x_1 x_2 \ldots x_n$ достигает наибольшего значения A^n, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Второе доказательство. Запишем эти числа в возрастающем порядке:
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны между собой, то $x_1 x_2 \ldots x_n = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n$. Предположим теперь, что не все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны между собой, и покажем, что тогда произведение $x_1 x_2 \ldots x_n$ можно увеличить, не изменяя суммы чисел.

Обозначим через A среднее арифметическое наших чисел; в таком случае
$$x_1 < x_n, \quad x_1 < A, \quad x_n > A.$$

Заменим числа x_1 и x_n новыми x'_1 и x'_n так, чтобы среднее арифметическое чисел не изменилось:
$$\frac{x'_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x'_n}{n} = A.$$

Для этого положим
$$x'_n = A, \quad x'_1 = x_1 + (x_n - x'_n).$$
В произведении $x_1 x_2 \ldots x_n$ все члены, кроме крайних, остались без изменений; покажем, что произведение $x'_1 x'_n$ увеличилось по сравнению $x_1 x_n$:
$$x'_1 x'_n > x_1 x_n.$$

Обозначим $x_n - x'_n$ через t; тогда $x'_n = x_n - t$, $x'_1 = x_1 + t$. Имеем

$$x'_n x'_1 = (x_n - t)(x_1 + t) = x_n x_1 + (x_n - x_1)t - t^2.$$

Но так как $x'_n = A > x_1$, то

$$x_n - x_1 > x_n - x'_n = t,$$

откуда

$$(x_n - x_1) - t > 0, \quad (x_n - x_1)t - t^2 > 0$$

и, следовательно,

$$x'_n x'_1 = x_n x_1 + (x_n - x_1)t - t^2 > x_n x_1,$$

что и надо было доказать.

Если среди чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, еще остались неравные, то перенумеруем их снова в порядке возрастания, и, повторив проведенное рассуждение еще раз, увеличим произведение без изменения суммы, причем в увеличенном произведении уже по крайней мере два из чисел будут равны A. Проделав такую же замену несколько раз, мы, увеличивая на каждом шагу произведение, придем к случаю, когда все числа равны A, откуда и следует утверждение задачи.

б) Первое решение. Положим

$$\frac{a_1}{a_2} = x_1, \quad \frac{a_2}{a_3} = x_2, \quad \frac{a_3}{a_4} = x_3, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = x_{n-1}, \quad \frac{a_n}{a_1} = x_n.$$

Среднее геометрическое n чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ равно 1. Поэтому в силу результата задачи 268

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqslant 1,$$

т. е.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

Второе решение. Нетрудно доказать это неравенство методом математической индукции, не пользуясь общей теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Предположим, что для $n-1$ чисел неравенство справедливо:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1} \geqslant n - 1. \qquad (*)$$

Покажем, что в таком случае это неравенство справедливо и для n чисел.

Пусть a_n есть наименьшее из n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда

$$a_1 - a_n \geqslant 0, \quad a_{n-1} \geqslant a_n.$$

Следовательно, $a_{n-1}(a_1 - a_n) \geqslant a_n(a_1 - a_n)$. Отсюда

$$a_1 a_{n-1} + a_n^2 - a_n a_{n-1} \geqslant a_n a_1.$$

Разделим это неравенство на $a_n a_1$:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1} \geqslant 1. \qquad (**)$$

Сложим неравенства $(*)$ и $(**)$:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1} =$$
$$= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant (n-1) + 1 = n,$$

т. е. действительно наше неравенство справедливо для n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тем самым оно доказано для любого n.

270. В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268) имеем

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}},$$

откуда

$$n : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Примечание. Неравенство настоящей задачи может быть доказано большим числом способов и независимо от результата задачи 268 (рекомендуем читателю попытаться самостоятельно это сделать). В таком случае из этого неравенства можно в свою очередь вывести неравенство задачи 268.

271. В силу теоремы задачи 268 имеем

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{ab\underbrace{b\ldots b}_{n\ \text{раз}}} \leqslant \frac{a + b + b + \ldots + b}{n+1} = \frac{a + nb}{n+1}.$$

Равенство имеет место только, если $a = b$.

272. Так как среднее арифметическое n чисел больше их среднего геометрического, а среднее гармоническое меньше среднего геометрического, то

$$A(a) \geqslant H(a),$$

или

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}},$$

откуда и следует требуемый результат.

Равенство достигается только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

273. Для доказательства неравенства положим в теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \ldots, \quad a_n = n.$$

Мы получим

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \ldots n} < \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Возводя обе части этого неравенства в n-ю степень, получаем требуемое неравенство.

274. Имеем по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 = a_1 a_2 a_2 a_3 a_3 a_3 a_4 a_4 a_4 a_4 \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4}{10}\right)^{10} = \\ = \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4}{10}\right)^{10}.$$

Равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

275. а) В левой части неравенства стоит произведение 1, двух множителей $\frac{1}{2}$, трех множителей $\frac{1}{3}$ и т. д., наконец, n множителей $\frac{1}{n}$; всего $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ множителей.

Среднее геометрическое всех этих множителей равно корню степени $\frac{n(n+1)}{2}$ из этого произведения; среднее арифметическое равно

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{n}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}.$$

Из того, что среднее геометрическое меньше среднего арифметического (задача 268), и вытекает справедливость неравенства задачи.

б) Решается аналогично задаче а). Среднее арифметическое множителей, стоящих в левой части неравенства, равно

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}:\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2n+1}{3}$$

(см. задачу 134, а)).

276. По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\leqslant\left(\frac{n+a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n=$$
$$=\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=1+n\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{s}{n}\right)^n,$$

где последнее равенство получено согласно биному Ньютона. Замечаем, что коэффициент при s^m будет

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\,\frac{1}{n^m}.$$

Однако $(n-m)!n^m\geqslant n!$, поэтому

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\,\frac{1}{n^m}\leqslant\frac{n!}{m!\,n!}=\frac{1}{m!},$$

откуда и следует утверждение задачи.

Неравенство обращается в равенство только при $n = 1$.

277. Перепишем левую часть неравенства в следующем виде:

$$1^{\frac{\alpha}{2^n}} 2^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (2^n)^{\frac{1}{2^n}},$$

где α — произвольное целое число; ясно, что каково бы ни было α, величина произведения не изменится.

Далее решение задачи аналогично решению задач 275, а), б). Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом выведем

$$1^{\frac{\alpha}{2^n}} 2^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (2^n)^{\frac{1}{2^n}} = [1^\alpha 2^{2^{n-1}} (2^2)^{2^{n-2}} \ldots (2^n)]^{\frac{1}{2^n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{\alpha + 2 \cdot 2^{n-1} + 2^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 2^n \cdot 1}{\alpha + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1} \right)^{\alpha + 2^{n-1} + \ldots + 1} \right]^{\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha + n \cdot 2^n}{\alpha + 2^n - 1} \right)^{\frac{\alpha + 2^n - 1}{2^n}}.$$

При $\alpha = 1$ показатель степени станет равным единице, и правая часть неравенства обратится в

$$\frac{1}{2^n} + n,$$

откуда и следует неравенство задачи.

278. Выражение $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$ при значениях $|x| > 1$ отрицательно, в то время как при $|x| < 1$ оно положительно. Действительно,

$$(1 - x)^5(1 + x)(1 + 2x)^2 = (1 - x)^4(1 - x^2)(1 + 2x)^2.$$

Первый и третий множители всегда положительны, а средний $1 - x^2$ положителен при $|x| < 1$ и отрицателен при $|x| > 1$. Поскольку нас интересует наибольшее значение этого выражения, то ограничимся лишь значениями x, по абсолютной величине меньшими единицы. Применим теперь к пяти множителям $1 - x$, множителю $1 + x$ и двум множителям $1 + 2x$ теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268).

Имеем

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \leqslant \left(\frac{5(1-x)+(1+x)-(1+2x)}{5+1+2}\right)^{5+1+2} = \\ = \left(\frac{5+1+2}{5+1+2}\right)^{5+1+2} = 1.$$

Правая часть неравенства не зависит от x, следовательно, левая часть будет наибольшей при том значении x, при котором все множители равны между собой. Единственное значение x, при котором это имеет место, есть $x = 0$. Рассматриваемое произведение достигает при этом своего наибольшего значения, равного единице.

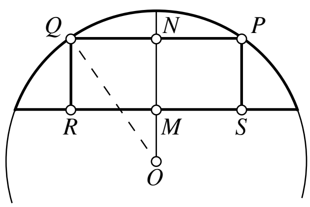


Рис. 27

279. Обозначим радиус круга через r, известное расстояние OM через a и неизвестное расстояние ON через x (рис. 27). В таком случае имеем

$$MN = x - a, \quad NQ = \sqrt{r^2 - x^2}$$

и, следовательно, квадрат площади прямоугольника равен

$$4(x-a)^2(r^2-x^2).$$

Нам надо найти, в каком случае это произведение достигает наибольшего значения. Запишем наше произведение в виде

$$\frac{4}{\alpha\beta}\,[(x-a)\cdot(x-a)\cdot\alpha(r-x)\cdot\beta(r+x)],$$

причем α и β подберем так, чтобы сумма множителей, стоящих в квадратных скобках

$$(x-a)+(x-a)+\alpha(r-x)+\beta(r+x) = \\ = (2-\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)r-2a,$$

не зависела от x, т. е. так, чтобы было $\alpha - \beta = 2$.

Произведение достигает наибольшего значения, если

$$\alpha(r-x) = \beta(r+x) = x - a$$

(см. задачу 269, а)). Но из равенства $\alpha(r-x)=\beta(r+x)$ следует $\alpha+\beta=\frac{(\alpha-\beta)r}{x}=\frac{2r}{x}$, откуда и из условия $\alpha-\beta=2$ находим $\alpha=\frac{r}{x}+1=\frac{r+x}{x}$, $\beta=\frac{r-x}{x}$. Подставляя полученное значение α в уравнение $\alpha(r-x)=x-a$, имеем

$$\frac{r^2-x^2}{x}=x-a, \quad 2x^2-ax-r^2=0,$$

откуда

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+8r^2}}{4}$$

(знак + берем потому, что должно быть $x>0$).

Отрезок x, а следовательно, и искомый прямоугольник можно построить циркулем и линейкой.

280. Объем коробки равен

$$(2a-2b)^2\cdot b=4b(a-b)^2.$$

Запишем теперь это выражение в виде

$$\frac{4}{\alpha^2}[b\cdot\alpha(a-b)\cdot\alpha(a-b)]$$

и подберем α так, чтобы сумма множителей, стоящих в квадратных скобках

$$b+2\alpha(a-b)=2\alpha a+(1-2\alpha)b,$$

на зависела от b, т. е. выберем $\alpha=\frac{1}{2}$.

Наибольшее значение произведение достигает, если

$$b=\alpha(a-b)$$

(см. задачу 269, а)); отсюда находим

$$b=\frac{\alpha a}{1+\alpha}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}}=\frac{a}{3}.$$

281. а) Неравенство этой задачи находится в таком же отношении к неравенству (I′) с. 63, как теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268) к неравенству (I). Оно может быть доказано многими способами аналогично доказательству неравенства задачи 268.

Приведем решение этой задачи, аналогичное первому решению задачи 268. Из того, что

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a_3^2+a_4^2}{2},$$

следует

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2}{2} \leqslant \frac{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_3^2+a_4^2}{2}}{2} =$$

$$= \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}.$$

Точно так же из того, что

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4},$$

$$\left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^2 \leqslant \frac{a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2}{4},$$

можно вывести, что

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_8}{8}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_8^2}{8}.$$

Продолжая этот процесс, можно доказать теорему для 2^m чисел, где m произвольно.

Покажем теперь, что если теорема справедлива для $n+1$ чисел, т. е.

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2}{n+1}, \quad (*)$$

то она справедлива и для n чисел. Положим в неравенстве $(*)$ $a_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$; получим

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2}{n+1}$$

(сравните с первым решением задачи 268), откуда легко вывести, что

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}.$$

Дальнейшая часть доказательства не отличается от заключительных рассуждений в первом решении задачи 268.

Нетрудно установить, что равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

б) Докажем прежде всего наше неравенство для случая двух чисел, т. е. покажем, что

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^k \leqslant \frac{a_1^k + a_2^k}{2}. \qquad (*)$$

Для $k = 2$ это неравенство совпадает с неравенством (I$'$) (с. 63). Предположим теперь, что оно имеет место для какого-то значения k. В таком случае имеем

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^k \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \leqslant \frac{a_1^k + a_2^k}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} = \\ = \frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1}}{2} - \frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1} - a_1^k a_2 - a_1 a_2^k}{4} = \\ = \frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1}}{2} - \frac{(a_1^k - a_2^k)(a_1 - a_2)}{4} \leqslant \frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1}}{2},$$

откуда следует, что неравенство справедливо и для значения $k + 1$. В силу принципа математической индукции отсюда следует, что неравенство $(*)$ справедливо для всех значений k. Дальше доказательство не отличается от решения задачи а).

282. Пусть $\alpha > 0$. В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем:

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \ldots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1}{\alpha} > 0$, получаем требуемый результат.

Аналогично доказывается и утверждение задачи, относящееся к случаю $\alpha < 0$ (сравните с решением задачи 270).

283. Для случая, когда α и β имеют разные знаки, теорема о степенных средних вытекает из результата задачи 282. Поэтому остается только рассмотреть случай одинаковых знаков α и β. Предположим, например, что $0 < \alpha < \beta$. Обозначим $S_\beta(a)$ через K и разделим обе части неравенства, которое нам требуется доказать, на K; обозначив $\left(\frac{a_1}{K}\right)^\beta$ через b_1 и т. д., приведем это неравенство к виду

$$\left(\frac{b_1^{\frac{\alpha}{\beta}} + b_2^{\frac{\alpha}{\beta}} + \ldots + b_n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1.$$

При этом имеем

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = \frac{1}{K^\beta}\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n} = \frac{1}{K^\beta}K^\beta = 1,$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n.$$

Положим теперь $b_1 = 1 + x_1$, $b_2 = 1 + x_2$, $\ldots$, $b_n = 1 + x_n$; в таком случае равенство $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n$ примет вид

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

Предположим пока, что отношение $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{l}$ — рациональное число. В таком случае имеем

$$b_1^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[l]{(1+x_1)^k} = \sqrt[l]{\underbrace{(1+x_1)(1+x_1)\ldots(1+x_1)}_{k\ \text{раз}}\underbrace{1\cdot 1\ldots 1}_{(l-k)\ \text{раз}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k(1+x_1)+(l-k)\cdot l}{l} = 1 + \frac{k}{l}\,x_1 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\,x_1,$$

причем знак равенства, как легко видеть, имеет место только, если $1 + x_1 = 1$, $b_1 = 1$. Отсюда, переходя к пределу, легко получить, что и для иррационального отношения $\dfrac{\alpha}{\beta}$

$$b_1^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{\beta}\,x_1$$

(причем равенство имеет место только, если $x_1 = 0$, $b_1 = 1$ *)).

Точно так же

$$b_2^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{\beta}\,x_2, \quad \ldots, \quad b_n^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{\beta}\,x_n.$$

Таким образом, действительно имеем

$$\left(\frac{b_1^{\frac{\alpha}{\beta}} + b_2^{\frac{\alpha}{\beta}} + \ldots + b_n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}x_1\right) + \left(1+\frac{\alpha}{\beta}x_2\right) + \ldots + \left(1+\frac{\alpha}{\beta}x_n\right)}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1,$$

чем и заканчивается доказательство.

