

МАТЕМАТИКА И
ФИНАНСЫ

Ю.-Д. Любу

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ



Классическая
финансовая математика

Опционы и другие
производные ценные бумаги

Хеджирование

Техническая сторона
финансовых расчетов

Теория и практика
управления портфелем

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

FINANCIAL ENGINEERING AND COMPUTATION

Principles, Mathematics, Algorithms

Yuh-Dauh Lyuu
National Taiwan University



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Ю-Д. Люу

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Перевод с английского

С. В. Жуленёва

под редакцией

Е. В. Четурина

2-е издание (электронное)



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 519.8+330
ББК 22.19:65.053
Л96

Серия основана в 2007 г.

Люу Ю-Д.

Л96 Методы и алгоритмы финансовой математики [Электронный ресурс] / Ю-Д. Люу ; пер. с англ. — 2-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 754 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — (Математика и финансы). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-1320-4

Исчерпывающая фундаментальная монография, в которой на очень доступном уровне излагается фактически вся финансовая математика: от классической и детерминированной финансовой теории до практически всех разделов современной стохастической финансовой математики. Основной акцент в книге делается на прикладные вычисления, что выражается, в частности, обилием приводимых алгоритмов. Многие из них реализованы в виде Java-программ и доступны в Интернете на домашней странице книги.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и специалистов в области финансов, а также математиков и программистов, интересующихся приложениями теории вероятностей.

УДК 519.8+330
ББК 22.19:65.053

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу ; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 751 с. : ил. — (Математика и финансы).

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

Copyright © 2002 by Yuh-Dauh Lyuu
This book is in copyright. Subject to statutory exception and to the provisions of relevant collective licensing agreements, no reproduction of any part may take place without the written permission of Cambridge University Press

© Перевод на русский язык. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007

ISBN 978-5-9963-1320-4

Оглавление

Предисловие редактора перевода	8
Предисловие	10

Часть I. КЛАССИЧЕСКАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Глава 1. Введение	16	3.5. Облигации	46
1.1. Современные финансы: краткая история	16	Глава 4. Волатильность цены облигации	57
1.2. Финансовая технология и финансовые расчеты	16	4.1. Волатильность цены	57
1.3. Финансовые рынки	17	4.2. Дюрация	59
1.4. Компьютерная технология	20	4.3. Выпуклость	69
Глава 2. Анализ алгоритмов	25	Глава 5. Временная структура процентных ставок	72
2.1. Сложность	25	5.1. Введение	72
2.2. Анализ алгоритмов	26	5.2. Спот-ставки	74
2.3. Описание алгоритмов	27	5.3. Получение спот-ставок из кривых доходности	75
2.4. Разработка программного обеспечения	28	5.4. Статический спред	77
Глава 3. Основы финансовой математики	30	5.5. Кривая спот-ставок и кривая доходности	77
3.1. Временная стоимость денег	30	5.6. Форвардные ставки	79
3.2. Ежегодные ренты	33	5.7. Теории временной структуры	85
3.3. Амортизация	35	5.8. Уточнение понятий дюрации и иммунизации	89
3.4. Доходности	37		

Часть II. ОПЦИОНЫ И ДРУГИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЦЕННЫЕ БУМАГИ

Глава 6. Основные факты теории вероятностей и математической статистики	96	8.4. Досрочное исполнение Американских опционов	128
6.1. Основные понятия	96	8.5. Выпуклость цен опционов	131
6.2. Регрессия	103	8.6. Свойство портфеля, составленного из опционов	132
6.3. Корреляция	106	Глава 9. Модели оценки стоимости опционов	134
6.4. Оценка параметров	107	9.1. Введение	134
Глава 7. Основы опционов	111	9.2. Биномиальная модель оценки стоимости опциона	135
7.1. Введение	111	9.3. Формула Блэка—Шоулса	148
7.2. Основные понятия	112	9.4. Использование формулы Блэка—Шоулса	155
7.3. Биржевые опционы (опционы, которыми торгуют на бирже)	114	9.5. Американские опционы пут на бездивидендные акции	157
7.4. Основные стратегии в опционах	117	9.6. Опционы на акции с дивидендами	159
7.5. Комбинация	121	9.7. Пересечение дерева по диагонали	164
Глава 8. Арбитраж при оценке стоимости опциона	123		
8.1. Арбитражные соображения	123		
8.2. Относительная стоимость опционов	124		
8.3. Паритет пут—колл и ряд вытекающих из него свойств	126		

Глава 10. Анализ чувствительности опционов	169
10.1. Меры чувствительности («Гречанки»)	169
10.2. Техника численных расчетов	174

Глава 11. Теория опционов. Продолжение	178
11.1. Корпоративные ценные бумаги	178
11.2. Барьерные опционы	185
11.3. Шапки и полы процентных ставок	189
11.4. Опционы на индексы акций	190
11.5. Форексные опционы	193

Часть III. НЕПРЕРЫВНАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА И ХЕДЖИРОВАНИЕ

Глава 13. Стохастические процессы и броуновское движение	236
13.1. Случайные процессы	236
13.2. Мартингалы («справедливые игры»)	238
13.3. Броуновское движение	243
13.4. Броуновский мост	249

Глава 14. Финансовая математика с непрерывным временем	251
14.1. Стохастические интегралы	251
14.2. Процессы Ито	254
14.3. Применения	260
14.4. Финансовые приложения	264

11.6. Сложные опционы	198
11.7. Производные ценные бумаги, стоимость которых зависит от траектории	199

Глава 12. Форварды, фьючерсы, опционы на фьючерсы, свопы	207
12.1. Введение	207
12.2. Форвардные контракты	209
12.3. Фьючерсные контракты	214
12.4. Опционы на фьючерсы и опционы на форварды	223
12.5. Свопы	230

Глава 15. Оценка стоимости производных финансовых инструментов в случае непрерывного времени	270
15.1. Дифференциальные уравнения в частных производных	270
15.2. Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса	271
15.3. Приложения	276
15.4. Оценка стоимости производного инструмента общего вида	287
15.5. Стохастическая волатильность	289

Глава 16. Хеджирование	291
16.1. Введение	291
16.2. Хеджирование и фьючерсы	292
16.3. Хеджирование и опционы	297

Часть IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

Глава 17. Деревья	304
17.1. Оценка стоимости барьерных опционов комбинаторными методами	304
17.2. Алгоритмы триномиального дерева	313
17.3. Оценка стоимости многокомпонентных условных требований	316
Глава 18. Численные методы	321
18.1. Конечно-разностные методы	321
18.2. Моделирование по методу Монте-Карло	328
18.3. Квазиметоды Монте-Карло	336

Глава 19. Матричные вычисления	343
19.1. Основные определения и результаты	343
19.2. Проблема метода наименьших квадратов	349
19.3. Сглаживание данных с помощью сплайнов	355
Глава 20. Анализ временных рядов	361
20.1. Введение	361
20.2. Модели условной дисперсии для волатильности цены	369

Часть V. КЛАСС ЦЕННЫХ БУМАГ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКЕ, И ЕГО ПРОБЛЕМЫ

Глава 21. Производные ценные бумаги на процентную ставку	374
21.1. Фьючерсы и форварды на процентную ставку	374
21.2. Опционы с фиксированной доходностью и опционы на процентную ставку	387
21.3. Опционы на фьючерсы по процентной ставке	392
21.4. Свопы на процентную ставку	394
Глава 22. Подгонка временной структуры	406
22.1. Введение	406
22.2. Линейная интерполяция	407

22.3. Обычный метод наименьших квадратов	409
22.4. Сплаины	411
22.5. Схема Нельсона—Зигеля	412
Глава 23. Введение в моделирование временной структуры	414
23.1. Введение	414
23.2. Биномиальное дерево процентной ставки	415
23.3. Применения к оценке стоимости и хеджированию	426
23.4. Временная структура волатильности	432

Глава 24. Основы моделирования временной структуры 435

- 24.1. Терминология 435
- 24.2. Основные соотношения 436
- 24.3. Риск-нейтральная оценка стоимости 438
- 24.4. Уравнение временной структуры 441
- 24.5. Процесс форвардной ставки 444
- 24.6. Биномиальная модель с приложениями 445
- 24.7. Модели Блэка—Шоулса 451

Глава 25. Равновесные модели временной структуры 454

- 25.1. Модель Васичека 454

- 25.2. Модель Кокса—Ингерсолла—Росса 457
- 25.3. Другие модели 465
- 25.4. Калибровка модели 466
- 25.5. Однофакторные модели краткосрочной ставки 468

Глава 26. Безарбитражные модели временной структуры 471

- 26.1. Введение 471
- 26.2. Модель Хо—Ли 471
- 26.3. Модель Блэка—Дермана—Тоя 477
- 26.4. Модели по Халлу и Уайту 481
- 26.5. Модель Хита—Джэрроу—Мортон 487
- 26.6. Модель Ритчкена—Санкарасубрамания 495

Часть VI. НАИБОЛЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ ЦЕННЫЕ БУМАГИ**Глава 27. Ценные бумаги с фиксированной доходностью 500**

- 27.1. Введение 500
- 27.2. Облигации Казначейства, агентств и муниципалитетов 501
- 27.3. Корпоративные облигации 504
- 27.4. Методы оценки стоимости 509
- 27.5. Дюрация ключевых ставок 517

Глава 28. Ценные бумаги, обеспеченные залладными. Введение 521

- 28.1. Введение 521
- 28.2. Банковская деятельность, связанная с залладными 523
- 28.3. Агентства и процесс превращения залладных в ценные бумаги 525
- 28.4. Ценные бумаги, обеспеченные залладными 527

- 28.5. Программы федеральных агентств по ценным бумагам, обеспеченным залладными 531
- 28.6. Предоплата 532

Глава 29. Анализ ценных бумаг, обеспеченных залладными 537

- 29.1. Анализ денежного потока 537
- 29.2. Моделирование предоплаты по залладным 554
- 29.3. Дюрация и выпуклость 557
- 29.4. Методология оценки стоимости 560

Глава 30. Облигации, обеспеченные залладными 567

- 30.1. Введение 567
- 30.2. Слой с плавающей ставкой 568
- 30.3. Облигации ЗПК 570
- 30.4. Облигации ЦПК 575
- 30.5. Полосы ОЗЗ 575
- 30.6. Остатки 576

Часть VII. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ**Глава 31. Современная портфельная теория 578**

- 31.1. Анализ риска и доходности с помощью среднего и дисперсии 578

- 31.2. Модель оценки стоимости финансовых активов 587
- 31.3. Факторные модели 594
- 31.4. Стоимость под риском 598

Часть VIII. ДОПОЛНЕНИЕ**Глава 32. Программное обеспечение 608**

- 32.1. Программирование в сети 608
- 32.2. Использование программного обеспечения на странице *The Capitals* 608
- 32.3. Другие темы 611

Глава 33. Решения к упражнениям и заданиям по программированию 613**Глава 34. Русские и английские сокращения 696**

- 34.1. Используемые русские сокращения и их английские эквиваленты 696
- 34.2. Используемые английские сокращения 698

Глава 35. Некоторые из основных понятий современной финансовой теории 700

- Литература 705
- Предметный указатель 738

Предисловие

редактора перевода

Книга, которую Вы держите в руках, обязательно должна была появиться в ряду изданных в России монографий, посвященных финансовой теории, математическим моделям и практическим аспектам расчета характеристик эффективности инвестиций в ценные бумаги на фондовых рынках финансовой индустрии. Заметим, что, не имея непосредственного отношения к материальному производству, финансовая индустрия в конечном итоге перераспределяет финансовые ресурсы инвесторов именно в материальное производство. В определенном смысле, она является и индикатором, и стимулятором развития экономики в целом. Поэтому детальный анализ явлений, происходящих на финансовом рынке, имеет и научную, и еще более актуальную прикладную значимость.

Цель инвесторов — получение дохода за предоставление финансовых ресурсов. Однако на этом пути их ожидают и риски финансовых потерь: они связаны с неопределенностью, порождаемой временной изменчивостью экономической ситуации, существенным образом влияющей на ценообразование финансовых активов и на степень рискованности тех или иных инструментов инвестирования. Для выбора пути уменьшения риска при инвестиционном процессе в теории финансов рекомендуется использовать процедуры, разработанные на основе весьма тонких и изысканных методов математики. Ознакомиться с этими рекомендациями можно, в основном, или по книгам, где изложение ведется на базе математики высокого уровня, или по литературе описательного характера с фрагментарным включением формульного аппарата. Удачных изданий, являющихся своеобразным мостиком между двумя упомянутыми выше тенденциями, явно недостаточно. Именно к такому типу изданий, в которых сложные математические факты и их интерпретация выводятся максимально упрощенно, без использования усложненной символики и необязательных абстрактных понятий, относится книга профессора Ю-Дау Люу, известного специалиста в области финансов и информатики. В связи со второй специализацией автора заметим, что именно уникальные достижения информационных технологий во многом предопределили интенсификацию и глобализацию операций на фондовом рынке, привлечение на рынок гигантских финансовых средств. Естественно, что этот аспект нашел свое отражение в книге.

Книга профессора Люу является самодостаточной по финансовой теории и практике функционирования фондовых рынков, а также по математическому моделированию и статистическому анализу инструмен-

тов фондового рынка, по компьютерной реализации этих инструментов. Поэтому она может служить важным пособием для специалистов сферы финансовой индустрии, имеющих базовое математическое или техническое образование, и способствовать достижению ими необходимого высокого профессионального уровня. Финансовые менеджеры найдут в данной книге своеобразный справочник по формированию портфеля ценных бумаг и необходимые сведения по форме постановки задач для IT-специалистов при планировании подготовки сопровождающего компьютерного продукта.

Как справедливо отмечает автор, данная книга окажется также полезной студентам, осваивающим теорию и практику оборота ценных бумаг. Для меня же, как для преподавателя, книга профессора Люу ценна как источник конкретных сведений о фондовом рынке, как авторитетный учебник, к которому можно отсылать при чтении курсов по современной финансовой теории, как весьма содержательный задачник по расчетам характеристик инструментов рынка ценных бумаг.

Заглядывая в недалекое будущее с учетом развития информационных технологий, обеспечивающих функционирование фондового рынка, легко предвидеть, что наряду с институциональными инвесторами вскоре на нем появится значительная прослойка индивидуальных инвесторов. Для многих из них присутствие на рынке ценных бумаг явится своеобразной интеллектуальной игрой вне зависимости от конечного финансового результата. Игрой, будоражащей эмоции в не меньшей степени, чем все другие игры, без которых человечество не может существовать. Для таких инвесторов-индивидуалов данную книгу можно рекомендовать как серьезное введение в теорию финансовой игры в «ценные бумаги».

Предлагаемая вниманию читателя монография встречена за рубежом с большим интересом. Уверен, что книга профессора Люу приобретет такую же популярность и в России.

Е. В. Чепурин

Предисловие

[Книга] — это узел в сети.

Мишель Фуко (1926—1984),

Археология знания

На кого рассчитана книга

Как и предполагает название этой книги, современная книга по финансовой технологии должна включать в себя в равной мере как теорию капиталовложений, финансовую математику, так и компьютерные науки. Причем этот междисциплинарный расклад приспособлен больше к тем рынкам капитала, где используется количественный анализ. В конце концов, даже экономика заметно отошла от того времени, когда «основная часть потенциальных читателей (Альфреда Маршалла) были не только неспособны, но и не желали читать экономику в математической форме», в соответствии с высказыванием Винера (1892—1970) [860], и перешла к новым стандартам, о которых Марковиц писал в 1987 г.: «более половины моих студентов не могут записать формальное определение (предела последовательности)» [642].

Этот материал написан главным образом для студентов, получающих инженерное и естественно-научное образование, которые желают изучать количественную сторону финансов в связи с учебным процессом или в связи с желанием стать профессионалами в этой области. Никаких предварительных знаний по финансам не требуется. Годы работы со студентами в области бизнеса убедили меня в том, что ориентированные на MBA*) студенты получают пользу от акцента книги на вычисления. Ну а при обширной библиографии книга сможет служить и справочным пособием для научных работников.

Этот текст предназначен также и для практиков. Системные аналитики найдут здесь много компактных и полезных алгоритмов. Управляющие портфелями ценных бумаг и брокеры смогут познакомиться с количественными инновациями, полезными в их повседневной деятельности. При построении новых финансовых инструментов данная книга послужит и финансовым инженерам тем, что в ней дается объяснение базовым принципам и вычислительным подходам, используемым при оценке стоимости этих инструментов.

Рынок уже предложил несколько великолепных книг по производным ценным бумагам ([236, 470, 514, 746, 878]), финансовой технологии ([369, 646, 647]), финансовой теории ([290, 492]), эконометрике ([147]), численными методами ([62, 215]) и финансовой математике ([59, 575, 692, 725]). Однако существует не много книг, в которых делается попытка объединить

*) MBA = Master of Business Administration — магистр экономики управления. — Прим. ред.

дисциплины широкого профиля. Надеюсь, что этот текст окажется хотя бы частично успешным в этом направлении и, как следствие, кому-то не потребуется больше покупать четыре или пять книг, чтобы иметь хорошую возможность познакомиться со всеми перечисленными проблемами.

Представление

Эта книга самодостаточна (т.е. содержит все необходимое для понимания). Технически хорошо подготовленные студенты, как закончившие курс обучения, так и не закончившие его, должны быть способны освоить ее сами. Математический материал добавлен везде, где в нем есть потребность. И во многих случаях таким образом получается недостающее звено, соединяющее предшествующие главы с проблемами, рассматриваемыми впервые. Финансовые приложения, как правило, даются для того, чтобы сделать изложение законченным. Численные методы представлены в виде четко изложенных алгоритмов и потому их программирование должно быть простым. Базовые элементы финансовой теории излагаются достаточно подробно, поскольку понимание теории, лежащей в основе вычислений, представляется весьма существенным при построении или обсуждении финансовых новинок.

Неотъемлемую часть всей книги составляет большое число упражнений. Они располагаются в тексте сразу же за соответствующим материалом. Указаниями снабжены наиболее сложные из них. Имеется и много заданий по программированию. Те читатели, которые стремятся стать разработчиками компьютерных программ, могут многому научиться в процессе выполнения этих заданий. Тщательно проверяйте свои программы. Знаменитое высказывание Хемминга (1916—1998), «целью вычисления является понимание проблемы, а не получение числа», неприменимо к ошибочным программам. Ответы ко всем нетривиальным упражнениям и некоторым заданиям по программированию можно найти в конце книги.

Большая часть графического материала была получена при помощи пакета *Mathematica* [882]. Программы, которые генерируют данные для графиков, были написаны на разных языках, включая C, C++, Java, JavaScript, Basic и Visual Basic. И замечательным является тот факт, что большая часть — если не вся — работы по программированию могла быть выполнена при помощи передового программного обеспечения [221, 708]. Некоторые вычислительные платформы допускают совместное использование знакомого графического интерфейса пользователя и программ, написанных на более эффективных языках программирования более высокого уровня [265]. И хотя такой уровень совмещения требует некоторого умения, на практике такой подход оказывается общепринятым. Рисунки от руки были созданы при помощи пакетов Canvas и Visio.

Рукопись была подготовлена при помощи издательской системы $\text{\LaTeX}$ [580], которая представляется идеальной для работ подобного объема и сложности. Я благодарю Кнута и Лэмпорта за их подарок писателям технического направления.

Программное обеспечение

Многие алгоритмы книги были доведены до уровня программ. Однако, вместо того чтобы выпустить книгу вместе с сопровождающим ее диском, я предпочел расположить мое программное обеспечение в Интернете и сделать независимым от платформы [412]. Любой компьютер, способный просматривать всемирную паутину World Wide Web, может быть гостем этих программ на странице Capitals по адресу

www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/capitals.html

Но также нет больше необходимости обращаться к автору за тем, чтобы он выслал читателю последние разработки в области программного обеспечения, поскольку находящееся на web-странице является самым последним. Этот новый подход к развитию и распространению программного обеспечения, ставший возможным благодаря всемирной сети, превратил программное обеспечение в услугу Интернета.

Организация книги

Здесь кратко представлен материал всей книги.

Часть I. Классическая финансовая математика. Эта часть состоит из пяти глав. В первой приводится обзор эволюции финансовой и компьютерной технологии и дается оценка существующему положению дел в этой области. Вторая служит введением в проблематику анализа алгоритмов и мер их сложности. Необходимые обозначения для записи алгоритмов изложены именно здесь. В остальных трех главах рассматриваются конкретные вопросы классической и детерминированной финансовой математики. Так, третья глава содержит относительно полное изложение стандартной финансовой математики, начиная с понятия временной стоимости денег. Гл. 4 посвящена таким важным понятиям, как дюрация и выпуклость*). А гл. 5 излагает временную структуру процентных ставок с детерминированной точки зрения.

Часть II. Опционы и другие производные ценные бумаги. В гл. 6 намечается переход к стохастическим моделям и дается представление об основных понятиях статистики. Остальные шесть глав (7—12) посвящены опционам и производным ценным бумагам. Так, в седьмой главе вводятся опционы и обсуждаются основные стратегии при их использовании. Гл. 8 знакомит читателя с арбитражной логикой, в ней устанавливаются общие соотношения по оценке стоимости. Гл. 9 является ключевой. В ней оценка стоимости опциона рассматривается в дискретной биномиальной модели. Знаменитая формула Блэка—Шоулса выводится именно здесь и здесь же приводятся алгоритмы для оценки стоимости основных групп опционов. Меры чувствительности для опционов охарактеризованы в гл. 10. Разнообразные применения и типы опционов представлены в гл. 11. Наконец, другие производные ценные бумаги, такие как форварды и фьючерсы, рассмотрены в гл. 12.

*) Речь идет о выпуклости функций стоимости активов. — Прим. ред.

Часть III. Непрерывная финансовая математика и хеджирование. В первых трех главах (13—15) из четырех вводятся основные понятия финансовой математики с непрерывным временем. Так, гл. 13 посвящена мартингальной оценке стоимостей и броуновскому движению, а гл. 14 смещает рассмотрение в сторону стохастического интегрирования и процесса Ито. Вместе же они дают сравнительно полное представление о предмете и на доступном уровне. При этом время от времени мы возвращаемся к дискретным моделям и устанавливаем связи с непрерывными аналогами в рассматриваемых вопросах. В гл. 15 внимание фокусируется на дифференциальных уравнениях в частных производных, которым удовлетворяют временные характеристики производных ценных бумаг. В последней гл. 16 речь идет о хеджировании с использованием производных инструментов.

Часть IV. Техническая сторона финансовых расчетов. В этой части делается попытка более основательного рассмотрения различных технических проблем. Так, в гл. 17 исследуются биномиальные и триномиальные деревья. И одним из стимулирующих соображений здесь является желание продемонстрировать пользу комбинаторики при построении высоко-эффективных алгоритмов. В гл. 18 представлены численные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных, обсуждаются проблемы моделирования по методу Монте-Карло. В гл. 19 речь идет о вычислительной линейной алгебре, о методе наименьших квадратов и сплайнах. В качестве приложения в ней рассматриваются модели факторного анализа. Наконец, гл. 20 посвящена финансовым временным рядам, а также рассмотрению популярных моделей временных рядов.

Часть V. Класс ценных бумаг, чувствительных к процентной ставке, и его проблемы. В гл. 21 дается обзор весьма представительного класса производных финансовых инструментов, основанных на процентной ставке. В гл. 22 обсуждается построение адекватной кривой доходности. В гл. 23 начинается обсуждение вопросов моделирования процентной ставки и оценки стоимости производных финансовых инструментов с помощью элементарного, но все еще важного, биномиального дерева процентной ставки. В гл. 24 излагаются общие математические подходы к построению моделей процентной ставки, а в гл. 25 и 26 рассматриваются некоторые модели, обсуждаемые в финансовой литературе.

Часть VI. Наиболее известные ценные бумаги. В гл. 27 рассматриваются ценные бумаги с фиксированной доходностью и особенное внимание в ней уделяется ценным бумагам с так называемыми «вложенными опционами», т. е. с некоторыми дополнительными функциями. Остальные главы посвящены ценным бумагам, связанным с закладными. В гл. 28 вводятся основные идеи, общепринятые правила обращения этих ценных бумаг и возникающие при этом проблемы. В гл. 29 исследуется трудная проблема предоплаты и соответствующей оценки стоимости. В гл. 30 делается обзор очень известного типа облигаций США, обеспеченных портфелем закладных и предлагающих фиксированную дату погашения, которые так и называются: «облигации, обеспеченные закладными».

Часть VII. Теория и практика управления портфелем. В гл. 31 обсуждается теория и практика управления портфелем. В частности, в ней представлена современная портфельная теория, модель оценки стоимости финансовых активов CAPM (Capital Asset Pricing Model), Арбитражная теория оценки стоимости APT (Arbitrage Pricing Theory), а также проблематика оценки «стоимости под риском» VaR (Value at Risk).

Часть VIII. Дополнение. В гл. 32 речь идет о программном обеспечении в Интернете, разработанном для этой книги. В гл. 33 содержатся ответы и указания ко всем нетривиальным упражнениям. В гл. 34, добавленной редактором перевода, приведен список используемых в книге русских и английских сокращений.

Выражения признательности

К написанию этой книги оказались причастны многие: Джорж Эндрю, Нельсон Биб, Эдвард Бендер, Алессандро Бьянки, Томас Бьерк, Петер Карр, Рэн-Ро Чен, Шу-Хенг Чен, Оран Шейетт, Йен-Дианн Чиу, Марк Фишер, Ира Гессель, Мау-Вей Хунг, Сомеш Йа, Минг-Янг Као, Гоу-Хсинг Кинг, Тимоти Классен, Филип Лянг, Стивен Лин, Му-Шиеунг Лю, Эндрю Ло, Роберт Лам, Хрис МакЛин, Майкл Рабин, Дуглас Роджерс, Масако Сато, Эрик Шлегль, Джэймс Тилли и Кейт Вайнтрауб.

Особо я благодарен за интеллектуальное стимулирование экс-коллегам по Ситикорп Секьюрити, компании в Нью-Йорке: Марку Бурзуцкому, Майклу Чу, Берли Йенгу, Бен Лису, Джеймсу Лю и Франку Фейке Сунгу. И, в частности, Энди Ляо и Энди Спарксу, которые научили меня многому в отношении рынков и умения делать количественные оценки.

Улучшению качества изложения способствовали, выполняя определенные задания в своих курсовых или исследовательских работах, следующие студенты Национального университета Тайваня: Чи-Чунг Чанг, Рональд Ян-Ченг Чанг, Кун-Юан Чао [179], Вей-Юи Чен [189], Юан-Ванг Чен [191], Дзинг-Хонг Чу, Тиан-Шир Даи [257, 258, 259], Чи-Шанг Дро, Хау-Рен Фанг, Ю-Юан Фанг, Дзия-Хау Гуо [405], Ен-Йи Хсяо, Гуан-Шиенгг Хуанг [250], Хау-Минг Хуанг, Хенг-Йи Лю, Ю-Хонг Лю [610], Мин-Ченг Сун, Руо-Минг Сунг, Чен-Ле Ванг [867], Хуанг-Вен Ванг [868], Хсинг-Куо Вонг [181] и Чао-Шенг Ву [885].

Большую пользу книге принесли замечания нескольких анонимных рецензентов. Будучи первыми читателями книги, они своим критическим взглядом оказывали постоянное влияние на ее написание. Как и при издании моей первой книги в издательстве Кэмбридж Университи Пресс, неоценимую помощь оказали ее редакторы. Особенно я хотел бы поблагодарить Лоран Коулс, Йоао да Коста, Кэйтлин Доггарт, Скотта Пэриса, Элеанор Умали и анонимного редактора рукописи.

Хочу поблагодарить свою жену Чи-Лан и своего сына Рэймонда за поддержку проекта, который стартовал в январе 1995 г. Надеюсь, что эта книга отправит на заслуженный отдых их постоянный и обескураживающий вопрос «Когда же ты закончишь ее?»

ЧАСТЬ I

КЛАССИЧЕСКАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

- 1 Введение**
- 2 Анализ алгоритмов**
- 3 Основы
финансовой
математики**
- 4 Волатильность
цены облигации**
- 5 Временная
структура
процентных ставок**

Эта часть состоит из пяти глав. В первой из них приводится обзор эволюции финансовой и компьютерной технологии и дается оценка существующему положению в этой области. Вторая глава служит введением в проблематику анализа алгоритмов и мер их сложности. Необходимые обозначения для записи алгоритмов приведены именно здесь. В остальных трех главах рассматриваются конкретные вопросы классической и детерминированной финансовой математики. Так, третья глава содержит относительно полное изложение стандартной финансовой математики, начиная с понятия временной стоимости денег. Глава 4 посвящена таким важным понятиям, как дюрация и выпуклость. А глава 5 излагает временную структуру процентных ставок с детерминированной точки зрения.

1 Введение

Но время рыцарей ушло. Им на смену явились философы, экономисты, бухгалтеры; и слава Европы угасла навсегда.

Эдмунд Бурк (1729—1797),

Размышления о французской революции

1.1 Современные финансы: краткая история

Появление финансовой теории современного уровня относят к 50-м гг. прошлого века [659, 660]. Впечатляющие открытия Марковица, Трейнора, Шарпа, Линтнера (1916—1984) и Моссина привели к появлению в 60-х гг. модели оценки стоимости финансовых активов (Capital Asset Pricing Model = CAPM), которая стала количественной моделью для измерения риска. Не менее важное влияние на инвестиционную практику в 60-х гг. оказали теоретические исследования, в рамках которых были сформулированы гипотезы эффективного рынка Самуэльсона—Фама. Грубо говоря, они означали, что стоимость ценных бумаг (ЦБ) отражает имеющуюся рыночную информацию полностью и сразу. Однако наиболее важным достижением с практической точки зрения оказалась модель Блэка—Шоулса оценки стоимости опциона, появившаяся в 70-х гг. и мгновенно одобренная практиками. Теория расчета стоимости опционов является одной из опор финансовой теории и применяется в самых разнообразных ситуациях [622, 658]. Ее возникновение можно связать с докторской диссертацией Людовика Башелье 1900 г. «Математическая теория спекуляций». Дело в том, что именно Башелье (1870—1946) развил многое из той математики, которая лежит в основе современных экономических теорий эффективного рынка, моделей случайного блуждания, броуновского движения (за 5 лет до Эйнштейна (1879—1955)) и мартингалов [277, 342, 658, 776]¹.

1.2 Финансовая технология и финансовые расчеты

В настоящее время широкое разнообразие финансовых инструментов озадачивает даже специалистов. Индивидуумы и компании могут торговать не только акциями и облигациями, но также опционами, фьючерсами, опционами на биржевые индексы и бесконечно многими другими активами. При желании диверсифицировать портфель из ЦБ можно составить его из соответствующих ЦБ тысяч взаимных фондов и **фондов из активов, торгуемых на бирже**. Корпорации и местные власти с возрастающей интенсивностью используют сложные комбинации производных ЦБ для уменьшения своих финансовых рисков или просто для

спекуляций. Сами же **производные ценные бумаги** являются финансовыми инструментами, чья стоимость зависит от стоимости других активов. При этом все эти ЦБ появляются в результате развития **финансовой технологии**, в функции которой как раз и входит выбор финансовых инструментов, способных удовлетворить предпочтения инвестора или помочь ему воспользоваться появившимися арбитражными возможностями [646].

Нововведения на финансовых рынках сопровождаются таким же взрывоподобным прогрессом в компьютерной технологии. Более того, современные финансовые системы нельзя и представить без компьютера. Ведь с его помощью осуществляется автоматическая торговля, ведется эффективная бухгалтерия, своевременно производятся расчеты и урегулируются сделки, в режиме реального времени ведется сбор данных и торговля, он используется в дневной торговле, крупномасштабной обработке данных, а также при выявлении условий рынка и управлении рыночной ситуацией [647, 866]. Все эти приложения имеют дело с *информацией*. Структурные же изменения и возрастающая волатильность финансовых рынков начиная с 1970-х гг., а также крен в направлении большей сложности избираемых финансовых инструментов обусловили интерес к созданию *количественной* технологии. В настоящее время большая часть инвестиционных учреждений используют очень сложные модели и программы, от которых сильно зависит деятельность их торговых представителей. В них компьютеры используются для моделирования поведения финансовых ЦБ и основных рыночных индексов, оценки стоимости финансовых инструментов и поиска комбинаций этих инструментов, способных обеспечить получение дохода, соответствующего выбранному уровню риска. Уверенное же использование таких моделей, в свою очередь, ведет к возникновению новых финансовых идей и углублению самого понятия рынка [659, 661]. А это как раз и является целью **финансовых вычислений**.

При этом следует помнить, что всякий расчет опирается на входные данные и предположения модели. Однако данные могут оказаться недостаточно точными или полными, а используемые предположения в лучшем случае являются лишь некоторым приближением к действительности². Компьютерные программы также подвержены ошибкам («жучкам», т. е. техническим дефектам). Естественно, указанные факторы легко могут свести к нулю эффективность любого расчета. Но несмотря на эти трудности, способность компьютера вести расчеты с учетом мельчайших нюансов и возможность с его помощью проверить огромное число возможных сценариев является его неоценимым преимуществом. Овладение этой мощью и достаточно хорошее понимание ограниченности используемой модели должны помочь нам отказаться от слепой веры в числа.

1.3 Финансовые рынки

Благосостояние общества улучшается при помощи инвестиций. Те, кто занимается бизнесом, нуждаются в притоке внешнего капитала, поскольку даже проекты среднего размера превосходят возможности

большинства богатых людей. Правительства также нуждаются в средствах для удовлетворения общественных потребностей. Большая часть этих денег проходит через финансовые рынки, в «направлении» от вкладчиков к заемщикам. Организуя дело таким образом, финансовые рынки превращаются в связующее звено между сбережениями и капиталовложениями³, а, значит, между настоящим и будущим. Как следствие, вкладчики могут получать более высокие доходы от своих сбережений, вместо того, чтобы дрожать над ними, а заемщики получают возможность реализовать свои инвестиционные планы получения прибыли в будущем, т.е. обе стороны оказываются довольными таким развитием событий. Экономика в целом также выигрывает от этого, поскольку в результате расширяются возможности для производства. Финансовые рынки тем самым благоприятствуют осуществлению капиталовложений, выступая в роли источника информации.

Финансовый рынок обычно получает свое название по имени заемщика: рынок правительственных или муниципальных облигаций, рынок ипотеки (закладных), рынок коммерческих облигаций, рынок акций, рынок предметов широкого потребления, рынок обмена валюты⁴, (форекс-рынок), рынок фьючерсов и т.д. [95, 750]. На финансовых рынках существуют два основных типа финансовых инструментов: **долговые обязатель-**

Непогашенные обязательства рынка ЦБ США (в млрд. \$)								
Год	Муниципальные	Казначейские	ЦБЗ	Корпоративные	Федеральных Агентств	Денежного рынка	Обеспеченные активами	Всего
1985	859,5	1 360,2	372,1	719,8	293,9	847,0	2,4	4 454,9
1986	920,4	1 564,3	534,4	952,6	307,4	877,0	3,3	5 159,4
1987	1 010,4	1 724,7	672,1	1 061,9	341,4	979,8	5,1	5 795,4
1988	1 082,3	1 821,3	749,9	1 181,2	381,5	1 108,5	6,8	6 331,5
1989	1 135,2	1 945,4	876,3	1 277,1	411,8	1 192,3	59,5	6 897,6
1990	1 184,4	2 195,8	1 024,4	1 333,7	434,7	1 156,8	102,2	7 432,0
1991	1 272,2	2 471,6	1 160,5	1 440,0	442,8	1 054,3	133,6	7 975,0
1992	1 302,8	2 754,1	1 273,5	1 542,7	484,0	994,2	156,9	8 508,2
1993	1 377,5	2 989,5	1 349,6	1 662,1	570,7	971,8	179,0	9 100,2
1994	1 341,7	3 126,0	1 441,9	1 746,6	738,9	1 034,7	205,0	9 634,8
1995	1 293,5	3 307,2	1 570,4	1 912,6	844,6	1 177,2	297,9	10 403,5
1996	1 296,0	3 459,0	1 715,0	2 055,9	925,8	1 393,8	390,5	11 235,0
1997	1 367,5	3 456,8	1 825,8	2 213,6	1 022,6	1 692,8	518,1	12 097,2
1998	1 464,3	3 355,5	2 018,4	2 462,0	1 296,5	1 978,0	632,7	13 207,4
1999	1 532,5	3 281,0	2 292,0	3 022,9	1 616,5	2 338,2	746,3	14 829,4

Рис. 1.1. Рынки долговых обязательств США в 1985—1999 гг. Оценки Ассоциации рынка облигаций. Источники: Федеральная корпорация по ссудам для покупки жилья под залог, Федеральная Национальная ассоциация по закладным, Федеральная Резервная Система, Правительственная Национальная ассоциация по закладным, Компания по данным о ЦБ и Казначейство США. ЦБЗ — ценные бумаги, обеспеченные закладными.

ства и акции. Что касается долговых, то они представляют собой кредит с обещанием оплатить взятую сумму процентами, акция же как ЦБ является эквивалентом доли акционерного капитала компании. В таблице на рис. 1.1 для примера указаны рынки долговых ЦБ США в периоде между 1985 и 1999 гг. Финансовые рынки часто подразделяются на **денежные рынки**, занимающиеся краткосрочными долговыми ЦБ, и **рынки капитала**, которые торгуют долгосрочными долговыми обязательствами (облигациями) и обычными акциями (бумагами, представляющими акционерный капитал) [767, 799, 828].

В принципе заемщики и вкладчики могут общаться друг с другом напрямую, как на финансовых рынках, так и просто совместно реализуя процесс получения кредита. Однако наличие требований по минимальному размеру кредита, существование операционных издержек, связанных с реализацией сделки, а также дорогостоящая оценка стоимости рассматриваемых активов часто препятствуют осуществлению прямых контактов. Подобные препятствия устраняются **финансовыми посредниками**. В этой роли выступают финансовые учреждения, которые берут на себя функцию посредника при передаче денежных сумм от кредиторов к заемщикам. В отличие от большинства других фирм эти учреждения работают лишь с финансовыми активами [660]. Известными примерами таких учреждений являются банки, сберегательные банки, ассоциации сбережений и ссуд, кредитные союзы, пенсионные фонды, страховые компании, взаимные фонды и фонды денежных рынков. Финансовые посредники могут снижать минимальную сумму вклада, а также другие параметры затрат вкладчиков.

Финансовые рынки делятся на первичные и вторичные. **Первичный рынок** часто фиктивен, поскольку не имеет реального местоположения. Правительства и корпорации сначала продают ЦБ — долговые обязательства и акции — на первичном рынке. Такие продажи осуществляются с помощью публичных предложений или частных размещений. Союз инвестиционных банков подписывается на долговые обязательства и акции, выкупая их у эмитента, а затем перепродает желающим. Иногда инвестиционные банкиры предпринимают специальные усилия, чтобы избежать риска нераспространения ЦБ. В последующем каждый желающий может торговать этими бумагами на любом **вторичном рынке**, скажем, на таком как Нью-Йоркская биржа. Торгуются все имеющиеся ЦБ на вторичном рынке.

Существование вторичного рынка делает ЦБ более привлекательными для инвесторов, поскольку позволяет торговать ими после их покупки. Именно в этом и состояла сама идея создания вторичного рынка закладных в 1970 г. с помощью так называемого процесса превращения актива в ЦБ [54]. Этот **процесс превращения в ЦБ** переводит активы в торгуемые ЦБ с помощью других активов, помещаемых в залог и рассматриваемых в качестве гарантии (или дополнительного обеспечения), причем такие активы часто могут сниматься с балансовой отчетности банков. Поступая таким образом, финансовые посредники превращают неликвидные активы в ликвидные обязательства [843]. Повышая привлекательность закладных для инвесторов, вторичный рынок одновременно делает их

и более доступными для покупателей жилья. Наряду с закладными процесс превращения активов в ЦБ коснулся также автомобильных ссуд, фактических ссуд по кредитным картам, ссуд банка с более высоким рейтингом, аренды. Этот процесс произвел фундаментальные изменения на рынке кредита, превратив рынок капиталов в основного поставщика кредитов, т.е. предоставив ему играть роль, традиционно исполняемую исключительно банковской системой.

1.4 Компьютерная технология

Аппаратное обеспечение компьютеров прогрессирует с экспоненциальной скоростью. Если говорить о производительности рабочих станций, измеряемой в числовых показателях общепризнанной стандартной системы оценки производительности (SPEC), то в промежутке между 1987 и 1997 гг. она увеличивалась на 49% в год. Развитие технологии компьютерной памяти также впечатляет. Так, память с динамическим случайным доступом (DRAM) начиная с 1977 г. каждые три года увеличивала свою емкость в 4 раза. Относительное же увеличение производительности на единицу стоимости оборудования при переходе от вакуумных ламп к транзисторам, микрочипам и затем к интегральным сетям очень большого размера (VLSI) в период с 1951 г. по 1995 г. характеризуется множителем 2 400 000 [717].