*) Пусть $x_1 \neq 0$, r — рациональное число, такое, что $\dfrac{\alpha}{\beta} < r < 1$. В таком случае

$$b_1^{\frac{\alpha}{\beta}} = (1+x_1)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \left[(1+x_1)^{\frac{\alpha}{\beta}/r}\right]^r \leqslant \left[1 + \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{r}x_1\right]^r \leqslant 1 + r\cdot\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{r}x_1 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}x_1.$$

Равенство имеет место только в том случае, когда $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, т. е. когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Совершенно аналогично доказывается теорема и для случая $\alpha < \beta < 0$.

284. а) Так как $S_1 = 2$, то имеем

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} = (S_2)^2 \geqslant (S_1)^2 = 4, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant 12.$$

Равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = a_3 = 2$.

Аналогично

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{3} = (S_3)^3 \geqslant (S_1)^3 = 8, \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \geqslant 24.$$

б) Аналогично решению задачи а) имеем $S_2 = \sqrt{\dfrac{18}{3}} = \sqrt{6}$, отсюда

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{3} = (S_3)^3 \geq (S_2)^3 = 6\sqrt{6}, \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \geqslant 18\sqrt{6};$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = S_1 \leqslant S_2 = \sqrt{6}, \quad a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 3\sqrt{6}.$$

Равенство в обоих случаях достигается только если $a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt{6}$.

285. Докажем наше неравенство по индукции. При этом нам удобнее будет ввести специальное обозначение для $(\Sigma_k)^k$ (среднего арифметического всевозможных произведений из n чисел a_1, a_2, …, a_n по k). Обозначив это выражение через P_k, мы приведем неравенство, которое надо доказать, к виду

$$P_k^2 \geqslant P_{k+1} \cdot P_{k-1}.$$

Присоединим к числу выражений $P_k(a)$ еще выражение $P_0(a)$, которое мы будем считать равным 1.

Наше неравенство является очевидным, если число n чисел a равно 2. Действительно, в этом случае существуют только три величины $P_k(a)$:

$$P_0(a) = 1, \quad P_1(a) = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad P_2(a) = a_1 a_2,$$

и неравенство принимает вид

$$[P_1(a)]^2 > P_2(a)P_0(a) = P_2(a),$$

или

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 > a_1a_2$$

(см. выше, с. 62).

Предположим теперь, что для $n-1$ чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\ldots, a_{n-1}$ неравенство уже доказано, и докажем, что в таком случае оно будет справедливо и для n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Обозначим сумму всевозможных произведений по k из n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ через $S_k(a)$, а сумму произведений по k из $n-1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — через $\overline{S_k(a)}$. Вынося в выражении для $S_k(a)$ во всех членах, содержащих множитель a_n, этот множитель за скобку, мы получим тождество

$$S_k(a) = \overline{S_k(a)} + a_n\overline{S_{k-1}(a)}.$$

Далее будем обозначать выражения P_k, составленные для $n-1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, через $\overline{P_k}$. В таком случае будем иметь

$$P_k = \frac{S_k(a)}{C_n^k} = \frac{\overline{S_k(a)}}{C_n^k} + a_n\frac{\overline{S_{k-1}(a)}}{C_n^k} = \\ = \frac{\overline{S_k(a)}}{C_{n-1}^k\dfrac{n}{n-k}} + a_n\frac{\overline{S_{k-1}(a)}}{C_{n-1}^{k-1}\dfrac{n}{k}} = \frac{n-k}{n}\overline{P_k} + \frac{k}{n}a_n\overline{P_{k-1}}.$$

Составим теперь разность

$$P_k^2 - P_{k+1}P_{k-1} = \\ = \left[\frac{n-k}{n}\overline{P_k} + \frac{k}{n}a_n\overline{P_{k-1}}\right]^2 - \left[\frac{n-k-1}{n}\overline{P_{k+1}} + \frac{k+1}{n}a_n\overline{P_k}\right]\times \\ \times\left[\frac{n-k+1}{n}\overline{P_{k-1}} + \frac{k-1}{n}a_n\overline{P_{k-2}}\right] = \\ = \frac{1}{n^2}\{[(n-k)^2\overline{P_k^2} - (n-k-1)(n-k+1)\overline{P_{k+1}P_{k-1}}] +$$

$$+ a_n[2k(n-k)\overline{P_kP_{k-1}} - (k-1)(n-k-1)\overline{P_{k+1}P_{k-2}} -$$
$$- (k+1)(n-k+1)\overline{P_kP_{k-1}}] + a_n^2[k^2\overline{P_{k-1}^2} -$$
$$- (k+1)(k-1)\overline{P_kP_{k-2}}]\} = \frac{1}{n^2}\{A + a_nB + a_n^2C\},$$

где через A, B, C обозначены выражения, стоящие в квадратных скобках.

Отметим, что в силу сделанного предположения индукции

$$\overline{P_k^2} > \overline{P_{k+1}P_{k-1}}, \qquad \overline{P_{k-1}^2} > \overline{P_kP_{k-2}},$$

откуда, перемножая эти два неравенства, также получаем

$$\overline{P_kP_{k-1}} > \overline{P_{k+1}P_{k-2}}.$$

Поэтому в выражении для $P_k^2 - P_{k+1}P_{k-1}$

$$A = (n-k)^2\overline{P_k^2} - [(n-k)^2 - 1]\overline{P_{k+1}P_{k-1}} =$$
$$= \overline{P_k^2} + [(n-k)^2 - 1][\overline{P_k^2} - \overline{P_{k+1}P_{k-1}}] > \overline{P_k^2},$$

$$B = 2k(n-k)\overline{P_kP_{k-1}} - (k-1)(n-k-1)\overline{P_{k+1}P_{k-2}} -$$
$$- (k+1)(n-k+1)\overline{P_kP_{k-1}} = -2\overline{P_kP_{k-1}} +$$
$$+ (k-1)(n-k-1)[\overline{P_kP_{k-1}} - \overline{P_{k+1}P_{k-2}}] > -2\overline{P_kP_{k-1}},$$

$$C = k^2\overline{P_{k-1}^2} - (k^2-1)\overline{P_kP_{k-2}} =$$
$$= \overline{P_{k-1}^2} + (k^2-1)[\overline{P_{k-1}^2} - \overline{P_kP_{k-2}}] > \overline{P_{k-1}^2}.$$

Таким образом,

$$\overline{P_k^2} - \overline{P_{k+1}P_{k-1}} > \frac{1}{n^2}(\overline{P_k^2} - 2a_n\overline{P_kP_{k-1}} + a_n^2\overline{P_{k-1}^2}) =$$
$$= \frac{1}{n^2}(\overline{P_k} - a_n\overline{P_{k-1}})^2 \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему.

286. Исключим с самого начала случай $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ и будем доказывать, что $\Sigma_k < \Sigma_l$. Прежде всего, так как $P_0(a) = 1$, то из задачи 285 следует

$$P_1^2 > P_2P_0 = P_2; \quad \Sigma_1^2 > \Sigma_2^2, \text{ или } \Sigma_1 > \Sigma_2.$$

Далее, перемножая неравенства $\Sigma_1 > \Sigma_2$, $\Sigma_2^4 > \Sigma_3^3 \cdot \Sigma_1$, получим

$$\Sigma_2^3 > \Sigma_3^3, \quad \Sigma_2 > \Sigma_3.$$

Точно так же, перемножая неравенства $\Sigma_1 > \Sigma_2$, $\Sigma_2^4 > \Sigma_3^3 \cdot \Sigma_1$, $\Sigma_3^9 > \Sigma_4^6 \cdot \Sigma_2^3$, будем иметь

$$\Sigma_3^6 > \Sigma_4^6, \quad \Sigma_3 > \Sigma_4.$$

Подобным образом докажем, что

$$\Sigma_1 > \Sigma_2 > \Sigma_3 > \ldots > \Sigma_n.$$

287. Имеем $\Sigma_2 = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = 2$. Далее, по теореме о симметрических средних

$$\Sigma_1(a) \geqslant \Sigma_2(a) = 2, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geqslant 4 \cdot 2 = 8,$$

$$\Sigma_4(a) \leqslant \Sigma_2(a) = 2, \quad a_1a_2a_3a_4 \leqslant 2^4 = 16.$$

В обоих случаях равенство достигается только, если $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$.

288. Так как сумма углов $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, то $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg} \dfrac{\gamma}{2}$, или

$$\frac{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}}{1 - \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

откуда, освобождаясь от знаменателей, имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1.$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a_1, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = a_2, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = a_3.$$

В таком случае мы видим, что симметрическое среднее Σ_2 чисел a_1, a_2 и a_3 равно $\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда совершенно аналогично решению задачи 287 находим:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\geqslant 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

В обоих случаях равенство достигается только в том случае, если $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

289. Неравенство Коши–Буняковского очень важное, поэтому мы приведем четыре доказательства справедливости этого неравенства.

Первое доказательство. Имеем

$$(xa_1+b_1)^2+(xa_2+b_2)^2+\ldots+(xa_n+b_n)^2=$$
$$=(x^2a_1^2+2xa_1b_1+b_1^2)+(x^2a_2^2+2xa_2b_2+b_2^2)+\ldots$$
$$\ldots+(x^2a_n^2+2xa_nb_n+b_n^2)=Ax^2+2Bx+C,\qquad (*)$$

где

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,\quad B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$
$$C=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2.$$

Левая часть равенства $(*)$, как сумма квадратов, неотрицательна при любом x. В частности, она неотрицательна при $x=-\dfrac{B}{A}$. Подставляя в равенство $(*)$ это значение x, получим

$$A\frac{B^2}{A^2}-2B\frac{B}{A}+C=\frac{AC-B^2}{A}\geqslant 0.$$

Так как $A>0$, то

$$AC-B^2\geqslant 0,\quad\text{или}\quad B^2\leqslant AC.$$

Подставляя вместо A, B, C их значения, получим искомое неравенство.

При этом равенство возможно только в том случае, если

$$xa_1+b_1=xa_2+b_2=xa_3+b_3=\ldots=xa_n+b_n=0,$$

откуда

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}\;(=-x).$$

Второе доказательство. Для двух чисел a и b имеем

$$(a-b)^2 \geqslant 0,$$

откуда $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ и $ab \leqslant \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$. Введем теперь обозначения

$$A=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}, \quad B=\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2},$$

$$\overline{a_1}=\frac{a_i}{A}, \quad \overline{b_1}=\frac{b_i}{B} \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n);$$

тогда

$$\overline{a_1^2}+\ldots+\overline{a_n^2}=\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{A^2}=1,$$

$$\overline{b_1^2}+\ldots+\overline{b_n^2}=\frac{b_1^2+\ldots+b_n^2}{B^2}=1.$$

Напишем n неравенств:

$$\overline{a_1}\overline{b_1} \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{a_1^2}+\frac{1}{2}\,\overline{b_1^2}, \quad \ldots, \quad \overline{a_n}\overline{b_n} \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{a_n^2}+\frac{1}{2}\,\overline{b_n^2}.$$

Сложив их, получим

$$\overline{a_1}\overline{b_1}+\ldots+\overline{a_n}\overline{b_n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Подставим в это неравенство вместо $\overline{a_i}$ и $\overline{b_i}$ их значения:

$$\frac{a_1b_1}{AB}+\ldots+\frac{a_nb_n}{AB} \leqslant 1, \quad a_1b_1+\ldots+a_nb_n \leqslant AB,$$

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2),$$

что и требовалось доказать.

Равенство может иметь место только, если

$$\overline{a_1}-\overline{b_1}=\overline{a_2}-\overline{b_2}=\ldots=\overline{a_n}-\overline{b_n}=0,$$

откуда

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}\left(=\frac{B}{A}\right).$$

Третье доказательство. При $n = 1$ неравенство, очевидно, справедливо:

$$(a_1 b_1)^2 \leqslant a_1^2 b_1^2.$$

Докажем теперь, что если неравенство справедливо для n пар чисел

$$C^2 \leqslant AB,$$

где $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, $B = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$, $C = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, то оно справедливо и для $n+1$ пар чисел

$$(C + a_{n+1} b_{n+1})^2 \leqslant (A + a_{n+1}^2)(B + b_{n+1}^2).$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
&(A + a_{n+1}^2)(B + b_{n+1}^2) - (C + a_{n+1} b_{n+1})^2 = \\
&= AB + Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 - \\
&\qquad - C^2 - 2Ca_{n+1} b_{n+1} - (a_{n+1} b_{n+1})^2 = \\
&= (AB - C^2) + (Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 - 2Ca_{n+1} b_{n+1}) = \\
&= (AB - C^2) + (\sqrt{A} b_{n+1} - \sqrt{B} a_{n+1})^2 + \\
&\qquad + 2(\sqrt{AB} - C) a_{n+1} b_{n+1} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

так как каждая из трех скобок $\geqslant 0$.

Отсюда, в силу принципа математической индукции, следует, что неравенство имеет место при всех n.

Равенство может иметь место только, если $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$.

Четвертое доказательство. Имеет место тождество

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_k b_l - a_l b_k)^2,$$

которое можно доказать методом математической индукции.

Правая часть этого тождества неотрицательна и обращается в нуль лишь в случае пропорциональности последовательностей (a_k) и (b_k). В противном случае имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

290. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=$$
$$=[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2+\ldots+(\sqrt{a_n})^2]\times$$
$$\times\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a_1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{a_2}}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{\frac{1}{a_n}}\right)^2\right]\geqslant$$
$$\geqslant\left(\sqrt{a_1}\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{a_2}\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\ldots+\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{1}{a_n}}\right)^2=n^2,$$

что и требовалось доказать.

Равенство, очевидно, имеет место только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

291. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+\ldots+a_n\cdot 1)^2\leqslant$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(1+1+\ldots+1),$$

откуда

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}.$$

Равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

292. В решении задачи 288 мы показали, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

Теперь согласно неравенству Коши–Буняковского будем иметь

$$\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2=1,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Равенство имеет место только, если $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

293. Имеет место тождество

$$(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 = (x_1 + y_1)x_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x_n + y_n)x_n + (x_1 + y_1)y_1 + \ldots + (x_n + y_n)y_n.$$

Полагая в неравенстве Коши–Буняковского

$$a_1 = x_1 + y_1, \ldots, a_n = x_n + y_n,$$
$$b_1 = x_1, \ldots, b_n = x_n,$$

получаем неравенство

$$(x_1 + y_1)x_1 + \ldots + (x_n + y_n)x_n \leqslant$$
$$\leqslant [(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2]^{\frac{1}{2}} [x_1^2 + \ldots + x_n^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично

$$(x_1 + y_1)y_1 + \ldots + (x_n + y_n)y_n \leqslant$$
$$\leqslant [(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2]^{\frac{1}{2}} [y_1^2 + \ldots + y_n^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Складывая теперь последние два неравенства, получим

$$(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 \leqslant [(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left[(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Разделив обе части последнего неравенства на

$$[(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

получим окончательно

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2},$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место только, если $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

294. В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$4Q^2 = (a_1a_2 + a_2a_1 + a_1a_3 + a_3a_1 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_{n-1})^2 \leqslant \\ \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(a_2^2 + a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2) = \\ = (n-1)P \cdot (n-1)P,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Равенство, очевидно, имеет место только, если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

295. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(\sqrt{p_1} \cdot \sqrt{p_1}x_1 + \sqrt{p_2} \cdot \sqrt{p_2}x_2 + \ldots + (\sqrt{p_n} \cdot \sqrt{p_n}x_n)^2 \leqslant \\ \leqslant (\sqrt{p_1^2} + \sqrt{p_2^2} + \ldots + \sqrt{p_n^2})(\sqrt{p_1^2}x_1^2 + \sqrt{p_2^2}x_2^2 + \ldots + \sqrt{p_n^2}x_n^2).$$

Равенство, очевидно, достигается только, если

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

296. Полагая в неравенстве задачи 295

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{6},$$

имеем

$$\left(\frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{1}{6}\,x_3\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\,x_1^2 + \frac{1}{3}\,x_2^2 + \frac{1}{6}\,x_3^2\right).$$

Равенство, очевидно, имеет место только, если

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}.$$

297. Это неравенство есть лишь иная форма записи неравенства Коши–Буняковского. Действительно, полагая в последнем $a_k^2 = x_k$, $b_k^2 = y_k$ и извлекая корень квадратный из обеих частей неравенства, мы придем к неравенству задачи.