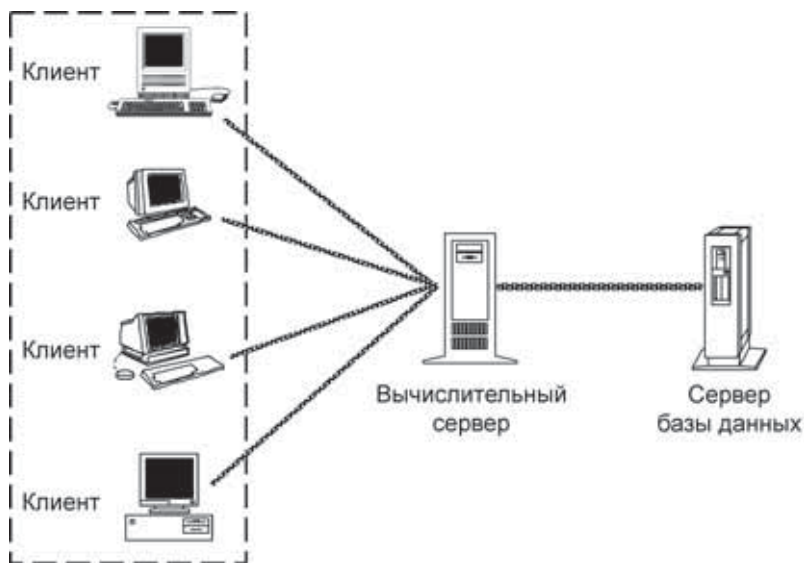


Рис. 1.2. Архитектура клиент/сервер. В типичной трехуровневой архитектуре клиент/сервер машины пользователей связаны с вычислительным сервером, который в свою очередь связан с сервером базы данных. Поскольку основные вычисления проводятся на вычислительном сервере, а доступ к большей доле данных проходит с помощью сервера базы данных, то компьютеру пользователя не нужно быть особо мощным.

Если вспоминать заметные события из области компьютерной технологии, то следует назвать прежде всего создание **центрального процессора IBM/360** и затем **миникомпьютеров** фирмы Digital (приобретенной в 1998 г. фирмой Compaq). Первый **суперкомпьютер** увидел свет в 1963 г. и создан он был Крэем (1926—1996) из корпорации Control Data. Первым **персональным компьютером** обычно считают созданный в 1977 г. компьютер Apple II. Но этот вариант в 1981 г. был превзойден персональным компьютером фирмы IBM, приводимым в действие микропроцессорами фирмы Intel и оперативной системой DOS компании Microsoft [638, 717]. Восемидесятые годы стали свидетелями появления так называемых **многократно запараллеленных компьютеров**, некоторые из которых насчитывали более 65 000 процессоров [487]. Параллельные компьютеры были также использованы в работе с базами данных [247, 263] и для оценки стоимости сложных финансовых инструментов [528, 794, 891]. Однако, поскольку элементы товаров широкого спроса отличает наилучшее значение отношения производительность/стоимость, то персональные компьютеры, соединенные быстрыми сетями, естественно вытеснили нишу параллельных компьютеров с большей части их традиционных рынков [24, 200].

Что же касается программного обеспечения, то здесь доминируют языки программирования высокого уровня [726]. Однако, хотя на них и легче программировать, чем на языках низкого уровня, но все же с ними заметно труднее проектировать и обслуживать сложные системы программного обеспечения. В действительности уже в 1960-х годах стоимость программного обеспечения системы IBM/360 превосходила стоимость ее аппаратного обеспечения [872]. А текущей тенденцией стало использование **объектно-ориентированных принципов** для помещения как можно большего количества информации в так называемые **объекты** [101, 466]. Это позволяет проще как использовать, так и конструировать программное обеспечение. Объектно-ориентированные системы разработки программного обеспечения стали широко доступными [178].

Доступным широким массам сделала компьютер революция, связанная с появлением **графического интерфейса пользователя (GUI)**. Всемогущество персональных компьютеров с простыми в использовании интерфейсами заметно облегчило служащим доступ к информации, а также избавило их от необходимости вникать в ряд тонкостей функционирования систем [140]. Но это же обстоятельство проложило и путь к осознанию концепции **клиент/сервер** [736].

Системы клиент/сервер состоят из компонент, состав которых выбирается скорее не централизованно, а логически (см. рис. 1.2). Следовательно, отдельные компоненты можно оптимизировать, исходя из их функций и поднимая до предела суммарное отношение производительность/стоимость. Например, трехуровневая архитектура клиент/сервер содержит три части: интерфейс пользователя, вычислительный сервер (для приложений) и сервер базы данных [310]. Поскольку интерфейс пользователя требует меньше ресурсов, то он может работать на менее мощных компьютерах. Причем замечательно то, что в перспективе его можно сделать *платформо-независимым*, а это позволит добиться большей

доступности сервера в приложениях благодаря разработкам Интернета из середины 1990-х годов. Серверы, другой стороны, могут быть мощными **мультипроцессорными компьютерами** для вычислительных целей и ЭВМ с высокой скоростью записи на диск для нужд базы данных. Так, типичная архитектура всемирной паутины (**World Wide Web = WWW**), к примеру, представляет собой трехуровневую систему, состоящую из броузера (**browser**)*), программного сервера (**Web server**) и сервера базы данных (**database server**). Объектно-ориентированную методологию и архитектуру клиент/сервер можно с выгодой комбинировать для проведения финансовых расчетов [626, 867].

Системы управления базой данных лежат в основе информационных систем [497, 871]. При устройстве базы данных с использованием продуктов компаний Computer Associates, IBM, Informix, Microsoft, Oracle и Sybase доминирует модель **реляционной базы данных**, предложенной Коддом из IBM в 1970 [216]. В реляционной базе данных все данные представляются в виде двумерных таблиц. Рассмотрим следующую таблицу для хранения дневных данных по процентным ставкам:

<i>Данные</i>	<i>Может ли значение быть нулем?</i>	<i>Тип</i>
Срок погашения	Ноль не разрешен	Текст (10)
Дата ставки	Ноль не разрешен	Дата
Ставка	Ноль разрешен	Цифровое значение (15,8)

(10 означает, что в тексте должно быть ≤ 10 символов, а 15,8 — что у числа возможно 15 знаков до запятой и 8 знаков после нее). Назовем таблицу кривой доходности. Тогда сформулированную ниже на структурном языке запроса SQL⁵ фразу можно использовать для определения доходности двухлетней облигации Казначейства США на 1 декабря 1994 г.

```
SELECT rate FROM yieldcurve
WHERE maturity = '2YR' AND ratedate = '1994-12-01'
```

(ВЫБРАТЬ ставку ИЗ кривой доходности; СО сроком погашения = 2 года и датой ставки 1994-12-01). Язык SQL используется в языках программирования общего назначения. Улучшение производительности персональных компьютеров низкой стоимости, а также появление доступных широким массам многозадачных оперативных систем для них (OS/2 у компании IBM, Windows NT у компаний Microsoft и Linux) позволили перейти к массовому использованию систем базы данных клиент/сервер [1, 182, 688, 888]. Однако начиная с 1996 г. на рынке реляционных баз данных стало сказываться влияние Интернета [311].

Просматриваемая еще в 1991 г. у компании Berners Lee, система Интернета WWW становится глобальной информационной системой, которая предоставляет легкий доступ к ресурсам Интернета [63]. Это быстро привело к революции в использовании Интернета для передачи сообщений, другой информации и в решении бизнес-проблем [655].

*) Броузер — программа ускоренного просмотра файлов. — Прим. ред.

Персональный компьютер с доступом в Интернет WWW — обычно с помощью графического браузера от компаний Microsoft или Netscape (часть компании America Online) — открывает окно в мир, который можно охарактеризовать как поразительный: покупка-продажа, котировки акций и облигаций, торговля акциями в режиме онлайн (реального времени), подборка текущих и прошлых финансовых данных, создание программ для финансового анализа, онлайн-версии наиболее известных газет и журналов, результаты научных исследований, газетные архивы и препринты, и это лишь малая толика из того, что можно упомянуть. Интернет может также образовывать информационную сеть внутри компаний, или **Интранет** [733]. Появление Интернета оказалось одной из главных причин, обусловивших рост числа посетителей этой системы от менее 500 000 до более чем 10 млн. посетителей в промежутке с 1990 г. по 1996 г. [63, 655] (в июле 2000 г. это число составляло 93 млн.). Число пользователей Интернета в 1998 г. составляло уже 100 млн. человек [852]. Кардинально изменились даже стратегии разработки программного обеспечения [488]. Эти поразительные достижения в настоящее время оказывают существенное влияние на мир бизнеса и финансов [13, 338, 498, 831].

Примечания

1. Башелье оставался неизвестным примерно до 1960 г., когда его основная работа была переведена на английский язык. Представляется, что причина неудач его жизненной карьеры была связана с определенными математическими ошибками и темой его диссертации [637]. Как писал его руководитель Пуанкаре (1854—1912) [277], «Тема его диссертации представляет собой нечто весьма далекое от того, что привыкли исследовать наши кандидаты». И это не первый раз, когда идеи, связанные с экономикой, оказывали влияние на другие области знания [426, 660]. Наиболее известным примером здесь является постоянное влияние, которое Мальтус оказывал на Дарвина и Уоллеса в 1838 г. [648].

2. Два нобелевских лауреата по экономике, Мертон и Шоулс помогли основать компанию под названием «Долгосрочное управление капиталами». Основными инструментами компании были «компьютеры и мощная математика, а не интуиция и инсайдовская информация» [869]*). В сентябре 1998 г. 14 коммерческих и инвестиционных банков помогли ей избежать банкротства, предоставив кредит в \$ 3,6 млрд.

3. Часто между *реальными* и *финансовыми* капиталовложениями проводят разницу. Под инвестициями экономисты обычно подразумевают такие капиталовложения, которые приводят к возникновению реальных форм капитала, таких, например, как заводы, земля, машинное оборудование. Под капиталовложениями в этой книге будут пониматься финансовые инвестиции, т. е. нечто противоположное упомянутому выше

*) Инсайдовская информация — как правило, неофициальная (агентурная) информация об истинном финансовом положении эмитента. — Прим. ред.

реальным капиталовложениям. И состоят они будут лишь из таких ЦБ, как акции или облигации [797].

4. Форекс-рынок является наиболее мощным финансовым рынком в мире; в апреле 1998г. в нем находилось в обращении примерно \$1,5 трлн. [51]. Игроками на этом рынке являюся самые большие инвестиционные и коммерческие банки, чьи брокеры общаются между собой с помощью компьютеров, телефона и другого телекоммуникационного оборудования [767].

5. Наиболее широко используемый язык описания базы данных SQL [315] возник из структурного языка опросов SEQUEL (Structured English QUEry Language), который был разработан и внедрен в IBM.

2 Анализ алгоритмов

В науке о компьютерах не существует традиции постановки экспериментов, которые бы отвечали на вопрос о сравнительной ценности различных теорий, как это принято в физике.

Льюис Хартманис [421]

Алгоритмами называются конструктивно и четко определяемые процедуры, которые могут быть превращены в компьютерные программы. Классическим примером является алгоритм Евклида, который точно определяет последовательность действий для нахождения наибольшего общего делителя. Проблемы, подобные поиску наибольшего общего делителя, могут быть названы **разрешимыми** или **исчислимыми**, а те, которые не допускают таких алгоритмов — **неразрешимыми**. Разрешимая задача может быть настолько сложной, что эффективного алгоритма для нее не существует. В этом случае ее называют **не поддающейся обработке**. Проблемы оценки стоимости финансовых инструментов могут быть связаны в том числе с их внутренней сложностью [169].

Наиболее трудным элементом реализации программного обеспечения как раз и является разработка алгоритма [264]. Алгоритмы в этой книге записываются в неформальном виде, называемом **псевдокодом**. Псевдокод объясняет идею алгоритма, отвлекаясь от необходимости грамматически правильно изъясняться. Программы в псевдокодах содержат достаточную детализацию алгоритма для того, чтобы затем его кодирование на языке программирования было бы очевидным. В этой главе в общих чертах описываются общепринятые соглашения, используемые при составлении программ в псевдокодах.

2.1 Сложность

Точно предсказать результат исполнения программы трудно. Это зависит от очень многих факторов, таких, как тип компьютера, на котором она будет реализована, используемый язык программирования, компилятор для генерации двоичного кода, рабочая нагрузка компьютера и т. д. При этом, хотя реально затраченное время и является единственным стоящим критерием эффективности [717], все же требуется иметь и меры сложности, независимые от используемого компьютера, чтобы получить возможность высказать какое-то суждение об ожидаемой производительности.

Начнем с перечня основных операций, относительно которых предполагается, что для их исполнения требуется одна единица времени. Логические сравнения ($\leq$, $=$, $\geq$, и т. д.) и арифметические операции конечной точности ($+$, $-$, $\times$, $/$, взятие экспоненты, логарифма и т. д.) принадлежат этому множеству. Общее число этих операций, понимаемое далее как объем

общей работы, проделанной алгоритмом, называется его **вычислительной сложностью**. Аналогично, **пространственной сложностью** называется общий объем памяти, используемый в процессе исполнения алгоритма. Мы сконцентрируемся здесь на абстрактной сложности алгоритма, вместо того, чтобы говорить о его реализуемости, которая может затрагивать настолько большое количество деталей, которые мы никогда не сможем учесть полностью. Сложность и будет хорошим гидом для определения реально затрачиваемого алгоритмом времени. Причем поскольку пространственная сложность в этой книге используется редко, то термин сложность будет использоваться исключительно для вычислительной сложности.

Алгоритм поиска элемента:

ввод: x, n, A_i ($1 \leq i \leq n$);
целое k ;
для $k = 1$ до n
 если $[x = A_k]$, вывод k
вывод: элемент не найден

Рис. 2.1. Алгоритм последовательного поиска.

Сложность алгоритма выражается в виде функции от размера его входной информации. Рассмотрим алгоритм поиска, представленный на рис. 2.1. Он разыскивает заданный элемент, последовательно сравнивая его с каждым элементом из некоторого набора длины n . Очевидно, что наихудшим вариантом по сложности будет случай n сравнений, который произойдет, если разыскиваемый элемент окажется последним в наборе или если такого в нем не окажется вовсе. Но, конечно, есть и другие операции. Цикл «для», например, использует параметр цикла k , значение которого увеличивается при каждом выполнении цикла и сравнивается с границей числа циклов n . Нам не нужно определять точное число операций, поскольку нас интересует лишь **асимптотика** их роста. Но первое связано со вторым, а его влияние на общую производительность пока не может быть, вообще говоря, выяснено [37, 227]. Сложность же программ при наличии в них циклов, таким образом, определяется сложностью тела цикла, т.е. совокупностью выполняемых в цикле операций.

2.2 Анализ алгоритмов

Нас интересуют меры самых плохих случаев. Хотя верно и то, что они не всегда реализуются на практике. Но в среднестатистическом анализе приходится считать заданным некоторое распределение объема вводимой информации, достоверность которой трудно проверить. Поэтому, опуская несущественные детали, можно сказать, что скорость роста сложности интересует нас лишь как функция объема вводимой информации при его увеличении, причем игнорируются постоянные компоненты сложности и случай ввода информации малого объема. Основная цель, таким образом, направлена на выяснение асимптотической скорости роста, как это уже упоминалось в п. 2.1.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных, а $\mathbb{R}^+$ — множество положительных действительных чисел. Введем далее обозначение, которое потребуется для определения сложности.

Определение 2.2.1. Будем писать $g = O(f)$, если $g(n) \leq cf(n)$ при некоторой постоянной $c > 0$ и всех достаточно больших n ; здесь $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, т.е. это последовательности положительных чисел. $\triangleleft$

Пример 2.2.2. Основание логарифма не играет роли в асимптотическом анализе, поскольку

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = O(\log_e x);$$

здесь $e = 2,71828\dots$ Будем кратко записывать $\log_e x$ в виде $\ln x$. $\triangleleft$

Пример 2.2.3. Пусть $f(n) = n^3$ и $g(n) = 3,5n^2 + \ln n + \sin n$. Тогда ясно, что $g = O(f)$, поскольку $g(n)$ меньше n^3 при всех достаточно больших n . С другой стороны, $f \neq O(g)$. $\triangleleft$

Обозначим объем вводимой информации через N и будем говорить, что реализация алгоритма занимает 1) **логарифмическое время**, если его сложность равна $O(\ln N)$ и 2) **линейное время**, если его сложность есть $O(N)$. Алгоритм последовательного поиска рис. 2.1, к примеру, имеет сложность $O(N)$, поскольку в нем $N = n + 2$ входных данных и он требует выполнения $O(n)$ операций. Сложность вида $O(N \ln N)$ типична для сортировки данных и различных алгоритмов типа разделяй и властвуй. Реализация алгоритма занимает **квадратичное время**, если его сложность есть $O(N^2)$. Многие элементарные вычисления с матрицами, такие, как умножение матрицы на вектор, имеют именно такую сложность. Точно так же реализация алгоритма занимает **кубическое время**, если его сложность есть $O(N^3)$. В качестве типичных примеров здесь можно привести умножение матрицы на матрицу и решение систем линейных уравнений. Наконец, реализация алгоритма занимает **экспоненциальное время**, если его сложность есть $O(2^N)$. Проблемы, *требующие* экспоненциального времени, очевидно, **не поддаются обработке**. Однако алгоритм с экспоненциальным временем может хорошо работать на «типичных» объемах вводимой информации. Основы понятия вычислительной сложности были сформулированы в 1960-х гг. [710].

Упражнение 2.2.1. Покажите, что $f + g = O(f)$, если $g = O(f)$.

Упражнение 2.2.2. Докажите следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^n i &= O(n^2), & 2) \sum_{i=1}^n i^2 &= O(n^3), & 3) \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i &= O(n), \\ 4) \sum_{i=0}^{\alpha \log_2 n} 2^i &= O(n^\alpha), & 5) \sum_{i=0}^n i^{-1} &= O(n \ln n). \end{aligned}$$

2.3 Описание алгоритмов

Далее всюду используются общепринятые математические символы. Поэтому $+$, $-$, $\times$, $/$, $>$, $\leq$, $\geq$ и $=$ обозначают сложение, вычитание, и т.д. Символ $:=$ означает предписание. Например, выражение $a := b$ предписывает значение b переменной a . Если алгоритм приводит к числу a , то будем говорить: «вывод a ».

Конструкция (выражение, предписание или указание)

для $(i = a \text{ до } b) \{ \dots \}$

означает, что действие, сформулированное в скобках $\{ \dots \}$ выполняется $b - a + 1$ раз, с i , последовательно равным $a, a + 1, \dots, b$. Конструкция

для $(i = a \text{ вниз до } b) \{ \dots \}$

означает то же самое, только в порядке убывания с i равным $a, a - 1, \dots, b$ и, соответственно, $a - b + 1$ раз. Конструкция

пока $[S] \{ \dots \}$

подразумевает исполнение действия, указанного в скобках, до тех пор, пока не будет нарушено условие S . Например, пока $[a = b] \{ \dots \}$ выполняется при условии равенства между a и b . Как только равенство нарушится, выполнения действия, указанного в скобках, прекратится. Логическая структура

если $[S] \{ T_1 \}$, иначе $\{ T_2 \}$

предписывает исполнять действие T_1 , если выполнено условие S , и действие T_2 , если оно нарушено. Выражение «прекратить» используется для остановки циклической процедуры. Окаймляющие скобки могут быть опущены, если они содержат лишь одно утверждение.

Выражение $a[n]$ означает набор из n элементов $a[0], \dots, a[n - 1]$. Обозначение $a[n][m]$ используется для указания $n \times m$ следующих наборов элементов (подчеркнем, что начальный индекс *ноль*, а не *единица*):

$$\begin{array}{ccc} a[0][0] & \dots & a[0][m - 1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a[n - 1][0] & \dots & a[n - 1][m - 1] \end{array}$$

Хотя схема индексирования с нулем в качестве начальной точки часто бывает более удобной, но все же в некоторых случаях используется индексация, начинающаяся с единицы. Тогда выражение $a[1..n][1..m]$ используется для обозначения набора следующих $n \times m$ элементов:

$$a[1][1], a[1][2], \dots, a[n][m - 1], a[n][m].$$

Символы типа $a[]$ и $a[][]$ используются для обозначения полного набора. Все, что следует за символом $//$, считается комментарием.

2.4 Разработка программного обеспечения

Реализация алгоритма на конкретной платформе ЭВМ превращает алгоритм в компьютерную программу. Создание проекта программы, ее кодирование, отладка и помодульная проверка — все это является составными этапами разработки программного обеспечения¹. Ключ к созданию эффективного программного продукта лежит в повторном использовании подпрограмм либо от предыдущих проектов, либо из соответствующих коммерческих продуктов [650]. Проявляющаяся в настоящее время тенденция к широкому распространению объектно-ориентированного программирования и стандартизации программного продукта обещает привести к многократному использованию существующих программных модулей.

Выбор алгоритмов в проектах программного обеспечения должен осуществляться еще и с учетом пригодности для работы в большой системе. Проектирование предельно больших систем может свести этот выбор к небольшому числу альтернатив [791]. Соответствующие ограничения обычно связаны с требованиями, предъявляемыми другими частями рассматриваемой системы. Очень часто упомянутые ограничения отражают тот факт, что большая часть программных модулей для существующих систем уже написана [714].

Еще хотелось бы исправить присущее многим недопонимание в отношении важности производительности. Люди склонны думать, что уменьшение затрачиваемого времени, скажем, с 10 сек. до 5 сек. не является таким же значительным, как такое же уменьшение с 10 мин. до 5 мин. И мотивируется такая точка зрения тем, что пятисекундная разница намного меньше пятиминутной. Но это неправильно, поскольку пятисекундная разница легко может превратиться в пятиминутную, если придется решать 60 подобных задач. Ну а значительное уменьшение затрачиваемого времени на решение важной проблемы всегда желательно.

В заключение небольшой призыв к осторожности в обращении с термином **recursion** = **рекурсия**. Компьютерная наука обычно использует это слово для подхода к решению большой проблемы, состоящего в его сведении к последовательному решению малых частей той же проблемы. В качестве примера можно взять сортировку чисел из некоторого списка, когда одна из возможных стратегий состоит в том, чтобы сначала отсортировать первую половину списка, а затем отдельно вторую прежде, чем объединить результаты друг с другом. Заметьте, что обе подпроблемы по сортировке списка меньше по объему относительно исходной проблемы. Однако в соответствии с большей частью книг по финансам в этой книге термин «рекурсия» будет всего лишь означать «итерацию». Ну а строгое следование традициям компьютерной науки обычно оканчивается такой формулировкой проблемы, которая приводит к весьма неэффективным оценивающим алгоритмам.

Примечание

1. Ошибки программного обеспечения могут стоить очень дорого. Так, именно они послужили причиной катастрофы ракеты Ариан-5 при первом ее запуске 4 июня 1996 г., который обошелся в полмиллиарда долларов США [606].

Вероятно только человек с некоторыми математическими познаниями захочет начать счет с нуля, а не с единицы.

Бертран Расселл (1872—1970),

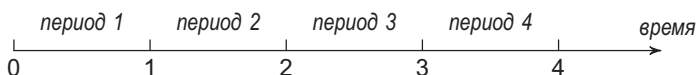
Введение в математическую философию

В пятнадцатом веке математика занималась в основном простыми коммерческими расчетами и проблемами архитектуры.

Джозеф Алоис Шумпетер (1883—1950),

Капитализм, социализм и демократия

Чтобы определить стоимость какого-либо финансового инструмента, нужно прежде всего посмотреть на связанный с ним денежный поток. А поскольку нас больше всего интересует приведенное значение стоимости ожидаемого денежного потока*), то выделяются три фактора: величины и знак денежных сумм, моменты времени, отмечающие их поступление, а также соответствующий коэффициент, позволяющий дисконтировать эти суммы. В этой главе мы как раз и займемся такой элементарной финансовой математикой, используя на всем ее протяжении следующую удобную шкалу времени:



3.1 Временная стоимость денег

Проценты — это стоимость предоставления ссуды [785, 787]. Пусть r — ежегодная ставка процента. Тогда, если проценты начисляются один раз в год, то **накопленное значение (НЗ)** суммы в P долларов за n лет составляет величину**) $\text{НЗ} = P(1 + r)^n$. Если же взглянуть на это же равенство с другой точки зрения, то указанная сумма НЗ долларов, рассматриваемая n лет спустя, сегодня стоит $P = \text{НЗ} \times (1 + r)^{-n}$ долларов и эта величина называется ее **приведенным значением (ПЗ)**¹. Процесс получения приведенного значения называется **дисконтированием**.

Вообще же, если проценты начисляются m раз в год, то накопленным значением суммы P за n лет является величина

$$\text{НЗ} = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{nm}. \quad (3.1)$$

Другими словами, выражение $(1 + r/m)^m - 1$ представляет собой эквивалентную r ежегодную ставку процента в ситуации, когда проценты начисляются один раз в год. Называется она ежегодной **эффективной** или **реальной** ставкой процента. В частности, мы имеем дело с **ежегодным** начислением процентов при $m = 1$, **полугодовым** при $m = 2$, **ежеквартальным** при $m = 4$, **ежемесячным** при $m = 12$, **еженедельным** при $m = 52$

*) То есть чаще всего его стоимость в некоторый предшествующий потоку момент времени. — Прим. перев.

**) Данная формула относится к начислению сложных процентов. — Прим. ред.

и ежедневным при $m = 365$. Двумя часто используемыми ставками-доходностями являются **доходность, эквивалентная облигационной (ДЭО)** (т. е. ежегодной ставке полугодового начисления) и **доходность, эквивалентная залоговой ставке (ДЭЗ)** (или ставке по закладным, т. е. ежегодной ставке ежемесячного начисления).

Ежегодная ставка процента r при m -кратном начислении в год эквивалентна процентной ставке r/m , относящейся к периоду длины $1/m$ лет по определению. Если, к примеру, по ссуде требуется выплачивать 1 % в месяц, то соответствующей ежегодной ставкой будет ставка 12 % ежемесячного начисления.

Пример 3.1.1. При ежегодной ставке 10 % полугодового начисления каждый доллар превратится в (будет стоить) $(1 + 0,1/2)^2 = 1,1025$ долларов через год. Поэтому такая ставка эквивалентна ежегодной процентной ставке 10,25 % однократного начисления. $\triangleleft$

Пример 3.1.2. Страховая компания должна выплатить пенсионерам \$ 20 млн. через 4 года. Предположим, что она может инвестировать деньги под ежегодную ставку 7 % полугодового начисления. Тогда, поскольку ежегодная эффективная ставка в этом случае есть $(1 + 0,07/2)^2 - 1 = 7,1225\%$, то сейчас она должна инвестировать сумму $20\,000\,000 \times (1,071225)^{-4} = 15\,188\,231$ долларов. $\triangleleft$

Если m стремится к бесконечности, то $[1 + (r/m)]^m \rightarrow e^r$ и мы получаем **непрерывное начисление процентов**, при котором

$$H_3 = Pe^{rn};$$

здесь $e \approx 2,71828$. Схему (3.1) мы называем **периодическим начислением процентов**, чтобы отличать ее от непрерывного начисления. С последней проще работать. Например, если в первые n_1 лет будет действовать ставка r_1 непрерывного начисления, а в следующие n_2 лет — ставка r_2 , то $H_3 \$ 1$ за $n_1 + n_2$ лет будет равно $e^{r_1 n_1 + r_2 n_2}$ долларам.

Упражнение 3.1.1. Проверьте, что при заданной ежегодной ставке m -кратного начисления соответствующая эффективная ставка тем больше, чем выше частота начисления m .

Упражнение 3.1.2. Ниже приведены типичные уведомления, помещаемые на кредитных карточках:

ежегодная номинальная*) ставка процентов	18,70 %,
ежемесячная периодическая ставка	1,5583 %.

Какова в них частота начисления процентов?

Упражнение 3.1.3. 1) В п.1.4 было указано, что рабочие станции увеличивали свою производительность на 54 % в год в период с 1987 по 1992 гг. а также, что DRAM технология (объема памяти) увеличивала свою эффективность в 4 раза каждые 3 года начиная с 1977 г. Какова соответствующая ежегодная ставка роста в непрерывном начислении?

2) Количество заявок, получаемых Национальным Центром по использованию суперкомпьютеров (NCSA) от WWW пользователей увеличивалось от $\sim 300\,000$ в день в мае 1994 г. до $\sim 500\,000$ в день в сентябре

*) Обычно ежегодную ставку процента r называют *номинальной*, если она является ставкой процента m -кратного начисления, $m > 1$. — Прим. ред.

того же года. Какова в этом периоде ежемесячная ставка роста (при ежемесячном начислении процентов)?

3.1.1 Эффективные алгоритмы поиска приведенного и накопленного значений

Величина приведенного значения (ПЗ) денежного потока из сумм $C_1, C_2, \dots, C_n$, поступающих в моменты времени $1, 2, \dots, n$, на момент 0 равна

$$\frac{C_1}{1+y} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+y)^n}.$$

Ее можно рассчитать с помощью алгоритма, показанного на рис.3.1 за время $O(n)$, поскольку большая часть вычислений используют лишь четыре арифметические операции в течение одного цикла, и одна реализация алгоритма состоит из n циклов. При этом можно сэкономить одну арифметическую операцию внутри цикла, если создать новую переменную, скажем z , и присвоить ей значение $1+y$ перед циклом. Выражение $d := d \times (1+y)$ тогда можно заменить на $d := d \times z$. Подобная оптимизация современными компиляторами часто выполняется автоматически. И это является еще одним аргументом в пользу асимптотического подхода: в сложной ситуации, когда приходится делать много манипуляций, которые нам не знакомы, то лучшее из того, что можно предпринять, это и есть выявление асимптотики.

Дальнейшее упрощение алгоритма состоит в замене прежнего цикла на другой:

$$\text{для } (i = n \text{ вниз до } 1) \{ x := (x + C_i)/d; \}.$$

Этот новый цикл рассчитывает искомое приведенное значение следующим образом:

$$\left\{ \dots \left\{ \left(\frac{C_n}{1+y} + C_{n-1} \right) \frac{1}{1+y} + C_{n-2} \right\} \frac{1}{1+y} + \dots \right\} \frac{1}{1+y}.$$

Эта идея, которую Хорнер (1786—1837) предложил в 1819 г. [582], дает наиболее эффективный способ расчета приведенного значения в терминах абсолютного числа арифметических операций [103].

Алгоритм поиска ПЗ:

ввод: y, n, C_t ($1 \leq t \leq n$);
действительные числа x, d ;
 $x := 0$;
 $d := 1 + y$;
для $(i = 1 \text{ до } n) \{$
 $x := x + (C_i/d)$;
 $d := d \times (1 + y)$;
}
вывод x ;

Рис. 3.1. Алгоритм поиска ПЗ (приведенного значения). C_t — элементы денежного потока, y — процентная ставка, n — период капиталовложений. Можно легко проверить, что переменная d равна $(1+y)^i$ в начале каждого цикла. Как следствие, переменная x становится равной частной сумме $\sum_{t=1}^i C_t(1+y)^{-t}$ в конце каждого цикла. И это доказывает, что алгоритм является корректным.

Вычисление накопленного значения (НЗ) проводится практически аналогично алгоритму, представленному на рис. 3.1. В нем лишь необходимо внести следующие изменения:

- 1) параметру d вместо $1 + y$ присваивается значение 1,
- 2) величина i должна стартовать со значения n и уменьшаться до 1,
- 3) предписание $x := x + (C_i/d)$ следует заменить на $x := x + (C_i \times d)$.

Упражнение 3.1.4. Обосновать вышеуказанный алгоритм расчета НЗ.

3.1.2 О связи между способами начисления процентов

Мы можем сравнить процентные ставки, соответствующие различным способам начисления процентов, преобразовав одну из них в другую. Допустим, что r_1 — ежегодная ставка непрерывного начисления процентов, а r_2 — эквивалентная ей ежегодная ставка m -кратного начисления. Тогда $[1 + (r_2/m)]^m = e^{r_1}$. Следовательно,

$$r_1 = m \ln \left(1 + \frac{r_2}{m} \right), \quad (3.2)$$

$$r_2 = m(e^{r_1/m} - 1). \quad (3.3)$$

Пример 3.1.3. Рассмотрим ставку процента 10 % ежеквартального начисления. Эквивалентная ей ставка непрерывного начисления равна

$$4 \times \ln \left(1 + \frac{0,1}{4} \right) = 0,09877 \text{ или } 9,877 \%$$

и получается она из выражения (3.2) при $m = 4$ и $r_2 = 0,1$. ◁

Для n методов начисления процентов имеется $n(n-1)/2$ различных попарных связей между соответствующими ставками. Подобное потенциально большое число случаев благоприятствует ошибкам при программировании. Чтобы улучшить ситуацию, мы можем выделить основной вариант, скажем, непрерывное начисление процентов, и сначала преобразовывать соответствующие ставки к их непрерывному аналогу, а уже затем сравнивать между собой. В этом случае количество возможных сравнений уменьшится до более приемлемого значения $2(n-1)$.

3.1.3 Начисление простых процентов

Наряду с периодическим и непрерывным начислением процентов (отсюда термин **сложные проценты**) имеется и другая схема начисления процентов, называемая **простой** (отсюда **простые проценты**). В этой схеме проценты всегда начисляются на исходную сумму. Предположим, что P долларов берутся в долг под ежегодную ставку r . Тогда простые проценты за каждый год одинаковы и равны Pr .

3.2 Ежегодные ренты

По **простой ежегодной ренте** выплачивается одна и та же сумма в C долларов в конце каждого года на протяжении n лет. При ставке r

ее накопленное значение (НЗ) на конец года n есть

$$\sum_{i=0}^{n-1} C(1+r)^i = C \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (3.4)$$

Для **авансовой ежегодной ренты**, когда те же суммы выплачиваются в начале каждого года, НЗ получается равным

$$\sum_{i=1}^n C(1+r)^i = C \frac{(1+r)^n - 1}{r} (1+r). \quad (3.5)$$

Если же каждый год производится m выплат по C долларов (**общая ежегодная рента**), то вместо величин справа в (3.4) и (3.5) получим

$$C \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} - 1}{\frac{r}{m}} \quad \text{и} \quad C \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}{\frac{r}{m}} \left(1 + \frac{r}{m}\right),$$

соответственно*). В дальнейшем, если противное особо не оговаривается, мы будем иметь дело только с простыми рентами. У такой общей ренты

$$\text{ПЗ} = \sum_{i=1}^{nm} C \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-i} = C \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm}}{\frac{r}{m}}. \quad (3.6)$$

Пример 3.2.1. Приведенное значение простой пятилетней ренты, в которой выплачивается ежегодно по \$ 100, при ежегодной ставке процента 6.25 % равно величине

$$100 \times \frac{1 - (1.0625)^{-5}}{0.0625} = 418,387,$$

которая вытекает из (3.6) при $m = 1$. ◁

Пример 3.2.2. Предположим, что по ежегодной ренте выплачивается \$ 5 000 в месяц в течение 9 лет при ежегодной ставке 7,125 % ежемесячного начисления. Ее приведенное значение, равное \$ 397 783, также может быть получено по формуле (3.6) при $C = 5\,000$, $r = 0,07125$, $n = 9$ и $m = 12$. ◁

Рента, которая длится вечно, так и называется: **вечная рента**. Ее приведенное значение можно получить с помощью (3.6), устремляя n к бесконечности:

$$\text{ПЗ} = \frac{mC}{r}. \quad (3.7)$$

Эта формула полезна при оценке стоимости «вечного долга с фиксированным купоном» [646]. Рассмотрим, например, финансовый инструмент, по которому обещают выплачивать вечно \$ 100 один раз в конце каждого года. Если процентная ставка равна 10 %, то ее ПЗ есть $100/0,1 = 1\,000$ долларов.

Упражнение 3.2.1. Найдите ПЗ общей авансовой и ежегодной ренты.

*) Только следует иметь в виду два момента: 1) выше по тексту r является ежегодной ставкой процента однократного начисления, а здесь — m -кратного и, кроме того, предполагается, что 2) каждая из m выплат в году делается в конце или в начале всех его подпериодов длины $1/m$ года. — Прим. перев.

3.3 Амортизация

Амортизацией называется метод возвращения ссуды посредством регулярных выплат, каждая из которых состоит из двух частей: оплаты процентов и погашения некоторой части взятой суммы. Размер ссуды — **исходная сумма** — уменьшается при каждой выплате, таким образом, на величину погашения. Процентная же часть выплаты оплачивает проценты, начисленные на последний **оставшийся непогашенным остаток ссуды**. По мере того, как на протяжении срока ссуды этот остаток уменьшается, вместе с ним уменьшается и процентная часть выплаты.

Покупка дома по закладной обычно амортизируется. Когда взятая сумма погашается постепенно, риск ее невозвращения для кредитора уменьшается. Если же заемщик продает дом, то часть ссуды, оставшаяся непогашенной, должна быть возвращена кредитору. Далее в этом пункте рассматривается в основном случай одинаковых выплат, т.е. **закладные с полным погашением постоянными выплатами** по фиксированной ставке, или всем известные **традиционные закладные**^{*)}.

Рис. 3.2. Схема погашения ссуды. См. пример 3.3.1.

Месяц	Выплата	Проценты	Погашаемая часть ссуды	Оставшаяся непогашенной часть ссуды
				250 000,000
1	2 389,13	1 666,667	722,464	249 277,536
2	2 389,13	1 661,850	727,280	248 550,256
3	2 389,13	1 657,002	732,129	247 818,128
...	...	...	...	...
178	2 389,13	47,153	2 341,980	4 730,899
179	2 389,13	31,539	2 357,591	2 373,308
180	2 389,13	15,822	2 373,308	0,000
Сумма	430 043,438	180 043,438	250 000,000	

Пример 3.3.1. Для покупки дома берется ссуда в \$ 250 000 на 15 лет под 8% годовых. Используя формулу (3.6) с приведенным значением $PЗ = 250\,000$, $n = 15$, $m = 12$ и $r = 0,08$, получаем, что ежемесячная выплата по этой ссуде будет равна $C = 2\,389,13$. Схема погашения ссуды (схема амортизации) для данной ситуации приведена в таблице на рис. 3.2. Можно проверить, что каждый месяц 1) погашаемая часть ссуды и проценты в сумме как раз и равны \$ 2 389 13, 2) оставшаяся непогашенной часть ссуды уменьшается на погашаемую часть выплаты, а 3) ее процентная часть получается умножением непогашенного остатка предыдущего месяца на $0,08/12$. ◀

Предположим далее, что схема погашения дает возможность кредитору получать m выплат в год на протяжении n лет. И пусть величина

^{*)} Mortgage = закладная — долговой инструмент, с помощью которого заемщик предоставляет кредитору право на собственность в качестве обеспечения своевременной оплаты ссуды, взятой на покупку этой собственности; право теряет силу, если заемщик полностью выполнил свои обязательства. — Прим. перев.

каждой выплаты равна C долларам, а ежегодная процентная ставка r является ставкой m -кратного начисления. Тогда сразу после k -й выплаты оставшаяся непогашенной часть ссуды представляет собой приведенное значение на момент k -й выплаты, денежного потока, состоящего из всех будущих $mn - k$ выплат:

$$\sum_{i=1}^{mn-k} C \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-i} = C \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm+k}}{\frac{r}{m}}. \quad (3.8)$$

К примеру, представление (3.8) позволяет получить часть ссуды, оставшуюся непогашенной после третьей выплаты в схеме погашения из примера 3.3.1, в которой $C = 2389,13$, $n = 15$, $m = 12$, $r = 0,08$ и $k = 3$.

Популярным вариантом покупки в рассрочку является **закладная с корректируемой ставкой** (ЗКС). В нем процентная ставка уже не является фиксированной, а привязывается к какому-либо общеизвестному индексу, скажем, ставке Казначейства США по векселям постоянного срока платежей или к индексу стоимости фондов. Например, если ставку по условиям закладной следует пересматривать каждый месяц, то ежемесячная выплата каждый месяц пересчитывается, исходя из существующей процентной ставки и части ссуды, оставшейся непогашенной на начало месяца. Привлекательность закладной с корректируемой ставкой объясняется обычно более низкими начальными ставками, что позволяет покупателю дома идти на больший размер ссуды, а также тем, что возможные изменения ставки ограничены сверху.

Общепринятым способом оплаты долгосрочной ссуды является тот, при котором заемщик отдельно оплачивает проценты по ссуде и взносы в **погасительный фонд**, с тем, чтобы не только погасить взятую в долг сумму, но и воспользоваться начисленными на внесенные взносы процентами. Сумма процентов и взноса в погасительный фонд называется **периодическим взносом** по долгу. На практике условия функционирования различных погасительных фондов отличаются. В некоторых взносы начинают выплачиваться через несколько лет после получения ссуды, в других позволяют оплачивать недостающую сумму при окончательном погашении, а в третьих разрешается использовать сумму в фонде для периодической покупки облигаций на рынке [767].

Пример 3.3.2. Компания берет в долг \$ 100 000 под ежегодную ставку 10 % полугодового начисления. Если на взносы компании в погасительный фонд начисляются 8 % годовых (также полугодового начисления), то для возвращения долга в течении 7 лет достаточно в качестве полугодового взноса в соответствии с формулой (3.6) взять сумму

$$\frac{100\,000 \times 0,08/2}{1 - (1 + 0,08/2)^{-14}} = 9\,466,9.$$

С другой стороны, проценты по ссуде каждые полгода составляют $100\,000 \times (0,1/2) = 5\,000$. Периодическим взносом, таким образом, является сумма в $5\,000 + 9\,466,9 = 14\,466,9$ долларов. $\triangleleft$

Упражнение 3.3.1. Объясните, почему величина

$$\text{ПЗ} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k - \sum_{i=1}^k C \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{i-1},$$

с ПЗ из формулы (3.6), совпадает с величиной из соотношения (3.8).

Упражнение 3.3.2. Рассматриваются 2 варианта погашения ссуды под залог в течение произвольного числа месяцев n с выплатами в конце каждого из них:

- 1) постоянные выплаты в размере D и
- 2) ежемесячные выплаты, растущие экспоненциально со «скоростью» x : D , De^x , De^{2x} , De^{3x} , ...

Показать, что если первый денежный поток дисконтировать по ставке $r-x$, а второй по ставке r , то их приведенные значения на начало 1-го месяца совпадут (если обе ставки, $r-x$ и r , являются ставками непрерывного начисления процентов). Это равенство и лежит в основе расчета варианта погашения **закладных экспоненциально растущими выплатами** [330].

Задание по программированию 3.3.3. Напишите программу для получения схемы погашения ежемесячными выплатами. Входными данными пусть будут ежегодная ставка процентов и количество выплат.

3.4 Доходности

Термин **доходность** характеризует отдачу от капиталовложений, и может пониматься по-разному [284]. Так, **номинальная доходность** представляет собой **купонную ставку** облигации. Например, в газете *Wall Street Journal* от 26 августа 1997 г. корпоративная облигация, выпущенная компанией AT&T, котируется следующим образом:

Компания	Текущая доходность	Объем	Цена при закрытии	Ее чистое изменение
ATT85/831	8,1	162	106 $\frac{1}{2}$	-3/8

Эта облигация погашается в 2031 г., ее номинальная доходность составляет $8\frac{5}{8}\%$ и эти данные являются основной характеристикой облигации.

В том же номере газеты можно увидеть котировки и других облигаций компании AT&T: ATT43/498, ATT6s00, ATT51/801 и ATT63/404. **Текущая доходность** определяется как отношение ежегодных процентов по купону к рыночной цене облигации. В рассматриваемом случае ежегодные проценты составляют сумму $8\frac{5}{8} \times 1\,000/100 = 86,25$ при номинале облигации

в \$1000. Цена при закрытии равна $106\frac{1}{2} \times 1\,000/100 = 1\,065$ долларам (корпоративные облигации котируются в виде процента от номинала). Следовательно, величина $86,25/1\,065 = 8,1\%$ и представляет текущую доходность при закрытии рынка. Рассмотренные выше два показателя доходности не очень-то полезны при сравнении доходов. Так, номинальная

доходность полностью игнорирует условия рынка, а текущая доходность не может учесть будущее развитие событий, причем несмотря на то, что оно зависит от текущей рыночной цены.

В таких ценных бумагах (ЦБ), как **векселя Казначейства (ВК) США**, для расчета процентов используется скорее **дисконтный метод**, чем более известный **метод добавления*** [95]. По дисконтному методу, чтобы получить цену покупки, проценты вычитаются из номинала ЦБ, а при погашении инвестор получает ее номинал. О такой ЦБ говорят, что она рассчитана **на дисконтной основе** и называют ее **дисконтной ЦБ**. **Дисконтная доходность** или **ставка дисконта** определяется выражением

$$d = \frac{\text{номинал} - \text{цена покупки}}{\text{номинал}} \times \frac{360 \text{ дней}}{\text{число дней до погашения}}. \quad (3.9)$$

Эта доходность имеет и другое название: **доходность, рассчитанная по банковскому дисконту**. При этом, если дисконтная доходность рассчитывается для краткосрочных ЦБ, то предполагается, что год имеет 360 дней [698, 827].

Пример 3.4.1. Векселя Казначейства (ВК) являются краткосрочными долговыми инструментами со сроками погашения в 3, 6 или 12 месяцев. Они выпускаются достоинством \$ 10 000. И если инвестор покупает такой шестимесячный ВК за \$ 9 521,45, причем остается 182 дня до его погашения, то дисконтная доходность оказывается равной

$$\frac{10\,000 - 9\,521,45}{10\,000} \times \frac{360}{182} = 0,0947,$$

или 9,47 %. Именно эта ежегодная доходность и указывается в котировках. Эквивалентная ей эффективная доходность при непрерывном начислении равна

$$\frac{365}{182} \times \ln \left(\frac{10\,000}{9\,521,45} \right) = 0,09835,$$

или 9,835 %. ◁

СВ-доходность или доходность, эквивалентная доходности сертификата вклада (называемая также **доходностью, эквивалентной доходности денежного рынка**) представляет собой ежегодную ставку простых процентов, определяемую выражением

$$i = \frac{\text{номинал} - \text{цена покупки}}{\text{цена покупки}} \times \frac{360}{\text{число дней до погашения}}.$$

Чтобы облегчить сравнение дисконтной доходности с котировками доходностей других инструментов финансового рынка, мы можем рассчитать эквивалентную ей СВ-доходность по формуле

$$i = \frac{360 \times d}{360 - n \times d}$$

(здесь n — число дней до погашения), которую можно легко получить

*) Обычно метод добавления (add-on method) означает, что инвестор оплачивает при покупке и получает при погашении номинал, а проценты оплачиваются ему в течение всего срока жизни облигации. — Прим. перев.

из предыдущих формул для i и d . Ну а чтобы дисконтную доходность было проще сравнить с доходностью ДЭО*), можно рассчитывать ее величину по формуле

$$\frac{\text{номинал} - \text{цена покупки}}{\text{цена покупки}} \times \frac{365 \text{ дней}}{\text{число дней до погашения}}.$$

Тогда дисконтная доходность из примера 3.4.1 (9,47 %) оказывается равной

$$\frac{478,55}{9\,521,45} \times \frac{365}{182} = 0,1008, \quad \text{или} \quad 10,08 \%. \quad (3.10)$$

Кстати, **продажная доходность** векселя Казначейства рассчитывается именно так [510].

3.4.1 Внутренняя доходность

Вплоть до окончания этого пункта и если не оговорено противное, мы будем рассматривать лишь доходность, которая называется **внутренней доходностью (ВД)**. Эта доходность определяется как процентная ставка y , при которой приведенное значение капиталовложений совпадает с соответствующей ему ценой:

$$P = \frac{C_1}{1+y} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \frac{C_3}{(1+y)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+y)^n}. \quad (3.11)$$

Правая часть в этом равенстве является ПЗ денежного потока $C_1, C_2, \dots, C_n$, дисконтированного по ВД y . Равенство (3.11) и его различные обобщения представляют собой ту основу, на которую опираются различные способы оценки стоимости.

Пример 3.4.2. Банк предоставляет заемщику ссуду \$ 260 000 на 15 лет для покупки дома. В этой 15-летней рассрочке под залог ежемесячные выплаты составляют \$ 2 000. При этом ежегодная доходность равна 4,583 %, поскольку $\sum_{i=1}^{12 \times 15} 2\,000 \times [1 + (0,04583)/12]^{-i} \approx 260\,000$. $\triangleleft$

Пример 3.4.3. По некоторому финансовому инструменту обещают выплачивать \$ 1 000 три года подряд и просят за него \$ 2 500. Его доходность равна 9,7 % и проверить это можно следующим образом. При 0,097 в качестве дисконтирующей ставки ПЗ каждой из трех тысяч на момент за год до первой выплаты можно записать в виде $1\,000/(1+0,097)^t$, $t = 1, 2, 3$. Это и будут числа — 911,577, 830,973 и 757,5 — в сумме равные \$ 2 500. $\triangleleft$

Пример 3.4.3 показывает, что проверить, является ли некоторое число внутренней доходностью, легко. Однако для ее поиска, вообще говоря, требуется использовать численные методы, поскольку простых формул в общем случае не существует. Об этом мы поговорим в п. 3.4.3.

Пример 3.4.4. Финансовый инструмент можно купить за \$ 1 000 и за эту сумму инвестор через 5 лет получит \$ 2 000. Доходностью в этом

*) Напоминаем, что доходность, эквивалентная облигационной (ДЭО) имеет смысл ежегодной ставки процента полугодового начисления. — Прим. перев.

случае будет y , при котором $1\,000$ равна $2\,000 \times (1+y)^{-5}$, т.е. ПЗ суммы \$ 2 000. Эта доходность равна $(1\,000/2\,000)^{-1/5} - 1 \approx 14,87\%$. $\triangleleft$

Для денежного потока $C_1, C_2, \dots, C_n$ его НЗ определяется равенством

$$\text{НЗ} = \sum_{t=1}^n C_t(1+y)^{n-t}. \quad (3.12)$$

В силу (3.11) при использовании доходности y это НЗ оказывается равным $P(1+y)^n$. Поэтому, в принципе, денежные потоки, состоящие из большого числа сумм, можно заменить на одну сумму $P(1+y)^n$ в момент погашения. Скажем, в примере 3.4.4 инвестор приходит к результату в \$ 2 000 к концу 5-го года тем или иным путем. И это заставляет нас обратить внимание на одно важное обстоятельство. Взглянем еще раз на представления (3.11) и (3.12). Ведь они означают одно и то же, поскольку в обеих отчетливо предполагается, что деньги реинвестируются по одной и той же ставке, совпадающей с ВД y .

Пример 3.4.4 подсказывает более общую меру доходности: для ее определения следует сначала рассчитать накопленное значение (НЗ) и затем найти доходность y , которая связывает его с приведенным значением (ПЗ) (т.е. приравнять его величине $P(1+y)^n$). Этот подход называется методологией получения **дохода или доходности за период владения (ДПВ)**³. При использовании такого подхода уже не нужно требовать, чтобы все денежные суммы реинвестировались по одной и той же ставке. Вместо этого следует ввести точные предположения о ставках реинвестирования для каждой из сумм денежного потока. Пусть, например, ставка реинвестирования постоянна и равна r_e . Тогда

$$\text{НЗ} = \sum_{t=1}^n C_t(1+r_e)^{n-t}.$$

Поэтому для определения ДПВ y решаем уравнение $\text{НЗ} = P(1+y)^n$. Конечно, если сделанные предположения о ставках реинвестирования окажутся ошибочными, то мы не сможем определить доходность. Это и есть **риск реинвестирования**. Финансовые инструменты без промежуточных сумм, очевидно, такому риску не подвержены.

Пример 3.4.5. По финансовому инструменту обещают выплачивать по \$ 1 000 три года подряд, а стоит он \$ 2 500. Если все три суммы можно поместить на банковский счет с ежегодной ставкой 5 %, то НЗ этой ценной бумаги окажется равным $\sum_{t=1}^3 1\,000 \times (1+0,05)^{3-t} = 3\,152,5$, а ее ДПВ $y = (3\,152,5/2\,500)^{1/3} - 1 = 0,08037$ или 8,037 %. А эта доходность значительно меньше, чем 9,7 % в примере 3.4.3. $\triangleleft$

Упражнение 3.4.1. По одной ЦБ стоимостью \$ 3 000 обещают выплатить по \$ 1 000 в конце первых двух лет и \$ 1 500 через 3 года. Проверьте, что ее ежегодная доходность равна 7,55 %.

Упражнение 3.4.2. По одному финансовому инструменту сумма S долларов выплачивается в конце каждого года в течение n лет. Инвестор, заинтересованный в его покупке, надеется реинвестировать эти суммы

под ежегодную ставку r и желает получить доходность y . Какой должна быть стоимость данного инструмента, чтобы он оказался привлекательным для этого инвестора?

3.4.2 Приведенная прибыль

Рассмотрим капиталовложение, характеризуемое денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ и продаваемое по цене P . Для инвестора, который надеется получить от этой ЦБ доходность в y^* , **приведенная прибыль (ПП)** равна

$$\sum_{t=1}^n C_t(1+y^*)^{-t} - P.$$

Таким образом, ВД является ставкой доходности, которая обращает в ноль ПП. Вообще же ПП представляет собой разницу между ПЗ доходной и расходной частей денежного потока. В бизнесе часто пытаются максимизировать именно ПП от своих активов.

Пример 3.4.6. Руководству представлены следующие предложения:

Проект	Расходы сейчас	Доходы в конце года		
		1	2	3
A	9 500	4 500	2 000	6 000
B	6 000	2 500	1 000	5 000

Оно надеется, что по этим проектам компания сможет получить ежегодную доходность в 15 %. Но в этом случае ПП у проекта A равна величине

$$\frac{4\,500}{1,15} + \frac{2\,000}{(1,15)^2} + \frac{6\,000}{(1,15)^3} - 9\,500 = -129,57,$$

а у проекта B есть

$$\frac{2\,500}{1,15} + \frac{1\,000}{(1,15)^2} + \frac{5\,000}{(1,15)^3} - 6\,000 = 217,644.$$

Поэтому проекту B отдано предпочтение перед проектом A. ◁

Упражнение 3.4.3. Повторите вычисления из примера 3.4.6 для ожидаемой доходности в 4 %.

3.4.3 Приближенные методы определения доходности

Вычисление доходности сводится к решению уравнения $f(y) = 0$ при $y \geq -1$, где

$$f(y) \equiv \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+y)^t} - P, \quad (3.13)$$

а P — рыночная цена (символ $\equiv$ используется для определений). Функция $f(y)$ является монотонной по y , если все величины C_t положительны. В этом случае простые геометрические соображения показывают, что существует единственное решение этого уравнения (см. рис. 3.3). Более

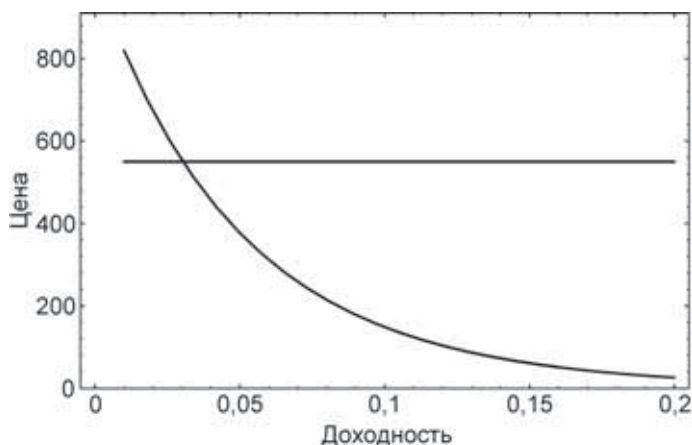


Рис. 3.3. Вычисление доходности. Текущая рыночная цена представлена горизонтальной линией, а ПЗ будущего денежного потока — убывающей кривой. Искомая доходность — это то значение на оси доходности, при котором обе кривые пересекаются.

того, даже в общем случае, когда не все C_t имеют один и тот же знак, обычно лишь одно из решений имеет экономический смысл [547]. Посмотрим теперь, какие же алгоритмы позволяют найти решение нашего уравнения.

Метод деления пополам. Одним из самых простых и безотказных методов решения уравнения $f(y) = 0$ при любой хорошей функции f является **метод деления пополам**. Начинают в нем с определения двух таких чисел a и b , что $a < b$ и $f(a)f(b) < 0$. В этом случае $f(\xi)$ должно быть равно нулю при некотором ξ между a и b , т. е. $\xi \in [a, b]$ ⁴. Тогда, если мы оценим значение f в середине $c \equiv (a + b)/2$ этого отрезка, то возмож-

Метод деления пополам для поиска корня уравнения:

```

ввод:  $\varepsilon$   $a$ , и  $b$  ( $b > a$  и  $f(a)f(b) < 0$ );
действительные числа длина,  $c$ ;
длина :=  $b - a$ ;
пока [длина >  $\varepsilon$ ] {
     $c := (b + a)/2$ ;
    если [ $f(c) = 0$ ] вывод  $c$ ;
    если [ $f(a)f(c) < 0$ ] то  $b := c$ ; в противном случае  $a := c$ ;
    длина := длина/2;
}
вывод  $c$ ;
```

Рис. 3.4. Метод деления пополам. Число ε представляет собой максимально возможное удаление искомого приближения c от истинного корня: $|\xi - c| \leq \varepsilon$. Начальная вилка $[a, b]$ гарантирует существование корня при условии $f(a)f(b) < 0$. Условие «если [$f(c) = 0$]» можно заменить на условие «если $|f(c)|$ очень маленькое число».

ны три случая: 1) $f(c) = 0$, 2) $f(a)f(c) < 0$ или 3) $f(c)f(b) < 0$. В первом случае мы нашли решение, во втором мы продолжаем процесс с новым интервалом $[a, c]$, а в третьем также продолжаем, но с другим интервалом $[c, b]$. Причем длина новых интервалов в последних двух случаях в два раза меньше длины исходного промежутка. В результате, после n шагов мы сможем включить искомое значение ξ внутрь промежутка длины $(b-a)/2^n$. Эта идея как раз и используется в алгоритме, представленном на рис. 3.4.

Сложность алгоритма деления пополам можно проанализировать следующим образом. Промежуточный цикл выполняется не более $1 + \log_2[(b-a)/\varepsilon]$ раз. Внутри цикла число арифметических операций определяется сложностью оценки значения f . Обозначим это число через $\mathcal{C}_f$. Тогда затрачиваемое время есть $O(\mathcal{C}_f \log_2[(b-a)/\varepsilon])$. В частности, при вычислении ВД оно будет равно $O(n \log_2[(b-a)/\varepsilon])$, поскольку, как следует из анализа сложности алгоритма на рис. 3.1, $\mathcal{C}_f = O(n)$.

Метод Ньютона—Рафсона. Итеративный метод Ньютона—Рафсона сходится быстрее, чем метод деления пополам. В итеративных методах процесс поиска начинается с первого приближения x_0 к корню уравнения $f(x) = 0$. Последующие приближения могут быть представлены в виде

$$x_0, \quad F(x_0), \quad F(F(x_0)), \quad \dots,$$

где F — некоторая функция. Иными словами, если k -е приближение обозначить через x_k , то $x_k = F^{(k)}(x_0)$, где

$$F^{(k)}(x) \equiv \underbrace{F(F(\dots(F(x))\dots))}_k.$$

На практике следует определиться с верхней границей числа итераций k . Необходимым условием сходимости такой последовательности приближений к корню ξ является неравенство

$$|F'(\xi)| \leq 1, \quad (3.14)$$

где F' означает производную функции F [447].

В методе Ньютона—Рафсона полагают, что $F(x) \equiv x - f(x)/f'(x)$; или, другими словами, что

$$x_{k+1} \equiv x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.15)$$

Этому методу следует отдать предпочтение, когда значения f' можно легко вычислять и эта производная отлична от нуля вблизи от корня [727]. Характер итераций проиллюстрирован на рис. 3.5, а алгоритм приведен на рис. 3.6. При вычислении доходностей

$$f'(x) = - \sum_{t=1}^n t C_t (1+x)^{-t-1}.$$

Предположим, что начальное приближение x_0 мы подобрали удачно, т. е. оно лежит вблизи от корня ξ . Тогда можно показать, что

$$\xi - x_{k+1} \approx -(\xi - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{2 f'(\xi)}.$$

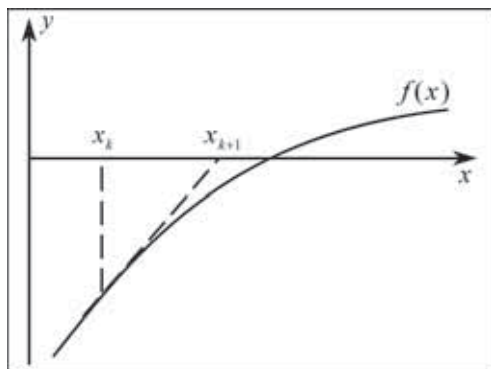


Рис. 3.5. Метод Ньютона—Рафсона.

Это означает, что метод сходится с *квадратичной скоростью*: вблизи от корня у каждой следующей итерации число значащих цифр удваивается. Для завершения процесса поиска, т.е. выполнения неравенства $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ остановки, алгоритму достаточно $O(\log \log(1/\varepsilon))$ итераций. Затрачиваемое время, таким образом, оказывается равным величине

$$O((\mathcal{C}_f + \mathcal{C}_{f'}) \log \log(1/\varepsilon)).$$

И, в частности, при вычислении доходностей затрачиваемое время определяется выражением $O(n \log \log(1/\varepsilon))$. А эта оценка выгодно отличается от оценки $O(n \log[(b-a)/\varepsilon])$ для метода деления пополам.

Вариант метода Ньютона—Рафсона, в котором не требуется дифференцировать, называется **методом хорд** [35]. В этом случае процесс поиска начинается с двух приближений, x_0 и x_1 , а $(k+1)$ -е приближение определяется по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Методу хорд можно отдать предпочтение, чтобы избежать вычисления производной f' . Его порядок скорости сходимости, оцениваемый числом 1,618, немного хуже, чем в методе Ньютона—Рафсона, где он равен 2, но лучше порядка скорости сходимости метода деления пополам, где он равен 1.

Метод Ньютона—Рафсона для поиска корня уравнения:

ВВОД: ε , $x_{\text{начальное}}$;

действительные числа $x_{\text{новое}}$, $x_{\text{старое}}$;

$x_{\text{старое}} := x_{\text{начальное}}$;

$x_{\text{новое}} := \infty$;

пока $|x_{\text{новое}} - x_{\text{старое}}| > \varepsilon$

$x_{\text{новое}} = x_{\text{старое}} - f(x_{\text{старое}})/f'(x_{\text{старое}})$;

ВЫВОД $x_{\text{новое}}$;

Рис. 3.6. Алгоритм для метода Ньютона—Рафсона. Здесь важно подобрать хорошее начальное приближение [727].

В отличие от метода деления пополам, ни в методе Ньютона—Рафсона, ни в методе хорд нет гарантии, что корень окажется в вилке. Как следствие, эти методы могут и не сходиться вовсе. Напротив, в **методе Риддерса** корень всегда содержится в известном интервале. В нем поиск корня начинается со значений x_0 и x_1 , его охватывающих, а далее полагают $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ и, в общем случае

$$x_{k+1} = x_k + \text{sign}[f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})] \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-2})}{\sqrt{f(x_k)^2 - f(x_{k-2})f(x_{k-1})}}.$$

Порядок скорости сходимости в методе Риддерса равен $\sqrt{2}$ [727].

Упражнение 3.4.4. Пусть $f(x) \equiv x^3 - x^2$ и процесс начинается со значения $x_0 = 2,0$ в качестве приближения к корню уравнения $f(x) = 0$. Проведите пять итераций в методе Ньютона—Рафсона.

Упражнение 3.4.5. Предположим, что $f'(\xi) \neq 0$ и $f''(\xi)$ ограничена. Проверьте, что этом случае условие (3.14) метода Ньютона—Рафсона выполняется.

Упражнение 3.4.6. Пусть ξ есть корень функции f , а J — интервал, содержащий ξ . Предположим, что $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \geq 0$ или $f''(x) \leq 0$ при всех $x \in J$. Объясните, почему в этом случае метод Ньютона—Рафсона монотонно сходится к ξ из любой такой точки $x_0 \in J$, что $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$.

3.4.4 Решение систем нелинейных уравнений

Метод Ньютона—Рафсона можно обобщить на случай более высокой размерности. Пусть (x_k, y_k) является k -м приближением к решению системы из двух уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Тогда $(k+1)$ -е приближение (x_{k+1}, y_{k+1}) удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \partial f(x_k, y_k)/\partial x & \partial f(x_k, y_k)/\partial y \\ \partial g(x_k, y_k)/\partial x & \partial g(x_k, y_k)/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{k+1} \\ \Delta y_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где $\Delta x_{k+1} \equiv x_{k+1} - x_k$ и $\Delta y_{k+1} \equiv y_{k+1} - y_k$. Система уравнений (3.16) имеет единственное решение $(\Delta x_{k+1}, \Delta y_{k+1})$, если матрица обратима. Заметим, что $(k+1)$ -е приближение можно записать в виде $(x_k + \Delta x_{k+1}, y_k + \Delta y_{k+1})$. Таким образом, решение нелинейных уравнений сводится к решению системы линейных уравнений. Обобщение на случай размерности n очевидно.

Упражнение 3.4.7. Напишите n -мерную формулу, аналогичную системе уравнений (3.16).

Упражнение 3.4.8. Опишите метод деления пополам для решения систем нелинейных уравнений в двумерном случае (метод деления пополам применяется в случаях, когда метод Ньютона—Рафсона использовать нельзя).

3.5 Облигации

Облигация — это контракт между выпустившей ее организацией (заемщиком) и ее владельцем (кредитором). Выпускающая организация обещает выплачивать держателю облигации проценты, если такие предполагаются, и возратить исходную сумму в конце срока действия. Обычно облигация связана с долгосрочным долгом. У нее есть **номинал**⁵. А ее **дата погашения** или **дата завершения платежей** уточняют момент возвращения ссуды. Проценты по облигации обычно выплачиваются регулярно, через определенные промежутки времени и вплоть до даты погашения, а определяются по купонной ставке в зависимости от номинала. В Соединенных Штатах выплаты обычно производятся один раз в полгода. **Ценой погашения** называется сумма, которую следует выплатить в момент погашения. Облигация **погашается по номиналу**, если цена погашения совпадает с номиналом. Дата погашения и дата завершения платежей могут не совпадать.

Существует несколько способов **погасить** или **отозвать** облигацию. Облигация погашается в момент завершения платежей, если в этот момент оплачивается исходная сумма. Большинство корпоративных облигаций являются **отзывными**, а смысл этого названия в том, что выпускающая организация может выкупить некоторую часть или все облигации до установленной даты завершения платежей, причем обычно по цене выше номинала⁶.

Поскольку эта мера предосторожности дает выпускающей организации право отозвать облигацию в момент, когда существующая процентная ставка намного меньше купонной, то держатели облигаций обычно требуют выплаты премий. Отзывная облигация может также быть **защищена от отзыва**, и сводится это к тому, что ее нельзя отозвать первые несколько лет. **Операция замены старого долга на новый** обычно сводится к использованию денег, вырученных от выпуска новых облигаций, для отзыва старых. Корпорация может вложить деньги в погасительный фонд, а затем использовать деньги фонда для выкупа части или всех облигаций. **Конвертируемые облигации** могут быть преобразованы в обычные акции выпускающей организации. **Консолидированной рентой** называется облигация, проценты по которой выплачиваются вечно. Поэтому ее стоимость можно рассчитать по аналогии с вечной рентой, чьи стоимость и доходность удовлетворяют простому соотношению

$$P = c/r, \quad (3.17)$$

где c означает сумму ежегодно выплачиваемых процентов.

Рынок облигаций США является крупнейшим в мире. Он включает в себя ценные бумаги (ЦБ) Казначейства США, ЦБ агентств США,

корпоративные облигации, американские облигации*), муниципальные ЦБ, закладные, т. е. ЦБ по возвращению долга в рассрочку и под залог, а также ЦБ, обеспеченные закладными. **ЦБ агентств** называются такие ЦБ, которые выпущены либо агентствами федерального правительства США, либо спонсорскими организациями, работающими вместе с правительством США. Рынок закладных обычно является самым большим по величине (\$ 6 388 млрд. в 1999 г.), за ним идет рынок ЦБ Казначейства США (\$ 3 281 млрд. в 1999 г.).

ЦБ Казначейства США со сроками погашения 1 год и менее являются дисконтными ЦБ: их называют векседами Казначейства (ВК). Если сроки погашения этих ЦБ лежат в интервале от 2 до 10 лет, то они называются **банкнотами Казначейства (БНК)**, а если больше 10 лет, то **облигациями Казначейства (ОК)**. Как БНК, так и ОК являются купонными ЦБ, проценты по которым выплачиваются каждые полгода.

В качестве цены покупки облигации при котировке обычно указывается процент от номинала. Котировка 95, таким образом, означает 95 % от номинала. Но для БНК и ОК запись котировки имеет нюанс. Скажем, котировка 100,05 означает $100\frac{5}{32}$ % от номинала, а не 100,05 %. Обычно это записывают в виде 100-05.

Упражнение 3.5.1. Стоимость консолидированной ренты, выплачиваемой непрерывно с интенсивностью c долларов в год, равна $\int_0^{\infty} ce^{-rt} dt$, где r — ежегодная ставка непрерывного начисления процентов. Дайте объяснение указанной формуле (в соответствии с равенством (3.17) этот интеграл равен c/r).

3.5.1 Оценка стоимости

Начнем с **чисто дисконтных облигаций**, известных также под названием **облигаций без купона** или просто **бескупоннок**. По ним предполагается единственная выплата в будущем и продаются они по номиналу со скидкой. Цена покупки такой облигации без купона при выплате F долларов через n периодов определяется выражением $F/(1+r)^n$, где r — процентная ставка периода. Бескупонные облигации можно покупать и быть уверенным, что никакому риску реинвестирования при этом твои деньги не подвергаются. Они также являются важным теоретическим инструментом при анализе купонных облигаций, которые можно воспринимать как пакет бескупонных облигаций. Хотя Казначейство США не выпускает таких облигаций со сроком погашения свыше одного года, находились компании, специализирующиеся на **стрижке купонов** для получения так называемых «остриженных» облигаций Казначейства. Это финансовое нововведение вошло в моду в 1985 г., когда Казначейство США способствовало выпуску бескупоннок при помощи программы STRIPS (Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities, т. е.

*) Американскими (Yankee bonds) называются облигации, выпущенные в США иностранными банками или компаниями, с номиналом, выраженным в долларах США. — Прим. перев.

раздельной торговле ЦБ по зарегистрированным процентам и номиналам) [799]. Цены и доходности таких остриженных ЦБ Казначейства публиковались ежедневно в газете Wall Street Journal с 1989 г.

Пример 3.5.1. Предположим, что используется процентная ставка 8 % полугодового начисления. Тогда стоимость покупки бескупонной облигации, по которой номинал возвращается через 20 лет, будет оценена в $1/(1,04)^{40}$, или 20,83 % от номинала и такой же будет ее котировка: 20,83. Если же вместо 8 % процентная ставка будет равна 9 %, то та же облигация будет оценена всего лишь в 17,19. При замене срока погашения в 20 лет на 10 ее же цена окажется равной 45,64 при ставке 8 %. Из сказанного ясно, что как срок погашения, так и процентная ставка на рынке сильно влияют на цену. $\triangleleft$

Проценты по **равнокупонной облигации** выплачиваются в зависимости от купонной ставки и номинала, который оплачивается при погашении. Если F означает номинал, а C величину купона, то ее денежный поток имеет вид, представленный на рис. 3.7. И, следовательно, ее цена равна

$$ПЗ = \sum_{i=1}^n \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^i} + \frac{F}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n} = C \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-n}}{\frac{r}{m}} + F \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-n}. \quad (3.18)$$

где n — общее число выплат, m — число выплат в год, а r — ежегодная процентная ставка m -кратного начисления. Заметим, что $C = Fc/m$, если c — ежегодная купонная ставка.

Пример 3.5.2. Рассмотрим 20-летнюю 9 % облигацию с полугодовыми купонами. Это означает, что по каждой такой облигации выплаты размером в $1\,000 \times 0,09/2 = 45$ долларов будут производиться каждые 6 месяцев вплоть до погашения, и в момент погашения будет выплачена \$1 000. Цену ее покупки можно рассчитать, используя представление (3.18) с $n = 2 \times 20$, $m = 2$, $F = 1$, $C = 0,09/2$ и допуская, что процентная ставка на рынке $r = 0,08$. В результате получим 1,09896, или 109,896 % от номинала. Если купонная ставка выше процентной, как в нашем случае, то равнокупонная облигация продается по цене выше номинала. $\triangleleft$

У равнокупонной облигации **доходность (за период) до погашения** совпадает с внутренней доходностью (ВД), если облигация сохраняется до погашения. Иными словами, она равна тому значению r , которое удовлетворяет уравнению (3.18), если в качестве приведенного значения (ПЗ) взята цена. Например, для инвестора с доходностью, эквивалентной облигационной (ДЭО) до погашения в 15 %, 10-летняя облигация с ку-

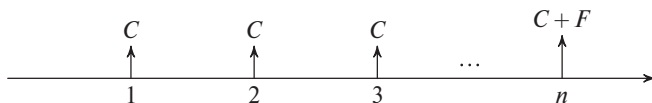


Рис. 3.7. Денежный поток равнокупонной облигации.

полной ставкой 10 % полугодового начисления должна продаваться по цене

$$5 \times \frac{1 - [1 + (0,15/2)]^{-2 \times 10}}{0,15/2} + \frac{100}{[1 + (0,15/2)]^{2 \times 10}} = 74,5138$$

процентов от номинала.

Для отзывной облигации **доходность до предполагаемого погашения** оценивает ее доходность до погашения так, как если бы она не была отзывной. **Доходность до отзыва** — это доходность до погашения, определяемая из уравнения (3.18), в котором n означает число купонных платежей, остающихся до первой даты отзыва, а величина F заменяется на цену отзыва, т.е. на ту цену, по которой облигация будет отозвана. В соответствующей **доходности до отзыва по номиналу** предполагается, что цена отзыва совпадает с номиналом. В определении **доходности до реального погашения** n заменяется на **дату реального погашения**, т.е. на момент, когда облигация отзывается. Конечно, эту дату следует оценивать. **Доходность в худшем случае** является минимальной из всех доходностей до отзыва, соответствующих всем возможным датам отзыва.

Упражнение 3.5.2. Компания выпускает 10-летнюю облигацию с купонной ставкой 10 %, оплачиваемой раз в полгода. Облигация является отзывной по номиналу через 5 лет. Определить цену, при которой инвестору гарантируется доходность в 12 % полугодового начисления.

Упражнение 3.5.3. Как следует изменить формулу (3.18), если с процентов взимается налог по ставке T , а с прибыли по ставке T_G ?

Упражнение 3.5.4. 1) Найдите $\partial P / \partial n$ и $\partial P / \partial r$ для бескупонной облигации.
2) Проверьте, что как и в примере 3.5.1, при $r = 0,04$ и $n = 40$ цена будет уменьшаться примерно на величину $d \times 8,011\%$ от номинала при $d\%$ увеличении процентной ставки r при малых d .

3.5.2 Поведение цен

Цена облигации меняется в противоположном направлении по сравнению с соответствующим изменением процентной ставки: ее цена падает, когда процентная ставка растет и наоборот. И объясняется это тем, что при увеличении процентной ставки ПЗ уменьшается⁷. Хорошим примером здесь является потеря одного триллиона долларов во всем мире из-за «прогулок» процентных ставок в 1994 г. [312].

С помощью выражения (3.18) можно показать, что равнокупонные облигации будут продаваться **с премией** (по цене выше номинала), если ее купонная ставка больше процентной ставки рынка, **по номиналу**, если эти две ставки равны, и **со скидкой** (по цене ниже номинала), если

Доходность	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5
Цена (в % от ном.)	113,37	108,65	104,19	100,00	96,04	92,31	88,79

Рис. 3.8. Связь цены с доходностью для 15-летней и 9 % купонной облигации.

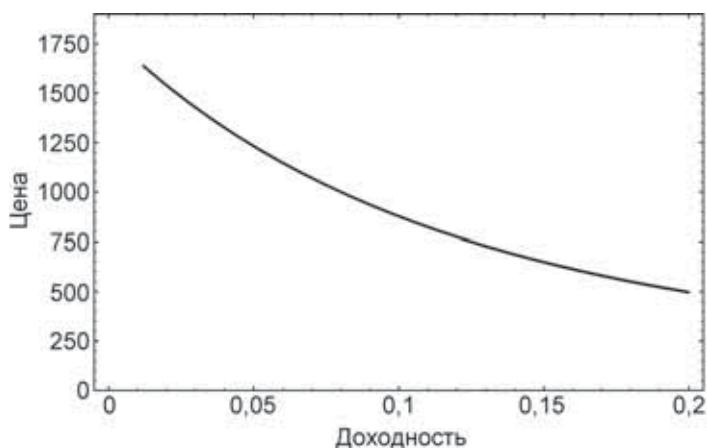


Рис. 3.9. Цена как функция доходности. График характеризует облигацию номинала \$ 1000 и срока 10 лет, по которой выплачивается 8 % ежегодного начисления.

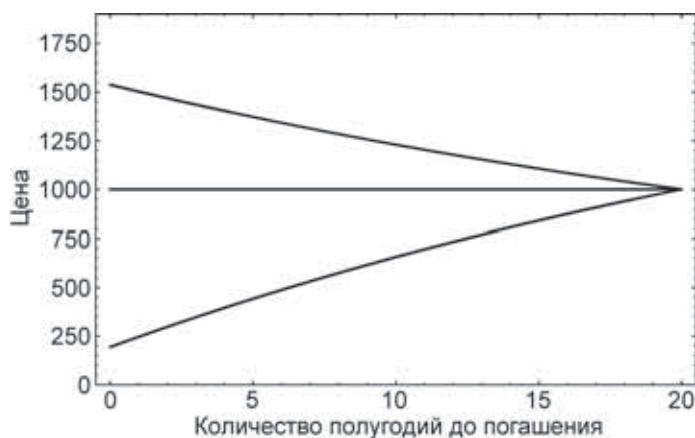


Рис. 3.10. Связь между ценой и сроком до погашения. Изображены три кривые, характеризующие облигации (сверху вниз), продаваемые с премией, по номиналу и со скидкой, с купонными ставками 12 %, 6 % и 2 % соответственно. Купоны оплачиваются раз в полгода. Номинал равен \$ 1000, а требуемая доходность 6 %. Срок жизни облигации 10 лет, время измеряется в полугодиях.

купонная ставка ниже рыночной. На рис. 3.8 приведена зависимость между ценой облигации и желаемой доходностью (для инвестора). Облигации, продаваемые по номиналу, называются **номинальными облигациями**.

Цена является **выпуклой** вниз функцией доходности, как это видно из рис. 3.9. Эта выпуклость привлекательна для держателей облигаций потому, что уменьшение цены при 1 % увеличении доходности меньше увеличения цены по отношению к такому же уменьшению доходности. Однако этот факт может не иметь места для облигаций с **вложенными опционами** (т. е. с дополнительными опциями), таких, как отзывная облигация. Свойство выпуклости по отношению к облигациям имеет далеко идущие последствия и будет более детально исследовано в п. 4.3.

По мере приближения даты погашения цена облигации, продаваемой со скидкой, будет увеличиваться, приближаясь к номиналу, цена облигации, продаваемой по номиналу, изменяться не будет, а цена облигации, продаваемой с премией, будет наоборот уменьшаться, сближаясь с номиналом. Этот факт отражен на рис. 3.10. Наряду с двумя упомянутыми выше причинами изменения цен облигаций (движение процентной ставки и уменьшение оставшегося срока жизни для неноминальной облигации), есть и другие. Например: изменение разницы в доходности у обычных облигаций по сравнению с облигациями Казначейства (ОК), изменение нашего доверия к кредитоспособности выпускающей организации, а также изменения в стоимости вложенного опциона.

Упражнение 3.5.5. Покажите, что равнокупонная облигация будет продаваться по номиналу, если ее купонная ставка будет совпадать с рыночной процентной ставкой.

3.5.3 Подходы к расчету срока в днях

Научи нас правильно рассчитывать наши дни, чтобы мы могли заглянуть в сердце мудрости.

Псалом 90:12

Умение корректно рассчитать длительность операции является критически важным для любого финансового программного обеспечения. В подходе **реальный/реальный** к расчету этого срока*) первое слово «реальный» означает, что (при расчете n) в любом месяце берется реальное число дней, а второе — что (при расчете N) берется реальное число дней в периоде, разделяющем выплаты по купонам. Например, для ЦБ Казначейства США с купонами число дней между 17 июня 1992 г. и 1 октября 1992 г. равняется 106: 13 дней в июне, 31 день в июле, 31 день в августе, 30 дней в сентябре и 1 день в октябре.

*) При использовании простых процентов обычно сами проценты I определяются по формуле $I = Cit$, в которой C — взятая в долг сумма, i — ежегодная ставка и t — длительность кредита в годах (естественно, если ставка относится к другому периоду, то и срок операции измеряется в этих периодах). При этом основные проблемы обычно связаны с расчетом срока по формуле $t = n/N$, где n — длительность кредита в днях, а N — длительность года в днях (существует 4 варианта!), а точнее говоря, с выбором подхода к расчету как величины n , так и N . Далее автор несколько иначе представляет ситуацию, но говорит именно о двух подходах к выбору n и N . — Прим. перев.

У корпоративных и муниципальных облигаций, а также ЦБ агентств более популярен метод расчета сроков **30/360**. В нем предполагается, что в каждом полном месяце 30 дней, а год имеет 360 дней. Поэтому число дней в том же периоде между 17 июня 1992 г. и 1 октября 1992 г., рассчитанное по этому методу, оказывается равным 104: 13 дней в июне, по 30 дней в июле, августе и сентябре, а также 1 день в октябре. Вообще же число дней по методу 30/360 от одной даты $D_1 = (y_1, m_1, d_1)$ до другой $D_2 = (y_2, m_2, d_2)$ может быть рассчитано по формуле

$$360 \times (y_2 - y_1) + 30 \times (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1),$$

где y_i означает число лет, m_i — число месяцев и d_i — дней. При этом, если d_1 или d_2 равно 31, то перед тем, как применить указанную формулу, мы заменяем их на 30.