298. Дважды применяя неравенство Коши–Буняковского сначала к парам чисел a_1b_1, a_2b_2, …, a_nb_n; c_1d_1, c_2d_2, …, c_nd_n, а затем к квадратам чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$; $c_1, \ldots, c_n$; $d_1, \ldots, d_n$, имеем

$$(a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leqslant \\ \leqslant (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \ldots + a_n^2b_n^2)^2(c_1^2d_1^2 + c_2^2d_2^2 + \ldots + c_n^2d_n^2)^2 \leqslant \\ \leqslant (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4)\times \\ \times (c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \ldots + d_n^4).$$

Равенство, очевидно, достигается только, если $a_1 : b_1 : c_1 : : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 = \ldots = a_n : b_n : c_n : d_n$.

299. Перенумеруем числа a_i в порядке возрастания:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n.$$

В таком случае при отыскании наибольшего возможного значения дроби $\dfrac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2}$ можно ограничиться тем случаем, когда числа b_i расположены в порядке убывания:

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n.$$

Действительно, если бы какое-нибудь число b_i было меньше числа b_j с большим номером (i, j — какие-то номера от 1 до n; $i < j$), то можно было бы увеличить эту дробь, переменив местами b_i и b_j (числитель при этом не изменится, а знаменатель уменьшится, так как $a_ib_j + a_jb_i > a_ib_i + a_jb_j$, ибо $(a_ib_j + a_jb_i) - (a_ib_i + a_jb_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) < 0$).

Мы будем считать, что не все числа a_i равны между собой или не все числа b_j равны между собой: если $a_1 = a_2 = \ldots \ldots = a_n$ и $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, то интересующая нас дробь равна 1, а выражение $1 + \left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{M_1M_2}{m_1m_2}} - \sqrt{\dfrac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2$ тоже равно 1 (ибо $M_1 = m_1$, $M_2 = m_2$). Положим теперь

$$a_i^2 = \alpha_i a_1^2 + \beta_i a_n^2, \\ b_i^2 = \alpha_i b_1^2 + \beta_i b_n^2 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Из этой системы уравнений можно определить числа α_i и β_i:

$$\alpha_i = \frac{a_n^2 b_i^2 - a_i^2 b_n^2}{a_n^2 b_1^2 - a_1^2 b_n^2}, \quad \beta_i = \frac{a_i^2 b_1^2 - a_1^2 b_i^2}{a_n^2 b_1^2 - a_1^2 b_n^2}.$$

Знаменатель этих дробей положителен $\left(a_n^2 b_1^2 - a_1^2 b_n^2 > 0\text{, ибо } \dfrac{a_n^2}{a_1^2} > \dfrac{b_n^2}{b_1^2}\right)$, а числитель по крайней мере неотрицателен $\left(a_n^2 b_i^2 - a_i^2 b_n^2 \geqslant 0\text{, ибо } \dfrac{a_n^2}{a_i^2} \geqslant \dfrac{b_n^2}{b_i^2}\text{; аналогично показывается, что } a_i^2 b_1^2 - a_1^2 b_i^2 \geqslant 0\right)$. Таким образом, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$; при этом $\alpha_i = 0$ только, если $a_i = a_n$, $b_i = b_n$, $\beta_i = 1$, и аналогично $\beta_i = 0$, если $a_i = a_1$, $b_i = b_1$, $\alpha_i = 1$.

Введем еще обозначения:

$$1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} = \mathrm{A},$$
$$\beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{n-1} + 1 = \mathrm{B}.$$

В таком случае числитель интересующей нас дроби можно будет записать в виде

$$(\mathrm{A}a_1^2 + \mathrm{B}a_n^2)(\mathrm{A}b_1^2 + \mathrm{B}b_n^2).$$

Что же касается знаменателя, то воспользуемся тем, что в силу неравенства (II) (с. 70)

$$a_i b_i = \sqrt{(\sqrt{\alpha_i}a_1)^2 + (\sqrt{\beta_i}a_n)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{\alpha_i}b_1)^2 + (\sqrt{\beta_i}b_n)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_i a_1 b_1 + \beta_i a_n b_n. \quad (*)$$

Сложив неравенства $(*)$, отвечающие номерам $i = 1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, n-1, n$ (здесь мы считаем $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_n = 0$, $\beta_n = 1$), получим

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant \mathrm{A}a_1 b_1 + \mathrm{B}a_n b_n.$$

Таким образом, мы видим, что наша дробь не больше, чем

$$\frac{(\mathrm{A}a_1^2 + \mathrm{B}a_n^2)(\mathrm{A}b_1^2 + \mathrm{B}b_n^2)}{(\mathrm{A}a_1 b_1 + \mathrm{B}a_n b_n)^2}.$$

Но

$$\frac{(\mathrm{A}a_1^2+\mathrm{B}a_n^2)(\mathrm{A}b_1^2+\mathrm{B}b_n^2)}{(\mathrm{A}a_1b_1+\mathrm{B}a_nb_n)^2}=1+\mathrm{AB}\frac{(a_nb_1-a_1b_n)^2}{(\mathrm{A}a_1b_1+\mathrm{B}a_nb_n)^2},$$

а в силу неравенства (I) (с. 64)

$$\mathrm{A}a_ib_1+\mathrm{B}a_nb_n\geqslant 2\sqrt{\mathrm{A}a_1b_1\cdot\mathrm{B}a_nb_n}. \qquad (**)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\mathrm{AB}\frac{(a_nb_1-a_1b_n)^2}{(\mathrm{A}a_1b_1+\mathrm{B}a_nb_n)^2}\leqslant 1+\mathrm{AB}\frac{(a_nb_1-a_1b_n)^2}{(2\sqrt{\mathrm{AB}a_1b_1a_nb_n})^2}=$$

$$=1+\left(\frac{\sqrt{\dfrac{a_nb_1}{a_1b_n}}-\sqrt{\dfrac{a_1b_n}{a_nb_1}}}{2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Неравенства $(*)$ не могут обращаться в равенства, если фигурирующие в них числа положительны $\left(\text{ибо } \dfrac{a_1}{a_n}\neq\dfrac{b_1}{b_n}\right)$. Таким образом, они выполняются только, если все α_i равны 0 или 1 (в последнем случае $\beta_i=0$), т. е. если

$$a_1=a_2=\ldots=a_k<a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_n,$$

$$b_1=b_2=\ldots=b_k>b_{k+1}=b_{k+2}=\ldots=b_n.$$

При этом, для того, чтобы еще и неравенство $(**)$ обращалось в равенство, необходимо, чтобы было $\mathrm{A}a_1b_1=\mathrm{B}a_nb_n$, т. е. $\mathrm{A}a_1b_1=\mathrm{B}a_nb_n$, т. е. $ka_1b_1=(n-k)a_nb_n$, или $\dfrac{a_1}{a_n}:\dfrac{b_n}{b_1}=\dfrac{n-k}{k}$.

Этим определяется тот второй случай, когда

$$\frac{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}=$$

$$=1+\left(\frac{\sqrt{\dfrac{M_1M_2}{m_1m_2}}-\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2$$

(первый такой случай: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, мы имели выше).

300. Имеем

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) - \\ - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \\ = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + \ldots \right. \\ \left. \ldots + (a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} - b_n)\right] \geqslant 0,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

301. Поскольку по условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $p + q = pq$ и, следовательно,

$$p = \frac{p+q}{q} = \frac{p_1+q_1}{q_1}, \quad q = \frac{p+q}{p} = \frac{p_1+q_1}{p_1},$$

где p_1 и q_1 — целые положительные числа, пропорциональные p и q $\left(\text{если } p = \frac{\alpha}{\beta} \text{ и } q = \frac{\gamma}{\delta}\right.$, где α, β, γ и δ — целые числа, то можно положить, например, $p_1 = \alpha\delta$ и $q_1 = \gamma\beta$$\Big)$. Поэтому доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$xy \leqslant \frac{qx^{\frac{p_1+q_1}{q_1}} + py^{\frac{p_1+q_1}{p_1}}}{p+q}.$$

Положим теперь

$$x_1 = x^{\frac{p_1+q_1}{q_1}}, \quad y_1 = y^{\frac{p_1+q_1}{p_1}}.$$

Отсюда имеем, используя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268),

$$xy = x_1^{\frac{q_1}{p_1+q_1}} y_1^{\frac{p_1}{p_1+q_1}} = (\underbrace{x_1x_1\ldots x_1}_{q_1 \text{ раз}}\underbrace{y_1y_1\ldots y_1}_{p_1 \text{ раз}})^{\frac{1}{p_1+q_1}} \leqslant \\ \leqslant \left[\left(\frac{q_1x_1 + p_1y_1}{q_1+p_1}\right)^{q_1+p_1}\right]^{\frac{1}{p_1+q_1}} = \frac{qx_1 + py_1}{q+p} = \\ = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p_1+q_1}{q_1}} + \frac{p}{p+q}y^{\frac{p_1+q_1}{p_1}} = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

Равенство имеет место только, если $x^p = y^q$.

302. Обозначив

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a, \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b$$

и разделив доказываемое неравенство на $a^\alpha b^\beta$, придем к неравенству, эквивалентному неравенству задачи,

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_2}{b}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta \leqslant 1.$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268) можно получить, что для каждого значения k ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\left(\frac{a_k}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_k}{b}\right)^\beta \leqslant \left(\frac{\alpha\dfrac{a_k}{a} + \beta\dfrac{b_k}{b}}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta} = \alpha\frac{a_k}{a} + \beta\frac{b_k}{b}$$

(ср. с решением задачи 301).

Складывая эти неравенства почленно для всех значений $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_2}{b}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha a_1}{a} + \frac{\beta b_1}{b} + \frac{\alpha a_2}{a} + \frac{\beta b_2}{b} + \ldots + \frac{\alpha a_n}{a} + \frac{\beta b_n}{b} =$$
$$= \frac{\alpha}{a}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{\beta}{b}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= \frac{\alpha a}{a} + \frac{\beta b}{b} = \alpha + \beta = 1,$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место только, если $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots \ldots = a_n : b_n$.

З а м е ч а н и е. Эту теорему можно доказать также исходя из неравенства Коши–Буняковского, что, однако, значительно сложнее.

303. Поскольку это неравенство имеет много применений в математическом анализе, приведем два его доказательства.

Первое доказательство. Полагая в неравенстве задачи 302

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

и, далее,

$$a_1 = x_1^p, \quad a_2 = x_2^p, \quad \ldots, \quad a_n = x_n^p,$$
$$b_1 = y_1^q, \quad b_2 = y_2^q, \quad \ldots, \quad b_n = y_n^q,$$

мы получаем требуемое неравенство.

Равенство имеет место только, если $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \ldots$ $\ldots = x_n : y_n$.

Второе доказательство. Положим

$$(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} = X, \quad (y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} = Y$$

и разделим обе части доказываемого неравенства на XY. Если мы при этом обозначим

$$\frac{x_k}{X} = z_k, \quad \frac{y_k}{Y} = t_k \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

то доказываемое неравенство сведется к неравенству

$$z_1t_1 + z_2t_2 + \ldots + z_nt_n \leqslant 1, \tag{$*$}$$

где должно быть

$$z_1^p + z_2^p + \ldots + z_n^p = 1, \quad t_1^q + t_2^q + \ldots + t_n^q = 1. \tag{$**$}$$

Согласно неравенству задачи 301 мы можем записать n неравенств:

$$\begin{gathered}
z_1t_1 \leqslant \frac{1}{p}\, z_1^p + \frac{1}{q}\, t_1^q,\\
z_2t_2 \leqslant \frac{1}{p}\, z_2^p + \frac{1}{q}\, t_2^q,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_nt_n \leqslant \frac{1}{p}\, z_n^p + \frac{1}{q}\, t_n^q.
\end{gathered}$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$z_1t_1 + z_2t_2 + \ldots + z_nt_n \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{p}(z_1^p + z_2^p + \ldots + z_n^p) + \frac{1}{q}(t_1^q + t_2^q + \ldots + t_n^q)$$

или, пользуясь теперь условиями (∗∗) и тем, что $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, получаем неравенство (∗), эквивалентное неравенству задачи.

Легко видеть, что равенство имеет место только, когда $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \ldots = x_n : y_n$.

304. Доказательство проводится аналогично доказательству неравенства задачи 302.

Обозначив

$$\begin{gathered} a_1+a_2+\ldots+a_n=a,\\ b_1+b_2+\ldots+b_n=b,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ l_1+l_2+\ldots+l_n=l \end{gathered}$$

и разделив доказываемое неравенство на $a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, придем к неравенству, эквивалентному неравенству задачи,

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{l_1}{l}\right)^\lambda+\ldots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{l_n}{l}\right)^\lambda\leqslant 1.$$

Из теоремы о средних получаем (ср. с решением задач 301 и 302)

$$\left(\frac{a_k}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_k}{b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{l_k}{l}\right)^\lambda\leqslant$$
$$\leqslant\left[\frac{\alpha\dfrac{a_k}{a}+\beta\dfrac{b_k}{b}+\ldots+\lambda\dfrac{l_k}{l}}{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}\right]^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}=\alpha\frac{a_k}{a}+\beta\frac{b_k}{b}+\ldots+\lambda\frac{l_k}{l}.$$

Складывая почленно эти неравенства для всех значений $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, получаем

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{l_1}{l}\right)^\lambda+\ldots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{l_n}{l}\right)^\lambda\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{\alpha a_1}{a}+\frac{\beta b_1}{b}+\ldots+\frac{\lambda l_1}{l}\right)+\ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{\alpha a_n}{a} + \frac{\beta b_n}{b} + \ldots + \frac{\lambda l_n}{l}\right) = \frac{\alpha}{a}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \\ + \frac{\beta}{b}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + \ldots + \frac{\lambda}{l}(l_1 + l_2 + \ldots + l_n) = \\ = \frac{\alpha a}{a} + \frac{\beta b}{b} + \ldots + \frac{\lambda l}{l} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место только, если $a_1 : b_1 : \ldots : l_1 = a_2 : b_2 : \ldots : l_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : l_n$.