3.5.4 Накопленные проценты

До сих пор мы предполагали, что следующая выплата по купонам произойдет точно через один период (скажем, через 6 месяцев для облигаций). В действительности момент покупки может оказаться любым днем между двумя последовательными датами купонных платежей и потому используемую меру доходности следует скорректировать соответственно. Положим

$$\omega \equiv \frac{\text{число дней от покупки до ближайшей выплаты по купонам}}{\text{число дней в купонном периоде}}, \quad (3.19)$$

причем для расчета числа дней выберем подход, применимый именно к рассматриваемым ЦБ. Тогда цену следует определять по формуле

$$ПЗ = \sum_{i=1}^n \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\omega+i-1}} + \frac{F}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\omega+n-1}}, \quad (3.20)$$

где n — число купонных платежей, оставшихся на момент покупки [328]. Цена эта называется **полной, грязной** или **ценой по счету**. Заметим, что равенство (3.20) превращается в (3.18), если $\omega = 1$.

Поскольку организация, выпустившая облигацию, не оплатит продавцу следующий после сделки купон (а вышлет его покупателю), то покупатель обязан возместить продавцу часть стоимости купона, соответствующую времени владения продавцом данной облигацией в последнем периоде. Обычно это сводится к тому, что покупатель оплачивает котируемую цену и **накопленные проценты**, вычисляемые по формуле

$$C \cdot \frac{\text{число дней от последней выплаты по купонам до продажи}}{\text{число дней в купонном периоде}} = C \cdot (1 - \omega).$$

Доходностью до погашения тогда будет значение r , удовлетворяющее уравнению (3.20), в котором роль ПЗ исполняет цена по счету, т. е. сумма котируемой цены и накопленных процентов. Поскольку котируемая цена в США не включает в себя накопленных процентов, то еще ее называют **чистой ценой** или **плоской ценой**.

Пример 3.5.3. Рассмотрим облигацию с 10 % купонной ставкой, по которой проценты выплачиваются раз в полгода. Погашение по ней назначено на 1.03.1995, а покупка произошла 1.07.1993. Расчет дней производится по схеме 30/360. Поскольку между 1 июля 1993 г. и следующей выплатой по купонам 1 сентября 1993 г. по этой системе 60 дней, то накопленные проценты составят величину $10/2 \cdot [(180 - 60)/180] = 3,3333$ доллара на каждые \$100 номинала. При чистой цене в 111,2891 доходность до погашения будет равна 3 %. Это можно проверить по уравнению (3.20), в котором $\omega = 60/180$, $m = 2$, $C = 5$, $P_3 = 111,2891 + 3,3333$ и $r = 0,03$.

◁

Упражнение 3.5.6. Уже упоминалось, что если облигация продается по номиналу, то она будет и дальше продаваться по номиналу, если ее доходность до погашения равняется купонной ставке. Но это верно в предположении, что момент покупки падает на дату выплат по купонам. Допустим, что момент покупки/продажи облигации, продаваемой по номиналу (т.е. котируемая цена совпадает с номиналом), оказывается между двумя очередными датами выплат по купонам. Покажите, что ее доходность до погашения в этом случае будет меньше купонной ставки.

Упражнение 3.5.7. Рассмотрим облигацию с 10 % купонной ставкой, по которой проценты выплачиваются раз в полгода. Погашение по ней назначено на 1.03.1995, а покупка/продажа состоялась 1.07.1993. Расчет дней производится по схеме реальный/реальный. Проверьте, что теперь промежуток времени, разделяющий момент покупки и первую выплату по купонам 1.09.1993, равен 62 дням, а накопленные проценты составляют 3,31522 % от номинала. Покажите, кроме того, что доходность до погашения этой облигации равна 3 %, если она продавалась по цене 111,3.

Задание по программированию 3.5.8. Напишите программу для расчета

- 1) накопленных процентов в виде процента от номинала, а также
- 2) ДЭО для купонной облигации.

Вводными параметрами пусть будут купонная ставка в виде процента от номинала, дата следующей выплаты по купонам, частота ежегодных купонных выплат, число купонных выплат, оставшееся после следующей выплаты, и схема расчета срока в днях.

3.5.5 Доходность портфеля облигаций

Расчет доходности до погашения для портфеля облигаций не отличается от ее расчета при одной облигации. Так, денежные потоки отдельных облигаций складываются, и расчет доходности производится по суммарному денежному потоку так же, как если бы он относился к одной облигации.

Пример 3.5.4. Портфель состоит из двух бескупонных облигаций. Цена их покупки равна 50 и 20, соответственно. Срок погашения составляет 3 года от настоящего момента. Для получения доходности решаем уравнение

$$50 + 20 = (100 + 100)(1 + y)^{-6}$$

относительно y . Поскольку $y = 0,19121$, то ежегодной доходностью

(в смысле ежегодной ставки полугодового начисления) будет величина 38,242 %. Доходности до погашения каждой из облигаций будут равны 24,4924 % и 61,5321 %, соответственно. Как видим, ни их простое среднее (43,01225 %), ни взвешенное среднее (35,0752 %) не равны 38,242 %. <

3.5.6 Составные части дохода

Напомним, что цена облигации рассчитывается по формуле

$$P = Fc \frac{1 - (1+y)^{-n}}{y} + \frac{F}{(1+y)^n},$$

где c — купонная ставка периода, а y — его процентная ставка. Ее **суммарный доход в денежном выражении** равен $P(1+y)^n - P$, или

$$\begin{aligned} Fc \frac{(1+y)^n - 1}{y} + F - P &= \\ &= Fc \frac{(1+y)^n - 1}{y} + F - Fc \frac{1 - (1+y)^{-n}}{y} - \frac{F}{(1+y)^n}. \end{aligned}$$

Этот доход можно разбить на три части: **прирост капитала** $F - P$, **проценты по купонам** nFc и **проценты на проценты**, равные величине

$$\begin{aligned} [P(1+y)^n - P] - (F - P) - nFc &= P(1+y)^n - F - nFc = \\ &= Fc \frac{(1+y)^n - 1}{y} - nFc. \end{aligned}$$

Можно показать, что доля третьей части (проценты на проценты) суммарного дохода растет при увеличении c . Это означает, что чем больше купонная ставка, тем больше полный доход зависит от этой последней компоненты. Поэтому облигации, продаваемые с премией, больше зависят от компоненты проценты на проценты при тех же дате погашения и доходности до погашения. Можно также проверить, что если облигация продается по номиналу (тогда $c = y$), то чем больше срок до погашения n , тем выше доля процентов на проценты в суммарном доходе. Но то же самое верно и в отношении облигаций, продаваемых с премией ($y < c$) или со скидкой ($y > c$).

Сделанные выше замечания раскрывают значение риска реинвестирования. Купонные облигации, в которых более высокую долю в общем доходе составляют реинвестируемые купонные проценты, более уязвимы по отношению к изменениям условий реинвестирования. Доходность до погашения, при которой считается, что все купонные платежи могут быть реинвестированы по ставке, равной этой доходности, не слишком правдоподобна, поскольку такое предположение редко реализуется (на практике) в изменяющейся среде.

Напомним, что доход за период владения (ДПВ) измеряет доход от владения ЦБ вплоть до **намеченной даты**. Этот период времени называется **периодом владения** или **периодом инвестирования**. ДПВ состоит из 1) прироста/убыли капитала на момент намеченной даты, 2) доходной части

денежного потока, состоящей из платежей по купонам или закладным, а также 3) доходов от реинвестирования денежного потока, возникающего в периоде между датами покупки и окончания намеченного срока жизни ЦБ. Совершенно ясно, что следует делать четкие предположения о ставке реинвестирования в периоде владения, а также о рыночной цене ЦБ в его конце, которая так и называется **ценой в конце ее срока жизни**. Расчет ДПВ в разных предположениях называется **сценарным анализом**. Ну а возможные сценарии можно проанализировать и найти оптимальное решение [891]. **Квантильная** методология, называемая **стоимостью под риском (СПР)***, как раз и является одним из уточненных подходов к сценарному анализу. С ее помощью, используя некоторые стохастические модели (см. п. 31.4), находят с заданной вероятностью интервал для дохода в долларах в конце периода владения.

Пример 3.5.5. Рассмотрим 5-летнюю облигацию, по которой проценты выплачиваются раз в полгода по купонной ставке 10 %. Предположим, что облигация куплена за 90, сохраняется вплоть до погашения и весь этот срок действует ставка реинвестирования 5 %. Купонные проценты вместе процентами на них составят величину

$$\sum_{i=1}^{2 \times 5} \frac{10}{2} \times \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{i-1} = 56,017$$

долларов. Прирост капитала равен $100 - 90 = 10$. Поэтому ДПВ оказывается равным $56,017 + 10 = 66,017$ долларам. Доходность же за период владения составит величину $y = 12,767\%$, поскольку

$$\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2 \times 5} = \frac{100 + 56,017}{90}.$$

Для сравнения ее доходность, эквивалентная облигационной (ДЭО) до погашения также равна 12,767 %. Ясно, что в других предположениях о ставке реинвестирования будут получаться другие ДПВ. Если ЦБ должна быть продана до погашения, то ее цену в конце также следует спрогнозировать. ◁

Упражнение 3.5.9. Покажите, что доходность за период владения облигации с равными купонами в точности равняется y , если этот период совпадает с первым предстоящим периодом выплат.

Дополнительная литература

Доходность, системы расчета срока в днях и накопленные проценты воздействуют друг на друга сложным образом [827]. Более подробную информацию о материале главы можно найти в [244, 323, 325, 328, 895]. По численным методам решения уравнений можно проконсультироваться по [35, 224, 381, 417, 447, 727].

*) Понятие стоимости под риском (Value at Risk = VaR) с математической точки зрения есть квантиль заданного уровня соответствующей функции распределения. — Прим. перев.

Примечания

1. Величина ПЗ обязана своему появлению в 1896 г. Ирвингу Фишеру (1867—1947) [827].

2. Существуют ситуации, в которых оставшийся непогашенным капитал сначала растет и лишь потом уменьшается вплоть до окончания срока ссуды. При этом в них используется один и тот же принцип (см. упр. 3.3.2).

3. К терминам, имеющим аналогичное значение, относятся: **совокупный доход**, **доход за планируемый срок**, **суммарный доход за планируемый срок** и **доход за инвестиционный период** [646].

4. Символ $[a, b]$ обозначает отрезок $a \leq x \leq b$, $[a, b)$ и $(a, b]$ — промежутки $a \leq x < b$ и $a < x \leq b$ соответственно, а (a, b) — интервал $a < x < b$.

5. Понятие номинала (par value) или номинальной стоимости на английском языке имеет много синонимов: **denomination**, **face value**, **maturity value**, **principal value**, т.е. достоинство, лицевая стоимость, стоимость погашения, основная стоимость, соответственно.

6. О причинах, заставляющих компании выпускать отзывные облигации см. [767]. После февраля 1985 г. Казначейство США такие облигации не выпускало [325].

7. Обратная сторона этого важного соотношения общеизвестна. Так, в [703] было написано следующее: «Если у японских банков возникнут проблемы с ликвидностью, то они будут вынуждены продавать облигации Казначейства США. А массовая распродажа может привести к сильному снижению их доходности и панике на Уолл-Стрит».

Можно ли измерить океан, вычерпывая его горстями, или измерить небо своими руками?

Исайя 40:12

Понимание того, как процентные ставки влияют на цены облигаций, служит ключом к управлению риском ценных бумаг, чувствительных к изменению процентных ставок. В этой главе мы концентрируем свое внимание на волатильности, т.е. на изменчивости цен облигаций или диапазоне в движении их цен, зависящем от изменения процентных ставок. Для характеристики этого явления вводятся два классических понятия, **дюрация** и **выпуклость**, а также приводятся несколько примеров их использования в управлении риском. Под купонными облигациями всюду ниже в этой книге понимаются облигации с равными купонами.

4.1 Волатильность цены

Волатильность цены измеряется тем, как изменение цены в процентах зависит от изменения процентных ставок. Определим же мы **волатильность цены** формулой $-(\partial P/\partial y)/P \equiv -\partial \ln P/\partial y$. Для купонной облигации она будет равна (см. (3.18) с приведенным значением $PZ = P$, $y = r$, $m = 1$)

$$-\frac{\partial P/\partial y}{P} = -\frac{(C/y)n - (C/y^2)[(1+y)^{n+1} - (1+y)] - nF}{(C/y)[(1+y)^{n+1} - (1+y)] + F(1+y)}, \quad (4.1)$$

где n — число периодов до погашения, y — ставка периода, F — номинал и $C = Fc$ — купонная выплата периода. Для облигаций без вложенных опционов значение $-(\partial P/\partial y)/P > 0$ по очевидным причинам.

Волатильность цены возрастает при уменьшении купонной ставки и одинаковых других параметрах (см. упр. 4.1.2). Следовательно, цены бескупонных облигаций являются самыми волатильными, а цены облигаций, продаваемых с большой скидкой более волатильны по сравнению с теми, которые продаются почти по номиналу или выше него. Волатильность цены также возрастает при уменьшении желаемой доходности и равных остальных условиях (см. упр. 4.1.3). Поэтому облигации с высокой доходностью менее волатильны.

Для облигаций, продаваемых по цене выше номинала или равной ему, волатильность цены растет, но с убывающей скоростью по мере увеличения **срока до погашения** (см. рис. 4.1). Таким образом, цены облигаций с большим сроком жизни более волатильны. Это согласуется с уважением к ликвидности и тем эмпирическим фактом, что цены долгосрочных облигаций более волатильны, чем цены краткосрочных

(доходности долгосрочных облигаций, однако, менее волатильны, чем доходности краткосрочных [217]). Для облигаций, продаваемых по цене ниже номинала, волатильность цены сначала возрастает, а затем убывает, как показано на рис. 4.2 [425]. И более долгий срок жизни облигации уже не может быть объяснен более высокой волатильностью цены.

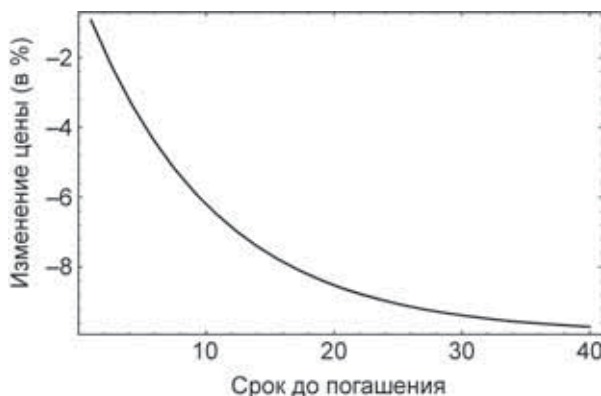


Рис. 4.1. Волатильность цены как функция срока до погашения для номинальной облигации. График характеризует изменение цены облигации в % по отношению к изменению требуемой доходности в % при различных сроках до погашения. Ежегодная купонная ставка равна 10 % с полугодовыми купонами. Доходность до погашения равна купонной ставке.

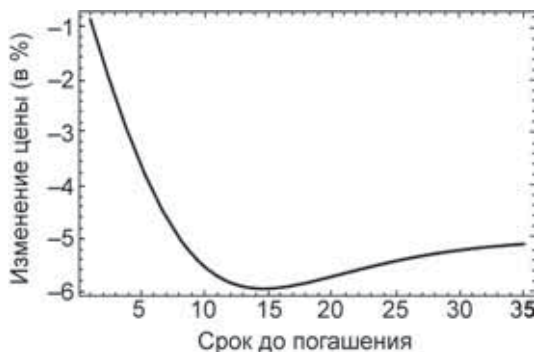


Рис. 4.2. Волатильность как функция срока до погашения облигации со скидкой. Ежегодная купонная ставка равна 10 % с полугодовыми купонами, а доходность до погашения 40 % (облигация с большой скидкой). Срок до погашения измеряется в полугодиях. Остальные данные те же, что на рис. 4.1.

Упражнение 4.1.1. Проверьте справедливость равенства (4.1).

Упражнение 4.1.2. Покажите, что волатильность цены никогда не убывает при уменьшении купонной ставки, если доходности положительны.

Упражнение 4.1.3. 1) Докажите, что волатильность цены всегда убывает при увеличении доходности, если эта доходность совпадает с купонной ставкой.

2) Докажите, обобщая утверждение (1), что волатильность цены при увеличении доходности убывает всегда.

4.2 Дюрация

Дюрация по Маклэю (ДМ) впервые была введена Маклэем в 1938 г. и определялась как взвешенное среднее моментов поступления сумм денежного потока, связанного с некоторым активом [627]. Весами в нем являются приведенные значения (ПЗ) этих сумм, деленные на стоимость рассматриваемого актива. Иными словами,

$$DM \equiv \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{iC_i}{(1+y)^i}.$$

где n — число периодов до погашения, y — требуемая доходность, C_i — сумма денежного потока, относящаяся к моменту i , а P — цена актива. Ясно, что ДМ в периодах записывается в виде

$$DM = -(1+y) \frac{\partial \ln P}{\partial y}. \quad (4.2)$$

Это простое соотношение было открыто в 1939 г. Хиксом (1904—1989) [231, 496]. В частности, для купонной облигации

$$DM = \frac{1}{P} \left[\sum_{i=1}^n \frac{iC}{(1+y)^i} + \frac{nF}{(1+y)^n} \right]. \quad (4.3)$$

Это выражение можно упростить и записать в виде

$$DM = \frac{c(1+y)[(1+y)^n - 1] + ny(y-c)}{cy[(1+y)^n - 1] + y^2},$$

где c — купонная ставка периода. Для бескупонной облигации (для которой $c=0$) ДМ равна n , т.е. ее сроку до погашения. В общем же случае ДМ меньше этой величины. Для купонной облигации ДМ приближается к величине $(1+y)/y$ при увеличении срока до погашения, независимо от купонной ставки.

Равенство (4.2) выполняется лишь в том случае, когда величина купона C , номинал F и срок до погашения n не зависят от доходности y , другими словами, если денежный поток не зависит от доходности. Если же денежный поток чувствителен к изменениям процентной ставки, то ДМ уже не будет больше удобной характеристикой цены. Чтобы в этом убедиться, предположим, что рыночная доходность убывает. Тогда в соответствии со вторым утверждением упр. 4.1.3 ДМ должна увеличиваться. Однако для ценных бумаг, срок погашения которых в конечном счете уменьшается, ДМ может и убывать.

Хотя появление дюрации по Маклэю (ДМ) и было вызвано желанием измерять время возвращения капиталовложений в облигации, сейчас это

понятие используется в основном для измерения чувствительности цены к изменению в рыночной доходности, т. е. для измерения волатильности цены [348]. Как следствие, если не все, то многие термины, связанные с дюрацией, и не могут сейчас интерпретироваться иначе.

Чтобы ДМ измерялась в годах, перепишем равенство (4.3) в виде

$$\text{ДМ} = \frac{1}{P} \left[\sum_{i=1}^n \frac{i}{k} \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{k}\right)^i} + \frac{n}{k} \frac{F}{\left(1 + \frac{y}{k}\right)^n} \right],$$

где y — *ежегодная доходность*, а k — частота начисления процентов в год. Представление (4.2) при этом превратится в равенство

$$\text{ДМ} = - \left(1 + \frac{y}{k}\right) \frac{\partial \ln P}{\partial y}.$$

Заметим, что по определению

$$\text{ДМ (в годах)} = \frac{\text{ДМ (в периодах)}}{k}.$$

Аналогичной мерой является **модифицированная дюрация (МД)**, определяемая выражением

$$\text{МД} \equiv - \frac{\partial \ln P}{\partial y} = \frac{\text{ДМ}}{(1+y)}. \quad (4.4)$$

Например, для купонной облигации МД может быть записана в виде

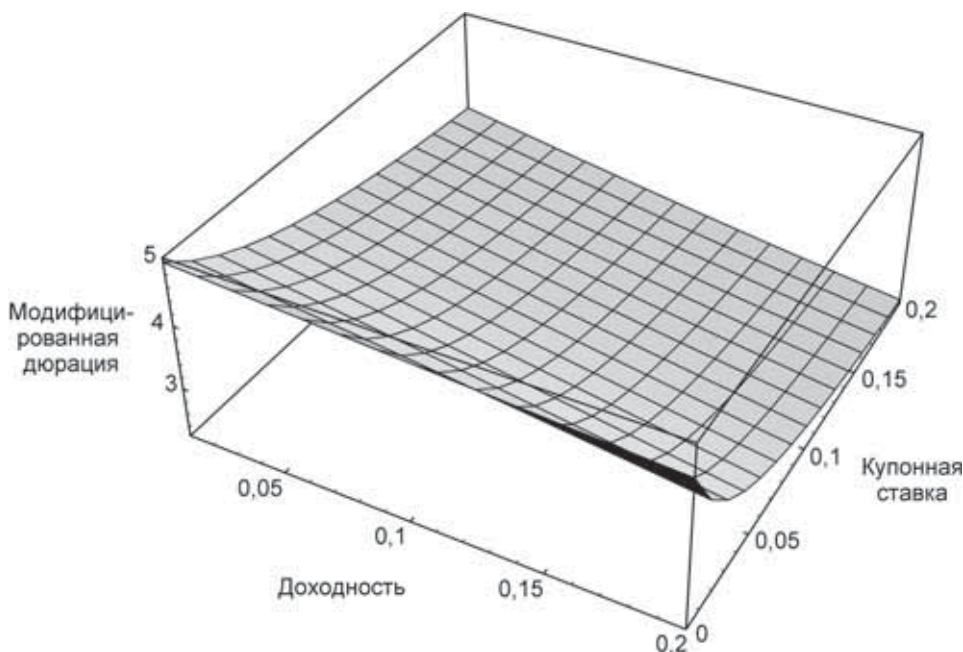


Рис. 4.3. Модифицированная дюрация как функция купонной ставки и доходности. Предполагается, что купонные выплаты по облигациям выплачиваются раз в полгода, датой покупки является 15 сентября 1995 г., а датой погашения — 15 сентября 2000 г.

(4.1) (см. рис. 4.3). В силу разложения Тейлора

изменение цены в процентах $\approx -\text{МД} \times \text{изменение доходности}$.

Для портфеля МД определяется равенством $\sum_i \omega_i D_i$, где D_i — МД i -го актива, а ω_i — рыночная стоимость этого актива, выраженная в процентах от рыночной стоимости портфеля. Величина МД равна $\frac{\text{ДМ (в периодах)}}{1+y}$ или $\frac{\text{ДМ (в годах)}}{k(1+y)}$, если денежный поток не зависит от изменений в процентных ставках.

Пример 4.2.1. Допустим, что МД некоторой облигации равна 11,54 при доходности в 10 %. Это означает, что если доходность будет непрерывно возрастать от 10 % до 10,1 %, то приблизительное изменение цены в процентах составит величину $-11,54 \times 0,001 = -0,01154$, или $-1,154$ %. $\triangleleft$

Общую формулу для вычисления волатильности предоставляет **эффективная дюрация**, определяемая выражением (см. сноску *) на с. 564)

$$\frac{P_- - P_+}{P_0(y_+ - y_-)}, \quad (4.5)$$

в котором P_- — цена при уменьшении доходности на Δy , P_+ — цена при увеличении доходности на Δy , P_0 — первоначальная цена, y — исходная доходность, $y_+ \equiv y + \Delta y$, $y_- \equiv y - \Delta y$, и Δy достаточно мало. В принципе мы можем рассчитать эффективную дюрацию практически любого финансового инструмента. Менее точную, но более удобную с вычислительной точки зрения формулу

$$\frac{P_0 - P_+}{P_0 \Delta y}, \quad (4.6)$$

для эффективной дюрации мы получим, если вместо **двусторонней разницы** выражения (4.5) используем **правостороннюю разницу**.

К эффективной дюрации чаще всего прибегают в случаях, когда изменение доходности сказывается на денежном потоке или когда денежный поток ценной бумаги настолько сложен, что простые формулы не существуют. Эта мера усиливает спор на ту тему, что дюрацию следует рассматривать скорее как меру волатильности, а не как усредненное время до погашения. В действительности ведь возможно, что дюрация ценной бумаги будет больше срока до ее погашения или даже станет отрицательной [321]! Ни то, ни другое нельзя понять с точки зрения усредненного времени до погашения.

Всюду ниже в этой книге под дюрацией будем понимать математическое выражение $-(\partial P / \partial y) / P$ или его приближение, т.е. эффективную или реальную дюрацию. Как следствие, всегда

изменение цены в % $\approx$ —дюрация $\times$ изменение доходности.

Основные применения понятие дюрации находит в хеджировании, а также в управлении активами и обязательствами [55].

Упражнение 4.2.1. Предположим, что ежегодная доходность до погашения равна 9 %, начисляемым раз в полгода. Рассчитайте ДМ для

трехлетней облигации, по которой купоны оплачиваются раз в полгода по ежегодной купонной ставке 10 %.

Упражнение 4.2.2. Дюрация обычно выражается в процентной форме, удобной для быстрого вычисления в уме: при данной дюрации $D_{\%}$ изменение цены в процентах, выраженное в процентах, приблизительно равно $-D_{\%} \times \Delta r$, когда доходность мгновенно возрастает на величину Δr %. Например, цена упадет на 20 %, если $D_{\%} = 10$ и $\Delta r = 2$, поскольку $10 \times 2 = 20$. Покажите, что $D_{\%}$ совпадает с МД.

Упражнение 4.2.3. Рассмотрим купонную облигацию и традиционную закладную с теми же сроком до погашения и частотой выплат. Покажите, что ДМ у закладной меньше, чем у облигации, если у них одинаковая доходность до погашения¹. Для простоты предположите, что рыночная цена этих финансовых инструментов одинакова.

Упражнение 4.2.4. Проверьте, что ДМ в случае традиционной закладной равна $\frac{1+y}{y} - \frac{n}{(1+y)^n - 1}$.

4.2.1 Непрерывное начисление процентов

При непрерывном начислении процентов формула для дюрации немного изменяется. Цена облигации в этом случае становится равной $P = \sum_i C_i e^{-y t_i}$ и потому

$$\text{дюрация (непрерывное начисление)} \equiv \frac{\sum_i t_i C_i e^{-y t_i}}{P} = -\frac{\partial P / \partial y}{P}. \quad (4.7)$$

В отличие от ДМ из (4.2) множитель $1 + y$ здесь отсутствует.

Упражнение 4.2.5. Покажите, что дюрация n -периодной бескупонной облигации равна n .

4.2.2 Иммунизация

Покупка купонных облигаций для погашения в будущем некоторого обязательства связана с определенным риском. Предположим, что мы находимся в конце рассматриваемого периода, когда и следует выполнить это обязательство (для чего в этот момент мы и продадим купленные ранее облигации). Тогда в случае, если процентные ставки после момента покупки возрастут, то проценты на проценты от реинвестирования купонных платежей также увеличатся и, соответственно, при продаже облигаций у нас возникнут потери капитала. Естественно, в случае падения процентных ставок случится обратное. Но в результате все-таки возникает определенная неуверенность в исполнении обязательства.

О портфеле говорят, что он наделяет обязательство **иммунитетом** (или осуществляет иммунизацию), если его стоимость в момент исполнения обязательства покрывает обязательство при небольших изменениях процентной ставки в настоящий момент. Как же искать такой портфель облигаций? Поразительно, но ответ настолько же элегантен, насколько и прост. Нужно лишь подобрать портфель с дюрацией по Маклэу

(ДМ), которая совпадает с длиной промежутка времени до исполнения обязательства и с приведенным значением (ПЗ) (стоимости портфеля), равным ПЗ этого единственного будущего обязательства [350]. В этом случае в момент исполнения обязательства потери от уменьшения процентов на проценты будут компенсированы увеличением продажной цены портфеля при падении процентных ставок и, наоборот, потери от уменьшения продажной цены портфеля будут компенсированы выигрышем в процентах на проценты при увеличении процентных ставок (см. рис. 4.4). К примеру, для исполнения обязательства выплатить \$ 100 000 12 лет спустя следует подобрать портфель с ДМ, равной 12 годам и НЗ, равным \$ 100 000.

Доказательство не составляет труда. Предположим, что обязательство сводится к выплате величины L в момент t , а текущая процентная ставка равна y . Тогда мы ищем портфель со следующими свойствами:

- 1) его НЗ к моменту t равно L ,
- 2) $\partial \text{НЗ} / \partial y = 0$,
- 3) НЗ является выпуклой вниз функцией y .

Условие 1) говорит о том, что обязательство выполнено. Условия же 2) и 3) вместе означают, что величина L является минимумом возможных НЗ портфеля в момент исполнения обязательства при небольших изменениях процентной ставки (сейчас).

Пусть $\text{НЗ} \equiv (1+y)^m P$, где P — это ПЗ портфеля. Тогда

$$\frac{\partial \text{НЗ}}{\partial y} = m(1+y)^{m-1} P + (1+y)^m \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (4.8)$$

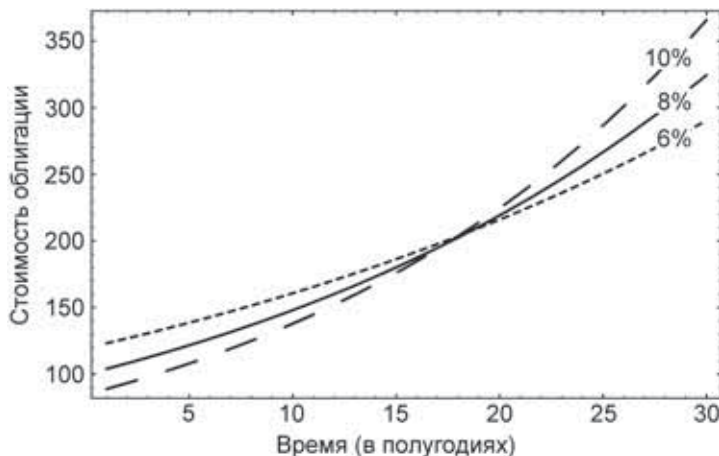


Рис. 4.4. Изменение стоимости облигации в трех различных сценариях изменения ставки. Сплошной линией изображена стоимость 8 % 15-летней облигации как функция времени жизни облигации и при условии, что процентная ставка останется на том же уровне 8 %. Два других варианта представляют изменение стоимости этой же облигации при увеличении процентной ставки до 10 %, а также при ее уменьшении до 6 %.

И с помощью условия 2) получаем, что

$$m = -(1+y) \frac{\partial P / \partial y}{P}. \quad (4.9)$$

Но это тождество как раз и означает то, что нам нужно: ДМ равна m .

Предположим далее, что для иммунизации используется купонная облигация. Тогда

$$H3 = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+y)^{i-m}} + \frac{F}{(1+y)^{n-m}}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 H3}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(m-i)(m-i-1)C}{(1+y)^{i-m+2}} + \frac{(m-n)(m-n-1)F}{(1+y)^{n-m+2}} > 0 \quad (4.10)$$

при $y > -1$, поскольку множители $(m-i)(m-i-1)$ либо равны нулю, либо положительны. Таким образом, поскольку $H3$ выпукло при $y > -1$, то его минимальное значение действительно равняется L (см. рис. 4.5).

Если же какой-то одной облигации с ДМ, равной сроку до выполнения обязательства нет, то можно составить портфель из двух облигаций, A и B , решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = \omega_A + \omega_B, \\ D = \omega_A D_A + \omega_B D_B \end{cases} \quad (4.11)$$

относительно ω_A и ω_B ; здесь D_i — это ДМ облигации i , а ω_i — вес облигации i в портфеле. Удостоверьтесь, что величина D попадает между

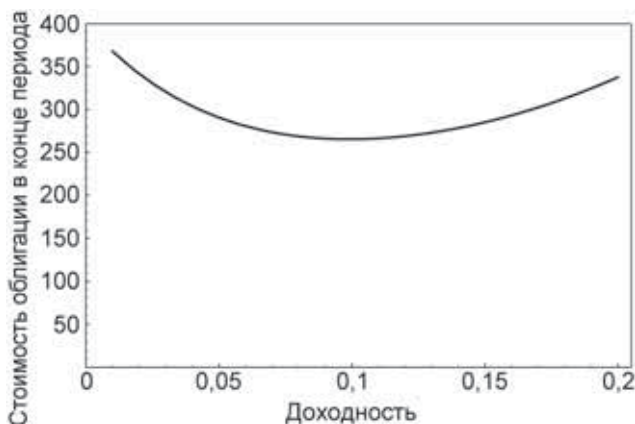


Рис. 4.5. Цена в конце периода. Изображена будущая стоимость облигации в конце периода, как функция доходности. Доходность, при которой достигается минимум этой кривой одновременно приравнивает ДМ облигации к величине периода. В этом примере по облигации в течение 30 лет оплачиваются полугодовые купоны с ежегодной ставкой в 10 %, а рассматриваемый период заканчивается через 10 лет. Минимум $H3$ достигается при $y = 9,91\%$, а ДМ при этом y в точности равняется 10 годам. $H3$ облигации в конце периода возрастет, если ставка изменится.

D_A и D_B . Это нужно для того, чтобы гарантировать неравенства $\omega_A > 0$, $\omega_B > 0$ и положительную выпуклость НЗ портфеля.

Хотя мы и рассмотрели понятие иммунитета по отношению к одному обязательству, но его нетрудно дать аналогичным образом и для случая многих обязательств. Пусть, скажем, имеются обязательства выплатить суммы L_i в моменты i , а также денежный поток из сумм A_i , «поступающих» в те же моменты i . Тогда приведенная прибыль (ПП) от этого суммарного денежного потока на момент m окончания рассматриваемого срока есть величина

$$\text{НЗ} = \sum_i (A_i - L_i)(1+y)^{m-i}.$$

Вышеуказанные условия 1)–3) означают, что вблизи текущей ставки y выполняются соотношения $\text{НЗ} = 0$, $\partial \text{НЗ} / \partial y = 0$, $\partial^2 \text{НЗ} / \partial y^2 > 0$. Вместе они гарантируют, что «поступающий денежный поток» (из величин A_i) окажется достаточным для выполнения обязательств при малых мгновенных изменениях текущей процентной ставки. Только в этой более общей постановке для достижения иммунитета требуется, чтобы дюрации индивидуальных активов были распределены в более широком диапазоне, чем обязательства (см. упр. 4.2.11).

Конечно, поток обязательств всегда можно наделить иммунитетом при помощи равного потока бескупонных облигаций. Такая операция называется **поиск подходящего потока из наличных**, а сам портфель называют **целевым портфелем** [799]. Но с таким подходом связаны неприятности двух типов: 1) облигации с некоторыми сроками до погашения могут отсутствовать и 2) обычно такие облигации приносят меньшую доходность.

Иммунизация—это динамический процесс. Его следует постоянно корректировать, чтобы гарантировать равенство ДМ остающемуся сроку до исполнения обязательств по следующим причинам. С течением времени ДМ уменьшается, причем, за исключением случая с бескупонными облигациями, величина этого изменения оказывается неравной соответствующему изменению срока до погашения [217]. Этот факт даже имеет специальное название **смещение дюрации** [246]. И в нем нетрудно убедиться на примере купонной облигации с ДМ, равной сроку до погашения (обязательства). Поскольку дата погашения облигации является более поздним моментом, чем дата погашения обязательств, то ее дюрация останется в этот момент положительной, вместо того, чтобы стать равной нулю. Следовательно, проведенную иммунизацию необходимо корректировать, даже если процентные ставки не будут меняться. Вообще же процентные ставки в периоде владения будут меняться, но (в процессе иммунизации) предполагалось, что процентные ставки изменятся *мгновенно* после проведения иммунизации и после этого останутся неизменными. Наконец, дюрации активов и обязательств могут изменяться с разной интенсивностью [689].

Если же дюрации обязательств и активов как функции времени «плохо» связаны между собой, то неблагоприятные движения процентных ставок могут быстро нарушить их равенство. Банк, финансирующий

долгосрочную ссуду под залог с помощью краткосрочного кредита со сберегательных счетов или депозитных сертификатов (ДС) подвергается такому риску. Примерами других учреждений, которых беспокоит правильность определения дюрации, являются пенсионные фонды и компании по страхованию жизни [767].

Упражнение 4.2.6. При постановке проблемы иммунизации для двух облигаций в равенстве (4.11) мы не стали проверять условие выпуклости. Оправдайте эту оплошность.

Упражнение 4.2.7. Покажите, что при отсутствии изменений процентной ставки достаточно приравнять ПЗ обязательства и актива.

Упражнение 4.2.8. Начните с облигации, ПЗ которой равно ПЗ предстоящего обязательства, но ДМ которой превосходит срок до его исполнения. Покажите, что в момент исполнения облигация не сможет покрыть обязательство, если процентные ставки возрастут, и ее хватит с избытком в противном случае. Противоположное утверждение верно, если ДМ окажется меньше срока до погашения обязательства.

Упражнение 4.2.9. Рассмотрим обязательство, в настоящий момент наделенное иммунитетом с помощью купонной облигации. Предположим, что процентная ставка мгновенно меняется. Покажите, что возникнет прибыль, если корректировку иммунизации произвести через время Δt (но перед погашением).

Упражнение 4.2.10. Пусть ДМ обязательства равна 3 годам, но у финансового управляющего есть возможность использовать лишь два типа облигаций с ДМ, равными 1 году или 4 годам. Какова правильная пропорция этих облигаций в портфеле, при которой его ДМ может сравняться с ДМ обязательства?

Упражнение 4.2.11. Чтобы добиться **полной иммунизации**, мы расположим поступающие суммы во времени в большем числе точек, чем рассматриваемые обязательства и следующим образом. Рассмотрим одно обязательство величины L_t , отнесенное к моменту времени t . Составим портфель из двух поступающих сумм A_1 в момент $t - a_1$ и A_2 в момент $t + a_2$ соответственно, где $a_1, a_2 > 0$ и $a_1 \leq t$. В соответствии с условиями 1) и 2) тогда при непрерывном начислении процентов

$$P(y) = A_1 e^{a_1 y} + A_2 e^{-a_2 y} - L_t = 0,$$

$$\frac{dP(y)}{dy} = A_1 a_1 e^{a_1 y} - A_2 a_2 e^{-a_2 y} = 0.$$

1) Решите полученную систему уравнений относительно любых двух неизвестных по вашему выбору, скажем A_1, A_2 , и докажите, что найденное решение приведет к иммунизации от любых изменений по y .

2) Обобщите полученный результат на случай более двух поступлений.

4.2.3 Дюрация по Маклэю в случае плавающей ставки

У **инструмента с плавающей ставкой** процентные платежи привязаны к какому-либо известному индексу, такому как основная банков-

ская ставка*), ставка LIBOR**), ставка по векселям Казначейства США, ставка СМТ (см. гл. 34) или Индекс стоимости капиталовложений (ИСК; см. гл. 34) [348]. Вместо того, чтобы быть фиксированным числом, купонная ставка периодически пересматривается, чтобы оставаться близкой к существующей процентной ставке.

Предположим, что купонная ставка c совпадает с рыночной доходностью y , а облигация оценивается по номиналу. И пусть первый пересмотр пройдет через j периодов, а затем ставка будет пересматриваться через период. Предположим также для простоты, что исходная сумма равна \$ 1. Тогда денежный поток, соответствующий такому инструменту с плавающей ставкой, будет иметь вид

$$\underbrace{c, c, \dots, c}_i, \underbrace{y, \dots, y, y+1}_{n-j},$$

где c — постоянная. Таким образом, купонные платежи начинают отражать рыночную доходность с момента $j+1$. Скажем, если $j=0$, то отражают основную рыночную доходность все купонные платежи, а если $j=1$, что более типично, то изменения процентной ставки в первом периоде не затронут первую купонную выплату. Ну а ДМ равна величине

$$\begin{aligned} -(1+y) \left. \frac{\partial P/\partial y}{P} \right|_{c=y} &= \sum_{i=1}^j \frac{iy}{(1+y)^i} + \sum_{i=j+1}^n \left[\frac{iy}{(1+y)^i} - \frac{1}{(1+y)^{i-1}} \right] + \frac{n}{(1+y)^n} = \\ &= \text{ДМ} - \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{(1+y)^{i-1}} = \frac{(1+y)[1-(1+y)^{-j}]}{y}, \quad (4.12) \end{aligned}$$

где символ ДМ (дюрация по Маклэю) относится к ДМ в остальном такой же облигации с фиксированной ставкой. Интересно, что полученная ДМ не зависит от срока n до погашения облигации. Формулы для неноминальных облигаций сложнее, но не используют никаких новых идей [306, 348].

Привлекательность использования плавающей ставки нетрудно объяснить. Инструменты с плавающей ставкой обычно менее чувствительны к изменениям процентной ставки, чем в случае инструмента с фиксированной ставкой. Более того, чем менее удалена от начала первая дата пересмотра ставки, тем менее волатильным является финансовый инструмент. Кроме того, если каждый купон будет приводиться в соответствие с рыночной доходностью, то риск процентной ставки будет просто отсутствовать. В самом деле, ДМ равна нулю, если $j=0$. В часто встречающемся случае, когда $j=1$, ДМ составляет один период. С дру-

*) Точнее говоря, английский термин prime rate означает основную ставку, которую банки используют для предоставления кредита своим лучшим и наиболее надежным клиентам, т.е. эту ставку можно называть и льготной. Сама ставка определяется в зависимости от решения Федеральной Резервной Системы поднять или снизить существующую процентную ставку по краткосрочным займам. Называть нашу ставку можно и ключевой, поскольку ссуды для менее надежных клиентов часто связаны именно с ней. — Прим. перев.

**) London Inter-Bank Offered Rate — так называется ставка, которую наиболее надежные международные банки используют в операциях с евродолларами друг для друга при больших ссудах. Но эта же ставка служит основой для других евродолларовых ссуд менее надежным корпоративным и правительственным заемщикам. — Прим. перев.

гой стороны, если по облигации выплачивается 5 % за период в течение 30 периодов, то ее ДМ равна 16,14 периода.

Упражнение 4.2.12. Покажите, что у инструмента с плавающей ставкой ДМ не может быть больше промежутка до первой даты пересмотра.

4.2.4 Хеджирование

Целью **хеджирования** является нейтрализация колебаний цены инструмента в определенной позиции с помощью хеджирующего инструмента с ценой, меняющейся в противоположном направлении и оставляющего «совокупное богатство» нетронутым [222]. Определим **дюрацию в долларах** выражением

$$\text{МД} \times P = -\frac{\partial P}{\partial y},$$

где P — цена в процентах от номинала. Введенная дюрация представляет наклон касательной к цене, рассматриваемой как функция доходности; подобная функция изображена на рис. 3.9. Приблизительное изменение цены в долларах на \$ 100 номинала составляет величину

изменение цены $\approx$ —дюрация в долларах $\times$ изменение доходности.

Соответствующее **значение цены базисного пункта**, или просто **стоимость базисного пункта (СБП)**, определяемая отношением дюрации в долларах к 10 000, измеряет изменение цены, соответствующее одному базисному пункту изменения в процентной ставке. А этот **базисный пункт***) равняется 0,01 %.

Поскольку ценные бумаги (ЦБ) могут реагировать на изменения процентной ставки по-разному, вводится понятие **бета доходности**:

$$\text{бета доходности} \equiv \frac{\text{изменение доходности у хеджируемой ЦБ}}{\text{изменение доходности у хеджирующей ЦБ}}.$$

Эта характеристика измеряет относительное изменение доходности. И если мы определим **коэффициент хеджирования** равенством

$$h \equiv \frac{\text{дюрация в долларах хеджируемой ЦБ}}{\text{дюрация в долларах хеджирующей ЦБ}} \times \text{бета доходности}, \quad (4.13)$$

то хеджирование будет произведено, если стоимость хеджируемой ЦБ в h раз больше стоимости хеджирующей ЦБ, поскольку

$$\begin{aligned} \text{изменение цены в долларах у хеджируемой ЦБ} &= \\ &= -h \times \text{изменение цены в долларах у хеджирующей ЦБ}. \end{aligned}$$

Пример 4.2.2. Предположим, что мы хотим прохеджировать облигацию A с дюрацией 7, используя облигацию B с дюрацией 8. Тогда в предположении, что бета доходности равно единице и обе облигации продаются по номиналу оказывается, что отношение хеджирования равно 7/8. А это означает, что инвестор, занимающий длинную позицию по облигации A на \$ 1 млн. должен занять короткую позицию по облигации B на сумму в \$ 7/8 млн. <

*) Basis point — наименьшая мера при котировках доходности векселей, нот и облигаций. — Прим. перев.

4.3 Выпуклость

Важное понятие **выпуклость** определяется равенством

$$\text{выпуклость (в периодах)} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{P}. \quad (4.14)$$

Оно измеряет кривизну цены как функции доходности. Выпуклость купонной облигации равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \left[\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)C}{(1+y)^{i+2}} + \frac{n(n+1)F}{(1+y)^{n+2}} \right] = \\ = \frac{1}{P} \left\{ \frac{2C}{y^3} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] - \frac{2Cn}{y^2(1+y)^{n+1}} + \frac{n(n+1)[F - (C/y)]}{(1+y)^{n+2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

и является положительной. Для облигации с положительной выпуклостью цена растет больше при падении процентной ставки, чем падает при таком же ее росте. В силу этого из двух облигаций с одинаковой дюрацией та, выпуклость которой больше и стоит больше при прочих равных условиях. Выпуклость, измеряемая в периодах связана с выпуклостью, измеряемой в годах, соотношением

$$\text{выпуклость (в годах)} = \frac{\text{выпуклость (в периодах)}}{k^2},$$

если год делится на k периодов. Можно показать, что выпуклость купонной облигации возрастает при убывании купонной ставки (см. упр. 4.3.4). Более того, при данных доходности и дюрации выпуклость убывает вместе с величиной купона [325]. По аналогии с равенством (4.7) выпуклость при непрерывном начислении процентов определяется выражением

$$\text{выпуклость (непрерывное начисление)} \equiv \frac{\sum_i t_i^2 C_i e^{-y t_i}}{P} = \frac{\partial^2 P / \partial y^2}{P}.$$

Как мы видели в п. 4.4.2, приближенное выражение

$$\Delta P / P \approx -\text{дюрация} \times \text{изменение доходности},$$

хорошо работает при малых изменениях доходности. Расширить область его использования поможет член второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{P} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \frac{1}{P} (\Delta y)^2 = \\ = -\text{дюрация} \times \Delta y + \frac{1}{2} \times \text{выпуклость} \times (\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Иллюстрацией к этому соотношению служит рис. 4.6.

Более общим является понятие **эффективной выпуклости**, определяемой выражением

$$\frac{P_+ + P_- - 2P_0}{P_0[(y_+ - y_-)/2]^2}; \quad (4.16)$$

здесь P_- — цена при уменьшении доходности на Δy , P_+ — цена при увеличении доходности на Δy , P_0 — начальная цена, y — начальная доходность,

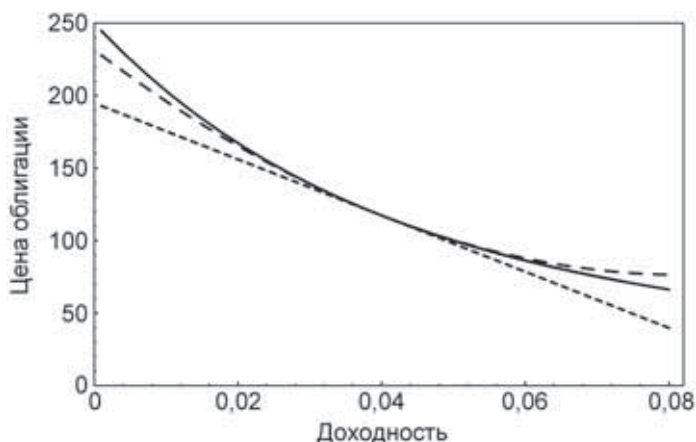


Рис. 4.6. Линейная и квадратичная аппроксимации к изменениям цены облигации. Пунктирная линия (прямая) является результатом аппроксимации, использующей только дюрацию, в то время как редкая пунктирная линия, которая подходит для аппроксимации (сплошной линии) лучше, привлекает и выпуклость. У рассматриваемой облигации 30 периодов до погашения, ее купонная ставка периода 5 %. Текущая доходность за период равна 4 %.

$y_+ \equiv y + \Delta y$, $y_- \equiv y - \Delta y$ и Δy достаточно мало. Заметим, что $\Delta y = (y_+ - y_-)/2$. Успешное применение эффективная выпуклость находит тогда, когда денежный поток, порожаемый облигацией, чувствителен к процентной ставке.

Схема иммунизации в ситуации с двумя облигациями из п.4.2.2 показывает, что можно составить несчетное число портфелей с различными парами дюраций (D_A , D_B), удовлетворяющих системе уравнений (4.11). Однако какую из них следует предпочесть? Поскольку выпуклость является желательным свойством, перефразируем вопрос: какой из портфелей с одинаковой дюрацией обладает максимальной выпуклостью? Пусть имеется n типов облигаций с доходностями D_i и выпуклостями C_i соответственно, причем $D_1 < D_2 < \dots < D_n$. Как правило $D_1 = 0,25$ (3 мес. дисконтный инструмент), а $D_n = 30$ (30-летние бескупонные облигации). И нам следует решить следующую оптимизационную задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать} && \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \dots + \omega_n C_n \\ &\text{в условиях} && 1 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n, \\ & && D = \omega_1 D_1 + \omega_2 D_2 + \dots + \omega_n D_n, \quad 0 \leq \omega_i \leq 1. \end{aligned}$$

Оптимизируемая функция $\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \dots + \omega_n C_n$ называется **целевой функцией**. Равенства и неравенства составляют **ограничения**. Вышеуказанная задача называется **задачей линейного программирования**, поскольку все функции в ней линейны. Ее решением обычно оказывается **портфель-штанга**, называемый так потому, что он содержит облигации с крайними значениями дюрации из соответствующего спектра дюраций (см. упр. 4.3.6).

Упражнение 4.3.1. На практике выпуклость следует выражать в процентах для быстрых вычислений в уме, обозначим ее через $C\%$. Измене-

ние цены в процентах в процентной форме тогда можно приближенно записать в виде $-D_{\%} \times \Delta r + C_{\%} \times (\Delta r)^2/2$, если доходность возрастает мгновенно на Δr %. Например, если $D_{\%} = 10$, $C_{\%} = 1,5$ и $\Delta r = 2$, то цена упадет на 17 %, поскольку

$$-D_{\%} \times \Delta r + \frac{1}{2} \times C_{\%} \times (\Delta r)^2 = -10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2^2 = -17.$$

Покажите, что $C_{\%}$ равняется выпуклости, деленной на 100.

Упражнение 4.3.2. Докажите, что $\partial R/\partial y = R^2 - C$, где R — (модифицированная) дюрация, а C — выпуклость.

Упражнение 4.3.3. Покажите, что выпуклость у бескупонной облигации равна $n(n+1)/(1+y)^2$.

Упражнение 4.3.4. Проверьте, что выпуклость (4.15) растет при убывании купонной ставки.

Упражнение 4.3.5. Докажите, что портфель-штанга имеет максимальную выпуклость при $n = 3$.

Упражнение 4.3.6. Обобщите результат упр. 4.3.5: покажите, что портфель-штанга наделяется иммунитетом с максимальной выпуклостью при данных $n > 3$ типах бескупонных облигаций.

Дополнительная литература

Дюрация и выпуклость измеряют лишь риск изменений в уровне процентной ставки. Другие типы риска, такие как частота больших колебаний процентных ставок, ими игнорируются [618]. Кроме того, в их определении предполагается, что кривые доходности состоят из параллельных двигов, а в действительности это бывает далеко не всегда (о кривых доходности больше говорится в следующей гл. 5). Точные формулы для дюрации и выпуклости можно найти в [89, 209]. Великолепный обзор имеется в [496]. Дополнительные способы иммунизации рассмотрены в [206, 325, 547]. Сама идея иммунизации обязана своим появлением в 1952 г. Редингтону [732]. Более детально с линейным программированием можно познакомиться по [213, 281, 545]. Многие фундаментальные проблемы в финансах и экономике наилучшим образом представлены именно как оптимизационные задачи [247, 278, 281, 891].

Примечание

1. Прежде чем Федеральное управление по работе с жилыми помещениями ввело полностью амортизированные закладные [330], облигация была стандартным способом работы с закладными, называемыми **воздушные шары**. «Воздушные шары» больше подвержены банкротству, поскольку заемщик может и не иметь фонда для оплаты выплат по ним. Этот опыт показывает, что полностью амортизированные закладные менее волатильны, чем «воздушные шары», если предоплата не предусмотрена.

5

Временная структура процентных ставок

Платит меньше тот [...], кто платит последним.

Шарль Монтескье (1689—1755),

Характер законов

Когда говорят о временной структуре процентных ставок, то имеют в виду, как процентные ставки меняются в зависимости от срока*) до погашения ценных бумаг (ЦБ), либо то, как они могут эволюционировать во времени. Эти моменты являются фундаментальными при оценке стоимости ЦБ фиксированной доходности. Но важны они и просто потому, что временная структура лежит в основе любой стохастической теории, посвященной движениям процентной ставки. В этой главе будут иметься в виду процентные ставки периода, если не оговаривается противное. Это упростит изложение, поскольку не потребуется говорить о частоте начисления процентов за год.

5.1 Введение

Множество доходностей до погашения для облигаций, одинаковых во всем, кроме срока до погашения¹, и составляет **временную структуру**. Этот термин часто относят исключительно к доходностям бескупонных облигаций. Срок до погашения — это период времени, в течение которого выпустившая облигацию организация обещала выполнить

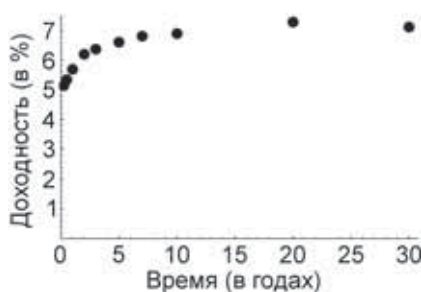
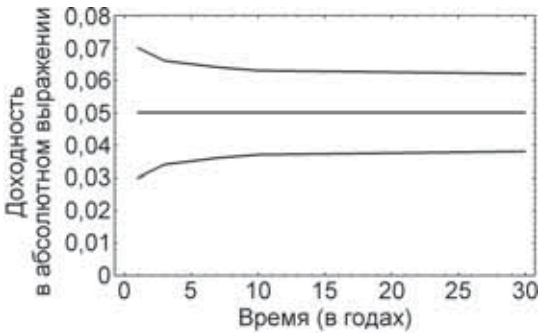


Рис. 5.1. Кривая доходности ЦБ Казначейства США. Она представляет данные продажных котировок по наиболее широко торгуемым ЦБ Казначейства на 3 часа 30 мин. пополудни 3 мая 1996 г., опубликованные Казначейством США, с использованием информации от Федерального Резервного Банка в Нью-Йорке.

все условия по ней. **Кривая доходности** изображает доходность до погашения как функцию срока до погашения и представляет основные существующие процентные ставки для разных сроков погашения. На рис. 5.1 изображена кривая выборочных доходностей ЦБ Казначейства

*) Термин «срок до погашения» по смыслу здесь совпадает с термином «срок погашения» и означает временной интервал от момента выпуска ценной бумаги до момента ее погашения. — Прим. ред.

Рис. 5.2. Три типа кривых доходности. Сверху вниз изображены перевернутая, плоская и нормальная кривые доходности.



США. Кривая номинальной доходности составляется для облигаций, которые продаются по цене, близкой к номиналу.

Можно выделить по крайней мере четыре типа кривых доходности. Возрастающая кривая доходности называется **нормальной**, убывающая — **перевернутой**, постоянная — **плоской** (см. рис. 5.2) и, наконец, та, которая сначала возрастает, а затем убывает — **горбатой** кривой доходности. О теориях, созданных для объяснения вида кривых доходности мы поговорим в п. 5.7.

Кривая доходности ЦБ Казначейства США наиболее часто используются по следующим причинам. Во-первых, она представляет весь спектр сроков до погашения, от трех месяцев до 30 лет. Во-вторых, цены казначейских облигаций весьма показательны, поскольку сами облигации чрезвычайно ликвидны, а их рынок очень развит. Наконец, поскольку казначейские облигации целиком поддерживаются и пользуются доверием правительства США, то их воспринимают как безрисковые [95]. Самые последние выпуски таких облигаций любого срока до погашения на вторичном рынке известны под названием **имеющихся в продаже** или **текущих купонных** выпусков (см. таблицу на рис. 5.3). Те выпуски, которыми торговали до появления текущих купонных, называются **прошедшими** выпусками. Кривые доходности текущих и прошедших выпусков отвечают своему конкретному выпуску [325, 489].

Доходность ЦБ, выпускаемой не Казначейством США, должна превосходить основную процентную ставку, предлагаемую по текущим ЦБ Казначейства США сравнимого срока погашения, на положительную ве-

Рис. 5.3. Кривая доходности ЦБ Казначейства США (т. е. список этих ЦБ) вместе с их ценами покупки и продажи (а также котировками доходностей) на 18 августа 1997 г., 9 час. 28 мин. утра по времени EDT (= Eastern daylight time, восточному поясному времени). Источник: агентство Блумберга (Bloomberg).

Срок до погашения	Текущая ставка	Дата погашения	Цена предыдущего закрытия		928 18.08.97	
3 мес.	—	13.11.97	5,10	5,24	5,11	5,25
6 мес.	—	12.02.98	5,13	5,34	5,12	5,33
1 год	—	20.08.98	5,20	5,49	5,19	5,48
2 года	5,875	31.07.99	100-03+	5,81	100-04+	5,80
3 года	6,000	15.08.00	100-03+	5,96	100-04+	5,95
5 лет	6,000	31.07.02	99-23+	6,06	99-24	6,06
10 лет	6,125	15.08.07	99-07	6,23	99-09	6,22
30 лет	6,375	15.08.27	97-25+	6,54	97-27	6,54

личину, называемую **разницей** или **спрэдом доходности** [326]. Этот спрэд отражает премию за риск обладания ЦБ, которую выпустило не правительство. Основная или базовая процентная ставка известна также под названием **образцовой процентной ставки**.

5.2 Спот-ставки

Доходность $S(i)$ до погашения i -периодной бескупонной облигации известна как i -периодная **спот-ставка**. Таким образом, ПЗ одного доллара, относящегося к моменту i (т.е. i периодов спустя), на текущий момент равно величине $(1 + S(i))^{-i}$. Позднее, однопериодная спот-ставка — **краткосрочная ставка** — в нашей книге будет играть важную роль при моделировании динамики процентных ставок. **Кривая спот-ставок** — это множество спот-ставок, представленное в виде функции от срока погашения. Ее называют также **кривой текущих доходностей** и **кривой доходности бескупонных облигаций**.

В хорошо известной формуле для цены облигации

$$\sum_{i=1}^n C(1+y)^{-i} + F(1+y)^{-n}$$

все денежные суммы денежного потока дисконтируются по одной и той же ставке — доходности до погашения y . Чтобы увидеть в ней несоответствие с реальностью, рассмотрим две безрисковые облигации с разными доходностями до погашения в силу того, что соответствующие им денежные потоки отличаются. По методологии, основанной на доходности до погашения, суммы, относящиеся к одному и тому же моменту времени, следует дисконтировать по разным ставкам, но здравый смысл требует, чтобы такие суммы дисконтировались по одной и той же ставке. Методология спот-ставки именно это и предлагает.

Облигация с денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ и фиксированной ставкой эквивалентна пакету бескупонных облигаций, в котором по i -й облигации выплачивается C_i долларов в момент времени i . Например, цена облигации с равными купонами равняется величине

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1 + S(i))^i} + \frac{F}{(1 + S(n))^n}. \quad (5.1)$$

Этот метод оценки использует информацию о временной структуре, дисконтируя каждую сумму денежного потока по соответствующей спот-ставке. Вообще говоря, рыночная цена любой безрисковой ЦБ с заранее определенным денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ должна иметь вид

$$P = \sum_{i=1}^n C_i d(i),$$

в котором величины

$$d(i) \equiv [1 + S(i)]^{-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

называются **дисконтирующими множителями**. Дисконтирующий множи-

тель $d(i)$ обозначает приведенное значение (ПЗ) одного доллара момента i (периодов спустя) на момент 0 или, другими словами, цену бескупонной облигации со сроком погашения i периодов. Если рыночная цена оказывается меньше P , то облигация называется **недооцененной** или **дешевой**. В противном случае ее называют **переоцененной** или **дорогой**. Дисконтирующие множители часто складывают для получения непрерывной функции, которую называют **дисконтирующей функцией**. Именно дисконтирующие множители, а не спот-ставки непосредственно и наблюдаются на рынке.

Упражнение 5.2.1. Покажите, что доходность до погашения y приблизительно, с точностью до первого порядка, равна величине

$$\frac{\sum_i [\partial C_i(y)/\partial y] S(i)}{\partial P/\partial y},$$

где $C_i(y) \equiv C_i/(1+y)^i$ обозначает ПЗ i -го элемента денежного потока, дисконтированного по ставке y . Обратите внимание на то, что величина $\partial C_i(y)/\partial y$ является дюрацией в долларах для i -периодной бескупонной облигации (приближенное значение доходности до погашения, таким образом, является взвешенным средним спот-ставок, с весами, пропорциональными дюрациям в долларах каждого из элементов денежного потока).

5.3 Получение спот-ставок из кривых доходности

Спот-ставки можно извлечь из доходностей купонных облигаций. Начнем с краткосрочной ставки $S(1)$, которая всегда в наличии, поскольку краткосрочные ЦБ (векселя) Казначейства являются бескупонными облигациями. После этого величину $S(2)$ можно рассчитать, зная цену двухпериодной купонной облигации P и опираясь на равенство (5.1):

$$P = \frac{C}{1+S(1)} + \frac{C+100}{(1+S(2))^2}.$$

Пример 5.3.1. Предположим, что доходность одногодичных векселей Казначейства (ВК) равна 8 %. Поскольку эта ЦБ является бескупонной облигацией, то однолетняя спот-ставка равна 8 %. Тогда, если двухлетние 10 % банкноты Казначейства (БНК) продаются по цене 90, то двухлетняя спот-ставка удовлетворяет уравнению

$$90 = \frac{10}{1,08} + \frac{110}{(1+S(2))^2}.$$

Следовательно, $S(2) = 0,1672$, или 16,72 %. ◁

Вообще же говоря, ставку $S(n)$ можно рассчитать из формулы (5.1), если известна рыночная цена n -периодной купонной облигации, а также предыдущие ставки $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(n-1)$. Полный алгоритм их поиска приведен на рис. 5.4. Корректность этого алгоритма легко проверить. Начальные шаги и шаг 3 приводят к величине

$$P = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(1+S(j))^j}$$

Алгоритм для получения спот-ставок с помощью купонных облигаций:

```

ввод:  $n, C[1..n], P[1..n]$ ;
действительные числа  $S[1..n], p, x$ ;
 $S[1] := (100/P[1]) - 1$ ;
 $p := P[1]/100$ ;
для ( $i = 2$  до  $n$ ) {
    1. Решить  $P[i] = C[i] \times p + (C[i] + 100)/(1+x)^i$  относительно  $x$ ;
    2.  $S[i] := x$ ;
    3.  $p := p + (1+x)^{-i}$ ;
}
вывод  $S[ ]$ ;

```

Рис. 5.4. Алгоритм получения спот-ставок из кривой доходности. Цена $P[i]$ означает стоимость (в процентах от номинала) купонной облигации с погашением через i периодов. Значение $C[i]$ купона для i -периодной облигации также выражается в процентах от номинала, а n — максимальный (по всем облигациям) срок погашения. Первая облигация — бескупонка; i -периодная спот-ставка вычисляется и хранится в $S[i]$.

в начале каждого цикла. Шаг 1 позволяет найти решение x уравнения

$$P_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j}{(1+S(j))^j} + \frac{C_i + 100}{(1+x)^i},$$

в котором C_i — купонная выплата i -й облигации, а P_i — ее цена.

Любая реализация шага 1 требует $O(1)$ арифметических операций, поскольку $x = \left(\frac{C_i + 100}{P_i - C_i p} \right)^{1/i} - 1$, а выражения типа y^z можно рассчитать по формуле $\exp[z \ln y]$ (заметим, что $\exp[x] \equiv e^x$). Аналогично, шаг 3 также занимает $O(1)$ единиц времени. Поэтому общее время работы алгоритма равно $O(n)$.

В действительности, вычисление спот-ставок оказывается далеко не такой прозрачной процедурой, как вышеуказанный **бутстрепный** алгоритм поиска*). Ценные бумаги (ЦБ) Казначейства одинакового срока погашения могут иметь разную доходность (**что приводит к проблеме составных денежных потоков**), среди имеющихся ЦБ некоторые сроки погашения могут отсутствовать (**проблема неполноты**). Но ЦБ Казначейства могут иметь разную привлекательность, и т.д. На практике для получения гладкой кривой спот-ставок приходится использовать интерполяцию и сглаживающие процедуры (см. гл. 22). В таких подходах, однако, обычно не хватает экономической обоснованности.

Упражнение 5.3.1. Предположим, что $S(i) = 0,10$ при $1 \leq i < 20$ и 20-периодная купонная облигация продается по номиналу, с купонной ставкой 8 % полугодового начисления. Найдите $S(20)$.

*) С бутстрепом как методом статистического анализа можно познакомиться, например, по книге Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. — М.: Финансы и статистика, 1988. — Прим. ред.

Задание по программированию 5.3.2. Реализуйте алгоритм блок-схемы 4, а также функцию получения эквивалентных ежегодных спот-ставок, используя поставляемую пользователем связь между ежегодными ставками разной частоты начисления процентов.

5.4 Статический спрэд

Рассмотрим *рисковую* облигацию с ценой покупки P и денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$. Если бы она была безрисковой, то ее можно было бы продать за

$$P^* = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{[1 + S(t)]^t}.$$

Ну а поскольку риск должен компенсироваться, то $P < P^*$. **Статическим спрэдом** называется величина s , на которую кривую спот-ставок следует сдвинуть *параллельно себе вверх*, чтобы корректно оценить облигацию или, иными словами, такую, что

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{[1 + s + S(t)]^t}.$$

Величина s измеряет, таким образом, ту разницу, которая будет возникать при сравнении со всей кривой спот-ставок Казначейства, если рисковую облигацию держать до погашения. В отличие от спреда доходности, который представляет собой разницу между доходностями до погашения рисковой облигации и ЦБ Казначейства сравнимого срока погашения, статический спрэд содержит информацию о временной структуре (доходности). Вычислять статический спрэд можно с помощью метода Ньютона—Рафсона.

Задание по программированию 5.4.1. Напишите программу для расчета статического спреда. Сделайте входными данными частоту выплат в год, ежегодную купонную ставку в процентах от номинала, рыночную цену в процентах от номинала, число оставшихся купонных выплат и дисконтирующие множители. В нижеследующей таблице приведены результаты подобных численных расчетов:

Цена (в % от номинала)	98	98,5	99	99,5	100	100,5	101
Стат. спрэд (%)	0,435	0,375	0,316	0,258	0,200	0,142	0,085

(предполагается, что по 5 % и 15-летней облигации проценты выплачиваются раз в полгода, а кривая спот-ставок постоянна на уровне 7,8 %).

5.5 Кривая спот-ставок и кривая доходности

Существует много интересных связей между спот-ставкой и доходностью до погашения. Пусть y_k обозначает доходность до погашения для k -периодной купонной облигации. Спот-ставка мажорирует

доходность до погашения, если кривая доходности нормальна. Другими словами, $S(k) \geq y_k$, если $y_1 < y_2 < \dots$ (см. упр. 5.5.1, утверждение 1)). Аналогично, спот-ставка мажорируется доходностью до погашения, если кривая доходности перевернута. Более того, спот-ставка мажорирует доходность до погашения, если кривая спот-ставок нормальна (т.е. $S(1) < S(2) < \dots$) и мажорируется доходностью до погашения, если кривая спот-ставки перевернута (см. упр. 5.5.1, утверждение 2)). Конечно, если кривая доходности является плоской, то она совпадает с кривой спот-ставок.

Эти результаты иллюстрируют **влияние купона** на доходность до погашения [848]. Скажем, при нормальной кривой спот-ставок доходность купонной облигации ниже, чем у бескупонной облигации равного срока погашения. Поэтому, если предпочтение бескупонной облигации перед купонной основано лишь на том, что доходность до погашения у бескупонной, вообще говоря, выше, то оно может оказаться ошибочным.

Кривая спот-ставок часто похожа на кривую доходностей. В том смысле, что если кривая спот-ставок перевернута (нормальна и т.д.), то и кривая доходностей перевернута (нормальна, соответственно). Однако это верно лишь как правило, но отнюдь не в смысле математики. Рассмотрим трехпериодную купонную облигацию, по которой каждый период выплачивается \$1 и номинал в \$100 возвращается в конце третьего периода. При спот-ставках $S(1)=0,1$, $S(2)=0,9$ и $S(3)=0,901$ в качестве доходностей до погашения будем иметь $y_1=0,1$, $y_2=0,8873$, и $y_3=0,8851$, и видно, что они не являются строго возрастающими. Однако, если конечная выплата относительно невелика, то кривые спот-ставок и доходностей имеют одинаковый вид. Именно таким является случай облигаций с высокими купонными ставками и большими сроками до погашения (см. упр. 5.5.3). Когда позже мы обратимся к привычному соглашению о форме этих кривых, то сделанная выше оговорка станет вполне понятной.

Упражнение 5.5.1. Докажите следующие утверждения:

- 1) спот-ставка мажорирует доходность до погашения, если кривая доходностей нормальна;
- 2) спот-ставка мажорирует доходность до погашения, если кривая спот-ставок нормальна и, наоборот, она меньше доходности до погашения, если кривая спот-ставок перевернута.

Упражнение 5.5.2. Придумайте пример ситуации с нормальной кривой доходностей и ненормальной кривой спот-ставок.

Упражнение 5.5.3. Предположим, что облигации, по которым строится кривая доходностей, представляют собой простую ренту, а не купонные облигации. Покажите, что тогда

- 1) кривая доходностей нормальна, если нормальна кривая спот-ставок;
- 2) в то же время нормальная кривая доходностей не гарантирует нормальность кривой спот-ставок. Проверьте это утверждение для такой кривой доходностей: $y_1=0,1$, $y_2=0,43$, $y_3=0,456$.

5.6 Форвардные ставки

Кривая доходностей содержит не только информацию о существующих сейчас процентных ставках, но также о будущих ставках, которые «ожидаются» на рынке, т.е. о **форвардных ставках**. По определению вложение \$ 1 на j периодов должно привести к сумме в $[1 + S(j)]^j$ долларов в момент j . Назовем такое инвестирование **стратегией погашения**. Но можно сначала вложить \$ 1 в облигации на i периодов, а затем доход, полученный в момент i , инвестировать на оставшиеся $j - i$ периодов при некотором $j > i$. Ясно, что в этом случае в момент j будем иметь $[1 + S(i)]^i [1 + S(i, j)]^{j-i}$ долларов, где $S(i, j)$ обозначает неизвестную нам сегодня $(j - i)$ -периодную спот-ставку момента i в будущем.

Назовем такое инвестирование **стратегией пересчета**. Если же $S(i, j)$ равна

$$f(i, j) \equiv \left\{ \frac{[1 + S(j)]^j}{[1 + S(i)]^i} \right\}^{1/(j-i)} - 1, \quad (5.2)$$

то во второй ситуации в результате будет получена та же сумма $[1 + S(j)]^j$ в долларах (по определению $f(0, j) = S(j)$). Ставка, которая рассчитывается по формуле (5.2), называется **(индуцированной) форвардной ставкой**, или, точнее говоря, **$(j - i)$ -периодной форвардной ставкой i периодов спустя**. На рис. 5.5 уточняются отрезки времени, к которым относятся спот-ставки и форвардные ставки.

В приведенном выше рассуждении мы не предполагали никакой априорной связи между индуцированной форвардной ставкой $f(i, j)$ и будущей спот-ставкой $S(i, j)$. Это является предметом исследований теорий о временной структуре, которыми вскоре займемся. Здесь же мы просто искали будущую спот-ставку, которая *в случае своей реализации* сделает эти две различные инвестиционные стратегии равноценными. Форвардные ставки, относящиеся к одному периоду, называются **мгновенными форвардными ставками** или **однопериодными форвардными ставками**.

Если кривая спот-ставок нормальна, то форвардная ставка мажорирует спот-ставки, т.е.

$$f(i, j) > S(j) > \dots > S(i). \quad (5.3)$$

Это легко вывести из формулы (5.2). Если же кривая спот-ставок пере-

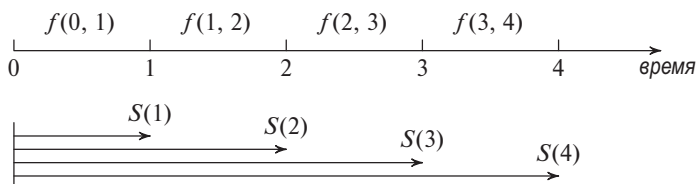


Рис. 5.5. Временные отрезки для форвардных и спот-ставок.

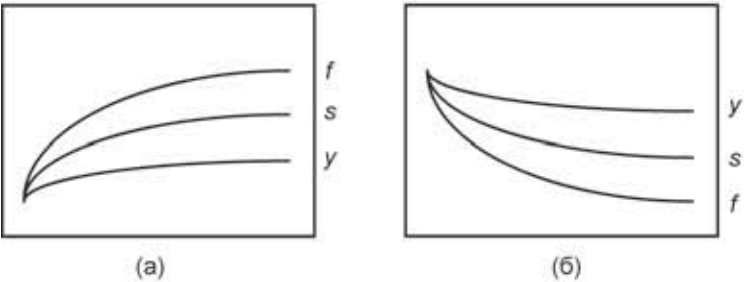


Рис. 5.6. Кривые доходностей (y), спот-ставок (s) и форвардных ставок (f). Если кривая доходностей нормальна, то она мажорируется кривой спот-ставок, которая в свою очередь мажорируется кривой форвардных ставок (если кривая спот-ставок также нормальна). С другой стороны, если кривая доходностей перевернута, то она мажорирует кривую спот-ставок, которая в свою очередь мажорирует кривую форвардных ставок (если кривая спот-ставок также перевернута). Под кривой форвардных ставок здесь понимается множество однопериодных форвардных ставок.

вернута, то форвардная ставка, наоборот, мажорируется спот-ставками:

$$f(i, j) < S(j) < \dots < S(i). \tag{5.4}$$

Рис. 5.6 иллюстрирует этот момент.

Форвардные и спот-ставки, а также кривая доходностей² могут быть получены одна из другой. Например, накопленное значение (НЗ) \$ 1 в момент n можно получить двумя способами. Так, мы можем купить n -периодную бескупонную облигацию и в результате получить $[1 + S(n)]^n$ долларов, но можем и купить однопериодную бескупонную облигацию сейчас, а затем целую серию таких облигаций по возникающим форвардным ставкам. В этом случае получится сумма $[1 + S(1)][1 + f(1, 2)] \dots [1 + f(n - 1, n)]$. Но, поскольку эти суммы равны, то

$$S(n) = \{[1 + S(1)][1 + f(1, 2)] \dots [1 + f(n - 1, n)]\}^{1/n} - 1. \tag{5.5}$$

Таким образом, форвардные ставки, а именно однопериодные форвардные ставки $f(s, s + 1)$ определяют кривую спот-ставок.

Пример 5.6.1. Предположим, что следующие 10 спот-ставок извлечены из кривой доходностей:

Период	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ставка (%)	4,0	4,2	4,3	4,5	4,7	4,85	5,0	5,25	5,4	5,5

Но это означает, что следующие 9 однопериодных форвардных ставок, начиная с момента 1 будут иметь значения:

Период	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ставка (%)	4,40	4,50	5,10	5,50	5,60	5,91	7,02	6,61	6,40

Поэтому, если \$ 1 вложить в 10-периодную бескупонную облигацию, то он превратится в сумму $(1,055)^{10} = 1,708$. С другой стороны, если этот \$ 1 сначала вложить в однопериодную бескупонную облигацию под

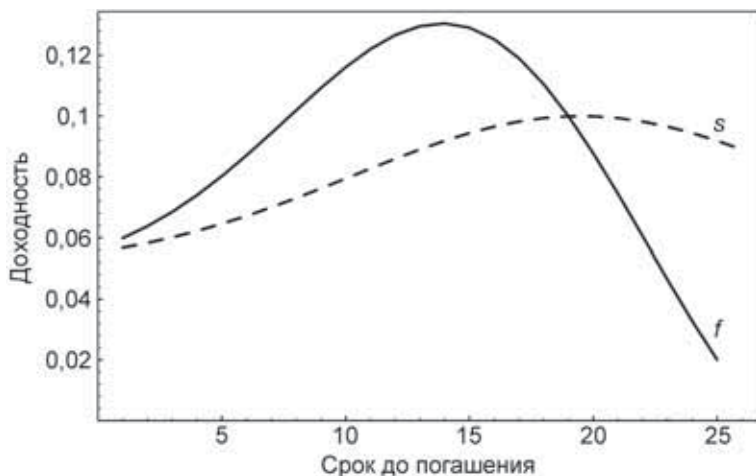


Рис. 5.7. Кривые спот-ставок (s) и форвардных ставок (f). Кривая форвардных ставок построена из однопериодных форвардных ставок.

4%, а затем реинвестировать получаемые суммы по однопериодным форвардным ставкам, то в результате получим

$$1,04 \cdot 1,044 \cdot 1,045 \cdot 1,051 \cdot 1,055 \cdot 1,056 \cdot 1,0591 \cdot 1,0702 \cdot 1,0661 \cdot 1,064 = 1,708,$$

т. е. точно такую же сумму. $\triangleleft$

Упражнение 5.6.1. Допустим, что все купонные облигации номинальны. Каковы тогда форвардные и спот-ставки, соответствующие следующим доходностям до погашения: $y_1 = 0,03$, $y_2 = 0,04$, $y_3 = 0,045$?

Упражнение 5.6.2. Объясните равенство

$$[1 + f(a, a + b + c)]^{b+c} = [1 + f(a, a + b)]^b [1 + f(a + b, a + b + c)]^c.$$

Упражнение 5.6.3. Покажите, что $f(T, T + 1) = d(T)/d(T + 1) - 1$ (обобщение этого равенства приведено в (24.2)).

Упражнение 5.6.4. Пусть в соответствии с котировкой цена 10-летней бескупонной облигации равна 60, а 9,5-летней — 62. Рассчитайте изменение в процентах для 10-летней спот-ставки и 9,5-летней форвардной ставки, если цена 10-летней облигации поднимется на 1% (считая, что все ставки являются «облигационными» = bond equivalent).

Упражнение 5.6.5. Докажите, что кривая форвардных ставок лежит выше кривой спот-ставок, если кривая спот-ставок нормальна; ниже, если кривая спот-ставок перевернута, и что они пересекаются там, где кривая спот-ставок является мгновенно плоской (т. е. принимает максимальное значение; см. рис. 5.7).

5.6.1 Предугадывание форвардных ставок

Хотя форвардные ставки могут и не реализоваться в будущем, мы можем определить любую форвардную ставку $f(n, m)$ и сейчас, покупая n -периодную бескупонную облигацию за сумму $1/[1 + S(n)]^n$ дол-

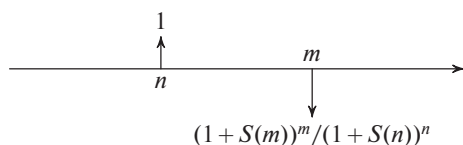


Рис. 5.8. Предугадывание форвардных ставок. Форвардная ставка $f(n, m)$ может быть определена и сегодня, если торговать бескупонными облигациями со сроками погашения n и m в нужной пропорции.

ларов и продавая m -периодную бескупонную облигацию на ту же сумму $1/[1 + S(n)]^n$. Дело здесь в следующем. В этой операции начальные капиталовложения отсутствуют, поскольку поступления и расходы, равные $1/[1 + S(n)]^n$ долларам, взаимно погашаются. В момент n поступление составит $\$1$, а в момент m расходы — $[1 + S(m)]^m/[1 + S(n)]^n$ долларов. И этот денежный поток порождает ставку $f(n, m)$, относящуюся к отрезку времени $[n, m]$ (см. рис. 5.8).

Рассмотренная выше операция порождает денежный поток финансового инструмента важного типа, называемого **форвардным контрактом**. В нашем частном случае этот форвардный контракт, заключаемый *сегодня*, дает нам возможность занять деньги в некоторый момент n в *будущем* и оплатить эту ссуду в другой момент $m > n$ по процентной ставке, равной форвардной ставке $f(n, m)$.

Если форвардные ставки можно получать, то следует сделать так, чтобы они не были отрицательными. Однако форвардные ставки, определяемые из равенства (5.2), могут оказаться отрицательными, если кривая спот-ставок резко падает вниз. Таким образом, следует предусмотреть, чтобы кривая спот-ставок не могла быть произвольной.

Упражнение 5.6.6. 1) Для стабильной экономики тот факт, что форвардная ставка может быть определена сегодня означает, что будущие спот-ставки должны равняться сегодняшним форвардным, т. е. $S(a, b) = f(a, b)$. Почему? И что такое нестабильная экономика?

2) Проверьте, что форвардные ставки, относящиеся к периодам равной длины в крепкой экономике не зависят от времени (начала периодов).

Упражнение 5.6.7. 1) Подтвердите, что 50-летняя облигация, продаваемая по номиналу ($\$1000$) с полугодовой купонной ставкой в $2,55\%$ эквивалентна 50-летней облигации, продаваемой за $\$1000$, с полугодовой купонной ставкой в $2,7\%$ и номинальным значением $\$329,1686$.

2) Объясните, почему 100-летняя облигация, продаваемая по номиналу, с полугодовой купонной ставкой в $2,7\%$ эквивалентна портфелю, состоящему из вышеупомянутой 50-летней облигации и контракта на приобретение через 50 лет 50-летней облигации по цене $\$329,1686$ с полугодовой купонной ставкой в $2,7\%$.

3) Проверьте, что облигация, которая должна быть куплена 50 лет спустя, имеет полугодовую доходность $8,209\%$. А, следовательно, мы не должны недооценивать важность последующих форвардных ставок, соответствующих ценам долгосрочных купонных облигаций, поскольку даже незначительное отличие в доходности у двух долгосрочных купонных облигаций может привести к неоправданно высоким форвардным ставкам.