Примечание. Обозначив

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad \ldots, \quad \lambda = \frac{1}{t} \quad \text{и} \quad a_i = x_i^p, \quad b_i = b_i^q, \quad \ldots, \quad l_i = u_i^t$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

мы придем к новой форме этого неравенства, аналогичной неравенству Гёльдера: если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{t} = 1$, то при любых положительных числах $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$; $\ldots$; $u_1, \ldots, u_n$

$$x_1y_1\ldots u_1 + x_2y_2\ldots u_2 + x_ny_n\ldots u_n \leqslant \\ \leqslant (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{1/p}(y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{1/q} \times \ldots \\ \ldots \times (u_1^t + u_2^t + \ldots + u_n^t)^{1/t}.$$

305. Положив в неравенстве задачи 304, что n последовательностей положительных чисел суть $1, a_1$; $1, a_2$; $\ldots$; $1, a_n$ и $\alpha = \beta = \ldots = \frac{1}{n}$, получим

$$(1 + a_1)^{\frac{1}{n}}(1 + a_2)^{\frac{1}{n}}\ldots(1 + a_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + a_1^{\frac{1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}\ldots a_n^{\frac{1}{n}},$$

откуда и следует неравенство задачи.

Равенство имеет место только, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

306. Неравенство настоящей задачи есть частный случай неравенства задачи 304 при $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = \frac{1}{n}$.

Равенство имеет место только, если $a_1 : b_1 : \ldots : l_1 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : l_n$.

307. Положив в неравенстве задачи 304

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}, \quad a_1 = b_1 = c_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{x}, \quad b_2 = \frac{1}{y}, \quad c_2 = \frac{1}{z},$$

получим

$$(a_1+a_2)^{\frac{1}{3}}(b_1+b_2)^{\frac{1}{3}}(c_1+c_2)^{\frac{1}{3}} \geqslant a_1^{\frac{1}{3}}b_1^{\frac{1}{3}}c_1^{\frac{1}{3}} + a_2^{\frac{1}{3}}b_2^{\frac{1}{3}}c_2^{\frac{1}{3}},$$

или

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)} \geqslant 1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Заметим, что по теореме о среднем геометрическом и среднем арифметическом (см. задачу 263)

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant 3.$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)} \geqslant 1+3=4.$$

Возводя в куб обе части, получаем требуемое неравенство.

308. Обозначим правую часть неравенства через S. В таком случае имеем

$$\begin{gathered}S^2 = (a_1+b_1+\ldots+l_1)^2 + (a_2+b_2+\ldots+l_2)^2 + \ldots \\ \ldots + (a_n+b_n+\ldots+l_n)^2 = [a_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + \\ + a_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots + a_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)] + \\ + [b_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + b_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots \\ \ldots + b_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)] + \ldots + [l_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + \\ + l_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots + l_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)].\end{gathered}$$

Применяя неравенство Гёльдера (задача 303) при $p=q=2$ к каждому выражению в квадратных скобках, получим

$$S^2 \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\,S + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\,S + \ldots \\ \ldots + \sqrt{l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2}\,S,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Равенство имеет место только, если

$$a_1 : b_1 : \ldots : l_1 = a_2 : b_2 : \ldots : l_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : l_n.$$

309. а) $u_{n+1} - u_n = a_0[(n+1)^k - n^k] + a_1[(n+1)^{k-1} - n^{k-1}] + \ldots + a_{k-1}[(n+1) - n]$. Но при любых a и b имеет место формула

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Применим эту формулу к разности $(n+1)^k - n^k$:

$$(n+1)^k - n^k = (n+1)^{k-1} + (n+1)^{k-2}n + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)n^{k-2} + n^{k-1} = k \cdot n^{k-1} + \ldots,$$

где точками обозначены члены ниже чем $(k-1)$-й степени относительно n. Остальные слагаемые никак не могут увеличить степень последовательности. Отсюда следует, что степень последовательности $u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n$ равна $k-1$:

$$u_n^{(1)} = a_0 k \cdot n^{k-1} + \ldots$$

б) После перехода от последовательности $u_n^{(s)}$ к последовательности $u_n^{(s+1)}$ степень последовательности уменьшается на 1. Поэтому $u_n^{(k)}$ — последовательность нулевой степени; другими словами, все члены последовательности $u_n^{(k)}$ равны постоянному числу. Значит, $u_n^{(k+1)} = 0$ для всех n, что и требовалось доказать.

Примечание. Из решения задачи также вытекает, что у последовательности k-й степени ряды разностей 1-го порядка, 2-го порядка и т. д. до k-го порядка включительно не являются рядами одних нулей (т. е. $u_n^{(k+1)}$ есть первый ряд разностей, все члены которого равны нулю). Действительно, ряд разностей s-го порядка нашей последовательности, где $s < k$, представляет собой последовательность $(k-s)$-го порядка, члены которой не могут обращаться в нуль (многочлен степени $k-s$ обращается в нуль не больше чем при $k-s$ различных значениях переменной). Что же касается ряда разностей k-го порядка, то по поводу его см. задачу 310.

310. Первое решение. В решении задачи 309, а) мы видели, что если

$$u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$$

есть последовательность k-го порядка, то $u_n^{(1)}$ есть последовательность $(k-1)$-го порядка вида

$$u_n^{(1)} = a_0 \cdot kn^{k-1} + \ldots$$

Отсюда следует, что последовательность $u_n^{(2)}$ имеет вид

$$u_n^{(2)} = a_0 k(k-1)n^{k-2} + \ldots,$$

последовательность $u_n^{(3)}$ имеет вид

$$u_n^{(3)} = a_0 k(k-1)(k-2)n^{k-3} + \ldots$$

и т. д., наконец, последовательность $u_n^{(k-1)}$ имеет вид

$$a_0 k(k-1)\ldots 2 \cdot n + \ldots,$$

где точками обозначено какое-то постоянное слагаемое. Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

Второе решение. В силу результата задачи 309, а) ряд разностей k-го порядка последовательности k-й степени является последовательностью нулевой степени, т. е. все члены его равны между собой (не зависят от n). Таким образом, достаточно определить $u_0^{(k)}$.

Для ряда u_n мы имеем формулу

$$u_n = u_0 + C_n^1 u_0^{(1)} + \ldots + C_n^k u_0^{(k)}$$

(см. задачу 313). Приравняем обе формулы:

$$a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k = u_0 + C_n^1 u_0^{(1)} + \ldots + C_n^k u_0^{(k)}.$$

Слева и справа мы имеем один и тот же многочлен, только справа нужно еще сделать приведение подобных членов. Слагаемое $a_0 n^k$ может получиться лишь из слагаемого $C_n^k u_0^{(k)}$:

$$C_n^k u_0^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} u_0^{(k)}.$$

Коэффициент при n^k равен $\frac{u_0^{(k)}}{k!}$. Приравняв коэффициенты при n^k в левой и правой частях равенства, получим

$$a_0 = \frac{u_0^{(k)}}{k!}; \quad \text{отсюда} \quad u_0^{(k)} = a_0 \cdot k!,$$

что и требовалось доказать.

311. а) Выпишем ряд u_n и k рядов сумм так, чтобы каждое число следующего ряда сумм стояло под теми числами, суммой которых оно является. Мы получим

$$\begin{array}{cccccccc}
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_n & u_{n+1} & \ldots \\
\overline{u}_0^{(1)} & \overline{u}_1^{(1)} & \overline{u}_2^{(1)} & \overline{u}_3^{(1)} & \ldots & \overline{u}_n^{(1)} & \overline{u}_{n+1}^{(1)} & \ldots \\
\overline{u}_0^{(2)} & \overline{u}_1^{(2)} & \overline{u}_2^{(2)} & \overline{u}_3^{(2)} & \ldots & \overline{u}_n^{(2)} & \overline{u}_{n+1}^{(2)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\overline{u}_0^{(k)} & \overline{u}_1^{(k)} & \overline{u}_2^{(k)} & \overline{u}_3^{(k)} & \ldots & \overline{u}_n^{(k)} & \overline{u}_0^{(k)} & \ldots
\end{array}$$

Число $\overline{u}_n^{(k)}$ зависит только от u_n, u_{n+1}, $\ldots$, u_{n+k} и не зависит от остальных чисел данного ряда. Докажем теперь, что

$$\overline{u}_n^{(k)} = C_k^0 u_n + C_k^1 u_{n+1} + C_k^2 u_{n+2} + \ldots + C_k^k u_{n+k}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $k = 1$ формула верна, так как она принимает вид

$$\overline{u}_n^{(1)} = C_1^0 u_n + C_1^1 u_{n+1} = u_n + u_{n+1},$$

что является определением первого ряда сумм. Далее, пусть формула верна для значения $k-1$; докажем, что в этом случае она будет справедлива и для k:

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_n^{(k)} = \overline{u}_n^{(k-1)} + \overline{u}_{n+1}^{(k-1)} = \\
&= (C_{k-1}^0 u_n + C_{k-1}^1 u_{n+1} + C_{k-1}^2 u_{n+2} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} u_{n+k-1} + \\
&\qquad + (C_{k-1}^0 u_{n+1} + C_{k-1}^1 u_{n+2} + C_{k-1}^2 u_{n+3} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} u_{n+k}) = \\
&= C_{k-1}^0 u_n + (C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1) u_{n+1} + (C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2) u_{n+2} + \ldots \\
&\qquad \ldots + (C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}^{k-1}) u_{n+k-1} + C_{k-1}^{k-1} u_{n+k}.
\end{aligned}$$

Из определения символа C_n^m следует, что

$$C_{k-1}^0 = C_k^0, \quad C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1 = C_k^1, \quad C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 = C_k^2$$

и т. д. Поэтому

$$\overline{u}_n^{(k)} = C_k^0 u_n + C_k^1 u_{n+1} + \ldots + C_k^{k-1} u_{n+k-1} + C_k^k u_{n+k},$$

что и требовалось доказать.

б) Доказательство аналогично решению задачи а) и предоставляется читателям.

312. Будем вести доказательство по индукции. Для первой строки формула верна, так как $C_1^1 = \dfrac{1}{1!}$.

Пусть она верна для $(n-1)$-й строки; докажем, что она верна для n-й строки.

Из определения треугольника Паскаля имеем

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Поэтому при $k > 1$ получаем

$$C_n^k = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}.$$

Преобразуем это выражение:

$$C_n^k = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}\left(1 + \frac{n-k}{k}\right) = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

что и требовалось доказать.

Если $k = 1$, то

$$C_n^1 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 = 1 + (n-1) = n.$$

Примечание. Из полученной формулы следует, что числа, стоящие на $(k+1)$-й линии треугольника Паскаля, параллельной боковой стороне треугольника, представляют собой последовательность k-й степени. Действительно, если k постоянно, а n меняется, то

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

является многочленом k-й степени от n.

313. Для доказательства достаточно заметить, что числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccccc}
u_0^{(n)} & & u_0^{(n-1)} & & u_0^{(n-2)} & & \ldots & & u_0^{(1)} & & u_0 \\
& u_1^{(n-1)} & & u_1^{(n-2)} & & u_1^{(n-3)} & & \ldots & & u_1 & \\
& & u_2^{(n-2)} & & u_2^{(n-3)} & & \ldots & & u_2 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & & u_n & & & & &
\end{array}$$

является треугольником сумм, т. е. его можно переписать в виде

$$\begin{array}{ccccccccccc}
v_0 & & v_1 & & v_1 & & \ldots & v_{n-1} & & v_n \\
& \overline{v}_0^{(1)} & & \overline{v}_1^{(1)} & & \overline{v}_2^{(1)} & & \ldots & \overline{v}_{n-1}^{(1)} & \\
& & \overline{v}_0^{(2)} & & \overline{v}_1^{(2)} & & \ldots & \overline{v}_{n-2}^{(2)} & & \\
& & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
& & & & & \overline{v}_0^{(n)} & & & &
\end{array}$$

и далее воспользоваться результатом задачи 311, а).

314. Если все числа k-го и последующих рядов разностей равны нулю, то числа $(k-1)$-го ряда разностей постоянны (и отличны от нуля по условию задачи). Далее, так как

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+2} = \ldots = 0, \quad u_0^k \neq 0,$$

то

$$u_n = u_0 + C_n^1 u_0^{(1)} + C_n^2 u_0^{(2)} + \ldots + C_n^k u_0^{(k)} = u_0 + n \cdot u_0^{(1)} + \\ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot u_0^{(2)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u_0^{(k)}$$

(см. задачу 313). Но эта формула выражает u_n как многочлен k-й степени относительно n, что и доказывает утверждение задачи.

315. Рассмотрим последовательность

$$u_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \ldots + n^4$$

и вычислим нулевые члены первых пяти рядов разностей:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 \ldots \\
& 1 & 16 & & 81 & & 256 & & 625 \ldots & \\
& & 15 & 65 & & 175 & & 369 \ldots & & \\
& & & 50 & 110 & & 194 \ldots & & & \\
& & & & 60 & 84 \ldots & & & & \\
& & & & & 24 \ldots & & & &
\end{array}$$

Здесь

$$u_n^{(1)} = (n+1)^4$$

— последовательность четвертой степени; поэтому $u_0^{(k)} = 0$, если только $k > 5$ (см. задачу 309, б));

$$u_0^{(1)} = 1, \; u_0^{(2)} = 15, \; u_0^{(3)} = 50, \; u_0^{(4)} = 60, \; u_0^{(5)} = 24;$$

поэтому в силу задачи 313

$$u_n = 0 + n + 15\,\frac{n(n-1)}{2} + 50\,\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \\ + 60\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 24\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Это и есть искомая формула. Приведя подобные члены, мы получим

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Примечание. Аналогично можно найти сумму

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

где k — любое натуральное число.

316. а) Первым рядом разностей последовательности

$$u_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

является последовательность k-й степени $(n+1)^k$, у которой все числа $(k+1)$-го ряда разностей равны нулю. Значит, $u_n^{(k+2)} = 0$. Но если ряд имеет $k+1$ ряд разностей, не равных нулю, то это целая рациональная последовательность $(k+1)$-й степени (см. задачу 314).

б) Пусть

$$u_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = A_0 n^{k+1} + A_1 n^k + \ldots$$

В таком случае

$$u_n^{(k+1)} = A_0 (k+1)!$$

(см. задачу 310). Но $u_n^{(k+1)}$ есть k-й ряд разностей последовательности $u_n^{(1)}$ k-й степени:

$$u_n^{(1)} = (n+1)^k = n^k + \ldots$$

Отсюда в силу той же задачи 310 имеем

$$u_n^{(k+1)} = k!.$$

Итак, получаем

$$k! = A_0(k+1)!; \quad A_0 = \frac{1}{k+1}$$

— коэффициент при n^{k+1} в выражении для

$$u_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

равен

$$\frac{1}{k+1}.$$

Сложнее определить коэффициент при n^k. Для этого вернемся к формуле задачи 313:

$$u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k = \\ = u_0 + C_n^1 u_0^{(1)} + \ldots + C_n^{k-1} u_0^{(k-1)} + C_n^k u_0^{(k)}.$$

Приравнивая коэффициент при n^{k-1} с обеих сторон этой формулы, мы получим

$$a_1 = -\frac{1+2+\ldots+(k-1)}{k!}\,u_0^{(k)} + \frac{1}{(k-1)!}\,u_0^{(k-1)} = \\ = -\frac{(k-1)k}{2k!}\,u_0^{(k)} + \frac{1}{(k-1)!}\,u_0^{(k-1)} = \\ = -\frac{1}{2(k-2)!}\,u_0^{(k)} + \frac{1}{(k-1)!}\,u_0^{(k-1)}$$

(ср. со вторым решением задачи 310). Теперь, применяя эту формулу к последовательности

$$(n+1)^k = n^k + C_k^1 n^{k-1} + \ldots + 1,$$

мы получаем

$$C_k^l = -\frac{1}{2(k-2)!} \cdot k! + \frac{1}{(k-1)!} u_0^{(k-1)};$$

$$u_0^{(k-1)} = (k-1)!\left[k + \frac{k(k-1)}{2}\right] = (k-1)!\frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)!}{2}.$$

Переходя к последовательности

$$u_n = 1^k + 2^k + 2^k + \ldots + n^k = A_0 u^{k+1} + A_1 u^{k+1} + \ldots + A_{n+1},$$

для которой последовательность $(n+1)^k$ составляет первый ряд разностей, мы получаем по той же формуле

$$A_1 = -\frac{1}{2(k-1)!}\, u_0^{(k+1)} + \frac{1}{k!}\, u_0^k = \\ = -\frac{1}{2(k-1)!} k! + \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(Здесь по понятным причинам $u_0^{(k+1)}$ и $u_0^{(k)}$ обозначают то же, что выше обозначалось соответственно через $u_0^{(k)}$ и $u_0^{(k-1)}$.) Следовательно, коэффициент A_1 при n^k равен $\dfrac{1}{2}$.