5.6.2 Временная структура кредитных спредов

Статический спред можно интерпретировать как постоянный **кредитный спред** по отношению к кривой спот-ставок Казначейства, который отражает премию за риск по корпоративной облигации. Однако одинаковость кредитного спреда по отношению к разным срокам погашения противоречит общеизвестному соображению, в соответствии с которым кредитный риск должен расти вместе со сроком до погашения; ведь ясно, что корпорация может разориться за 10 лет с большей вероятностью, чем за 1 год.

По одной из теорий временной структуры кредитного спреда прямо утверждается, что цена корпоративной облигации равна цене соответствующей облигации Казначейства, умноженной на вероятность платежеспособности данной корпорации. Более того, в случае дефолта корпорация останется в этом состоянии и выплатит ноль долларов. Ну а поскольку вероятность дефолта равна единице минус вероятность платежеспособности, то

$$1 - \text{вероятность дефолта (в 1-м периоде)} = \frac{\text{цена 1-периодной бескупонной облигации корпорации}}{\text{цена 1-периодной бескупонной облигации Казначейства}}.$$

Используя это уравнение для получения вероятности дефолта корпоративной облигации с одним периодом до погашения, можно рассчитать **форвардную вероятность дефолта**, т.е. условную вероятность дефолта во втором периоде, при условии что в первом его не произошло. Ясно, что эта форвардная вероятность удовлетворяет уравнению

$$[1 - \text{вероятность дефолта (в 1-м периоде)}] \times [1 - \text{форвардная вероятность дефолта (во 2-м периоде)}] = \frac{\text{цена 2-периодной бескупонной облигации корпорации}}{\text{цена 2-периодной бескупонной облигации Казначейства}}.$$

В общем случае уравнение для форвардной вероятности имеет вид

$$[1 - \text{вероятность дефолта (за } i - 1 \text{ предшествующих периодов)}] \times [1 - \text{форвардная вероятность дефолта (в } i\text{-м периоде)}] = \text{вероятность того, что корпорация проживет } i \text{ периодов} = \frac{\text{цена } i\text{-периодной бескупонной облигации корпорации}}{\text{цена } i\text{-периодной бескупонной облигации Казначейства}}. \quad (5.6)$$

Алгоритм расчета форвардных вероятностей дефолта приведен на рис. 5.9.

Упражнение 5.6.8. Есть следующие 4 бескупонные облигации:

Тип	Срок погашения	Цена	Доходность (%)	Тип	Срок погашения	Цена	Доходность (%)
Казнач.	1 год	94	6,28	Казнач.	2 года	87	7,09
Корпор.	1 год	92	8,51	Корпор.	2 года	84	8,91

Рассчитайте для них простые и форвардные вероятности дефолта.

Алгоритм получения форвардных вероятностей дефолта:

ввод: $n, P[1..n], Q[1..n]$;
 действительные числа $f[1..n], p[1..n]$;
 $p[1] := 1 - (Q[1]/P[1])$;
 $f[1] := p[1]$;
 для $(i = 2 \text{ до } n) \{$
 $\quad f[i] := 1 - (1 - p[i-1])^{-1} \times (Q[i]/P[i])$;
 $\quad p[i] := p[i-1] \times f[i]$;
 $\}$
 вывод $f[]$;

Рис. 5.9. Алгоритм получения форвардных вероятностей дефолта. Величина $P[i]$ означает стоимость безрисковой i -периодной бескупонной облигации, $Q[i]$ — цену рисковой i -периодной бескупонной облигации, в $p[i]$ хранятся вероятности дефолта в периодах от первого до i -го включительно, а в $f[i]$ вычисляется форвардная вероятность дефолта в i -м периоде.

Упражнение 5.6.9. 1) Докажите равенство (5.6).

2) Определим **форвардный спред** $s(i)$ для i -го периода как разницу между мгновенной форвардной ставкой $f(i-1, i)$ в i -м периоде для безрисковой облигации и соответствующей мгновенной ставкой $f_c(i-1, i)$ в i -м периоде для корпоративной облигации. Покажите, что $s(i)$ примерно равняется форвардной вероятности дефолта в i -м периоде.

5.6.3 Форвардные и спот-ставки в непрерывном случае

Формула для цены при непрерывном начислении процентов имеет вид

$$P = \sum_{i=1}^n C e^{-iS(i)} + F e^{-nS(n)}.$$

В частности, рыночная дисконтирующая функция

$$d(n) = e^{-nS(n)}. \quad (5.7)$$

Для расчета спот-ставок при непрерывном начислении можно использовать бутстрепную процедуру, подобную приведенной на рис. 5.4. При этом теперь спот-ставка оказывается средним арифметическим от форвардных ставок:

$$S(n) = \frac{f(0, 1) + f(1, 2) + \dots + f(n-1, n)}{n}. \quad (5.8)$$

Выражение для форвардной ставки также является очень простым:

$$f(i, j) = \frac{j S(j) - i S(i)}{j - i}. \quad (5.9)$$

В частности, для однопериодной форвардной ставки имеем

$$f(j, j+1) = (j+1) S(j+1) - j S(j) = -\ln \frac{d(j+1)}{d(j)} \quad (5.10)$$

(сравните это выражение с приведенным в упр. 5.6.3).

Запишем равенство (5.9) несколько иначе:

$$f(i, j) = S(j) + [S(j) - S(i)] \frac{i}{j-i}.$$

Используя эту форму, можно переписать равенство (5.10) для непрерывного времени в виде

$$f(T, T + \Delta T) = S(T + \Delta T) + [S(T + \Delta T) - S(T)] \frac{T}{\Delta T}$$

и определить мгновенную форвардную ставку момента T выражением

$$f(T) \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(T, T + \Delta T) = S(T) + T \frac{\partial S}{\partial T}. \quad (5.11)$$

Отметим, что $f(T) > S(T)$ тогда и только тогда, когда $\partial S / \partial T > 0$.

Упражнение 5.6.10. Выведите формулы (5.8) и (5.9).

Упражнение 5.6.11. Найдите однопериодные форвардные ставки, используя следующую кривую спот-ставок (в %): $S(1) = 2,0$, $S(2) = 2,5$, $S(3) = 3,0$, $S(4) = 3,5$ и $S(5) = 4,0$.

Упражнение 5.6.12 1) Придумайте ситуацию, в которой изменение кривой спот-ставок оставляет все форвардные ставки нетронутыми.

2) Найдите дюрацию $-(\partial P / \partial y) / P$ при изменении формы (кривой) в 1), принимая за u краткосрочную ставку $S(1)$.

5.6.4 Форвардные и спот-ставки при начислении простых процентов

Этот подпункт будет очень кратким, поскольку основные принципы весьма похожи. Так, формула для цены имеет вид

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{1 + i S(i)} + \frac{F}{1 + n S(n)}.$$

Рыночная дисконтирующая функция

$$d(n) = (1 + n S(n))^{-1}, \quad (5.12)$$

а $(j - i)$ -периодная форвардная ставка для момента i периодов спустя

$$f(i, j) = \frac{[1 + j S(j)][1 + i S(i)]^{-1} - 1}{j - i}. \quad (5.13)$$

Чтобы указанные ставки превратить в ежегодные, их следует умножить на количество периодов в году.

Упражнение 5.6.13. Получите выражение (5.13).

5.7 Теории временной структуры

Теории временной структуры пытаются объяснить взаимоотношения между процентными ставками различных сроков погашения. Ну а поскольку кривая спот-ставок чаще всего используется для задач оценивания, то обсуждаемые ниже теории на нее и будут опираться.

5.7.1 Теория оценивания в среднем

Теория несмещенного оценивания в среднем. В соответствии с этой теорией, автором которой считается Ирвинг Фишер, форвардная ставка приравняется среднему будущих спот-ставок:

$$f(a, b) = E[S(a, b)];$$

здесь $E[\cdot]$ означает математическое ожидание [653, 799]. Обратите внимание, что в этой теории не требуется, чтобы форвардная ставка давала точный прогноз для будущей спот-ставки. В ней лишь утверждается, что эта ставка систематически не отклоняется от будущей спот-ставки. Но из теории также следует, что стратегии погашения и пересчета приводят к одному и тому же результату на момент погашения в среднем (см. упр. 5.7.2). Нормальная кривая спот-ставок, в соответствии с этой теорией своим видом обязана тому, что рынок ожидает подъема будущих спот-ставок. Формально же, поскольку $f(j, j+1) > S(j+1)$ тогда и только тогда, когда $S(j+1) > S(j)$ в силу (5.2), то отсюда следует, что

$$E[S(j, j+1)] > S(j+1) \text{ тогда и только тогда, когда } S(j+1) > S(j),$$

если теория справедлива. И наоборот, из теории вытекает, что ожидать падения спот-ставок следует тогда и только тогда, когда кривая спот-ставок перевернута [750].

Теорию несмещенного оценивания в среднем отвергали в большинстве эмпирических исследований, проведенных по крайней мере после Маклэя [627, 633, 767], за возможным исключением периода, предшествующего основанию Федеральной Резервной Системы в 1915 г. [639, 751]. Поскольку временная структура ставок $\sim 80\%$ времени имела возрастающий наклон, то из теории несмещенного оценивания вытекает, что инвесторы ожидали роста процентных ставок примерно 80% времени. Но этот вывод не внушает доверия. С другой стороны из этой же теории вытекает, что безрисковые облигации независимо от их срока погашения имеют в среднем одну и ту же доходность (см. упр. 5.7.1) [489, 568]. Но и этому заключению также не хочется верить, поскольку оно означает, что инвесторы безразличны к риску.

Упражнение 5.7.1. Докажите, что n -периодная бескупонная облигация, проданная в момент $k < n$, будет иметь доходность за период владения в точности равную $S(k)$, если форвардные ставки будут реализованы.

Упражнение 5.7.2. Покажите, что в теории несмещенного оценивания в среднем

$$(1 + S(n))^n = E(1 + S(1)) E(1 + S(1, 2)) \dots E(1 + S(n-1, n)).$$

Другие варианты теории оценивания в среднем. Существует по крайней мере четыре других подхода, основанных на использовании математического ожидания (т.е. усреднения), но все они не согласуются друг с другом по весьма деликатным причинам [232]. Существенную роль усреднение играет и в других теориях, отличающихся способом описания риска [492].

Рассмотрим сначала теорию, в которой ожидаемые доходности по всем возможным стратегиям, связанным с безрисковыми облигациями, равны для всех периодов владения. В частности,

$$[1 + S(2)]^2 = [1 + S(1)] E[1 + S(1, 2)], \quad (5.15)$$

поскольку одна и та же доходность должна возникать как при покупке двухпериодной облигации, так и при использовании стратегии пересчета с однопериодными облигациями. И это же равенство можно записать в виде $E[1 + S(1, 2)] = [1 + S(2)]^2 / [1 + S(1)]$. Представим далее себе две однопериодные стратегии. В соответствии с первой покупается двухпериодная облигация и продается после первого периода. Ожидаемая доходность в этом случае равна $E[1 + S(1, 2)]^{-1} [1 + S(2)]^2$. Вторая стратегия предписывает купить однопериодную облигацию и приводит к доходности $1 + S(1)$. Но по теории они равны: $E[1 + S(1, 2)]^{-1} [1 + S(2)]^2 = 1 + S(1)$, а это означает, что

$$\frac{[1 + S(2)]^2}{1 + S(1)} = \frac{1}{E[1 + S(1, 2)]^{-1}}.$$

Комбинируя это равенство с уравнением (5.15) получаем, что

$$E \left[\frac{1}{1 + S(1, 2)} \right] = \frac{1}{E[1 + S(1, 2)]}.$$

Однако этого не может быть, если исключить детерминированную экономику. Причина заключается в том, что по **неравенству Йенсена** $E g(X) > g(EX)$ для любой невырожденной **случайной величины** X и строго выпуклой вниз функции g (т.е. $g''(x) > 0$). В нашем конкретном случае функция $g(x) \equiv (1 + x)^{-1}$. Таким образом, этот вариант теории оценивания в среднем не выдерживает критики.

Другую версию теории оценивания в среднем называют **теорией локального оценивания в среднем** [232, 385]. В ней утверждается, что ожидаемая доходность любой облигации в любом, но одном периоде должна совпадать с существующей однопериодной спот-ставкой, т.е.

$$\frac{E[1 + S(1, n)]^{-(n-1)}}{[1 + S(n)]^{-n}} = 1 + S(1) \quad \text{при любом } n > 1. \quad (5.16)$$

Эта теория будет лежать в основе многих моделей стохастических процентных ставок, рассматриваемых ниже. Величину

$$\frac{E[1 + S(1, n)]^{-(n-1)}}{[1 + S(n)]^{-n}} - [1 + S(1)]$$

мы называем **премией за владение**. В локальной теории она полагается равной 0.

Вообще же в любой теории оценивания в среднем утверждается, что среднее некоторой разности, называемое **премией за ликвидность** или **премией за срок**, равно нулю. Например, величина $f(a, b) - E S(a, b)$ оказывается премией за ликвидность в теории несмещенного оценивания, и аналогичная разность называется премией за владение в теории локального оценивания в среднем [694]. Несовместимость между различными

версиями теории оценивания в среднем, упомянутая выше, могла бы исчезнуть, если бы премия за ликвидность предполагалась *ненулевой* [143]. Например, в **теории смещенного оценивания в среднем** говорится, что

$$f(a, b) - E S(a, b) = p(a, b),$$

где премия за ликвидность p не равна нулю [39, 653]. Мнение о том, что премия за ликвидность должна быть ненулевой, имеет достаточно много практических подтверждений. Есть также много свидетельств того, что p не постоянна и зависит от времени [43, 335].

Упражнение 5.7.3. 1) Докажите, что

$$E \left[\frac{1}{(1+S(1))(1+S(1, 2)) \dots (1+S(n-1, n))} \right] = \frac{1}{[1+S(n)]^n}$$

в теории локального оценивания в среднем.

2) Покажите, что эта теория несовместима с теорией несмещенного оценивания в среднем.

Упражнение 5.7.4. В теории оценивания в среднем доходности до погашения утверждается, что стратегия погашения приносит ту же доходность, что и стратегия пересчета с однопериодными облигациями, т. е. что

$$[1+S(n)]^n = E[(1+S(1))(1+S(1, 2)) \dots (1+S(n-1, n))], \quad n > 1.$$

Покажите, что она несовместима с теорией локального оценивания в среднем.

5.7.2 Теория предпочтения ликвидности

Теория предпочтения ликвидности исходит из того, что инвесторы требуют премию за риск, связанный с владением долгосрочными облигациями [492]. Приписывается эта теория Хиксу [445]. Для примера рассмотрим инвестора с периодом владения два. Если он выбирает стратегию погашения, а потом оказывается вынужден продать двухпериодную облигацию, поскольку ему срочно потребовались наличные, то он столкнется с **риском процентной ставки** и связанным с ним **риском цены**, поскольку цены на облигации зависят от существующих процентных ставок на рынке в момент продажи. Но в стратегии пересчета этот риск отсутствует. Как следствие, инвестор будет просить более высокую доходность для долгосрочной облигации. А это означает, что $f(a, b) > E S(a, b)$. Если же кривая спот-ставок перевернута, то

$$\begin{aligned} [1+S(i)]^{1/(1+i)} [1+E S(1, i+1)]^{i/(i+1)} < \\ < [1+S(1)]^{1/(1+i)} [1+E S(1, i+1)]^{i/(i+1)} < 1+S(i+1) < 1+S(i). \end{aligned}$$

Таким образом, $E S(1, i+1) < S(i)$. И, следовательно, рынок должен ожидать падения процентных ставок, чтобы могла наблюдаться перевернутая кривая спот-ставок.

Представляется, что теория предпочтения ликвидности хорошо согласуется с тем, что типичная кривая доходности имеет в основном

наклон вверх. Даже если и есть основания считать, что падение и подъем процентной ставки будут происходить одинаково часто, то в этой теории утверждается, что кривая доходности чаще будет иметь наклон вверх. Объясняется же это тем, что возрастающая ожидаемая процентная ставка всегда связывается с нормальной кривой спот-ставок, а убывающая ожидаемая процентная ставка может быть связана с нормальной кривой спот-ставок иногда. И только если есть основания ожидать падения процентных ставок ниже некоторого порога, то кривая спот-ставок становится перевернутой. Напомним, что теория несмещенного оценивания в среднем с этим случаем несовместима.

Упражнение 5.7.5. Покажите, что в теории предпочтения ликвидности рынок должен ожидать падения процентных ставок, чтобы кривая спот-ставок оказалась плоской.

5.7.3 Теория сегментации рынка

В теории сегментации рынка утверждается, что инвесторы склонны покупать облигации конкретного срока погашения в зависимости от закона, предпочтений или привычек. Так, например, компании по страхованию жизни предпочитают долгосрочные облигации, а коммерческие банки больше тяготеют к краткосрочным. Поэтому спот-ставки в каждом сегменте погашения определяются отдельно [653, 799].

Теория сегментации рынка тесно связана с теорией сложившихся предпочтений Калбертсона, Модильяни и Сатча [674]. В последней исходят из того, что рискованность облигации определяется сроком действия (например, инвестирования), выбираемого инвестором. Если он составляет 5 лет, то предпочтение будет отдаваться 5-летним облигациям, а от 2-летних и 7-летних будут требовать более высокой доходности, поскольку, скажем, в случае первых инвестор столкнется с риском реинвестирования, а вторых — с риском цены. Тем самым, в отличие от теории предпочтения ликвидности может случиться, что $f(a, b) < E S(a, b)$, если на рынке будет больше долгосрочных инвесторов.

5.8 Уточнение понятий дюрации и иммунизации

При первом знакомстве с понятием дюрации предполагалось, что кривая спот-ставок была плоской, а возможные изменения ставок сводились к параллельному сдвигу этой кривой. Теперь же рассмотрим понятия дюрации и иммунизации в более общих предположениях о кривых спот-ставок и их движениях.

5.8.1 Меры дюрации

Пусть значения $S(1), S(2), \dots$, представляют кривую спот-ставок, а $P(y) \equiv \sum_i C_i / [1 + S(i) + y]^i$ — цена, связанная с денежным потоком

$C_1, C_2, \dots$ Определим дюрацию выражением

$$-\frac{\partial P(y)}{\partial y} \frac{1}{P(0)} \Big|_{y=0} = \frac{\sum_i iC_i/[1+S(i)]^{i+1}}{\sum_i C_i/[1+S(i)]^i}.$$

Отметим, что здесь сначала данная кривая сдвигается параллельно себе до величин $S(1)+\Delta y, S(2)+\Delta y, \dots$, и лишь затем Δy устремляется к нулю. Как и прежде, изменение цены в процентах грубо равняется дюрации, умноженной на величину параллельного сдвига кривой спот-ставок. Но простое линейное соотношение между этой дюрацией по Маклэу (ДМ) и модифицированной дюрацией (МД) (4.4) уже не выполняется. Один из возможных путей вернуть это соотношение состоит в том, чтобы перейти к другому типу сдвига — **пропорциональному сдвигу**, определяемому равенством

$$\frac{\Delta[1+S(i)]}{1+S(i)} = \frac{\Delta[1+S(1)]}{1+S(1)}$$

при всех i [317]. Здесь Δx обозначает изменение x при изменении краткосрочной ставки на Δy . В этом случае дюрация оказывается равной величине

$$\frac{1}{1+S(1)} \left\{ \frac{\sum_i iC_i/[1+S(i)]^i}{\sum_i C_i/[1+S(i)]^i} \right\}. \quad (5.17)$$

Если же определить **вторую дюрацию по Маклэу** как число в фигурных скобках выражения (5.17), то получим

$$\text{дюрация} = \frac{\text{вторая дюрация по Маклэу}}{[1+S(1)]}.$$

Эта мера называется также **дюрацией по Бьервагу** [71, 496].

Параллельный сдвиг не отражает ситуацию на рынке. Так, например, полной корреляции долгосрочных ставок с краткосрочными практически не обнаружено; более того, эти два типа ставок часто меняются в противоположных направлениях. Кроме того, краткосрочные ставки исторически более волатильны. Практические работники иногда разбивают кривую спот-ставок на сегменты и определяют дюрацию для каждого из них отдельно [470].

Дюрацию также можно определить для наиболее типичных изменений кривой доходности. Например, можно ввести **дюрацию краткосрочного конца** (т.е. средневзвешенное время с большим весом у краткосрочных ставок) как эффективную дюрацию при следующих сдвигах кривой доходности. Доходность первого года изменяется на ± 50 базисных пунктов ($\pm 0,5\%$). А изменение доходности в зависимости от срока погашения $1 \leq i \leq 10$ меняется по закону $\pm 50 \times (11-i)/10$ базисных пунктов. Доходности же сроков погашения больше 10 лет не меняются вовсе. Если кривая доходности нормальна, то изменение на $+50$ базисных пунктов соответствует **выравниванию** кривой доходности, и в то же время изменение на -50 базисных пунктов соответствует **увеличению наклона** кривой

доходности. Аналогично может быть определена и **дюрация долгосрочного конца**. Эти оба привычных типа сдвига относятся к непропорциональным сдвигам (см. упр. 5.8.3), с ними связаны и **дюрации ключевых ставок** по Хо (см. п. 27.5).

Хотя у понятия дюрации и существует много различных вариантов, но всех их объединяет то, что временная структура может меняться лишь каким-то фиксированным образом. Несмотря на имеющиеся теоретические ограничения, кажется, что дюрация предоставляет такую же хорошую оценку для волатильности цены, как и другие, более сложные меры этого качества [348]. Более того, иммунизация вместе с ДМ, все еще широко используемой [91], оказываются такими же эффективными, как и альтернативные меры дюрации [424]. Одно из возможных объяснений этого состоит в том, что хотя долгосрочные и краткосрочные ставки, вообще говоря, изменяются по-разному как по величине, так и по направлению, но параллельные сдвиги кривой спот-ставок ответственны примерно за более чем 80 % всех изменений в процентных ставках [607].

Упражнение 5.8.1. Рассмотрим непрерывное начисление процентов. Покажите, что если доходности до погашения любых облигаций с фиксированной ставкой изменятся на одну и ту же величину, то

- 1) кривая спот-ставок должна быть плоской;
- 2) сдвиг кривой спот-ставок должен быть параллельным (указание: доходности бескупонных облигаций различных сроков погашения изменяются на одну и ту же величину.)

Упражнение 5.8.2. Проверьте правильность выражения (5.17).

Упражнение 5.8.3. Из экспериментальных данных известно, что долгосрочные ставки изменяются меньше, чем краткосрочные. Чтобы использовать этот факт в определении дюрации, можно ввести **непропорциональные сдвиги** в виде

$$\frac{\Delta[1 + S(t)]}{1 + S(t)} = K^{t-1} \frac{\Delta[1 + S(1)]}{1 + S(1)} \quad \text{при некотором } K < 1.$$

Покажите, что при таком непропорциональном сдвиге чувствительность цены t -периодной бескупонной облигации удовлетворяет равенству

$$\frac{\Delta P}{P} = -tK^{t-1} \frac{\Delta[1 + S(1)]}{1 + S(1)}.$$

5.8.2 Иммунизация

Случай отсутствия изменений в ставках. Напомним, что в случае отсутствия изменений процентных ставок и в предположении, что кривая спот-ставок является плоской, для достижения иммунизации достаточно приравнять приведенные значения (ПЗ) будущих обязательств и активов (см. упр. 4.2.7). Этот вывод продолжает оставаться в силе даже если кривая спот-ставок не является плоской, до тех пор пока будущие спот-ставки равны форвардным ставкам. Дадим этому краткое объясне-

ние. Пусть L означает величину обязательства (в денежных единицах), относящегося к моменту m . Тогда

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{[1+S(i)]^i} + \frac{F}{[1+S(n)]^n} = \frac{L}{[1+S(m)]^m}.$$

Отсюда вытекает, что ПЗ этого обязательства на любой момент $k < m$ равно

$$\frac{L}{[1+S(k, m)]^{m-k}} = P(1+S(k))^k,$$

если еще учесть равенство (5.2) и предположение, что $f(a, b) = S(a, b)$. С другой стороны ПЗ оставшихся выплат по облигации и реинвестирование купонных выплат на тот же момент дает величину

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k C[1+S(i, k)]^{k-i} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C}{[1+S(k, i+k)]^i} + \frac{F}{[1+S(k, n)]^{n-k}} = \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{C[1+S(k)]^k}{[1+S(i)]^i} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C[1+S(k)]^k}{[1+S(i+k)]^{i+k}} + \frac{F[1+S(k)]^k}{[1+S(n)]^n} = P[1+S(k)]^k, \end{aligned}$$

которая в точности равняется ПЗ обязательства. Следовательно, при отсутствии непредсказуемых изменений в процентных ставках приравнение дюраций и подгонка для иммунизации не требуются.

Случай некоторых изменений в ставках. Напомним, что будущее обязательство можно иммунизировать с помощью портфеля облигаций, имеющего те же приведенное значение (ПЗ) и дюрацию по Маклэю (ДМ) в случае, когда кривая спот-ставок является плоской (см. п. 4.2.2). Если же допускаются только параллельные сдвиги, то это вывод может быть обобщен на случай произвольной кривой спот-ставок. Приведем соответствующее объяснение в ситуации непрерывного начисления процентов. Будем считать, что обязательство L относится к моменту времени T в будущем. Кроме того, не снижая общности предположим, что портфель состоит только из безкупонных облигаций со сроками погашения t_1 и t_2 , а $t_1 < T < t_2$. Пусть также имеются n_i облигаций, погашаемых в момент t_i , $i = 1, 2$, и $L = 1$ для простоты изложения. Тогда ПЗ портфеля можно записать в виде

$$V \equiv n_1 e^{-S(t_1)t_1} + n_2 e^{-S(t_2)t_2} = e^{-S(T)T},$$

а его ДМ равна

$$\frac{n_1 t_1 e^{-S(t_1)t_1} + n_2 t_2 e^{-S(t_2)t_2}}{V} = T.$$

Из этих двух уравнений вытекает, что

$$n_1 e^{-S(t_1)t_1} = \frac{V(t_2 - T)}{t_2 - t_1}, \quad n_2 e^{-S(t_2)t_2} = \frac{V(t_1 - T)}{t_1 - t_2}.$$

Сдвинем далее всю кривую спот-ставок равномерно на $\delta \neq 0$. В этом

случае ПЗ портфеля будет иметь вид

$$n_1 e^{-[S(t_1)+\delta]t_1} + n_2 e^{-[S(t_2)+\delta]t_2} = \\ = e^{-\delta t_1} \frac{V(t_2 - T)}{t_2 - t_1} + e^{-\delta t_2} \frac{V(t_1 - T)}{t_1 - t_2} = \frac{V}{t_2 - t_1} [e^{-\delta t_1}(t_2 - T) + e^{-\delta t_2}(T - t_1)],$$

а ПЗ обязательства равно $e^{-[S(T)+\delta]T} = e^{-\delta T} V$. Поскольку

$$\frac{V}{t_2 - t_1} [e^{-\delta t_1}(t_2 - T) + e^{-\delta t_2}(T - t_1)] > e^{-\delta T} V,$$

то иммунизация проведена. Иллюстрацией к объяснению служит рис. 5.10.

Как ни удивительно, но мы только что показали, что

1) положение обязательства, равное дюрации при параллельном сдвиге кривой спот-ставок приводит к бесплатному обеду, поскольку любое изменение процентной ставки влечет за собой прибыль и

2) ни один инвестор не станет приобретать T -периодную облигацию, поскольку портфель из t_1 - и t_2 -периодных облигаций будет иметь более высокую доходность при любом сильном изменении процентных ставок (в действительности они приобретут облигации только минимального или максимального срока погашения). Какими бы неправдоподобными не казались приведенные утверждения, но проведенное рассуждение представляется безупречным. Попытаться объяснить противоречие можно, заметив, что изменения ставки предполагались *мгновенными*. Проблема исчезает, когда изменения цен происходят *после* изменений ставок [207, 848]³.

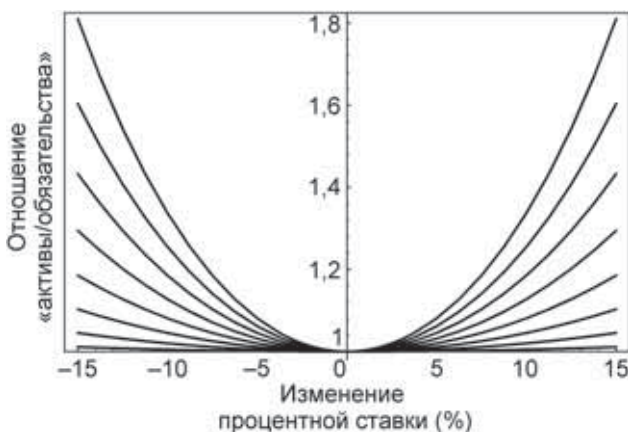


Рис. 5.10. Отношение «активы/обязательства» при параллельных сдвигах кривой спот-ставок. Каждая из кривых представляет собой результат использования портфеля из двух бескупонных облигаций со сроками t_1 , t_2 для иммунизации 10-летнего обязательства. Минимальное значение у всех кривых одинаково, равно 1 и соответствует отсутствию сдвигов. Изменения процентной ставки увеличивают стоимость портфеля по сравнению с обязательством, причем эффект увеличения проявляется тем больше, чем больше сроки t_1 и t_2 удалены от 10 лет.

Портфель-штанга часто возникает при максимизации выпуклости портфеля, как и утверждалось в п. 4.3. Однако большая выпуклость может быть и ненужной, если дело касается иммунизации. Напомним, что выпуклость предполагает параллельный сдвиг во временной структуре. Когда же это условие нарушается, как это часто случается на практике, то чем более разбросанным является денежный поток, тем более портфель оказывается подвержен **рisku формы** (или **рisku выкручивания**) [206, 246].

Упражнение 5.8.4. Используйте приведенное выше обоснование с двумя облигациями для доказательства того, что утверждения упр. 4.2.8 остаются в силе и в рассмотренной здесь более общей ситуации.

Дополнительная литература

За консультацией по временной структуре кредитного спреда можно обратиться к [325, 514, 583, 629]. Элементы эмпирических исследований по теории оценивания в среднем можно найти в [144, 147]. Называемая также **дюрацией Фишера—Вейля** [424] вторая дюрация по Маклэю была предложена в [350]. За альтернативными подходами к понятию иммунизации обращайтесь к [239, 245, 267, 318], а если вас интересует иммунизация при стохастических процентных ставках, то к [367].

Примечания

1. Термины **погашение (maturity)** и **срок (term)** обычно используются вместо термина «срок до погашения» (term to maturity).

2. Купонные ставки купонных облигаций, из которых получается кривая доходности, следует уточнять.

3. Мы вернемся к рассмотрению этого вопроса в упр. 14.4.4 и 24.6.8.

ЧАСТЬ II

ОПЦИОНЫ И ДРУГИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЦЕННЫЕ БУМАГИ

- 6 Основные факты теории вероятностей и математической статистики**
- 7 Основы опционов**
- 8 Арбитраж при оценке стоимости опциона**
- 9 Модели оценки стоимости опционов**
- 10 Анализ чувствительности опционов**
- 11 Теория опционов. Продолжение**
- 12 Форварды, фьючерсы, опционы на фьючерсы, свопы**

Глава 6 отмечает переход к стохастическим моделям и дает представление об основных понятиях статистики. Остальные шесть глав (7—12) посвящены в основном опционам и ряду других производных ценных бумаг. Так, в седьмой главе вводятся опционы и обсуждаются основные стратегии их применения. Глава 8 знакомит читателя с арбитражной логикой, в ней устанавливаются общие соотношения по оценке стоимости. Глава 9 является ключевой. В ней оценка стоимости опциона рассматривается в дискретной и биномиальной модели. Знаменитая формула Блэка—Шоулса выводится именно здесь и здесь же приводятся алгоритмы для оценки стоимости основных опционов. Меры чувствительности для опционов охарактеризованы в главе 10. Разнообразные применения и типы опционов представлены в главе 11. Наконец, такие производные ценные бумаги, как форварды и фьючерсы, рассмотрены в главе 12.

6 Основные факты теории вероятностей и математической статистики

Есть три вида лжи: простая ложь, гнусная ложь и статистика*).

Бенжамин Дизраэли (1804—1881)

Статистика жизненно важна для любой научной дисциплины, которая сталкивается с задачей сбора данных и с проблемой получения на их основе каких-то выводов. В этой элементарной по характеру изложения материала главе собраны основные понятия и результаты теории вероятностей и математической статистики, которые будут использованы или обобщены позднее.

6.1 Основные понятия

Начнем с определений, которые призваны подчеркнуть многообразие и степень изменчивости случайных величин (с. в.), а также самого понятия с. в. Но все эти определения вводят характеристики с. в., зависящие от ее распределения, которое чаще всего является либо дискретным, либо непрерывным. Так что же это такое: распределение случайной величины?

В одномерном случае распределение с. в. X называется дискретным, если ее возможными значениями являются элементы конечного или счетного множества чисел $D = \{x_i, 1 \leq i \leq n \leq \infty\}$. С другой стороны, если мы хотим подчеркнуть, что 1) данная с. в. может принять любое из своих возможных значений, и 2) никакие другие у нее невозможны, то используем для этого выражение: с. в. все свои возможные значения принимает с вероятностью единица. Таким образом, в дискретном случае это означает, что сумма вероятностей, с которыми с. в. X принимает свои значения, равна единице: $\sum_{i=1}^n P\{X=x_i\} = 1$. Тем самым «вся» единичная масса вероятности как бы распределяется между указанными значениями**). Конечно, в соответствии с тем, насколько правдоподобны эти значения. Иными словами, распределение с. в. X дискретно, если оно характеризуется последовательностью пар (x_i, p_i) , $1 \leq i \leq n \leq \infty$, ее возможных значений и соответствующих им вероятностей $p_i = P\{X=x_i\}$.

*) Данный афоризм, принадлежащий известному остроумцу и «по совместительству» премьер-министру Ее Величества королевы английской, ни в коей мере нельзя отнести к фрагментам теории математической статистики, излагаемым в данной главе. Дело в том, что создание строгой математической теории анализа статистических данных относится к началу двадцатого века, когда автора афоризма уже не было в живых. Однако помнить об этом афоризме при построении статистических выводов полезно. Однако не менее полезно помнить афоризм, принадлежащий выдающемуся статистику Ф. Мостеллеру: «Лгать на базе статистики, конечно, легко. Но еще легче лгать без статистики». — Прим. ред.

**) Отсюда и название «распределение с. в.» (или «распределение вероятностей с. в.»). — Прим. перев.

Соответственно, в непрерывном случае для задания распределения с.в. X также нужно указать область D возможных значений с.в. и на ней «разбросать всю вероятностную массу 1» так, чтобы подчеркнуть, какие значения принимаются с.в. с большей вероятностью, а какие с меньшей. Обычно это делается с помощью плотности $p(x)$ с.в. X , т.е. некоторой неотрицательной функции на множестве D , для которой $\int_D p(x) dx = 1$. Именно она позволяет судить, насколько более вероятно с.в. принять значение из интервала (a_1, b_1) , чем из интервала (a_2, b_2) , поскольку вероятность попасть в первый равна $\int_{a_1}^{b_1} p(x) dx$, а во второй — $\int_{a_2}^{b_2} p(x) dx$. Хотя, конечно, вероятность принять ей какое-то конкретное значение из множества D равна нулю при любом таком значении.

В изложенном подходе к понятию распределения с.в., казалось бы, опускается то, с чего следует начать: с ответа на вопрос, а что же такое с.в.? На самом же деле фактически такой ответ дан: случайная величина задана, если задано ее распределение.

Основными характеристиками с.в. являются математическое ожидание и дисперсия. **Математическим ожиданием** или **средним значением (средним)** μ с.в. X называется число (если оно конечно)

$$EX = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i p_i, & \text{если распределение с.в. } X \text{ дискретно,} \\ \int_D x p(x) dx, & \text{если распределение с.в. } X \text{ непрерывно.} \end{cases}$$

Дисперсией же σ_X^2 с.в. X называется величина

$$DX = E(X - EX)^2.$$

И если среднее EX есть координата «центра тяжести» распределения единичной массы на прямой, то дисперсия DX характеризует меру «разброса» или «рассеивания» этого распределения относительно его центра. Другими часто используемыми характеристиками с.в. являются: **стандартное отклонение** $\sigma = \sigma_X$ с.в. X — это корень квадратный из дисперсии, **коэффициент асимметрии** с.в. X — это $E(X - \mu)^3 / \sigma^3$, а также **коэффициент эксцесса** с.в. X , который определяется отношением $E(X - \mu)^4 / \sigma^4$.

Выборочное среднее случайной выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ есть

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Мерой разброса случайной выборки служит ее **выборочная дисперсия**

$$\overline{\sigma^2} \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (6.1)$$

Корень из нее называется **выборочным стандартным отклонением**:

$$\overline{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (6.2)$$

Оценка параметра θ называется **несмещенной**, если ее среднее значение равно θ . Выборочная дисперсия (6.1) является несмещенной оценкой для σ_X^2 , если все с.в. X_i выборки имеют одно и то же распределение, совпадающее с распределением с.в. X . Хотя выборочное стандартное отклонение и не является несмещенной оценкой стандартного отклонения, но оно сходится к несмещенному варианту*).

Ковариация двух с.в. X и Y определяется равенством

$$\text{Cov}(X, Y) \equiv E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y),$$

где μ_X и μ_Y являются средними для X и Y соответственно. Если X и Y принимают свои значения одновременно и «в основном» с одной стороны (от своих математических ожиданий), то их ковариация будет положительной, если же с разной, то отрицательной. Назовем X и Y **некоррелированными** с.в., если $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Для вычисления ковариации используется формула

$$\text{Cov}(X, Y) = EXY - \mu_X\mu_Y. \quad (6.3)$$

Корреляция или **коэффициент корреляции** между с.в. X и Y определяется равенством

$$\rho_{X,Y} \equiv \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \quad (6.4)$$

конечно, если обе с.в. имеют ненулевые дисперсии. Дисперсия взвешенной суммы с.в. записывается в виде

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (6.5)$$

Если X_i некоррелированы, то это выражение превращается в более простое: сумму дисперсий $\sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i$ слагаемых $a_i X_i$.

Еще одно важное понятие — это **условное математическое ожидание** $E(X|I)$ с.в. X при условии так называемого **информационного множества** I . Последнее можно воспринимать как совокупность событий A , представляющих, скажем, известную информацию о ценах некоторого актива до определенного момента времени. Тогда условное математическое ожидание $E(X|I)$ можно будет отождествлять с соответствующей совокупностью условных математических ожиданий $E(X|A)$ с.в. X относительно этих событий.

Уточнить сказанное нетрудно в случае, когда множество I определяется некоторой другой с.в. Y , и когда будет нетрудно показать, что наше условное среднее $E(X|I)$ можно воспринимать как некоторую конкретную функцию $f(Y)$ от с.в. Y .

Будем считать для простоты, что эта с.в. не только дискретна, т.е. принимает значения y_j с вероятностями q_j , $1 \leq j \leq m$, но и является «более грубой», чем X . Т.е. каждому возможному значению y_j

*) Отметим, что несмещенная оценка для σ существует далеко не всегда. С другой стороны, если $\sigma < \infty$, то смещение оценки $\bar{\sigma}$ относительно σ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\bar{\sigma}$ — асимптотически несмещенная оценка. — Прим. ред.

с.в. Y соответствует несколько возможных значений x_{ij} с.в. X , причем $\sum_i P\{X=x_{ij}\} = P\{Y=y_j\} = q_j$ при любом j . Иными словами, рассмотрим один из основных вариантов определения условного математического ожидания $E(X|I)$, которое в этом случае может обозначаться и как $E(X|Y)$. В этом случае $E(X|Y)$ считается с.в., принимающей столько же значений и с теми же вероятностями, с которыми принимает свои значения с.в. Y , но только сами эти значения другие и определяются равенством

$$E(X|Y=y_j) = \frac{\sum_i x_{ij} P\{X=x_{ij}\}}{P\{Y=y_j\}}.$$

Кстати, вышеуказанная совокупность событий A в данном случае порождается m событиями ($Y=y_j$), т.е. состоит из их всевозможных объединений в количестве 2^m .

Чрезвычайно полезная формула **полного математического ожидания** имеет следующий вид:

$$EX = E(E(X|I)).$$

Более общее выражение возникает, если множество I_2 содержит не меньше информации, чем I_1 (т.е. определяющая I_1 с.в. Y_1 является более грубой, чем определяющая множество I_2 с.в. Y_2), тогда имеет место равенство

$$E(X|I_1) = E(E(X|I_2)|I_1), \quad (6.6)$$

которое называется «телескопическим свойством» условных математических ожиданий. Типичным примером будет случай, когда I_1 содержит информацию о ценах до момента t_1 , а I_2 аналогичную информацию до более позднего момента t_2 .

Упражнение 6.1.1. Докажите равенство (6.3), используя хорошо известное тождество $E \sum_i a_i X_i = \sum_i a_i EX_i$.

Упражнение 6.1.2. Докажите, что если $E(X|Y=y) = EX$ при всех возможных значениях y , то X и Y являются некоррелированными с.в. (Указание: использовать формулу полного математического ожидания.)