Примечание. В решениях задач 134, а)–в) (см. с. 246) мы имели в полном соответствии с результатом настоящей задачи

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n,$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}\, n^4 + \frac{1}{2}\, n^3 + \frac{1}{4}\, n^2,$$

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \\ = \frac{1}{5}\, n^5 + \frac{1}{2}\, n^4 + \frac{1}{3}\, n^3 - \frac{1}{30}\, n;$$

при $k = 1$, очевидно, имеем

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{2}\, n.$$

Точно так же можно быть уверенным, что, например,

$$1^{100} + 2^{100} + \ldots + n^{100} = \frac{1}{10!}\, n^{101} + \frac{1}{2}\, n^{100} + \ldots,$$

$$1^{1000} + 2^{1000} + \ldots + n^{1000} = \frac{1}{100!}\, n^{1001} + \frac{1}{1}\, n^{1000} + \ldots$$

и т. д.

317. Если $a_0 = 1$, то задача решается просто. В задаче 310 было доказано, что в этом случае числа k-го ряда разностей равны $k!$. Если числа данного ряда делятся на d, то и числа всех рядов разностей делятся на d. Поэтому $k!$ делится на d.

Рассмотрим теперь общее решение, которое верно и для случая $a_0 \neq 1$. Выше мы имели (см. задачу 313)

$$u_n = u_0 + nu_0^{(1)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\,u_0^{(k)}.$$

Так как числа u_n все делятся на d, то и u_0, $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, ..., $u_0^{(k)}$ делятся на d.

Вынесем d за скобки. Получим

$$u_n = d\left[v_0 + nv_0^{(1)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}v_0^{(k)}\right],$$

где через v_0, $v_0^{(1)}$, $v_0^{(2)}$, ..., $v_0^{(k)}$ обозначены частные от деления на d соответственно u_0, $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, ..., $u_0^{(k)}$. Все числа v_0, $v_0^{(1)}$, $v_0^{(2)}$, ..., $v_0^{(k)}$ целые.

В скобках в виде дробей записаны лишь числа треугольника Паскаля:

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Выражение в квадратных скобках приведем к общему знаменателю:

$$u_n = d\,\frac{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \ldots + b_k}{k!}.$$

Числа b_0, b_1, ..., b_k являются целыми и

$$\frac{db_0}{k!} = a_0, \quad \frac{db_1}{k!} = a_1, \quad \ldots, \quad \frac{dk_k}{k!} = a_k.$$

Сократим d и $k!$ на их наибольший общий делитель. Получим

$$\frac{d}{k!} = \frac{d_1}{m},$$

где d_1 и m не имеют общего делителя:

$$\frac{d_1 b_0}{m} = a_0, \quad \frac{d_1 b_1}{m} = a_1, \quad \ldots, \quad \frac{d_1 b_k}{m} = a_k,$$

или

$$b_0 = \frac{a_0 m}{d_1}, \quad b_1 = \frac{a_1 m}{d_1}, \quad \ldots, \quad b_k = \frac{a_k m}{d_1}.$$

Отсюда следует, что числа a_0, a_1, …, a_k все делятся на d_1. Но мы предположили, что числа a_0, a_1, …, a_k не имеют общего делителя. Значит,

$$d_1 = 1, \quad \frac{d}{k!} = \frac{1}{m}, \quad \text{или} \quad \frac{k!}{d} = m,$$

т. е. $k!$ делится на d. А это и требовалось доказать.

318. Построим треугольник сумм для чисел C_n^0, C_n^1, C_n^2, …, C_n^n:

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & & \ldots & & C_n^n \\
& C_{n+1}^1 & & C_{n+1}^2 & & C_{n+1}^3 & \ldots & C_{n+1}^n & \\
& & C_{n+2}^2 & & C_{n+2}^3 & \ldots & C_{n+2}^n & & \\
& & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
& & & C_{2n-1}^{n-1} & & C_{2n-1}^n & & & \\
& & & & C_{2n}^n & & & &
\end{array}$$

В вершине его получим C_{2n}^n, так как весь треугольник является частью треугольника Паскаля.

В то же время, пользуясь общей формулой для членов треугольника сумм (см. задачу 311, а), получим в вершине число

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

Значит,

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

319. Рассмотрим ряд чисел

$$1,\ \frac{a}{b},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \ldots$$

Для него построим треугольник сумм:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & \frac{a}{b} & & \frac{a^2}{b^2} & & \frac{a^3}{b^3}\ldots \\
& 1+\frac{a}{b} & & \frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2} & & \frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3}\ldots & \\
& & 1+2\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2} & & \frac{a}{b}+2\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3}\ldots & & \\
& & & 1+3\frac{a}{b}+3\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3}\ldots & & &
\end{array}$$

Обозначим через u_n n-е число данного ряда:

$$u_n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Тогда, как нетрудно заметить,

$$\overline{u_n^{(1)}} = \left(1+\frac{a}{b}\right) u_n.$$

Отсюда по индукции выводим, что

$$\overline{u_n^{(k)}} = \left(1+\frac{a}{b}\right)^k u_n.$$

Значит,

$$\overline{u_0^{(k)}} = \left(1+\frac{a}{b}\right)^k.$$

В то же время

$$\overline{u_0^{(k)}} = C_k^0 u_0 + C_k^1 u_1 + C_k^2 u_2 + \ldots + C_k^k u_k =$$
$$= 1 + k\frac{a}{b} + \frac{k(k-1)}{2}\frac{a^2}{b^2} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}\frac{a^k}{b^k}.$$

Итак,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k = 1 + k\frac{a}{b} + \frac{k(k-1)}{2}\frac{a^2}{b^2} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}\frac{a^k}{b^k}.$$

Умножим обе части равенства на b^k:

$$(a+b)^k = \\ = b^k + kab^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}a^2b^{k-2} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}a^k = \\ = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}b^k.$$

Это и есть доказываемая формула.

320. Рассмотрим треугольник

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{C_0^0} & & \frac{1}{2C_1^1} & & \frac{1}{3C_2^2} & & \frac{1}{4C_3^3}\ \ldots \\
& -\frac{1}{2C_1^0} & & -\frac{1}{3C_2^1} & & -\frac{1}{4C_3^2}\ \ldots & \\
& & \frac{1}{3C_2^0} & & \frac{1}{4C_3^1}\ \ldots & & \\
& & & -\frac{1}{4C_3^0}\ \ldots & & &
\end{array}$$

Знак минус стоит во 2-й, 4-й, 6-й, ... строках.

Докажем, что это — треугольник разностей ряда

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots$$

Для этого достаточно доказать, что при любом k, не большем $n-1$, имеет место равенство

$$\frac{1}{nC_{n-1}^k} - \frac{1}{(n+1)C_n^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)C_n^k}.$$

Имеем

$$\frac{1}{nC_{n-1}^k} - \frac{1}{(n+1)C_n^{k+1}} = \\ = \frac{k!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)} - \frac{(k+1)!}{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k)} = \\ = \frac{k!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right) = \\ = \frac{k!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\cdot\frac{n-k}{n+1} = \frac{1}{(n+1)C_n^k}.$$

Теперь, после того как мы доказали, что этот треугольник есть треугольник разностей ряда

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots,$$

проделаем над ним все то, что указано в условии. Мы получим треугольник Паскаля.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Докажите сначала, что общая сумма всех чисел рукопожатий, сделанных когда-либо каждым из людей, четна.

2. Подсчитайте, сколько ходов должен сделать конь, чтобы обойти все клетки доски; это число нечетно.

3. а) Воспользуйтесь методом математической индукции.

Ответ. $k = 2^n - 1$.

б) Обозначьте наименьшее число приемов, с помощью которых можно снять с проволоки n колец, через $K(n)$ и выразите $K(n)$ через $K(n-2)$.

Ответ.

$$K(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(2^{n+1} - 2), & \text{если } n \text{ четно,} \\ \dfrac{1}{3}(2^{n+1} - 1), & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

4. а) При первом взвешивании поместите на каждую чашку весов по 27 монет.

б) Искомое число k определяется неравенствами $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$.

5. Сначала положите на чашку весов по одному кубику; затем, положив на одну чашку оба эти кубика, на вторую кладите поочередно по паре из оставшихся кубиков.

6. а) При первом взвешивании поместите на каждую чашку весов по четыре монеты.

б) $k = 7$. Докажите, что если число N монет не превосходит $\dfrac{3^n - 3}{2}$, то при помощи n взвешиваний на чашечных весах без гирь всегда можно выделить одну фальшивую монету и одновременно определить, легче она или тяжелее остальных (разумеется, при этом должно быть $N > 2$); если же $N > \dfrac{3^n - 3}{2}$, то возможно, что n взвешиваниями этого не удастся сделать. Доказательство, опирающееся на принцип математической индукции, проведите в несколько этапов. А именно, последовательно докажите следующие предложения.

А. Пусть имеется N монет, разбитых на две группы X и Y, и известно, что одна из этих монет фальшивая, причем если эта монета находится в группе X, то она легче остальных, а если в группе Y, то тяжелее остальных. В таком случае, если $N \leqslant 3^n$, то фальшивую монету можно выделить n взвешиваниями, а если $N > 3^n$, то это, возможно, не удастся.

Б. Пусть имеется N монет, среди которых одна фальшивая, имеющая другой вес, чем остальные (более легкая или более тяжелая — не известно), и еще по крайней мере одна заведомо настоящая монета. В таком случае, если $N \leqslant \dfrac{3^n - 1}{2}$, то при помощи n взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить фальшивую монету и определить, легче она, чем остальные, или тяжелее, а если $N > \dfrac{3^n - 1}{2}$, то это, возможно, не удастся.

В. Предложение, сформулированное в начале указания.

7. а) Одно звено. б) 7 звеньев.

8. Второй.

9. Докажите сначала, что веса всех гирь одновременно четны или нечетны.

10. Воспользуйтесь тем, что четность или нечетность первых четырех чисел каждой строки нашего числового треугольника зависит только от четности и нечетности первых четырех чисел предыдущей строки.

11. Измените порядок следования полей так, чтобы с каждого поля можно было перейти на соседнее.

12. 15 621.

13. Два рубля.

14. а) Закон чередования дней в году, по нашему календарю, таков: через каждые четыре года один год, номер которого делится на 4, является високосным; исключение составляют годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400. Отсюда легко усмотреть, что 400 лет содержат целое число недель; следовательно, остается проверить, начинается ли в течение каких-либо 400 лет новый год чаще с субботы или с воскресенья.

Ответ. С воскресенья.

б) На пятницу.

15. Все числа, оканчивающиеся на 0, и двузначные числа: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99; 12, 24, 36, 48; 13, 26, 39; 14, 28; 15; 16; 17; 18; 19.

16. а) $6250\underbrace{\ldots0}_{n\text{ раз}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

б) Попытайтесь решить задачу: найти целое число, начинающееся с известной цифры a и при зачеркивании этой цифры уменьшающееся в 35 раз.

17. а) Докажите предварительно, что число уменьшается в 9 раз при зачеркивании цифры 0, стоящей на втором месте.

б) 10 125, 2025, 30 375, 405, 50 625, 6075, 70 875 (к каждому из этих чисел можно еще приписать в конце произвольное число нулей).

18. а) Числа, у которых все цифры, кроме первых двух, нули.

б) Рассмотрите отдельно случаи, когда первая цифра искомого числа есть $1, 2, 3, \ldots, 9$. Всего имеется 104 различных числа, удовлетворяющих условию задачи, к каждому из которых можно в конце приписать произвольное число нулей.

19. а) Наименьшее возможное число 142 857.

б) Цифрами 1 или 2. Наименьшее число, начинающееся цифрой 2, есть 285 714.

20. Используйте то, что числа, которые делятся на 5, должны оканчиваться цифрами 0 или 5; числа, которые делятся на 6 или на 8, оканчиваются четной цифрой.

21. Попытайтесь решить задачу: найти число, увеличивающееся вдвое от перенесения начальной цифры в конец.

22. Решается аналогично предыдущей задаче.

23. Наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи, 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

24. а) Число, меньшее своего обращенного в 5, 6, 8 или 7 раз, должно начинаться с цифры 1; число, меньшее своего обращенного в 2 и 3 раза, может начинаться с цифр 1, 2, 3, 4 и соответственно 1, 2, 3.

б) Числа, в 4 раза меньшие своего обращенного, — это числа ряда

$$0,\ 2178,\ 21\,978,\ 219\,978,\ 2\,199\,978,\ \ldots \tag{$*$}$$

или числа, десятичная запись которых имеет вид

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — какие-то числа ряда $(*)$.

25. а) 142 857.

б) Попытайтесь найти восьмизначное число, увеличивающееся в 6 раз при перестановке четырех последних цифр на первые четыре места с сохранением их порядка.

26. 142 857.

27. Разложите на множители многочлены, выписанные в условии задачи; рассмотрите, какие остатки может давать число n при делении на 3 (соответственно на 5, на 7 и т. д.).

28. а) Воспользуйтесь тем, что разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований.

б) См. указание к задаче 27.

в) $56\,786\,730 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot31\cdot61$. Далее воспользуйтесь предложениями задач 27, а)–д) и аналогичными предложениями, вытекающими из теоремы Ферма (см. задачу 240).

29. Воспользуйтесь тем, что $n^2+3n+5 = (n+7)(n-4)+33$.

30. Разложите заданное выражение на множители и сравните число множителей с числом множителей, на которые можно разложить число 33.

31. Воспользуйтесь тем, что всякое целое число, не делящееся на 5, можно представить в виде $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$.

Ответ. 0 или 1.

32. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

33. 625 и 376.

34. Найдите две последние цифры числа N^{20}; три последние цифры числа N^{200}.

Ответ. 7; 3.

35. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Группируя отдельные члены суммы $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$, докажите, что эта сумма делится на $\dfrac{n}{2}$ и на $n+1$ или на n и на $\dfrac{n+1}{2}$

36. Разность суммы цифр числа, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, должна делиться на 11.

37. Число делится на 7.

38. Всегда можно найти число, начинающееся с цифр 1, 0 и делящееся на K. Переставляя подходящим образом цифры этого числа и вычитая одно из другого два делящихся на K числа, можно доказать, что 9 делится на K.

39. $26\,460=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$. Докажите в отдельности, что заданное выражение делится на $5\cdot 7^2$ и что оно делится на $2^2\cdot 3^3$.

40. Воспользуйтесь тождеством

$$11^{10}-1^{10}=$$
$$=(11-1)(11^9+11^8+11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1).$$

41. Запишите данное число в виде

$$(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222}).$$

42. Воспользуйтесь методом математической индукции.

43. Воспользуйтесь тем, что $10^6-1=999\,999$ делится на 7 и что любая степень десяти дает при делении на 6 остаток 4.

Ответ. 5.

44. а) 9; 2. б) 88; 67.

в) Найдите, какими двумя цифрами оканчиваются числа $7^{(14^{14})}$ и $2^{(14^{14})}$.

Ответ. 36.

46. а) 7; 07. б) 3; 43.

46. Рассмотрите числа

$$Z_1=9,\quad Z_2=9^{Z_1},\quad Z_3=9^{Z_2},\quad \ldots,\quad Z_{1001}=9^{Z_{1000}}=N$$

и определите последовательно одну последнюю цифру числа Z_1, две последние цифры числа Z_2, три последние цифры числа Z_3, четыре последние цифры числа Z_4, пять последних цифр числа Z_5, пять последних цифр чисел Z_6, Z_7, ..., $Z_{1001} = N$.

Ответ. 45 289.

47. Искомые 1000 цифр будут $p\underbrace{PP\ldots P}_{23\text{ раза}}$, где

$$P = 020\,408\,163\,265\,306\,122\,448\,979\,591\,836\,734\,693\,877\,551$$

— период чистой периодической дроби, в которую обращается $\dfrac{1}{49}$, а p — группа последних 34 цифр числа P. Для доказательства воспользуйтесь тем, что

$$N = \frac{50^{1000}-1}{50-1} = \frac{50^{1000}-1}{49}.$$

48. 24.

49. а) Сравните степени, в которых входит какое-нибудь простое число p в произведение $a!$ и в произведение $(t+1)\times$ $\times(t+2)\ldots(t+a)$.

б), в) Воспользуйтесь результатом задачи а).

г) Докажите сначала существование такого числа k, что kd, где d — разность прогрессии, дает при делении на $n!$ остаток 1.

50. Не делится.

51. а) $(n-1)!$ не делится на n; если — n простое число или $n=4$.

б) $(n-1)!$ не делится на n^2, если n есть простое число, удвоенное простое число или если $n=8$, $n=9$.

52. Докажите, что все такие числа меньше $7^2=49$.

Ответ. 24, 12, 8, 6, 4 и 2.

53. а) Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел делится на 5, но не делится на 25.

б) Определите остаток, который дает сумма четных степеней трех последовательных целых чисел при делении на 3.

в) Определите остаток, который дает сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел при делении на 9.

54. а) Найдите остатки от деления чисел A и B на 9.

б) 192, 384, 576 или 273, 546, 819, или 327, 654, 981, или 219, 438, 657.

55. Четырьмя нулями.

56. Воспользуйтесь теоремой Пифагора; отдельно покажите, что площадь прямоугольника делится на 4 и что она делится на 3.

57. Рассмотрите, какой остаток может давать $b^2 - 4ac$ при делении на 8.

58. Докажите, что после сложения дробей и возможного сокращения результата получится дробь, знаменатель которой делится на 3 и на 2.

59. Для доказательства того, что числа M и N не являются целыми, надо показать, что после сложения мы получим дробь, знаменатель которой делится на более высокую степень 2, чем числитель. Доказывая, что число K не является целым, надо в предшествующих рассуждениях заменить степень двойки степенью тройки.

60. а) Приведем заданную сумму дробей к общему знаменателю $(p-1)!$. При этом в числителе мы получим сумму всевозможных произведений из $p-1$ чисел $1, 2, \ldots, p-1$ по $p-2$. Обозначим сумму всевозможных произведений из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по k через Π_n^k. Нам надо показать, что Π_{p-1}^{p-2}, где p простое, делится на p^2.

Использовав формулу

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1) = \\ = x^{p-1} - \Pi_{p-1}^1 x^{p-1} + \ldots + \Pi_{p-1}^{p-1} \quad (*)$$

и то, что

$$[(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)](x-p) = \\ = (x-1)[(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)(x-p)],$$

докажите равенство друг другу двух многочленов, коэффициенты которых зависят от Π_{p-1}^1, Π_{p-1}^2, …, Π_{p-1}^{p-1}. Приравнивая затем коэффициенты двух полученных таким образом многочленов, получите ряд соотношений между величинами Π_{p-1}^k и выведите из этих соотношений утверждение задачи.

б) Приведите данную сумму дробей к общему знаменателю $[(p-1)!]^2$; при этом числитель будет равен $(\Pi_{p-1}^{p-2})^2 - 2(p-1)!\Pi_{p-1}^{p-3}$. Далее см. указание к задаче а).

61. Воспользуйтесь тем, что дробь $\dfrac{p}{q}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\dfrac{q}{p}$.

62. Докажите, что для любого целого числа b число разностей $a_k - a_l$, делящихся на b, не меньше числа разностей $k-l$, делящихся на b; при этом рассмотрите сначала случай, когда n кратно b.

63. Докажите сначала тождество

$$(1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}) \cdot 101 = \\ = (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1).$$

64. а) $a - b$; б) $a - b$.

65. Покажите, что $(2^{2^n} + 1) - 2$ делится на все предшествующие числа заданной последовательности; отсюда будет следовать, что $2^{2^n} + 1$ не может иметь с предыдущим числом последовательности общий делитель, отличный от 2.

66. Рассмотрите, какие остатки могут давать числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ при делении на 3.

67. а) Рассмотрите, какие остатки могут давать числа p, $8p-1$ и $8p+1$ при делении на 3.

б) Рассмотрите, какие остатки могут давать числа p, $8p^2 + 1$ и $8p^2 - 1$ при делении на 3.

68. Рассмотрите, какие остатки может давать простое число при делении на 6.

69. См. указание к предыдущей задаче.

70. а) Докажите, что разность прогрессии должна делиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Ответ. 199, 409, 619, ..., 2089.

б) Докажите, что если первый член прогрессии отличен от 11, то разность должна делиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$; если первый член равен 11, то разность должна делиться на 210.

При решении задач 70, а) и б) удобно пользоваться таблицами простых чисел.

71. а) Таким будет нечетное число, не делящееся на 3.

б) Достаточно найти число, не имеющее с остальными 15 из рассматриваемых 16 чисел общих множителей 2, 3, 5, 7, 11 и 13.

72. Произведение равно $\underbrace{22\ldots2}_{665\text{ раз}}1\underbrace{77\ldots7}_{665\text{ раз}}8$.

73. Частное равно

$$\underbrace{777\,000\,777\,000\ \ldots\ 777\,000}_{\text{группа }777\,000\text{ повторяется }166\text{ раз}}77,$$

остаток 700.

74. $222\,222\,674\,025 = 471\,405^2$.

75. Докажите, что если

$$\sqrt{\alpha} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100},$$

то и

$$\alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}.$$

76. 523 152 и 523 656.

77. 1946

78. а) Преобразуйте выписанное число и сравните его с выражением для суммы членов арифметической прогрессии с разностью 1, первым членом 10^{n-1} и последним членом $10^n - 1$.

б) 1 769 580.

79. Рассмотрите сначала все целые числа от 0 до 99 999 999, приписав к тем из них, которые имеют меньше восьми цифр, нули слева так, чтобы эти числа стали восьмизначными.

80. 7.

81. Нет.

82. Воспользуйтесь тем, что каждые девять гирь, веса которых равны n^2, $(n+1)^2$, …, $(n+8)^2$, можно разбить на три группы, первые две из которых имеют одинаковый вес, а третья легче их на 18.

83. 240.

84. а) 147, 258, 369. б) 941, 852, 763.

85, 86. Воспользуйтесь формулой для суммы членов арифметической прогрессии.

87. Представьте выражение $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ в виде квадрата многочлена.

88. Докажите, что среди рассматриваемых чисел не может быть больше четырех попарно различных.

89. Докажите прежде всего, что каковы бы ни были первоначальные числа, не позднее чем через четыре шага мы придем к четверке четных чисел.

90. б) Постройте возрастающую последовательность, начиная с первого из выписанных 101 числа. Если в этой последовательности будет меньше 11 чисел, то вычеркните эти числа и постройте новую возрастающую последовательность, начинающуюся с первого оставшегося числа; если и в этой последовательности будет меньше 11 чисел, то вычеркните и ее и постройте новую возрастающую последовательность и т. д. Если все построенные последовательности содержат меньше 11 чисел, то у нас будет не меньше 11 последовательностей; используя это обстоятельство, можно построить убывающую последовательность из 11 чисел.

91. Рассмотрите наибольшие нечетные делители выбранных чисел.

92. а) Рассмотрите наименьшие по абсолютной величине остатки, которые дают числа при делении на 100.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрите остатки от деления на 100 чисел a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, ...

93. Пусть шахматист сыграл за какой-то день a_1 партий; за этот день и следующий a_2 партий; за три последовательных дня a_3 партий и т. д. Рассмотрите 154 числа: a_1, a_2, ..., a_{77}, $a_1 + 20$, $a_2 + 10$, ..., $a_{77} + 20$.

94. Рассмотрите остатки от деления на N чисел 1, 11, 111, ...

95. Последние четыре цифры разности вполне определяются последними четырьмя цифрами уменьшаемого и вычитаемого. Докажите, что существуют n и k такие, что последние четыре цифры $(n+k)$-го и $(n+k+1)$-го членов ряда Фибоначчи соответственно равны последним цифрам k-го и $(k+1)$-го членов ряда; в таком случае последние четыре цифры $(n+k-1)$-го члена будут равны последним четырем цифрам $(k-1)$-го члена ряда и т. д. Таким путем можно найти член ряда Фибоначчи, последние четыре цифры которого совпадают с последними четырьмя цифрами первого члена, равного нулю.

96. Рассмотрите дробные части чисел $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, 1000\alpha$.

97. Докажите, что в интервале $(0, A)$ числовой оси (A — произвольное целое положительное число, меньшее $m+n$) содержится ровно $A-1$ из наших дробей.

98. Обозначьте через k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ число тех из наших чисел, которые заключаются между $\dfrac{1000}{i}$ и $\dfrac{1000}{i+1}$, и подсчитайте число меньших 1000 чисел, кратных хотя бы одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

99. Длина k периода $\dfrac{p}{q}$ может быть определена как наименьшая степень k, для которой $10^k - 1$ делится на q. Если $k = 2l$, то отсюда следует, что $10^l + 1$ делится на q, т. е. $\dfrac{10^l+1}{q}$ есть целое число. Из последнего можно вывести, что в периоде $\overline{a_1a_2\ldots a_la_{l+1}a_{l+2}\ldots a_k}$ дроби $\dfrac{p}{q}$

$$a_1 + a_{l+1} = a_2 + a_{l+2} = \ldots = a_l + a_{2l} = 9.$$

100. Воспользуйтесь тем, что число цифр в периодах дробей $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ равно наименьшим положительным числам k и l таким, что $10^k - 1$ делится на p^n и соответственно $10^l - 1$ делится на p^{n+1}.

101. Всякое число x может быть представлено в виде $[x] + a$, где $0 \leqslant a < 1$.

102. Рассмотрите все точки плоскости с целыми координатами, расположенные внутри прямоугольника $0 < x < q$, $0 < y < p$ (x, y — координаты точек плоскости) под его диагональю, исходящей из точки $(0, 0)$.

103. Воспользуйтесь методом математической индукции. (Можно также решить задачу, исходя из геометрических соображений; для этого надо рассмотреть все точки с целыми координатами, расположенные в первом координатном углу под гиперболой $xy = n$.)

104–106. В решении задачи 104 следует использовать то, что

$$[(2+\sqrt{2})^n] = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n - 1$$

Аналогично решаются и задачи 105, а), б) и 106.

107. Из p последовательных чисел

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \quad \ldots, \quad n-p+1$$

одно (и только одно) делится на p; если это число равно N, то $\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{N}{p}$. Таким образом, разность $C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right]$ можно записать так:

$$\frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(n-p+1)}{p!} - \frac{N}{p}.$$

108. Докажите сначала, что если n — число членов последовательности $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, $\ldots$, не превосходящих N, то $n\alpha = N + l$, где $1 - \alpha \leqslant l < 1$.

109. Докажите, что $\left(\frac{N}{2^k}\right)$ равно числу не превосходящих N целых чисел, делящихся на 2^{k-1}, но не делящихся на 2^k.

110. а) 7744.

б) 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

111. Если a — число, образованное первыми двумя цифрами искомого числа, а b — число, образованное двумя последними цифрами, то $99a = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$.

Ответ. 9801, 3025, 2025.

112. а) 4624, 6084, 6400, 8464.

б) Таких чисел вовсе нет.

113. а) 145.

б) Только число 1.

114. а) 1, 81.

б) 1, 8, 17, 18, 26, 27.

115. а) x не может быть больше 4.

Ответ. $x = 1$, $y = \pm 1$; $x = 3$, $y = \pm 3$.

б) $x = 1$, $y = \pm 1$, z любое четное; $x = 3$, $y = \pm 3$, $z = 2$; $x = 1$, $y = 1$, z любое нечетное; x любое положительное, $y = 1! + 2! + \ldots + x!$, $z = 1$.

116. Рассмотрите, на какую степень двух могут делиться искомые четыре числа.

Ответ. При n нечетном разложение невозможно, при n четном существует единственное разложение

$$2^n = \left(2^{n/2-1}\right)^2 + \left(2^{n/2-1}\right)^2 + \left(2^{n/2-1}\right)^2 + \left(2^{n/2-1}\right)^2.$$

117. См. указание к задаче 116. В задаче б) аналогично задаче а) единственный ответ: $x = y = z = v = 0$.

118. а) Можно показать, что если x, y и z удовлетворяют выписанному равенству и, например, $z > \dfrac{kxy}{2}$, то эти числа можно уменьшить с тем, чтобы они продолжали удовлетворять тому же равенству. Если же $x \leqslant \dfrac{kyz}{2}$, $y \leqslant \dfrac{kxz}{2}$, $z \leqslant \dfrac{kxy}{2}$ и $x \leqslant y \leqslant z$, то должно быть $2 \leqslant kx \leqslant 3$.

Ответ. $k = 1$ и $k = 3$.

б) Каждую такую тройку целых чисел можно получить при помощи последовательных подстановок вида $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = kxy - z$ из одной из троек 1, 1, 1 и 3, 3, 3. Всего в пределах первой тысячи имеется 23 тройки целых чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

119. Пусть x, y — пара чисел, удовлетворяющих условию задачи. В таком случае $\dfrac{x^2 + 125}{y} = u$, $\dfrac{y^2 + 125}{x} = v$, где u, v — целые числа. Покажите, что пары чисел x, u и y, v тоже удовлетворяют тому условию, что квадрат одного числа, увеличенный на 125, делится на второе. Отсюда следует, что, исходя из одной пары взаимно простых чисел, удовлетворяющих этому условию, можно построить бесконечную в обе стороны цепочку чисел, каждые два соседних числа которой обладают этим же свойством. Для того чтобы найти все такие цепочки, докажите, что в каждой цепочке имеется число, не превосходящее $\sqrt{125} < 12$.

Всего имеется 31 пара чисел, удовлетворяющих условию задачи.

120. Последовательно рассмотрите случаи, когда все четыре числа различны; два числа равны, остальные различны; две пары чисел попарно равны и т. д.

Ответ. 96, 96, 57, 40; 11, 11, 6, 6; $k(3k \pm 2)$, $k(3k \pm 2)$, $k(3k \pm 2)$, 1 (k — произвольное целое число такое, что $k(3k \pm 2)$ положительно); 1, 1, 1, 1.

121. 2, 2 и 0, 0.

122. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

123. а) Привести задачу к следующей: найти два числа, произведение которых известно.

б) $x = m(m+n)t$, $y = n(m+n)t$, $z = mnt$, где m, n, t — произвольные целые числа.

124. а) Пусть $y > x$; покажите, что в этом случае y делится на x.

Ответ. $x = 2$, $y = 4$.

б) $x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p$, $y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$, где p — произвольное целое число, отличное от 0 и -1.

125. 7 или 14.

126. Из соотношения количества очков, набранных девятиклассниками, и числа сыгранных ими партий можно получить, что все девятиклассники выиграли все сыгранные ими партии. Отсюда следует, что в турнире участвовал единственный девятиклассник.

127. Обозначьте $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр. В таком случае задача сведется к решению в целых числах уравнения $xyz = 4(x+y+z)$, или $x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}$. Условие $x \geqslant y$ можно рассматривать как квадратное неравенство относительно y (с коэффициентами, зависящими от z); отсюда можно найти границы, в которых должны заключаться z и y.

Ответ. Стороны треугольника могут быть равны 6, 25, 29; 7, 15, 20; 9, 10, 17; 5, 12, 13 или 6, 8, 10 (всего пять решений).

128. а) Задача сводится к решению уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Если x, y и z не взаимно простые, то все члены уравнения можно сократить на их общий множитель; поэтому можно считать x, y и z попарно взаимно простыми. В этом случае z нечетно, а из чисел x, y одно (например, x) четно, второе нечетно. Далее запишите уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$$

и воспользуйтесь тем, что $\dfrac{z+y}{2}$ и $\dfrac{z-y}{2}$ взаимно просты.

Ответ. $x = 2tab$, $y = t(a^2 - b^2)$, $z = t(a^2 + b^2)$, где a и b — произвольные взаимно простые числа ($a > b$), t произвольно.

б) Задача сводится к решению в целых числах уравнения

$z^2 = x^2+y^2-xy$, или $[4z+(x+y)]^2 = [2z+2(x+y)]^2+[3(x-y)]^2$.

Далее воспользуйтесь результатом задачи а).

Ответ. $x = \dfrac{tb(2a-b)}{3}$, $y = \dfrac{ta(2b-a)}{3}$, $z = \dfrac{t(a^2+b^2-ab)}{3}$, где a и b взаимно просты $\left(\dfrac{a}{2} < b < 2a\right)$, и по крайней мере одно из чисел t, $a+b$ делится на 3, t произвольно.

в) Задача решается аналогично задаче б).

Ответ. $x = \dfrac{ta(a-2b)}{3}$, $y = \dfrac{tb(2a-b)}{3}$, $z = \dfrac{t(a^2+b^2-ab)}{3}$, где a и b взаимно просты ($a > 2b$), и по крайней мере одно из чисел t, $a+b$ делится на 3.

129. Исходите из формул $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin nA}{\sin A}$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin(n+1)A}{\sin A}$ (угол $B = nA$), где $n = 2$, 5 или 6; правые части этих соотношений выразите через $2\cos A$ и воспользуйтесь тем, что $2\cos A$ рационально.

Ответ. а) $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$.

б) $a = 1024$, $b = 1220$, $c = 231$.

в) $a = 46\,656$, $b = 72\,930$, $c = 30\,421$.

130. Воспользуйтесь результатами задачи 128, а) для того, чтобы показать, что если $x^4+y^4 = z^2$, где x, y, z — целые положительные числа, то существуют такие целые положительные числа x_1, y_1, z_1, где $z_1 < z$, что $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$. Повторяя этот процесс, можно доказать, что в таком случае должно иметь место абсурдное равенство $\overline{x}^4 + \overline{y}^4 = 1$, где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ целые положительные.

131. Умножьте обе части равенства на $n!$ (относительно обозначений см. с. 18).

132. а) $1-\dfrac{1}{n}$.

б) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n(n-1)}\right]$.

в) $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\right]$.

133. Воспользуйтесь методом математической индукции.

134. а) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

б) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

в) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

г) $n^2(2n^2-1)$.

135. Перенесите единицу в левую часть равенства.

136. а) $(n+1)!-1$.

б) $C_{n+k+1}^{k}-1$.

137. Воспользуйтесь тем, что $\dfrac{1}{\log_b a}=\log_a b$.

138. $\dfrac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$.

139. а) $\dfrac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$.

б) $\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

140. 31.

141. а) Сравните данное произведение со следующим:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}$$

или возведите доказываемое неравенство в квадрат.

б) Докажите, пользуясь методом математической индукции, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

142. Воспользуйтесь неравенством задачи 141, а).

143. $99^n + 100^n$ больше чем 101^n при $n \leqslant 48$ и меньше чем 101^n при $n > 48$.

144. 300!.

145. Докажите предварительно, что для любого целого положительного $k \leqslant n$

$$1 + \frac{k}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

146, 147. Воспользуйтесь результатом задачи 145.

148. Воспользуйтесь методом математической индукции.

149. Используйте формулу бинома Ньютона.

150. Воспользуйтесь методом математической индукции.

151. Воспользуйтесь неравенством

$$(k+1)x^k(x-1) > x^{k+1} - 1 > (k+1)(x-1),$$

из которого можно получить, что для каждого целого положительного p

$$(p+1)^{k+1} - p^{k+1} > (k+1)p^k > p^{k+1} - (p-1)^{k+1}.$$

152. Эти неравенства можно получить, заменив члены сумм большими (соответственно меньшими) числами, может быть, предварительно сгруппировав подходящим образом эти члены (т. е. преобразовав суммы в новые, состоящие из меньшего числа членов).

153. Докажите предварительно, что

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Ответ. а) 1998. б) 1800.

154. Докажите предварительно, что

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[n]{n^2}\right] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right].$$

Ответ. 14 996.

155. а) $0{,}105$.

б) Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\ldots+\frac{1}{1000!}<\frac{1}{9}\left\{\frac{9}{10!}+\frac{10}{11!}+\ldots+\frac{999}{1000!}\right\}.$$

О т в е т. $0{,}000\,000\,29$.

156. Воспользуйтесь результатом задачи 152, а).

157. Вычислите предварительно число незачеркнутых слагаемых между $\dfrac{1}{10^k}$ и $\dfrac{1}{10^{k+1}}$.

158. а) Решается аналогично задаче 156.

б) Воспользуйтесь результатом задачи 132, а).

159. Докажите, что для всякого целого k и целого $p \geqslant 2$

$$\lg\Bigl(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots+\frac{1}{p^k}\Bigr)<\frac{2\lg 3}{p}.$$

Воспользовавшись этим, выведите, что

$$\lg\Bigl(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant 2\lg 3\Bigl(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\Bigr),$$

где p_l — наибольшее простое число среди чисел от 1 до n.

160. 9.

161. Докажите, что если $a+b+c=0$, то $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3-3abc$.

162. а) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

б) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$.

163. Воспользуйтесь результатом задачи 162, а).

164. Воспользуйтесь результатом задачи 162, б).

165. Воспользуйтесь тем, что $a^{10}+a^5+1=\dfrac{(a^5)^3-1}{a^5-1}$, а $a^{15}-1=(a^3)^5-1$.

О т в е т. $a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$.

166. Докажите, что разность

$$(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{1111}+1)-(x^9+x^8+\ldots+x+1)$$

делится на $x^9+x^8+\ldots+x+1$.

167. Ответ.

$$x_1=-a-b,\ \ x_2=\frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\,i,\ \ x_3=\frac{a+b}{2}-\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\,i,$$

где $a=\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}},\quad b=\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}.$

168. Избавьтесь от радикалов и решите полученное уравнение относительно a.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{a+\dfrac{1}{4}},\quad x_{3,4}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}.$

169. Воспользуйтесь тем, что если $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=y$, то $x=-a+\sqrt{a^2+y-\dfrac{1}{16}}$, и рассмотрите графики функций $y=x^2+2ax+\dfrac{1}{16}$ и $y_1=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{1-2a}{2}\right)^2-\dfrac{1}{16}}.$

170. а) Докажите, что должно быть $3x=x^2$.
Ответ. $x_1=3$, $x_2=0$.

б) Докажите, что должно быть $\dfrac{1}{1+x}=x$.

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

171. Корни уравнения — все числа, заключенные между 5 и 10 ($5\leqslant x\leqslant 10$).

172. Корни уравнения: число -2 и любое число, не меньшее 2 ($x=-2$ и $x\geqslant 2$).

173. При $a=\pm 1$ система имеет три решения; при $a=\pm\sqrt{2}$ система имеет два решения.

174. а) При $a=-1$ система не имеет решений, при $a=1$ система имеет бесконечно много решений.

б) При $a=\pm 1$ система имеет бесконечно много решений.

в) При $a=1$ система имеет бесконечно много решений, при $a=-2$ не имеет ни одного решения.

175. Для того чтобы система имела решения, необходимо, чтобы три из четырех чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ были равны между собой. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_4 = \beta$, то $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{\alpha^2}{2}$, $x_4 = \alpha\Big(\beta - \dfrac{\alpha}{2}\Big)$.

176. Единственное действительное решение $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

177. а) Число действительных корней уравнения равно числу точек пересечения прямой $y = \dfrac{1}{100}x$ и синусоиды $y = \sin x$.

Ответ. 63 корня.

б) Искомое число корней — число точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и логарифмической кривой $y = \log x$ — равно 3.

178. То, что $x_1^n + x_2^n$ — целое число, доказывается методом математической индукции. Далее покажите, что если бы $x_1^n + x_2^n$ делилось на 5, то и $x_1^{n-3} + x_2^{n-3}$ делилось бы на 5.

179. Квадрат первого многочлена не может содержать равное число положительных и отрицательных удвоенных произведений, а квадрат второго многочлена может.

180. Воспользуйтесь методом математической индукции; рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного показателей степени.

181. Если $99\,999 + 111\,111\sqrt{3} = (A + B\sqrt{3})^2$, то $99\,999 - 111\,111\sqrt{3} = (A - B\sqrt{3})^2$.

182. Докажите, что если $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, то $\sqrt[3]{2}$ есть рациональное число.

183. Второе из двух выражений больше первого.

184. $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

185. а) a_1, a_2, a_4, a_3.

б) Докажите, что если a_{i_α} и a_{i_β} — какие-то два из заданных чисел ($\alpha < \beta$) и $a_{i_{\alpha-1}}$, $a_{i_{\beta+1}}$ — числа, стоящие в искомом расположении перед a_{i_α} и после a_{i_β}, то $(a_{i_\alpha} - a_{i_\beta})(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}}) > 0$.

Ответ. $a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \ldots, a_5, a_3$ при n четном; $a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots, a_5, a_3$ при n нечетном.

186. а) Рассмотрите ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_n$, такую, что проекции отрезков A_0A_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ на ось Ox равны соответственно $a_1, a_2, \ldots a_n$, а на ось Oy — $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Равенство имеет место, если

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

б) Воспользуйтесь неравенством задачи 186, а).

187. При n четном задача может быть решена геометрически аналогично решению задачи 186, а); случай нечетного n может быть сведен к случаю четного n. Равенство имеет место при n четном, если

$$a_1 = 1 - a_2 = a_3 = 1 - a_4 = \ldots = a_{n-1} = 1 - a_n,$$

а при n нечетном, только если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}.$$

188. Возведите обе части неравенства в квадрат.

189. При любом x $\cos\sin x$ больше, чем $\sin\cos x$.

190. а) Если $\log_2\pi = a$, $\log_5\pi = b$, то $\pi^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 10$.

б) Если $\log_2\pi = a$, $\log_\pi 2 = b$, то $b = \dfrac{1}{a}$.

191. а) Воспользуйтесь тем, что для каждого угла x первой четверти $\sin x < x$, $\cos x < 1$.

б) Воспользуйтесь тем, что для каждого угла x первой четверти $\operatorname{tg} x > x$.

192. Воспользуйтесь геометрическим определением тангенсов как длин отрезков в тригонометрическом круге или как удвоенных площадей некоторых треугольников.

193. $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

194. Замените в сумме $\cos 32x + a_{31}\cos 31x + \ldots + a_1\cos x$ угол x на $x + \pi$ и сложите полученное выражение с первоначальным.

195. Вычислите последовательно

$$2\sin a_1\cdot 45^\circ,\qquad 2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{3}\right)\cdot 45^\circ,$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}\right)\cdot 45^\circ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\cdot 45^\circ,$$

исходя из формулы

$$2\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{2-2\cos\alpha}.$$

196. 1.

197. Воспользуйтесь тем, что данные многочлены имеют те же самые коэффициенты при x^{20}, что и $(1+x^2+x^3)^{1000}$, соответственно $(1-x^2-x^3)^{1000}$.

198. Воспользуйтесь формулой $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

199. а) $C_{1001}^{50}=\dfrac{1001!}{50!\cdot 951!}$.

б) $1000\,C_{1001}^{51}-C_{1001}^{52}=\dfrac{51\,050\cdot 1001!}{52!\cdot 950!}$.

200. Обозначим данное выражение через Π_k, в таком случае $\Pi_k=(\Pi_{k-1}-1)^2$.

Ответ. $\dfrac{4^{2k-1}-4^{k-1}}{3}$.

201. а) 6. б) $6x$.

202. $-x+3$.

203. Воспользуйтесь тем, что многочлен $x^4+x^3+2x^2+x+1$ есть делитель двучлена $x^{12}-1$.

Ответ. -1.

204. а) $x^4-10x^2+1=0$.

б) $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$.

205. Преобразуйте выражение $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$, используя то, что $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=1$; $\gamma+\delta=-q$, $\gamma\delta=1$.

206. $Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+Qp^2-2Qq$.

207. $a = 1$ и $a = -2$.

208. $a = 8$ и $a = 12$.

209. $b = 1$, $c = 2$, $a = 3$; $b = -1$, $c = -2$, $a = -3$; $b = 2$, $c = -1$, $a = 1$ и $b = 1$, $c = -2$, $a = -1$.

210. а) Никогда.

б) Только если $n = 2$, $a_2 = a_1 + 2$ и $n = 4$, $a_2 = a_1 - 1$, $a_3 = a_1 + 1$, $a_4 = a_1 + 2$.

211. Воспользуйтесь тем, что если

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1 = p(x)\,q(x),$$

то $p(x)$ и $q(x)$ так же, как и $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$, ни при каком x не обращаются в нуль и поэтому не могут менять знака. В остальном решение аналогично решению задачи 210, а).

212. Используйте то, что $14 - 7 = 7$ нельзя разложить в произведение нескольких целых множителей, из которых четыре являются различными.

213. Воспользуйтесь тем, что если многочлен разлагается на множители с целыми коэффициентами, то при тех x, при которых многочлен равен ± 1, сомножители его тоже равны ± 1, а также тем, что многочлен третьей степени не может принимать одно и то же значение более трех раз.

214. Воспользуйтесь тем, что если p и q — два целых числа, то $P(p) - P(q)$ делится на $p - q$.

215. Докажите, что если $P\left(\dfrac{k}{l}\right)$, то $k - pl = \pm 1$ и $k - ql = \pm 1$.

216. а) Приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) = \\ = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n+m}x^{n+m}$$

и, воспользовавшись полученной формулой, покажите, что если бы рассматриваемый многочлен разлагался на два множителя, то все коэффициенты одного из сомножителей должны были бы быть четными (что невозможно, так как в исходном многочлене старший коэффициент равен 1).