6.1.1 Многомерное обобщение

Все вышеуказанные понятия нетрудно обобщить на случай векторной случайной величины $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ (здесь и далее A^T означает матрицу, транспонированную по отношению к матрице A). **Среднее значение** с.в. X и ее **матрица ковариации** размерности $n \times n$ определяются, соответственно, соотношениями

$$\begin{aligned} EX &\equiv (EX_1, EX_2, \dots, EX_n)^T, \\ \text{Cov } X &\equiv (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}. \end{aligned}$$

По аналогии с равенством (6.3) $\text{Cov } X = E(XX^T) - (EX)(EX)^T$. **Корреляционная же матрица** вектора X может быть записана в виде $(\rho_{X_i, X_j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Пусть далее $X_1, X_2, \dots, X_N$ — выборка, состоящая из N наблюдений за с.в. X . Тогда **векторное выборочное среднее** и **выборочная матрица ковариации** могут быть записаны в виде

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad \overline{\sigma^2} \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^\top.$$

Выборочная матрица ковариации является несмещенной оценкой матрицы ковариации.

Упражнение 6.1.3. Докажите, что

$$E(AX) = A EX, \quad \text{Cov}(AX) = A(\text{Cov } X)A^\top.$$

6.1.2 Нормальное распределение

Говорят, что с.в. X имеет **нормальное распределение** с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , если ее плотность распределения имеет вид $\frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Этот факт будем также записывать в виде $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где символ $\sim$ означает равенство распределений двух с.в. У **стандартного нормального распределения** математическое ожидание равно нулю, дисперсия единице, а функция распределения

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx$$

(**функция распределения** произвольной с.в. X определяется равенством $F(z) \equiv P\{X \leq z\}$ для любого действительного числа z). Нормальное распределение своим появлением обязано де Муавру (1667—1754).

Существуют весьма точные приближенные выражения для функции $\Phi(z)$ [5, 423]. Например,

$$\Phi(z) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5)$$

при $z \geq 0$, где $x \equiv \frac{1}{1 + 0,2316419z}$ и

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,319381530, & a_2 &= -0,356563782, & a_3 &= 1,781477937, \\ a_4 &= -1,821255978, & a_5 &= 1,330274429. \end{aligned}$$

Если же $z \leq 0$, то следует использовать равенство $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Центральными моментами нормальной с.в. X являются

$$E(X - \mu)^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n}, \quad E(X - \mu)^{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Кроме того, коэффициент асимметрии и эксцесса для нее равны нулю и трем, соответственно. **Производящая функция моментов** произвольной с.в. X определяется равенством $\theta_X(t) \equiv Ee^{tX}$. Для с.в. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ она имеет следующий вид

$$\theta_X(t) = \exp \left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right). \quad (6.8)$$

Если случайные величины $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ независимы (или, что для нормальных величин эквивалентно, некоррелированы), то с.в. $\sum_i X_i$ имеет нормальное распределение со средним $\sum_i \mu_i$ и дисперсией $\sum_i \sigma_i^2$. Если же $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ произвольны, то с.в. $\sum_{i=1}^n t_i X_i$ нормально распределена со средним $\sum_{i=1}^n t_i \mu_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j \text{Cov}(X_i, X_j)$ [343]. Совместное распределение нормально распределенных с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеет следующую производящую функцию моментов:

$$E \exp \left(\sum_i t_i X_i \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n t_i \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j \text{Cov}(X_i, X_j) \right).$$

О таких величинах $X_1, \dots, X_n$ говорят, что они имеют **многомерное нормальное распределение**. Далее, если вектор $X \equiv (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ и матрицей ковариации $C \equiv (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, то пишут $X \sim N(\mu, C)$. Для плотности распределения такого вектора X имеет место выражение

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mu_i) M_{ij} (X_j - \mu_j) \right\},$$

где $\det(C)$ означает определитель матрицы C , а M_{ij} — элемент матрицы $M = C^{-1}$ [23].

В частности, если вектор $X = (X_1, X_2)$ имеет **двумерное нормальное распределение** с коэффициентом корреляции ρ , то его плотность распределения может быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Сумма $\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2$ нормально распределенных с.в. имеет нормальное распределение со средним $\omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2$ и дисперсией

$$\omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2. \quad (6.9)$$

Простые и точные приближенные выражения и для функции распределения двумерного нормального распределения можно найти в [470].

Если величины $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ независимы, то с.в. $Y \equiv \sum_{i=1}^n X_i^2 / \sigma^2$ имеет **нецентральное хи-квадрат распределение** с n степенями свободы и **параметром нецентральности** $\theta \equiv \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) / \sigma^2$, что обозначается соотношением $Y \sim \chi^2(n, \theta)$. Математическое ожидание и дисперсия этой с.в. равны $n + \theta$ и $2n + 4\theta$ соответственно [463]. Если все μ_i равны нулю, то с.в. Y имеет **центральное хи-квадрат распределение**.

Центральная предельная теорема, которая принадлежит Лапласу (1749—1827), является краеугольным камнем теории вероятностей и математической статистики. Она утверждает, что если с. в. X_i независимы со средними μ и дисперсиями σ^2 , то имеет место сходимость по распределению

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1).$$

Условия ее справедливости весьма просты [343].

Упражнение 6.1.4. Покажите, что моменты из соотношений (6.7) можно записать в виде

$$E(X - \mu)^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \geq 1 \text{ нечетно,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \sigma^n, & \text{если } n \geq 2 \text{ четно.} \end{cases}$$

6.1.3 Моделирование одномерного и двумерного нормальных распределений

Пусть с. в. X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, т. е. вероятность $P\{X \leq x\} = x$ при всех $0 \leq x \leq 1$. Будем моделировать пары x_1, x_2 независимых наблюдений величины X до тех пор, пока не окажется выполнено неравенство $\omega \equiv (2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 < 1$. Тогда величины $c(2x_1 - 1)$ и $c(2x_2 - 1)$ при $c \equiv \sqrt{-2(\ln \omega)/\omega}$ окажутся независимыми и стандартно нормально распределенными. Такой подход получил название **метод просеяния** [727].

Пары же нормально распределенных с. в. с коэффициентом корреляции ρ можно получить следующим образом. Пусть X_1 и X_2 независимые стандартно нормально распределенные с. в. Тогда на роль искомой пары можно взять с. в.

$$U \equiv aX_1, \quad V \equiv \rho U + \sqrt{1 - \rho^2} aX_2,$$

поскольку $DU = DV = a^2$, $\text{Cov}(U, V) = \rho a^2$.

6.1.4 Логнормальное распределение

Говорят, что с. в. Y имеет **логнормальное распределение**, если величина $\ln Y$ подчинена нормальному распределению (см. рис. 6.1). Это распределение предложил Башелье [147]*).

Если X распределена нормально со средним μ и дисперсией σ^2 , то плотность логнормально распределенной с. в. $Y = e^X$ имеет вид

$$f(y) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y - \mu)^2 / 2\sigma^2}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y \leq 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

* Логнормальное распределение появилось задолго до Башелье в работах Гальтона и Мак-алистера, а именно в 1879 г. — Прим. ред.

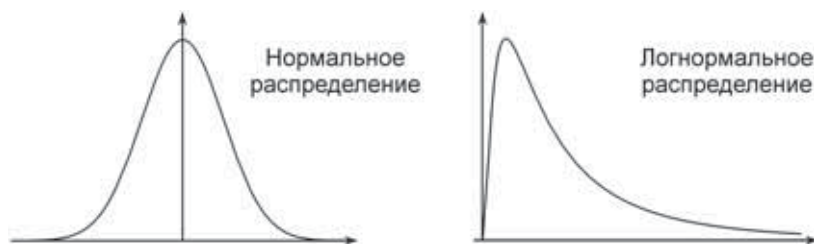


Рис. 6.1. Плотности нормального и логнормального распределений. Если с. в. X имеет стандартное нормальное распределение, то с. в. e^X распределена логнормально.

Соответственно, ее среднее и дисперсия равны

$$\mu_Y = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad \sigma_Y^2 = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1). \quad (6.11)$$

Более того,

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \ln y) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right). \quad (6.12)$$

Момент n -го порядка для с. в., имеющей плотность распределения $f(x)$, определяется выражением $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$. У нашей с. в. Y этот момент равен $e^{n\mu + n^2\sigma^2/2}$. Вариант центральной предельной теоремы гласит, что произведение n независимых и положительных с. в. сближается с логнормальным распределением при стремлении n к бесконечности.

Упражнение 6.1.5. Пусть Y распределена логнормально со средним μ и дисперсией σ^2 . Покажите, что тогда $\ln Y$ имеет среднее $\ln(\mu/\sqrt{1 + (\sigma/\mu)^2})$ и дисперсию $\ln(1 + (\sigma/\mu)^2)$.

Упражнение 6.1.6. Пусть X имеет такое логнормальное распределение, что у $\ln X$ среднее равно μ и дисперсия — σ^2 . Покажите, что тогда при любом a имеет место тождество

$$\int_a^{\infty} xf(x) dx = e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma} + \sigma\right).$$

6.2 Регрессия

Предположим, что у нас есть некоторые данные (результаты наблюдений) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Их можно разместить на плоскости некоторой прямоугольной системы координат в виде так называемой **диаграммы рассеяния**, такой, как на рис. 2. Если относительно диаграммы рассеяния предполагается, что между переменными имеется линейная связь, то для ее описания можно использовать линейную модель $y = \beta_0 + \beta_1 x$. При соответствующем выборе коэффициентов этой линейной модели приходят к прямой, которая называется **линейной регрессией**¹. Если оценивать параметры β_0 и β_1 по **методу наименьших**

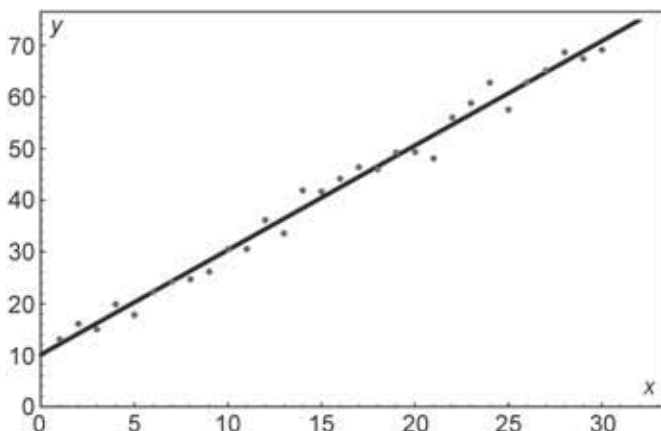


Рис. 6.2. Линейная регрессия. Линейная функция $y = 10,1402 + 2,0238x$ является приближением имеющихся данных по методу наименьших квадратов.

квадратов, то следует определить такие $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$, которые минимизируют выражение

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2. \quad (6.13)$$

Соответствующая прямая называется линейной регрессией y по x [632]. Хорошо известно, что

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{n \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i\right) \left(\sum_i y_i\right)}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \quad (6.14)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_i y_i - \hat{\beta}_1 \sum_i x_i}{n} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}. \quad (6.15)$$

Найденная прямая $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ называется **оцененной линией регрессии** или **прямой наименьших квадратов**. Ее i -е **оцененное значение** равно $\hat{y}_i \equiv \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$. Отметим, что точка $(\bar{x}, \bar{y})$ находится на оцененной линии регрессии в силу уравнения (6.15).

При анализе регрессионных моделей широко используется ряд статистик*). Так, **остаточная сумма квадратов** ($SSE = \text{Error Sum of Squares}$) представляет собой сумму квадратов отклонений от оцененной линии регрессии:

$$SSE \equiv \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

Поскольку SSE показывает, в какой степени отклонения по оси y не объясняются линейной регрессионной моделью, то эта статистика называется также **остаточной суммой квадратов** или **необъясненной измен-**

*) Термин «статистика» многозначен. Здесь и далее под статистикой понимается конкретная функция от данных. — Прим. ред.

чивостью. Полная сумма квадратов ($SST = \text{Total Sum of Squares}$) определяется выражением $SST \equiv \sum_i (y_i - \bar{y})^2$, которое измеряет общую величину отклонений во всех наблюдаемых значениях y . Эта величина известна также под названием **полная вариация**. По критерию наименьших квадратов $SSE \leq SST$. Отношение SSE/SST определяет долю полной вариации, которая остается необъясненной с помощью линейной регрессионной модели. **Коэффициент детерминации** вводится выражением

$$R^2 \equiv 1 - \frac{SSE}{SST}; \quad (6.16)$$

он представляет собой долю полной вариации, которая может быть объяснена с помощью линейной регрессионной модели. Большая величина R^2 обычно означает успех линейной регрессионной модели при объяснении вариации переменной y . Наконец, **сумма квадратов регрессии** ($SSR = \text{Regression Sum of Squares}$) определяется выражением $SSR \equiv \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$. Хорошо известно, что

$$SSR = SST - SSE = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (6.17)$$

Таким образом, $R^2 = SSR/SST$. Поскольку SSR принимает большие значения, если приближенная прямая регрессии хорошо представляет данные (как и тогда, когда SSE мало), то ее интерпретируют как долю полной вариации, которая объясняется линейной регрессионной моделью. По этой же причине иногда ее называют **объясненной вариацией**.

Линейная регрессия более общего вида, называемая **множественной регрессией**, приближает имеющиеся данные с помощью выражения

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k.$$

Равенство (6.17) выполняется и для множественной регрессии [422, 523]. Нелинейная регрессия для аппроксимации данных часто использует со-

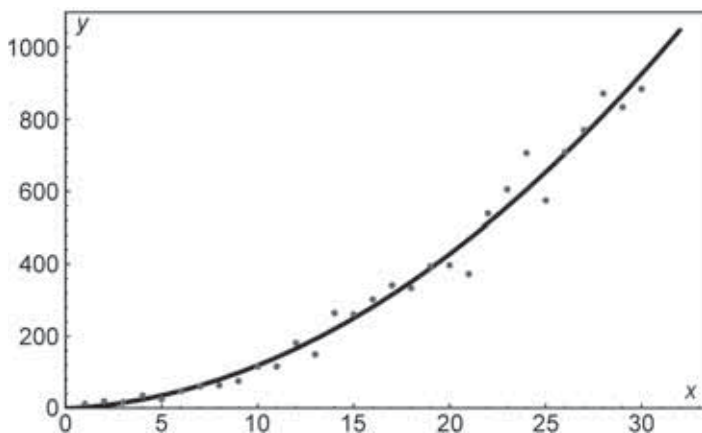


Рис. 6.3. Нелинейная регрессия. Имеющиеся данные приближает по методу наименьших квадратов квадратичная функция $y = -1,28204 + 2,52945x + 0,945518x^2$.

ответствующие нелинейные функции. Так, в **полиномиальной регрессии** эту роль исполняет полином

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k.$$

На рис. 6.3 представлен случай квадратической регрессии.

Упражнение 6.2.1. Покажите, что $SSE = \sum_i y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_i y_i - \hat{\beta}_1 \sum_i x_i y_i$.

6.3 Корреляция

При n независимых наблюдениях $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ над двумерной с. в. (X, Y) **выборочный коэффициент корреляции Пирсона** r определяется выражением

$$r \equiv \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (6.18)$$

Выборочный коэффициент корреляции является точечной оценкой для $\rho_{X,Y}$ и традиционно используется, чтобы оценить величину корреляции. Можно показать, что $-1 \leq r \leq 1$. В частности, $r = 1$, если данные наблюдений лежат на прямой с положительным наклоном, и $r = -1$, если они лежат на прямой с отрицательным наклоном. В определенном смысле величина r измеряет линейную связь между переменными.

В регрессионном анализе одна переменная считается зависимой, другая независимой и целью является предсказание значений зависимой переменной. В корреляционном анализе, наоборот, изучается то, как сильно связаны между собой две или более переменных и все переменные считаются равноправными; при этом не играет роли, какую из двух переменных назвать x , а какую y .

Символ r использован нами намеренно. Если возвести r в квадрат, то получим в точности коэффициент определенности R^2 . В самом деле, в силу равенств (6.14) и (6.17)

$$r^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = \hat{\beta}_1 \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{SSR}{SST} = R^2. \quad (6.19)$$

Интересно отметить, что из формулы (6.16) вытекает равенство $SSE = SST \times (1 - r^2)$.

Пример 6.3.1. На рис. 6.4 представлен процесс изменения цен акций четырех компаний — Intel, Silicon Graphics Inc. (SGI), VLSI Technology и Wal-Mart — в период с 30.08.1993 по 30.08.1995. Выборочный коэффициент корреляции между VLSI и Intel оказался очень большим и равным 0,950376. Выборочный коэффициент корреляции между Intel и SGI также высок и равен 0,883291, т.е. представляется, что цены технологических акций всегда движутся в одном направлении. И наоборот, выборочный коэффициент корреляции между Intel и Wal-Mart низок и равен 0,14917. По первому из этих значений с помощью равенств (19) можно получить,

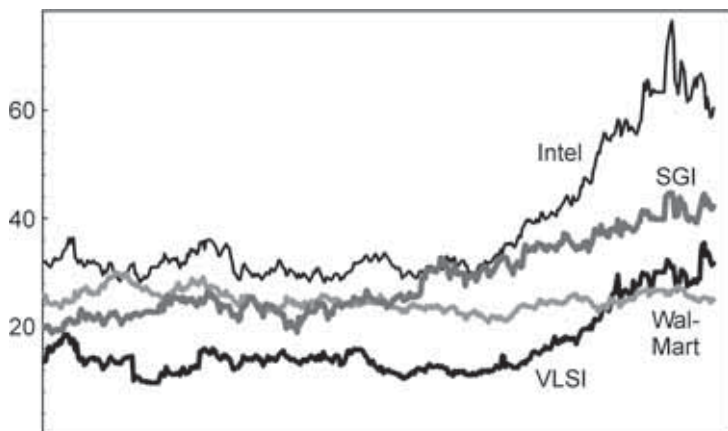


Рис. 6.4. Корреляция между ценами акций (к примеру 6.3.1).

например, что 90,3215 % (т. е. $R^2 = 0,950376^2$) полной вариации между ценами акций Intel и VLSI Technology можно объяснить линейной регрессионной моделью. $\triangleleft$

Упражнение 6.3.1. Найдите приближенную прямую регрессии по следующим данным: (1; 1,0), (2; 1,5), (3; 1,7), (4; 2,0). Проверьте, что коэффициент определенности в этом случае оказывается равным выборочному коэффициенту корреляции.

6.4 Оценка параметров

После того, как выбирается подходящее для описания рассматриваемой ситуации семейство распределений, обычно остается лишь уточнить его параметры, чтобы сделать описание максимально точным. Получение оценок этих параметров и является основной целью финансовой эконометрики [147]. Три наиболее известных подхода к решению этой проблемы представлены ниже.

6.4.1 Метод наименьших квадратов

Этот метод обязан своим появлением в 1806 г. Лежандру (1752—1833) и в 1809 г. Гауссу (1777—1855)* [582]². В нем следует минимизировать сумму квадратов отклонений, или, другими словами, SSE. Например, оценкой величины X по данным ее измерений x_i будет число $\bar{X}$, которое минимизирует выражение

$$f(\bar{X}) \equiv \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2. \quad (6.20)$$

*) Имеется еще один претендент на звание изобретателя метода наименьших квадратов, а именно американец Robert Adrain, опубликовавший в конце 1808 г. свое изложение метода наименьших квадратов. — Прим. ред.

Этот же метод был использован при выводе приближенной прямой регрессии в п. 6.2 с помощью минимизации выражения (6.13). Напомним, что никаких стохастических моделей там не вводилось.

Предположим далее, что рассматривается следующая **линейная регрессионная модель**, связывающая x и y :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

где с. в. ε имеет нулевое среднее и конечную дисперсию. Другими словами предполагается, что каждое наблюдение величины y сопровождается помехой или некоррелированным шумом ε . Тогда оцениваемые параметры приближенной прямой регрессии, которые являются с. в., имеют минимальные дисперсии среди всех несмещенных *линейных* оценок. Это утверждение и есть **теорема Гаусса—Маркова**, доказанная Гауссом в 1821 г. и Марковым (1856—1922) в 1912 г. [75, 632]. Интересно отметить, что оценка наименьших квадратов для β_1 — т. е. $\hat{\beta}_1$ из (6.14) — может быть интерпретирована как отношение выборочной ковариации между x и y к выборочной дисперсии x (см. также упр. 6.4.1).

Пример 6.4.1. У двумерного нормального распределения есть два приятных свойства:

$$E(X_2 | X_1) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X_1 - \mu_1), \quad D(X_2 | X_1) = (1 - \rho^2) \sigma_2^2.$$

Поэтому регрессии (одной переменной по другой) представляют собой *линейные* функции, и, следовательно, использование линейной регрессии оправдано. Отметим, что при использовании принципа наименьших квадратов оптимальной оценкой (предсказанием) значения X_2 при данном $X_1 = x$ для любых с. в. X_1 и X_2 в точности является $E(X_2 | X_1 = x)$ (см. упр. 6.4.3) [846]. $\triangleleft$

Упражнение 6.4.1. Пусть даны с. в. X_1 и X_2 . Тогда с. в.

$$Y \equiv (X_2 - EX_2) - [\alpha + \beta(X_1 - EX_1)]$$

представляет собой ошибку в линейном прогнозе $\alpha + \beta(X_1 - EX_1)$ с. в. X_2 по с. в. X_1 . Покажите, что

1) при $\alpha \equiv 0$ и $\beta \equiv \text{Cov}(X_1, X_2)/DX_1$ (эта величина называется **бетой**) дисперсия $DY = EY^2$ минимальна, и

2) если используется оптимальный линейный прогноз, то с. в. X_1 и Y некоррелированы.

Упражнение 6.4.2. Проверьте, что функция f , определяемая равенством (6.20), достигает минимума в точке $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Упражнение 6.4.3. 1) Докажите, что a минимизирует величину $E(X - a)^2$ — **ошибку в среднеквадратическом**, если $a = EX$.

2) Покажите, что наилучшей оценкой a с. в. X_k по с. в. $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ в смысле минимума среднеквадратичной ошибки, т. е. минимума $E((X_k - a)^2 | X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$, является **условная оценка наименьших квадратов** $E(X_k | X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$.

6.4.2 Оценка максимального правдоподобия

Оценкой параметра θ по **методу максимального правдоподобия (МП)**³ называется точка $\hat{\theta}$, на которой достигается максимум **функции правдоподобия**. В случае, если выборка взята из дискретного распределения, функцией правдоподобия $L(\theta)$ называется вероятность события $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$, т. е.

$$L(\theta) \equiv P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid \theta\},$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ — оцениваемый вектор из параметров. Если же выборка взята из абсолютно-непрерывного распределения, то

$$L(\theta) \equiv \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i \mid \theta),$$

где $p_{X_i}(x_i \mid \theta)$ — плотность распределения элементов выборки. Метод МП предлагает в качестве оценки параметра θ такое значение $\hat{\theta}$, в котором $L(\hat{\theta}) \geq L(\theta)$ при всех возможных θ . Эта оценка, однако, может оказаться смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при увеличении объема выборки. Среди всех состоятельных оценок оценки, полученные по методу МП, обладают такими оптимальными свойствами, как минимальность дисперсии асимптотического распределения или асимптотическая нормальность, конечно, при некоторых условиях регулярности. Причем свойства эти переносятся и на выборки из случайных процессов [413, 422]. В отличие от метода наименьших квадратов, в котором используются только первые два момента наблюдаемых с. в., в методе МП полностью задействовано само распределение выборки.

При некоторых условиях регулярности оценка параметра θ по методу МП является решением системы уравнений $\partial L(\theta)/\partial \theta_i = 0$. При этом вместо $L(\theta)$ оказывается более удобным работать с $\ln L(\theta)$, который так и называется **логарифмической функцией правдоподобия**. Кроме того, при поиске решения указанной системы и отсутствии точных формул для θ приходится использовать различные приближенные методы.

Пример 6.4.2. В случае n независимых наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ из распределения $N(\mu, \sigma^2)$ логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Приравнивая нулю частные производные $\partial L/\partial \mu$ и $\partial L/\partial \sigma^2$, получим, что выборочное среднее $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$, а $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{\mu})$. Заметим, что оценка дисперсии является смещенной, поскольку она отличается от выражения из (6.1). Тем не менее она состоятельна. $\triangleleft$

6.4.3 Метод моментов

Метод моментов оценивает параметры распределения, приравнивая теоретические моменты распределения их выборочным моментам. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — случайная выборка из распределения, характеризуемого k параметрами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Метод моментов оценивает эти параметры из решения следующей системы k уравнений:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \\ M_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3, \\ \dots \end{cases}$$

где моменты $M_i = EX^i$ являются функциями искоемых параметров.

Название метода моментов связано с тем, что поиск параметров происходит с помощью моментов. Называемый также **аналоговым методом** метод моментов не требует знания функции правдоподобия. Но, хотя вместо плотности вероятностей используются лишь некоторые моменты наблюдений, этот метод удобен и обычно приводит к простым вычислениям и состоятельным оценкам. Более того, в некоторых ситуациях он оказывается наиболее простым методом оценивания.

Дополнительная литература

В том, что касается теории вероятностей, математической статистики и ее приложений, материал этой главы опирается на [12, 23, 195, 273, 343, 463, 802, 816, 846]. Очень точные приближения к нормальному распределению описаны в [678]. Регрессионный анализ имеется во многих изданиях [317, 422, 632, 799]. За дополнительной информацией о логнормальном распределении обращайтесь к [273, 522, 584, 846]. Метод моментов был предложен Пирсоном (1857—1936) в 1894 г. [415].

Примечания

1. Идея регрессии принадлежит Гальтону (1822—1911) [65].
2. Гаусс заявил, что он сделал это открытие в 1795 г. [75, 339].
3. Автор идеи правдоподобия — Рональд Фишер (1890—1962) [415].

Смещение в сторону опционов как центра тяжести в финансах [...].

М. Х. Миллер (1923—2000) [666]

Опционы предоставляют своему владельцу право купить или продать некоторый **базовый актив**. Они являются, таким образом, **условным требованием** или **производной ценной бумагой**, поскольку их стоимость зависит от стоимости базового актива. Помимо того, что опционы представляют собой один из важных классов финансовых инструментов, они находят очень широкое применение в финансах вообще и за их пределами, в частности. Ну а в том, что касается соответствия теории экспериментальным данным, то теория оценки стоимости опционов рассматривается как наиболее успешная теория в финансах и экономике.

7.1 Введение

Существует два основных типа опционов: **колл** и **пут**^{*}). Более сложные инструменты могут быть представлены в виде пакетов из них. Опцион колл дает своему владельцу право купить определенное количество базового актива по заранее фиксированной **цене исполнения** или **цене покупки**. Опцион пут дает его держателю право продать определенное количество базового актива по фиксированной цене продажи. В роли базового актива могут выступать акции, индексы акций, опционы, иностранная валюта, фьючерсные контракты, процентные ставки, ценные бумаги (ЦБ) фиксированной доходности, закладные, зимняя температура и бесконечно много других объектов [54, 346, 698]. Если же опцион является вложенным, то сделка с ним должна происходить одновременно с торговлей базовым активом.

Тот, кто продает или выписывает опцион, называется продавцом или **выписывающей стороной**. Чтобы приобрести опцион, его будущий владелец платит выписывающей стороне **премию**. Когда исполняется опцион колл, его владелец платит продавцу, скажем, цену исполнения в обмен на акцию, и опцион прекращает свое существование. Когда исполняется опцион пут, его владелец получает от выписывающей стороны цену исполнения в обмен на акцию и опцион также прекращает свое существование. Но опцион может быть исполнен и раньше намеченной даты исполнения, и такое исполнение будет называться **досрочным**. Кроме то-

^{*}) Термины «опцион колл» (Call option) означают право покупки, а «опцион пут» (Put option) — право продажи базового актива, соответственно. В этом случае, как видим, английское произношение терминов без изменений «перешло» в русский язык. — Прим. ред.

го, опцион может быть и **продан** в любой удобный для осуществления сделки момент до окончания срока его действия.

Американские и Европейские опционы отличаются лишь способом исполнения. Американский опцион можно исполнить в любой момент до окончания его срока действия, в то время как Европейский — лишь в момент его окончания¹. Американский опцион стоит никак не меньше, чем в остальном такой же Европейский, как раз по причине более широких возможностей исполнения.

Многие стратегии да и рассуждения, приведенные в этой книге зависят от занятия так называемой **короткой позиции**. В акциях короткая продажа означает заем сертификатов акций с последующим их выкупом; более кратко: продажа того, чем некто не владеет, предшествует покупке*). Очевидно, короткий продавец считает, что цена на акцию будет падать. Заметьте, что взятые в долг акции должны быть возвращены в виде акций, а не наличными. Кроме того, короткий продавец не получает дивидендов от взятых акций; точнее говоря, он должен возместить дивидендные выплаты тому, кому эти акции были проданы. Поэтому каждая дивидендная выплата уменьшает доход короткого продавца.

Занимать короткую позицию проще в производных финансовых инструментах. Для этого нужно лишь найти инвестора, желающего купить эти бумаги, т. е. занять по ним **длинную позицию**. Незавершенные контракты по тем производным ЦБ, по которым не требуется поставлять базовый актив или тем, которые в основном урегулируются занятием компенсирующей позиции, могут по стоимости во много раз превосходить стоимость базового актива [60].

Пусть до конца этой главы C обозначает стоимость опциона колл, P — цену опциона пут, X — цену исполнения, S — цену акции и D — величину дивидендов. Индексы будут использоваться для того, чтобы отличить или подчеркнуть время до окончания срока действия, цены акций или цены исполнения. Обозначение $P_3(x)$ имеет смысл приведенного значения x долларов момента окончания срока действия финансового инструмента на настоящий момент.

7.2 Основные понятия

Владельца опциона никто не заставляет использовать свое право. И опцион исполняется только тогда, когда это ему выгодно. Очевидно, опцион колл будет исполнен лишь в том случае, когда текущая цена акции окажется выше цены исполнения. И аналогично, опцион пут будет исполнен лишь в противном случае, т. е. если текущая цена акции будет меньше цены исполнения опциона. Поэтому стоимость опциона

*) Стандартной для акций является ситуация, когда инвестор сначала покупает акции и лишь через некоторое время продает их, как бы дожидаясь удобного момента. Такой инвестор занимает «длинную позицию». Однако не менее часто бывает, когда инвестору выгодно взять акции в долг, чтобы сразу их продать, а затем, опять-таки дожидаясь удобного момента, купить для того, чтобы вернуть долг. Именно эта ситуация и называется «короткая продажа». — Прим. перев.

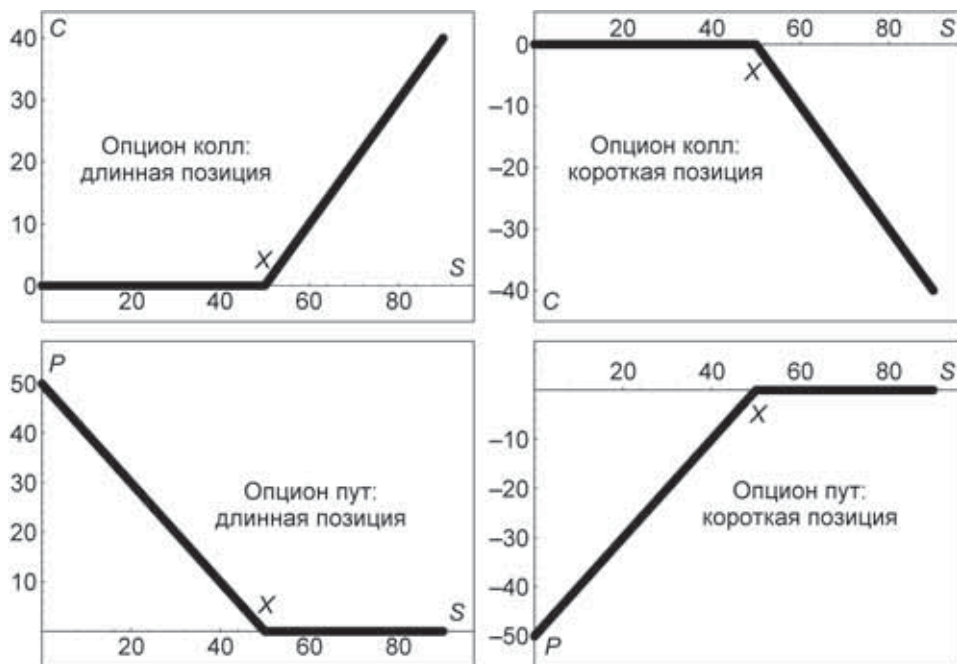


Рис. 7.1. Выплата по опциону колл C или пут P в момент его исполнения как функция цены акции S в этот момент при цене исполнения $X = 50$ (слева).

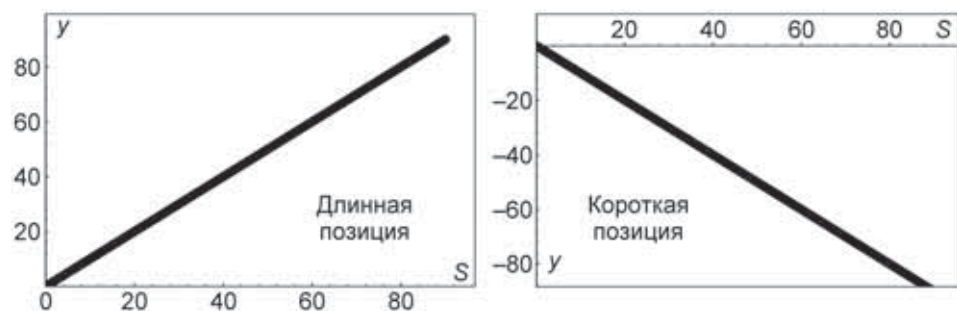


Рис. 7.2. Сумма $y = S$ или $-S$, получаемая по акции тем, кто занимает длинную или короткую позицию, как функция текущей цены акции S .

или **выплата по нему** в момент исполнения для опциона колл равна $C = \max(0, S - X)$, а для опциона пут $-P = \max(0, X - S)$ (см. рис. 7.1). Выплата, в отличие от прибыли, никак не связана с первоначальной ценой. Например, выплата при длинной позиции по акции равна S , а при короткой $-S$ (см. рис. 7.2). Величину $\max(0, S_t - X)$, мы будем называть **внутренней стоимостью** опциона колл, а величину $\max(0, X - S_t)$ — внутренней стоимостью опциона пут; здесь t — произвольный момент времени до окончания срока действия финансового инструмента. Часть стоимости опциона, которая превышает внутреннюю стоимость, называ-

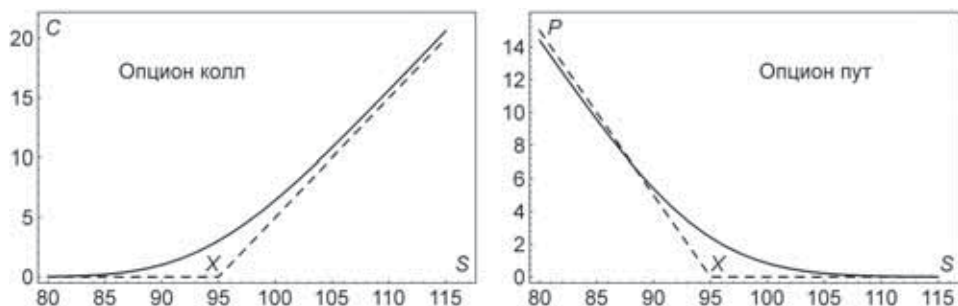


Рис. 7.3. Стоимость опционов колл C и пут P перед окончанием их срока. Изображен общий вид кривых стоимости опционов колл и пут как функций от текущей цены акции S в некоторый момент до окончания срока их действия (сплошная линия). Пунктирная линия представляет стоимость опциона (т. е. выплату по нему) в момент истечения этого срока. Цена исполнения $X = 95$

ется его **временной стоимостью** и отражает возможность опциону стать более ценным до истечения срока его действия. Таким образом, премия по опциону состоит из внутренней стоимости и временной стоимости. Говорят, что опцион колл **с выигрышем** или **в деньгах**, если $S > X$, **при своих** или **около денег**, если $S = X$ и, наконец, **с проигрышем** или **вне денег**, если $S < X$. Аналогично, в отношении опциона пут говорят, что он **с выигрышем**, если $S < X$, **при своих**, если $S = X$ и, наконец, **с проигрышем**, если $S > X$. Опционы, которые оказываются с выигрышем в момент окончания срока их действия, должны быть исполнены. Поразительно, но свыше 10 % владельцев опционов с выигрышем все-таки не используют свое право [340]. Хотя заключительная выплата по опциону и очевидна, но определение его стоимости в произвольный момент времени до окончания срока его действия представляет собой большое интеллектуальное достижение. На рис. 7.3 как раз и указана стоимость опционов колл и пут в некоторый момент до окончания срока их действия.

7.3 Биржевые опционы (опционы, которыми торгуют на бирже)

Опционы пут и колл впервые появились в 1790 г. (Аристотель описал разновидность опциона колл в своем трактате *Политика* [29, книга 2, гл. 11]). Однако до 1973 г. опционами торговали лишь на **внебиржевых рынках**, на которых финансовые учреждения и корпорации торговали друг с другом напрямую. Главное отличие внебиржевых опционов состоит в том, что налоги с них уже взяты. В настоящее время торговля опционами на вторичном рынке наиболее популярна в таких видах базового актива, как иностранная валюта и процентные ставки.

Чикагская биржа опционов CBOE (Chicago Board Options Exchange) открыла торговлю опционами 26 апреля 1973 г. С тех пор опционами

начали торговать на многих других биржах, таких, например, как Американская биржа AMEX (American Stock Exchange) или Филадельфийская PHLX (Philadelphia Stock Exchange). Для **опционов, торгуемых на биржах**, стандартизируются условия опционных контрактов, создаются централизованные средства торговли и распространения ценовой информации, организуются Опционные Клиринговые Корпорации (ОКК; расчетные палаты). И все это делается для того, чтобы способствовать активности вторичного рынка. Термин **котируемый опцион** используется также для указания опциона, допущенного к обращению на бирже.

Даты окончания срока действия и цены исполнения определяются условиями торговли биржевыми опционами. Так, цены исполнения выбираются как в определенном смысле усреднение текущей цены базовой акции с фиксированным шагом, зависящим от цены акции. Скажем, интервал в \$2,5 является обычным приращением для цен акций, меньших \$25 за акцию, интервал в \$5 для цен от \$25 до \$200 за акцию, и интервал в \$10 для цен свыше \$200 за акцию. Для произвольной акции, как правило, существуют опционы трех различных сроков действия. Биржа также ограничивает максимальное число опционов, которое можно иметь, занимая определенную позицию на рынке. Все биржевые опционы по акциям являются Американскими.

Биржевые акционные опционы не **защищены от дивидендов в наличных** (или просто не **защищены**). Это означает, что опционный контракт не корректируется с тем, чтобы учитывать выплату таких дивидендов. Поскольку цена акции обычно падает на величину, примерно равную дивидендам в наличных, когда она становится бездивидендной*), то для опциона колл дивиденды оказываются убыточными. Для опционов пут верно обратное. Однако опционы хорошо согласованы с процессом дробления акций. Скажем, при дроблении акции в соотношении « n за m » (т.е. когда за m старых акций получают n новых) цена исполнения становится равной доли m/n ее предыдущего значения, а число акций, охватываемых одним контрактом, изменяется в n/m раз по сравнению с его предыдущим значением. Биржевые акционные опционы согласованы и с дивидендами по акции. Если не оговаривается противное, то опционы будут считаться незащищенными. В таблице на рис. 7.4 приведены котировки для небольшой выборки акционных опционов.

Пример 7.3.1. Для опциона на покупку 100 акций некоторой компании по цене \$50 за акцию, дробление в соотношении 2 за 1 изменит условия контракта на цену исполнения в \$25 за акцию для 200 акций. $\triangleleft$

Контракт обычно относится к 100 акциям. Цены же на опционы котируются в расчете на единицу базового актива. Возьмем, например, июльский опцион колл компании Merck с ценой исполнения в \$35 и це-

*) Промежуток времени между объявлением о выплате следующих дивидендов и моментом, когда их выплата будет произведена, называется «бездивидендным» (ex-dividend). Инвестор, покупающий акции в это время, дивиденды не получает, поскольку они идут продавцу. Поэтому обычно цена акции сначала растет с приближением по времени к началу этого интервала, на величину дивидендов в долларах, а затем падает при пересечении этой «границы». — Прим. перев.

ной за 1 опцион в \$9,5 при закрытии торгов 20.03.1995, представленный в таблице на рис. 7.4. Общая стоимость одного такого контракта была равна \$950.

Владелец биржевого опциона может **закрыть** или **ликвидировать** свою позицию, сделав **компенсирующий заказ** на продажу такого же опциона. Аналогично, выписывающая (опцион) сторона также может закрыть свою позицию, выпуская компенсирующий заказ на покупку того же опциона. Эта операция называется **компенсирующим урегулированием** и возможна благодаря существованию клиринговой палаты. **Открытой позицией** называется общее число контрактов, которые не были компенсированы, исполнены или закончились, если кратко, то общее число длинных (или, что эквивалентно, коротких) позиций.