б) Положите в рассматриваемом многочлене $x = y + 1$ и затем аналогично решению задачи а) покажите, что если бы полученный многочлен разлагался на два множителя, то все коэффициенты одного из сомножителей делились бы на простое число 251.

217. Воспользуйтесь той же формулой, что и при решении задачи 216, а) (см. указание к этой задаче).

218. Докажите, что $P\left(\frac{p}{q}\right)$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, не может быть целым числом.

219. Пусть $P(N) = M$; докажите, что $P(N + kM) - P(N)$ при всяком k делится на M.

220. Представьте многочлен $P(x)$, принимающий при целых x целые значения, в виде суммы

$$P(x) = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \ldots + b_nP_n(x)$$

с неопределенными коэффициентами $b_0, b_1, \ldots, b_n$ и определите эти коэффициенты, подставляя в последнее равенство последовательно $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

221. а) См. указание к предыдущей задаче.

б) Сделайте в многочлене замену переменных $y = x + k$.

в) Рассмотрите многочлен $Q(x) = P(x^2)$.

222. Воспользуйтесь формулой Муавра.

223. Воспользуйтесь результатом задачи 222, б).

224. Если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

225. Воспользуйтесь формулой Муавра.

226. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

Ответ.

$$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \frac{n-1}{2} + \frac{\sin(n+1)\alpha\,\cos n\alpha}{2\sin\alpha};$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin(n+1)\alpha\,\cos n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

227. Воспользуйтесь формулой Муавра и формулой бинома Ньютона.

Ответ. Заданные выражения соответственно равны

$$2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2}\alpha \quad \text{и} \quad 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+2}{2}\alpha.$$

228. Воспользуйтесь формулой

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

и результатами задачи 225.

229. Рассмотрите корни уравнения $x^{2n+1} - 1 = 0$.

230. Воспользуйтесь формулами задачи 222, б).

231. Воспользуйтесь результатом задачи 230, б).

Ответ. а) $\dfrac{n(2n-1)}{3}$. б) $\dfrac{2n(n+1)}{3}$.

232. Воспользуйтесь результатом задачи 230, а).

Ответ. а) $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ и $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. б) $\dfrac{1}{2^n}$ и $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

233. Воспользуйтесь тем, что если α есть угол первой четверти, то $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

234. а), б) Воспользуйтесь формулой задачи 225.

в) Воспользуйтесь результатом задачи б).

235. а) Воспользуйтесь предложением задачи 234, а).

б) Воспользуйтесь формулой задачи 225.

236. а) Воспользуйтесь предложением задачи 234, а).

б) См. указание к задаче 235, б).

в) Воспользуйтесь результатом задачи 232, а).

237. Воспользовавшись формулой Муавра, представьте $\sin^{50}\alpha$ в виде суммы косинусов углов, кратных α, взятых с некоторыми коэффициентами.

Ответ. $5000\, C_{50}^{25} R^{50} = \dfrac{5000 \cdot 50!}{(25!)^2}\, R^{50}$.

238. Воспользуйтесь тем, что $2\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}$ рационально, а $2\cos nA$ есть при любом n многочлен n-й степени относительно $2\cos A$; воспользуйтесь также теоремой задачи 218.

239. а) Подставьте во вторую формулу задачи 222, б) $\theta = \frac{m}{n}180^\circ$, $\cos\theta = \frac{1}{p}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$.

б) Если $\theta = \frac{m}{n}180^\circ$, то $(1+i\operatorname{tg}\theta)^n = (1-i\operatorname{tg}\theta)^n$. Подставив сюда $\operatorname{tg}\theta = \frac{p}{q}$, $p \neq q$, приходим к невозможному равенству.

240. Воспользуйтесь тем, что если a не делится на p, то числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают при делении на p различные остатки.

241. Воспользуйтесь тем, что если $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — все целые числа, меньшие N и взаимно простые с N, то числа $k_1a, k_2a, \ldots, k_ra$ дают при делении на N разные остатки.

242. Воспользуйтесь методом математической индукции.

243. Воспользуйтесь теоремой Эйлера (задача 241).

244. Докажите, пользуясь методом математической индукции, что каково бы ни было целое число N, всегда найдется такая степень числа 2, N последних цифр которой все будут единицами и двойками; при доказательстве воспользуйтесь теоремой Эйлера (задача 241) и предложением задачи 242.

245. См. указание к задаче 240.

246. Воспользуйтесь теоремой Вильсона (задача 245). Условию задачи удовлетворяет число

$$x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!.$$

247. а) Покажите, что произведение

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов.

б) Докажите, что если произведение mp, где p есть простое число, а m отлично от единицы и меньше p, можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то множитель m можно уменьшить, т. е. можно найти такое число $n < m$, что произведение np тоже можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Далее воспользуйтесь предложением задачи 246.

в) Воспользуйтесь результатами задач а) и б) и предложением, сформулированным в указании к задаче б).

248. Докажите, что для каждого простого числа p, отличного от 2, можно найти два таких числа x и y, оба меньших $\frac{p}{2}$, что x^2 и $-y^2-1$ дают при делении на p одинаковые остатки.

249. а) Покажите, что произведение

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов четырех многочленов.

б) Решение аналогично решению задачи 247 (см. указание к этой задаче). Вместо предложения задачи 246 в этом решении приходится использовать предложение задачи 248.

250. Рассмотрите, какие остатки может давать сумма трех квадратов при делении на 8.

251. Прежде всего покажите что если число представляет собой сумму квадратов четырех целых чисел, то его ушестеренный квадрат можно представить в виде суммы 12 четвертых степеней целых чисел. Далее воспользуйтесь тем, что каждое целое число дает при делении на 6 остаток, не больший 5, и примените два раза теорему задачи 249, б).

252. Идея решения задачи состоит в следующем. Требуется найти какое-нибудь решение в положительных рациональных числах уравнения

$$x^3+y^3+z^3=a,$$

где a есть наперед заданное рациональное число. Здесь мы имеем одно уравнение для определения трех неизвестных. Предположив, что два из этих неизвестных связаны подходящей зависимостью, можно значительно упростить уравнение; так, например, положив $y=-z$, мы получим $x^3=a$. Из полученного упрощенного уравнения можно иногда выразить последнее неизвестное через a; так, в случае, когда $y=-z$, мы получаем $x=\sqrt[3]{a}$. В этом случае последнее неизвестное x выражается через a с помощью радикала и, вообще говоря, оказывается иррациональным. Надо постараться найти такую зависимость между двумя неизвестными, чтобы из упрощенного уравнения последнее неизвестное выражалось через a рационально (без радикалов); после этого останется только найти рациональные значения остальных двух неизвестных, связанные предположенной зависимостью (при помощи которой мы упростили уравнение). При этом удобно перейти от неизвестных x, y, z к новым неизвестным; при выборе этих новых неизвестных следует исходить из тождества задачи 162, б).

253. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ есть n простых чисел. Найдите число, которое не делится ни на одно из этих чисел и больше каждого из них.

254. а) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ есть n простых чисел вида $4k-1$ (или $6k-1$). Найдите число вида $4N-1$ (или $6N-1$), которое не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и больше каждого из них.

б) Идея решения близка к использованной в решении задачи а); при доказательстве следует воспользоваться теоремой задачи 247, в).

в) Идея решения близка к использованной в решении задачи а).

255. Примените неравенство (I), с. 62.

256. Примените неравенство (I′), с. 63.

257. Примените неравенство (I).

258. Воспользуйтесь неравенствами (I) и (I′).

259. Воспользуйтесь неравенством (I).

260. Примените неравенство (I).

Ответ. $x = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$.

261. Воспользуйтесь неравенством (I).

Ответ. Продавец отпускает больше товара, чем следует.

262. а) Воспользуйтесь выражениями для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического двух чисел (см. с. 62–67).

б) Следует из задачи а).

263. Воспользуйтесь результатами задача 162, а).

264. Примените неравенство задачи 263.

266. Примените неравенство задачи 263.

Ответ. $x = y = z = \dfrac{a}{3}$.

266. Воспользуйтесь неравенством задачи 263.

267. Примените m раз неравенство (I), с. 62.

288. Первое доказательство. Докажите, что если теорема справедлива для $n+1$ чисел, то она справедлива также и для n чисел; далее воспользуйтесь результатом задачи 267.

Второе доказательство. Примените метод математической индукции; воспользуйтесь тем, что если a_{n+1} есть наибольшее из $n+1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Третье доказательство. Докажите, пользуясь методом математической индукции, неравенство

$$b_1^n + b_2^n + \ldots + b_n^n \geqslant n b_1 b_2 \ldots b_n,$$

равносильное теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

269. Воспользуйтесь теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268).

270. См. указание к предыдущей задаче.

271. Примените неравенство задачи 268.

272. Примените неравенства задач 268 и 270.

273. Примените неравенство задачи 263.

274. Примените неравенство задачи 268.

275. Воспользуйтесь неравенством задачи 268.

276. Представьте левую часть неравенства в виде

$$(a^\alpha 2^{2^{n-1}} 4^{2^{n-2}} \ldots 2^n)^{1/2^n}$$

и воспользуйтесь неравенством задачи 268.

277. Воспользуйтесь неравенством задачи 268.

278. Примените неравенство задачи 268.

Ответ. При $x = 0$.

279. Воспользуйтесь предложением задачи 269, а).

280. См. указание к предыдущей задаче.

Ответ. $b = \dfrac{a}{3}$.

281. а) Доказывается аналогично доказательству теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268).

б) Для случая $n = 2$ неравенство доказывается индукцией по k; далее доказательство аналогично решению задачи а).

282. Примените теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268).

283. Для случая рационального отношения $\dfrac{\alpha}{\beta}$ задача сводится к теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268); случай иррационального отношения $\dfrac{\alpha}{\beta}$ получается из первого предельным переходом.

284. Примените теорему о степенных средних (задача 283).

Ответ. а) 12, 24. б) $18\sqrt{6}$, $3\sqrt{6}$.

285. Воспользуйтесь методом математической индукции.

286. Воспользуйтесь предложением предыдущей задачи.

287. Примените теорему о симметрических средних (задача 286).

Ответ. 8, 16.

288. Воспользуйтесь теоремой о симметрических средних.

Ответ. а) $\sqrt{3}$. б) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

289. Первое доказательство. Воспользуйтесь неравенством

$$(xa_1 + b_1)^2 + (xa_2 + b_2)^2 + \ldots + (xa_n + b_n)^2 \geqslant 0,$$

справедливым при всех действительных значениях x, в частности, при

$$x = -\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Второе доказательство. Полагая

$$\overline{a}_i = \frac{a_i}{A}, \quad \overline{b}_i = \frac{b_i}{B} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}, \quad B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

и пользуясь очевидными неравенствами

$$\overline{a}_i\overline{b}_i \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{a}_i^2 + \frac{1}{2}\,\overline{b}_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

докажите сначала, что

$$\overline{a}_1\overline{b}_1 + \ldots + \overline{a}_n\overline{b}_n \leqslant 1.$$

Третье доказательство. Воспользуйтесь методом математической индукции.

Четвертое доказательство. Докажите сначала тождество

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_k b_l - a_l b_k)^2.$$

290. Примените неравенство Коши–Буняковского для двух последовательностей чисел

$$\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ \ldots,\ \sqrt{a_n} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1}{a_1}},\ \sqrt{\frac{1}{a_2}},\ \ldots,\sqrt{\frac{1}{a_n}}.$$

291. Положите в неравенстве Коши–Буняковского

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1.$$

292. Воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского.

293. Воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского, положив в нем

$$a_1 = x_1 + y_1,\quad a_2 = x_2 + y_2,\quad \ldots,\quad a_n = x_n + y_n,$$
$$b_1 = x_1,\quad b_2 = x_2,\quad \ldots,\quad b_n = x_n$$

и

$$a_1 = x_1 + y_1,\quad a_2 = x_2 + y_2,\quad \ldots,\quad a_n = x_n + y_n,$$
$$b_1 = y_1,\quad b_2 = y_2,\quad \ldots,\quad b_n = y_n.$$

294–296. Воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского.

297. Сравните данное неравенство с неравенством Коши–Буняковского.

298. Примените дважды неравенство Коши–Буняковского.

299. Если последовательность чисел a_i возрастающая: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, то рассматриваемое отношение будет наибольшим в том случае, когда последовательность b_j убывающая: $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Далее положите

$$a_i^2 = \alpha_i a_1^2 + \beta_i a_n^2, \qquad b_i^2 = \alpha_i b_1^2 + \beta_i b_n^2$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

и воспользуйтесь неравенствами (II) (с. 70) и (I) (с. 62).

300. Составьте разность

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

301. Используйте теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 268).

302. См. указание к предыдущей задаче.

303. Первое решение. Воспользуйтесь неравенством задачи 302.

Второе решение. Воспользуйтесь неравенством задачи 301.

304. Доказывается аналогично решению задачи 302.

305. Воспользуйтесь неравенством задачи 304.

306. Сравните данное неравенство с неравенством задачи 304.

307. Воспользуйтесь неравенством задачи 304 и теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 263).

308. Воспользуйтесь неравенством Гёльдера (задача 303).

309. а) Воспользуйтесь формулой

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

б) Примените результат задачи а).

310. Вычислите сначала старший коэффициент последовательности

$$u_n^{(1)} = b_a n^{k-1} + \ldots$$

(см. задачу 309, а)).

311. Воспользуйтесь методом математической индукции.

312. См. предыдущее указание.

313. Воспользуйтесь формулой задачи 311, а).

314. Воспользуйтесь формулой задачи 313.

315. См. указание к предыдущей задаче.

Ответ.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

316. а) Рассмотрите последовательность

$$u_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

воспользуйтесь результатами задач 309, б) и 314.

б) Примените к последовательности

$$u_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

и к последовательности

$$u_n^{(1)} = (n+1)^k$$

результат задачи 310; определите, воспользовавшись формулой задачи 313, числа $(k-1)$-го ряда разностей последовательности k-й степени.

Ответ. Коэффициент при n^{k+1} равен $\frac{1}{k+1}$, коэффициент при n^k равен $\frac{1}{2}$.

317. Воспользуйтесь формулой задачи 313.

318. Постройте треугольник сумм для чисел C_n^0, C_n^1, C_n^2, $\ldots$, C_n^n.

Ответ. C_{2n}^n.

319. Рассмотрите треугольник сумм для чисел ряда

$$1,\ \frac{a}{b},\ \frac{a^2}{b^2},\ \ldots,\ \frac{a^n}{b^n}.$$

320. Докажите, что треугольник разностей последовательности

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

имеет вид

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{1}{C_0^0} & & \dfrac{1}{2C_1^1} & & & & \dfrac{1}{3C_2^2} & & \dfrac{1}{4C_3^3} \;\ldots \\
& -\dfrac{1}{2C_1^0} & & -\dfrac{1}{3C_2^1} & & & & -\dfrac{1}{4C_3^2} \;\ldots & \\
& & \dfrac{1}{3C_2^0} & & & \dfrac{1}{4C_3^1} \;\ldots & & & \\
& & & -\dfrac{1}{4C_3^0} \;\ldots & & & & &
\end{array}
$$

Учебное издание

ШКЛЯРСКИЙ Давид Оскарович
ЧЕНЦОВ Николай Николаевич
ЯГЛОМ Исаак Моисеевич

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *Н.Н. Андреева*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 01.03.01.
Формат 60 × 90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 25. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”
МАИК “Наука/Интерпериодика”
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типогарфии № 6
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
109088 Москва Ж-88, Южнопртовая ул., 24

ISBN 5-9221-0106-4

9 785922 101066