Компания, текущая цена акции	Цена испол- нения	Дата испол- нения	Опционы колл		Опционы пут	
			Объем продаж	Цена при закрытии	Объем продаж	Цена при закрытии
Exxon	60	Апр	1053	51/2	1000	3/16
65	65	Апр	951	15/16	830	11/16
65	65	Май	53	17/16	10	11/16
65	65	Окт	32	23/4	—	—
65	70	Июль	2	1/4	40	51/4
.						
Merck	30	Июль	328	151/4	—	—
441/2	35	Июль	150	91/2	10	1/16
441/2	40	Апр	887	43/4	136	1/16
441/2	40	Июль	220	51/2	297	1/4
441/2	40	Окт	58	6	10	1/2
441/2	45	Апр	3050	7/8	100	11/8
441/2	45	Май	462	13/8	50	13/8
441/2	45	Июль	883	115/16	147	13/4
441/2	45	Окт	367	23/4	188	21/16
.						
Microsoft	55	Апр	65	163/4	52	1/8
711/8	60	Апр	556	113/4	39	1/8
711/8	65	Апр	302	7	137	3/8
711/8	65	Июль	93	9	15	11/2
711/8	65	Окт	34	105/8	9	21/4
711/8	70	Апр	1543	31/8	162	11/2
711/8	70	Май	42	41/4	2	21/8
711/8	70	Июль	190	53/4	61	3
711/8	70	Окт	94	71/2	1	4
.						

Рис. 7.4. Котировки опционов. В августе 2000 г. газета Wall Street Journal перешла к опубликованию данных котировки акций, торгуемых в Национальной рыночной системе NASDAQ, а также на Американской и Нью-Йоркской биржах, в десятичной системе. Переход к этой системе на всех трех биржах ожидался в апреле 2001 г. Источник: газета Wall Street Journal за 21 марта 1995 г.

7.4 Основные стратегии в опционах

Опционные стратегии включают в себя занятие позиции по опциону, по базовому активу, а также заем или кредитование. До настоящего момента, например, были упомянуты шесть позиций: длинная и короткая позиции по акции, длинная и короткая позиции по опционам колл и пут. Стратегия может быть также **бычьей**, **медвежьей** или **нейтральной** в соответствии с представлением о перспективах рынка*), она может быть **агрессивной**, **защитной** или фактически **безрисковой** в терминах отношения к риску**), и, наконец, она может быть направлена на получение прибыли в волатильных или спокойных рынках. Например, покупка акции представляет собой бычью и агрессивную стратегию, поскольку первое означает, что инвестор получит прибыль в случае роста цены акции, а второе (агрессивность) связано с тем, что инвестор подвергнет себя риску максимальных потерь, доллар за доллар, если цена акции пойдет вниз. Еще более агрессивными стратегиями являются покупка акций с маржой и покупка опционов***). Например, опцион колл по акциям компании Еххон с окончанием срока действия в апреле и цене исполнения \$ 60 позволяет владельцу контролировать акцию стоимостью \$ 65 за какие-то \$ 5,5 (см. таблицу на рис. 7.4). С другой стороны, продажа акций из короткой позиции является агрессивной, но медвежьей стратегией. В **обеспеченной** (или **покрытой**) позиции одни ЦБ защищают доходность других ЦБ. Существует три основных типа обеспеченных позиций: **хедж**, **спрэд** и **комбинация**.

Упражнение 7.4.1. Как бы вы охарактеризовали покупку опциона колл в терминах отношения к перспективам рынка и риску?

7.4.1 Хедж

Стратегия, называемая **хедж**, совмещает использование опциона и его базового актива таким образом, чтобы один из них защищал другого от потерь. Хедж, который комбинирует длинную позицию по акции с длинным опционом пут называется **защитный пут**. Хедж, который использует длинную позицию по акции с коротким опционом колл, называется **покрытый колл** (см. рис. 7.5). Возможно, покрытый колл является опционной стратегией, которую учреждения-инвесторы чаще всего используют для получения сверхприбыли на спокойном рынке. Поскольку обе последние стратегии приводят к выигрышу лишь в случае повы-

*) Дилера на фондовой бирже, валютном или товарном рынке называют «быком» (bull), если он считает, что цены будут подниматься, и «медведем» (bear) — если он ожидает их падения. — Прим. перев.

**) Стратегия называется «агрессивной» или «наступательной», если коэффициент бета (риска) используемого в ней актива больше единицы, и «защитной» или «оборонительной» — если меньше. Обычно при этом выбирается точка отсчета, т. е. общеизвестный актив с бетой, равной единице. — Прим. перев.

***) В случае акций можно лишиться не только части денег, вложенных в нее, но и оплаты маржи, а у опционов выиграть или потерять можно не 10 % вложенных денег, что обычно для акции а, например, 100 %. — Прим. перев.

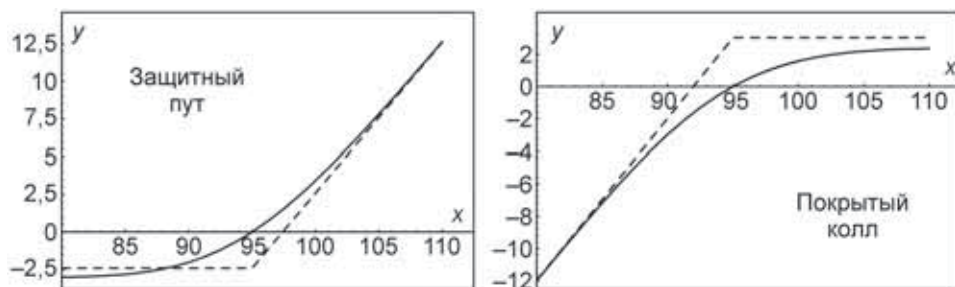


Рис. 7.5. Прибыль y защитного пута и покрытого колла как функция цены акции x . Как цена исполнения, так и текущая цена акции равны \$95. Пунктирные линии представляют позиционную прибыль в конце срока действия опциона. **Диаграмма прибыли** не учитывает временную стоимость денег, используемую для занятия позиции.

шения цен на акцию, то с точки зрения ситуации на рынке они являются бычьими. Но они также являются защитными: инвестор либо останется владельцем акции, либо получит за нее гарантированную цену в покрытом колле, а защитный пут гарантирует минимальную стоимость портфеля. **Обратным хеджем** называется хедж с противоположным действием, например, такой, при котором занимается короткая позиция по акции в комбинации с коротким опционом пут или длинным опционом колл.

Выписывание **опциона пут с обеспечением наличными** подразумевает продажу опциона пут и одновременное откладывание денег, достаточных для оплаты цены исполнения в случае его исполнения. Выплата аналогична той, которая возникает в покрытом колле. Максимальная прибыль равна $X - [ПЗ(X) - P]$, а максимальные потери — $[ПЗ(X) - P]$ (в смысле «+» и они возникнут, если акция бесполезна, т.е. $S = X$, поскольку выплата при $S \leq X$ равна $P - ПЗ(X) - (X - S)$!). Стратегия **хедж с коэф-**

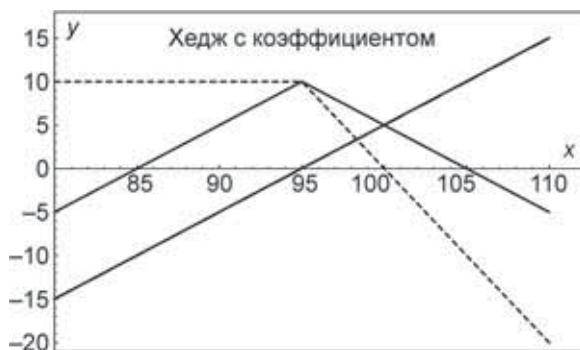


Рис. 7.6. Прибыль y от стратегии хедж с коэффициентом как функция цены акции x . Сплошная линия-угол характеризует диаграмму ее прибыли в момент исполнения при одинаковых цене исполнения и текущей цене за акцию в \$95. Сплошная прямая представляет диаграмму прибыли по акции, а пунктирная линия обозначает диаграмму прибыли по двум опционам.

фициентом объединяет с каждой акцией два коротких опциона колл. Она является прибыльной, пока цена на акцию изменяется не слишком сильно в обоих направлениях. И в этом убеждает рис. 7.6.

Упражнение 7.4.2. Проверьте величину максимальной прибыли для опциона пут, обеспеченного наличными.

Упражнение 7.4.3. Как защитный пут для диверсифицированного портфеля, так и договор по страхованию от пожара осуществляют страхование. В чем состоит существенная разница между ними?

Упражнение 7.4.4. Начните со \$100 и поместите сумму $\$100/(1+r)$ на некоторый текущий счет под ежегодную ставку процента r . И пусть оставшиеся деньги используются для покупки опционов колл.

1) Найдите выплату при этой стратегии в момент истечения срока действия опциона, который закончится ровно 1 год спустя.

2) Какова величина r , при которой использованная стратегия превращается в стратегию «90/10», что означает вложение 90% денег на финансовом рынке сегодня и получение суммы, достаточной для исполнения опциона в момент окончания его срока действия? Эта стратегия так и называется **стратегия 90/10**.

7.4.2 Спрэд

Стратегия **спрэд** состоит из нескольких опционов одного типа и по одному и тому же базовому активу, но с различными ценами исполнения или датами истечения. Эти стратегии представляют большой интерес для опционных дилеров. Договоримся использовать обозначения X_L , X_M , X_H для цен исполнения, удовлетворяющих неравенствам $X_L < X_M < X_H$.

Бычий спрэд-колл состоит из длинного X_L опциона колл и короткого X_H опциона колл с одинаковой датой истечения. Начальным капиталовложением является величина $C_L - C_H$. Максимально возможная прибыль равна $(X_H - X_L) - (C_L - C_H)$, а максимум потерь $C_H - C_L$.

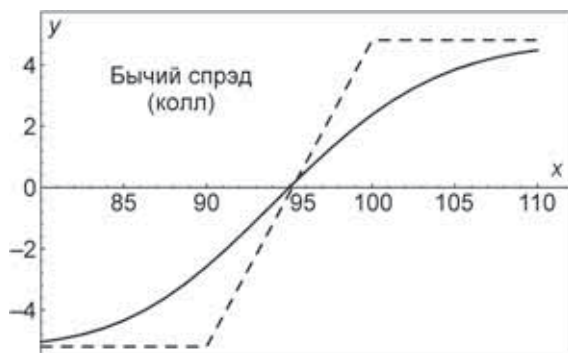


Рис. 7.7. Прибыль y от стратегии «бычий спрэд-колл» как функция цены акции x . Диаграмма прибыли изображена на момент окончания срока действия (пунктирная линия) опциона и за 1 месяц до него (сплошная линия). Как цена исполнения, так и текущая цена за акцию равны \$95.

Отношение к риску защитное. Рис. 7.7 служит иллюстрацией к вышесказанному. Этот спрэд известен также под названиями **ценовой спрэд**, **денежный спрэд** или **вертикальный спрэд** (вертикальный, поскольку входящие в него опционы располагаются в одной и той же вертикальной колонке опционов колл или пут, что хорошо видно из таблицы на рис. 7.4). Выписывая X_H опцион пут и покупая X_L опцион пут с одинаковыми датами истечения, мы создадим так называемый **бычий спрэд пут**. **Медвежий спрэд** сводится к продаже бычьего спрэда и выгадывает при падении цен на акции.

Пример 7.4.1. Женщина-инвестор купила опцион колл. Затем ситуация на рынке стала меняться в ее пользу и она смогла продать этот опцион за ту же цену, но с более высокой ценой исполнения. Тем самым она использовала стратегию бычий спрэд, терминальная выплата по которой не может оказаться отрицательной, поскольку $C_L = C_H$. $\triangleleft$

Три опциона колл или три опциона пут с разными ценами исполнения и одной датой истечения срока образуют **спрэд-бабочку**. Более точно такой спрэд состоит из одного длинного X_L опциона колл, одного длинного X_H опциона колл и двух коротких X_M опционов колл. Первые два колла образуют **крылья**. Иллюстрацией к этой стратегии служит рис. 7.8. Положительная сумма по ней выплачивается в момент исполнения только в случае, когда цена актива оказывается между X_L и X_H . Таким образом, спрэд-бабочка при малой величине $X_H - X_L$ хорошо приближает **условно постоянное требование**, по которому \$1 выплачивается лишь тогда, когда угадывается конкретная цена [346]².

Горизонтальный спрэд (называемый также **временным спрэдом** или **календарным спрэдом**) включает в себя два опциона с одной и той же ценой исполнения, но разными датами истечения срока. Типичным образом такого спрэда является спрэд, состоящий из длинного опциона колл с далекой датой истечения и короткого опциона колл с близкой. Источник прибыли для него связан с разной скоростью убывания проме-

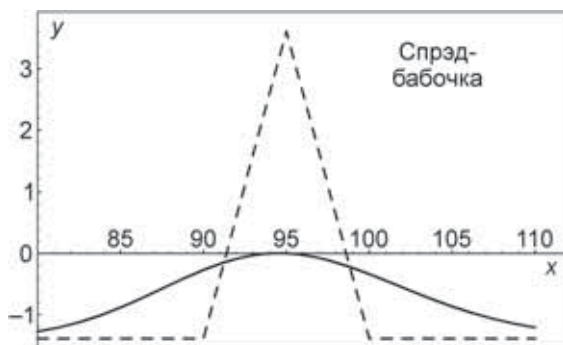


Рис. 7.8. Прибыль y от стратегии спрэд-бабочка как функция цены акции x . Диаграммы прибыли относятся к моментам окончания срока действия опционов (пунктирная линия) и за 1 месяц до него, когда спрэд и был составлен (сплошная линия). Цены исполнения \$90, \$95 и \$100, а текущая цена за акцию равна \$95.

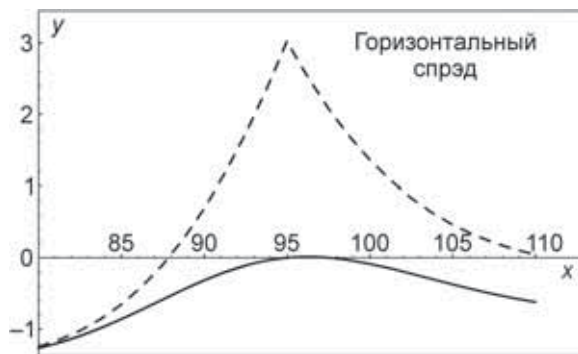


Рис. 7.9. Прибыль y от стратегии горизонтальный спред как функция цены акции x . Изображены диаграмма прибыли горизонтального спреда в момент окончания срока действия ближайшего колла (пунктирная линия) и в момент, когда он был впервые составлен (сплошная линия). Как цена исполнения, так и текущая цена за акцию равны \$95. Остается 1 месяц до истечения первого срока и два до второго.

жутков времени до моментов истечения срока у разных опционов колл. Иллюстрацией служит рис. 7.9. **Диагональный спред** включает в себя два опциона с различными ценами исполнения и датами истечения.

Упражнение 7.4.5. Условно постоянное требование имеет платежную функцию f со свойствами: $f(x) = 0$ для $x \neq X$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. В математике такая функция f называется **дельта-функцией Дирака**. Покажите, что стоимость условно постоянного требования равна $\partial^2 C / \partial X^2$.

7.5 Комбинация

Комбинация состоит из опционов различного типа по одному и тому же базовому активу, причем все опционы либо куплены, либо выписаны (проданы). **Стрэддл** порождается длинным опционом колл и длинным опционом пут с одной ценой и той же датой истечения срока. Стрэддл мало реагирует на любое заранее выбранное направление изменения цен и его характеризует ограниченный риск. Но, поскольку ему выгодна большая волатильность цен, то лицо, покупающее стрэддл, называют **удлиняющим волатильность** [646]. Иллюстрацией служит рис. 7.10. Продажа стрэддла, наоборот, приводит к успеху при низкой волатильности с максимально возможной прибылью в $C + P$. **Стрэнгл** отличается от стрэддла лишь тем, что цена исполнения опциона колл выше, чем опциона пут. Ситуация с прибылью в случае стрэнгла проиллюстрирована на рис. 7.11.

Стрип состоит из длинного опциона колл и двух длинных опционов пут с одинаковыми ценами исполнения и датами истечения срока. **Стрэп** состоит из длинного опциона пут и двух длинных опционов колл также с одинаковыми ценами исполнения и датами истечения. Диаграммы прибыли в этих стратегиях очень напоминают ситуацию стрэддла, за

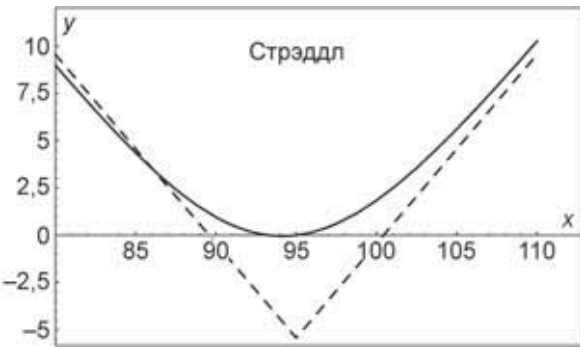


Рис. 7.10. Прибыль y от стратегии стрэддл как функция цены акции x . Изображены диаграмма прибыли от стрэддла в момент окончания срока действия опционов (пунктирная линия) и за 1 месяц до этого, когда он был впервые составлен (сплошная линия). Как цена исполнения, так и текущая цена за акцию равны \$95.

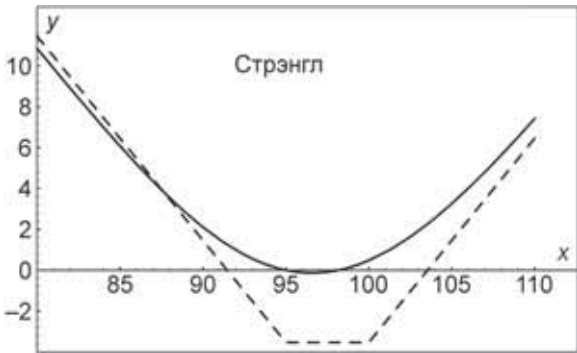


Рис. 7.11. Прибыль y от стратегии стрэнгл (Strangle) как функция цены акции x . Изображены диаграммы прибыли от стрэнгла на момент окончания срока действия опционов (пунктирная линия) и за 1 месяц до этого, когда он был впервые составлен (сплошная линия). На этот раз ценами исполнения являются \$95 (для пута) и \$100 (для колла), а текущая цена за акцию \$95.

исключением того, что они не симметричны относительно цены исполнения. Поэтому, хотя стрипы и стрэпы также выигрывают от большей волатильности цен, но все-таки одно из направлений движения цен для них считается предпочтительнее другого.

Примечания

1. Подобно Святой Римской Империи термины Американский и Европейский не имеют ничего общего с географией.
2. Условно постоянные требования называются также **ЦБ Эрроу**, в знак признания достижений (ученого) Эрроу [836].

8 Арбитраж при оценке стоимости опциона

Использование любого общего закона в конкретном случае обычно связано с определенными неудобствами.

Дэвид Хьюмб,

О подъеме и прогрессе в искусстве и науке

Принцип отсутствия арбитража утверждает, что бесплатного обеда не должно быть. Каким бы простым этот принцип ни был, но он играет весьма существенную роль в оценке стоимости опциона. После его представления в п. 8.1 будут выведены несколько соотношений, имеющих важное значение для этой оценки.

8.1 Арбитражные соображения

Безрисковая арбитражная возможность характеризуется тем, что при ней без всяких начальных капиталовложений и при любых обстоятельствах возникает неотрицательный доход, а в некоторых случаях положительный. На эффективном рынке такие возможности не должны существовать. И этот принцип отсутствия арбитража действительно стоит за любыми современными теориями оценки стоимости опциона, если и не является идеей, которая объединяет все финансы [87, 303]. Связанный с ним **принцип доминирования портфеля** гласит, что портфель A должен быть более ценным, чем портфель B , если выплата по A не менее хороша при всех обстоятельствах и лучше при некоторых.

Простое следствие принципа отсутствия арбитража состоит в том, что портфель, приносящий нулевой доход при любом развитии событий имеет нулевое приведенное значение (ПЗ). Любое другое значение приведет к арбитражным возможностям, которые можно будет реализовать с помощью короткой позиции по портфелю, если это значение будет положительным или покупая этот портфель, если ПЗ будет отрицательным. Принцип отсутствия арбитража подтверждает и справедливость формулы $P = \sum_{i=1}^n C_i d(i)$ для ПЗ ценной бумаги (ЦБ) с известным денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ (напомним, что $d(i)$ — это цена i -периодной бескупонной облигации номинала в \$1). Любая цена, отличная от P , приведет к безрисковой прибыли, если использовать сделку с ЦБ и бескупонными облигациями. А именно, если стоимость ЦБ P^* меньше P , то мы продаем бескупонные облигации, которые в сумме эквивалентны денежному потоку ЦБ как по срокам погашения, так и по размерам сумм и используем часть P^* полученного дохода P для покупки ЦБ. Поскольку денежный поток ЦБ в точности погасит обязательства по облигациям, то будет реализована безрисковая прибыль в размере $P - P^*$

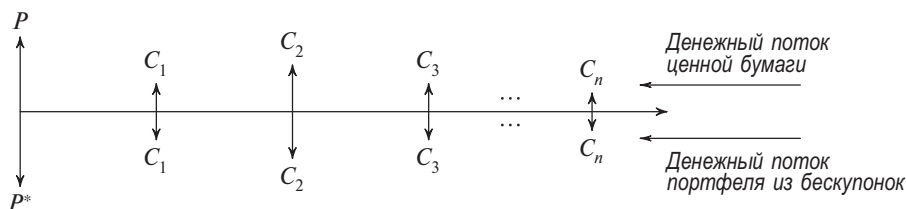


Рис. 8.1. Стоимость фиксированного денежного потока. Рассмотрим ЦБ с денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ и ценой P^* . Соберем портфель из бескупонных облигаций с равными номиналами $C_1, C_2, \dots, C_n$ и сроками погашения $1, 2, \dots, n$. И пусть его цена равна P . Тогда для исключения арбитражных возможностей нужно, чтобы $P = P^*$.

долларов (см. рис. 8.1). С другой стороны, если ЦБ стоит больше P , то безрисковую прибыль можно реализовать, обращая проведенную сделку.

Приведем еще два примера. Так, Американский опцион не может стоить меньше своей внутренней стоимости, поскольку в противном случае можно купить опцион, быстро его исполнить и затем продать акцию с прибылью. С другой стороны, любой опцион пут, как и любой опцион колл должен иметь неотрицательную стоимость, поскольку иначе его можно купить не затратив, а получив положительную сумму сейчас и закончить операцию с неотрицательной суммой при истечении срока.

Упражнение 8.1.1. Приведите арбитражную аргументацию цепочки $d(1) \geq d(2) \geq \dots$.

Упражнение 8.1.2 (арбитражная теорема). Рассмотрим мир с m состояниями и n ЦБ. Обозначим выплату по ЦБ j в состоянии i через D_{ij} . И пусть D — матрица размерности $m \times n$ с элементами D_{ij} . Сформулируйте необходимое условие арбитражной свободы (т.е. отсутствия арбитража).

8.2 Относительная стоимость опционов

Выведем безарбитражные соотношения, которым должна удовлетворять стоимость опционов. Эти соотношения выполняются независимо от вероятностной модели, используемой для описания динамики цен акций. При этом мы лишь предположим, что операционные издержки или требования по марже отсутствуют, предоставление займа или получение кредита возможно по безрисковой процентной ставке, все процентные ставки неотрицательны, а арбитражные возможности отсутствуют. Ну а для упрощения изложения предположим, что нулевой момент представляет текущее время, а $PЗ(x)$ означает ПЗ x долларов момента истечения на момент 0 и потому $PЗ(x) = x \cdot d(\tau)$, где τ — время до истечения срока.

Следующая лемма показывает, что стоимость Американского опциона растет вместе со временем до истечения. Это утверждение согласуется с котировками из таблицы на рис. 7.4; однако для Европейских опционов оно может и не выполняться.

Лемма 8.2.1. *Любой Американский опцион колл (пут) не может стоить меньше в остальном такого же опциона колл (пут), но с меньшим временем до истечения срока.*

Доказательство. Мы установим лемму лишь для опциона колл. Предположим от противного, что $C_{t_1} > C_{t_2}$, где $t_1 < t_2$. В этом случае покупаем опцион по C_{t_2} и продаем по C_{t_1} , получая в результате в момент 0 сумму $C_{t_1} - C_{t_2}$. Затем в момент $\tau \leq t_2$, когда короткий опцион колл либо прекращает свое существование, либо исполняется, наша позиция по нему имеет цену $C_\tau - \max(S_\tau - X, 0)$. Если это значение положительно, мы закрываем позицию с прибылью, продавая остающийся у нас опцион колл. В противном случае $\max(S_\tau - X, 0) \geq C_\tau \geq 0$ и короткий опцион колл исполняется. В этом случае мы также исполняем свой опцион колл и в сумме получаем нулевой денежный поток. В результате как в первом, так и во втором случае совокупная выплата положительна при отсутствии начальных капиталовложений. $\square$

Лемма 8.2.2. *Любой опцион колл (пут) не может стоить больше другого опциона колл (пут) с более низкой (высокой) ценой исполнения, если в остальном он от него не отличается.*

Доказательство. Установим лемму лишь для опциона колл. Прежде всего утверждение, очевидно, выполняется в момент исполнения и потому оно имеет место для Европейских опционов колл. Предположим, что при ценах исполнения $X_1 < X_2$ соответствующие цены опционов удовлетворяют противоположному неравенству $C_{X_1} < C_{X_2}$. Тогда мы покупаем опцион по низкой цене C_{X_1} и продаем по высокой C_{X_2} , получая от сделки (положительный) доход. А если владелец опциона с ценой C_{X_2} исполнит его до момента исполнения, то мы сразу же исполним свой длинный опцион и получим положительную сумму $X_2 - X_1$. $\square$

Лемма 8.2.3. *Разница в стоимости двух опционов не может быть больше разницы соответствующих цен исполнения, если в остальном они не отличаются.*

Доказательство. Опять рассмотрим лишь опционы колл и предположим от противного, что при ценах исполнения $X_1 < X_2$ разница соответствующих стоимостей $C_{X_1} - C_{X_2} > X_2 - X_1$. Тогда мы покупаем опцион по низкой цене C_{X_2} и выписываем по высокой C_{X_1} , получая доход и помещая сумму $X_2 - X_1$ на безрисковый банковский счет.

Предположим сначала, что владелец опциона с ценой C_{X_1} исполняет его до истечения срока. Тогда возможны два случая. Если $C_{X_2} > S - X_1$, то мы продаем свой опцион за C_{X_2} и получаем сумму $C_{X_2} - (S - X_1) > 0$. В противном случае исполняем опцион с ценой C_{X_2} и реализуем сумму $X_1 - X_2 < 0$. В обоих случаях закрываем счет в банке и получаем в результате неотрицательную сумму.

Предположим далее, что владелец опциона с ценой C_{X_1} досрочно свой опцион не исполняет. Тогда в момент окончания срока действия опционов получаемая нами сумма будет равна 0, $X_1 - S < 0$, или $X_1 - X_2 < 0$, соответственно, если $S \leq X_1$, $X_1 < S < X_2$, или $X_2 \leq S$. Если же добавить сумму с банковского счета, которая не меньше, чем $X_2 - X_1$, то общая выручка остается неотрицательной. $\square$

Лемма 8.2.4. *Стоимость любого опциона колл не может быть больше цены акции, Американский опцион пут никогда не стоит больше цены исполнения, а Европейский опцион пут не может стоить больше, чем приведенное значение цены исполнения.*

Доказательство. Если стоимость опциона колл превосходит цену акции, то позиция с покрытым коллом может привести к арбитражной прибыли. Если стоимость опциона пут больше цены исполнения, то безарбитражная прибыль возникнет при продаже опциона пут, обеспеченного наличными. Указанная точная оценка для Европейского опциона пут выполняется потому, что до окончания срока действия наличные могут «заработать» безрисковые проценты. $\square$

Упражнение 8.2.1. Покажите, что лемму 8.2.3 для Европейских опционов колл можно усилить следующим образом: разница в стоимости двух в остальном одинаковых опционов не может превосходить приведенного значения разницы их цен исполнения.

Упражнение 8.2.2. Получите оценку подобную указанной в лемме 8.2.4 для Европейских путов при отрицательных процентных ставках (такая ситуация может оказаться полезной в случае, когда реальная процентная ставка станет отрицательной в силу инфляции).

8.3 Паритет пут—колл и ряд вытекающих из него свойств

Предположим, что дивиденды наличными по акции не выплачиваются, либо опционы защищены таким образом, что их стоимость оказывается нечувствительной к таким дивидендам. Заметим, что анализ в отношении опционов по бездивидендным акциям остается в силе по определению и для защищенных опционов по акциям с дивидендами. Поэтому изолированно такой анализ для защищенных опционов не проводится.

Рассмотрим портфель из одного короткого Европейского опциона колл, одного длинного Европейского опциона пут, одной акции и ссуды в размере $P_3(X)$. Предполагается также, что у всех опционов одна и та же цена исполнения и то же время до истечения срока τ . Первоначально полученная сумма денег, следовательно, равна $C - P - S + P_3(X)$. В момент окончания, если цена акции S_τ не больше X , то опцион пут будет стоить $X - S_\tau$, а опцион колл окажется бесполезным. С другой стороны, если $S_\tau > X$, то опцион колл будет стоить $S_\tau - X$ а опцион

пут «окончит свои дни» бесполезным. И как только ссуда, на этот момент в размере X , будет возвращена, то чистое накопленное значение (НЗ) нашего денежного потока окажется нулевым в обоих случаях. Но принцип отсутствия арбитража означает, что сумма, позволяющая приобрести вышеуказанный портфель также должна быть нулевой. Тем самым доказано следующее равенство для Европейских опционов, называемое **паритет пут—колл**:

$$C = P + S - ПЗ(X). \quad (8.1)$$

Представляется, что тождество это открыл в 1977 г. Каstellи и с тех пор оно было переоткрыто много раз [156].

Из паритета пут—колл вытекает, что по сути существует лишь один тип Европейского опциона, поскольку другой может быть воссоздан по нему с помощью комбинации с базовой акцией и безрисковым кредитованием или заимствованием. Подобные комбинации создают так называемые **синтетические (или вспомогательные) ЦБ**. К примеру, записывая равенство (8.1) в виде $S = C - P + ПЗ(X)$, мы понимаем, что акция эквивалентна портфелю, содержащему длинный опцион колл, короткий опцион пут и предоставление кредита на сумму $ПЗ(X)$. Но использовать паритет пут—колл можно и по-другому. Рассмотрим равенство $C - P = S - ПЗ(X)$, которое означает, что длинный опцион колл и короткий опцион пут сводятся к длинной позиции по акции и займу на сумму $ПЗ$ цены исполнения — другими словами, к покупке акции с маржой. Но последнему естественно предпочесть занятие длинной позиции по акции «под рычагом» (т.е. при финансовой поддержке), поскольку покупка акции с маржой обусловлена строгими требованиями по марже.

Паритет пут—колл означает, что $C = (S - X) + [X - ПЗ(X)] + P \geq S - X$. Поскольку $C \geq 0$, то отсюда вытекает, что $C \geq \max(S - X, 0)$, т.е. больше внутренней стоимости. Но любой Американский опцион также не может стоить меньше своей внутренней стоимости. Тем самым справедлива следующая лемма.

Лемма 8.3.1. *Любой Американский или Европейский опцион колл по бездивидендной акции не может стоить меньше своей внутренней стоимости.*

Европейский опцион пут может продаваться по более низкой цене, чем его внутренняя стоимость. Например, на рис. 7.3 стоимость опциона пут становится меньше его внутренней стоимости, если опцион «глубоко в деньгах». В этом можно убедиться и формально, поступая следующим образом. Из паритета пут—колл вытекает, что

$$P = (X - S) + [ПЗ(X) - X + C].$$

По мере погружения опциона пут «в деньги» стоимость опциона колл приближается к нулю и потому $P \approx (X - S) + ПЗ(X) - X < X - S$, т.е. меньше его внутренней стоимости при положительных процентных ставках. В силу паритета пут—колл для Европейского опциона пут имеет место и следующая оценка снизу.

Лемма 8.3.2. Для Европейского опциона пут $P \geq \max(\text{ПЗ}(X) - S, 0)$.

Предположим, что ПЗ дивидендов, чьи даты выплат предшествовали моменту окончания срока действия опциона, равно D . Тогда паритет пут—колл принимает следующий вид:

$$C = P + S - D - \text{ПЗ}(X). \quad (8.2)$$

Упражнение 8.3.1. 1) Предположим, что до окончания срока действия осталось 4 месяца, цена исполнения равна \$95, премия по опциону колл — \$6, премия по опциону пут — \$3, текущая цена акции равна \$94, а ежегодная ставка непрерывного начисления процентов — 10 %. Как получить безрисковую арбитражную прибыль?

2) Опционный дилер выписывает клиенту опционы колл, а затем сразу же покупает опционы пут вместе с используемыми акциями. Объясните, почему этот портфель, называемый **конвертацией**, должен принести безрисковую прибыль.

Упражнение 8.3.2. Покажите, что оценку леммы 8.3.1 можно усилить до неравенства $C \geq \max(S - \text{ПЗ}(X), 0)$.

Упражнение 8.3.3. В некотором таком мире, где цена бездивидендной акции известна в любой момент времени, Европейский опцион колл бесполезен, если его цена исполнения выше, чем известная цена акции при окончании его срока действия. В упр. 8.3.2 утверждается, однако, что $C \geq S - \text{ПЗ}(X)$, а эта сумма положительна, если $S > \text{ПЗ}(X)$. Попытайтесь разрешить противоречие в случае, когда $X > S > \text{ПЗ}(X)$.

Упражнение 8.3.4. Докажите, что паритет пут—колл (8.2) при одной дивидендной выплате размера D^* в некоторый момент времени t_1 до окончания срока действия имеет вид: $C = P + S - \text{ПЗ}(X) - D^*d(t_1)$.

Упражнение 8.3.5. Европейский **опцион колл с шапкой** отличается от Европейского опциона колл лишь тем, что выплата по нему равна $H - X$ вместо $S - X$, если терминальная цена акции S превосходит значение H . Постройте портфель из Европейских опционов с такой же выплатой.

Упражнение 8.3.6. Рассмотрите производный финансовый инструмент Европейского типа, выплата по которому представляет собой кусочно-линейную функцию, проходящую через начало координат. ЦБ с такой выплатой называется **обобщенным опционом**. Покажите, что его можно продублировать портфелем из Европейских опционов колл.

8.4 Досрочное исполнение Американских опционов

Предположим, что процентные ставки этого пункта положительны. Оказывается, что в этом случае исполнять Американский опцион до окончания его срока действия невыгодно, если по базовой акции не выплачиваются дивиденды; кроме того, продажа предпочтительнее исполнения. Вот какова аргументация.

В силу упр. 8.3.2 $C \geq \max(S - \text{ПЗ}(X), 0)$. А если опцион колл исполняется, то его стоимость меньше: $S - X$. Это несоответствие объясняется

двумя причинами: 1) при исполнении опциона колл теряется страховка от невыгодного последующего изменения цен акций и 2) теряется временная стоимость денег, поскольку при исполнении оплачивается сумма X . И как следствие, любое соотношение по оценке стоимости Европейских опционов колл выполняется для Американских, если по базовой акции дивиденды не выплачиваются. Этот в определенной степени удивительный результат принадлежит Мертону [660].

Теорема 8.4.1. *Американский опцион колл по бездивидендной акции не должен исполняться до окончания его срока действия.*

Только что приведенная теорема не означает, что Американский опцион колл следует держать до момента погашения. Но она утверждает, что если рассматривается досрочное исполнение, то *лучше* будет просто продать его. Однако досрочное исполнение может стать оптимальным для Американского опциона колл на акцию с дивидендами. Причина связана с тем, что цена акции убывает по мере того, как по акции прекращают выплачиваться дивиденды. Как ни удивительно, но Американский опцион колл должен исполняться лишь по нескольким определенным датам.

Теорема 8.4.2. *Американский опцион колл следует исполнять лишь в момент окончания его срока действия, либо непосредственно перед моментом t_d , после которого покупатель акции лишается ближайших дивидендов.*

Доказательство. Покажем сначала, что $C > S - X$, если рассматриваемый момент не совпадает с окончанием срока действия или непосредственно не предшествует моменту t_d . Предположим противное: $C \leq S - X$. Тогда покупаем опцион колл, продаем акцию и предоставляем кредит на сумму $Xd(\tau)$, где τ означает период времени до следующей выплаты дивидендов. Возникающий денежный поток положителен, поскольку $X > Xd(\tau)$. Мы последовательно закрываем позицию непосредственно перед следующей выплатой дивидендов, отзывая сумму кредита, равную X , и продавая опцион колл по цене, не меньшей $\max(S_\tau - X, 0)$ по лемме 8.3.1. Тогда выручка оказывается достаточной для покупки акции по цене S_τ . Первоначальный денежный поток, таким образом, приводит к арбитражной прибыли. Ну а поскольку между выплатами дивидендов стоимость опциона колл превосходит его внутреннюю стоимость, то его продажа предпочтительнее исполнения. $\square$

В отличие от Американских опционов колл на бездивидендные акции, исполнить Американский опцион пут может быть выгодно даже если он связан с акциями без дивидендов. Отчасти это объясняется тем, что временная стоимость денег теперь благоприятствует досрочному исполнению. Ведь исполнение пута немедленно приводит к получению суммы в наличных X . И одно следствие этого состоит в том, что раннее исполнение становится более выгодным при возрастании процентных ставок, если остальные параметры не меняются.

Наличие дивидендов снижает выгоды раннего исполнения в случае Американских опционов пут. Рассмотрим акцию, которая в настоящий момент ничего не стоит, с ценой $S=0$. Если владелец опциона пут исполняет свой опцион, то (за акцию) ему выплачивается сумма X . Если же он продает опцион, то получает сумму $P \leq X$ по лемме 8.2.4 и сохраняет акцию. Но если ничего не делать, то дохода не получишь. И если цена акции останется нулевой до окончания срока действия опциона, то исполнение опциона пут в настоящий момент окажется оптимальным. Поэтому больше не является верным утверждение о том, что имеются лишь несколько моментов для досрочного исполнения опциона пут. Следовательно, конкретные результаты в отношении раннего исполнения Американских опционов пут бледнее и слабее (чем у опционов колл).

Паритет пут—колл выполняется лишь для Европейских опционов; для Американских имеет место неравенство

$$P \geq C + ПЗ(X) - S, \quad (8.3)$$

поскольку Американский опцион колл имеет ту же стоимость, что и Европейский по теореме 8.4.1, а Американский опцион пут стоит не меньше своего Европейского двойника.

Упражнение 8.4.1. Рассмотрим инвестора с Американским опционом колл на акцию, продаваемую в настоящий момент по цене \$45. Действие опциона заканчивается ровно через 2 месяца, цена исполнения \$40, а ставка непрерывного начисления процентов равна 8%. Предположим, что акция считается переоцененной и дивиденды по ней не выплачиваются. Следует ли исполнять этот опцион?

Упражнение 8.4.2. Покажите, что если в любой момент до окончания срока действия опциона ПЗ процентов от цены исполнения превышает ПЗ всех будущих дивидендов вплоть до окончания этого срока, то опцион колл не следует исполнять досрочно.

Упражнение 8.4.3. Почему исполнять Американский опцион пут невыгодно непосредственно перед выплатой дивидендов?

Упражнение 8.4.4. Объясните, почему Американский опцион пут должен быть исполнен, если $X - S > ПЗ(X)$.

Упражнение 8.4.5. Предположим, что дивиденды по базовой акции не выплачиваются. Приведите арбитражную аргументацию для следующих утверждений:

- 1) стоимость опциона колл, и не важно, является ли он Европейским или Американским, не может превышать стоимость базовой акции;
- 2) стоимость Европейского опциона пут равна $ПЗ(X)$, если $S=0$;
- 3) стоимость Американского опциона пут равна X , если $S=0$.

Упражнение 8.4.6. Покажите, что для Американских опционов на бездивидендную акцию выполняется неравенство $C - P \geq S - X$ (отсюда и из неравенства (8.3) вытекает, что для Американских опционов по бездивидендной акции справедливы неравенства $C - S + X \geq P \geq C - S + ПЗ(X)$).

8.5 Выпуклость цен опционов

Факт выпуклости цены опциона формулируется и доказывается ниже.

Лемма 8.5.1 Для трех в остальном одинаковых опционов колл или пут с ценами исполнения $X_1 < X_2 < X_3$, справедливы неравенства:

$$C_{X_2} \leq \omega C_{X_1} + (1 - \omega) C_{X_3},$$

$$P_{X_2} \leq \omega P_{X_1} + (1 - \omega) P_{X_3}.$$

Здесь $\omega \equiv (X_3 - X_2)/(X_3 - X_1)$, т. е. $X_2 = \omega X_1 + (1 - \omega) X_3$.

Доказательство. Докажем лемму лишь для опционов колл. Предположим, что лемма не верна. Тогда, если продадим опцион за C_{X_2} и купим ω опционов по цене C_{X_1} и $(1 - \omega)$ опционов по цене C_{X_3} , то получим положительную сумму. Если короткий опцион колл не исполняется досрочно, то сохраняем до конца и другие опционы. Все денежные потоки описываются следующим образом:

	$S \leq X_1$	$X_1 < S \leq X_2$	$X_2 < S < X_3$	$X_3 \leq S$
Один проданный опцион по цене C_{X_2}	0	0	$X_2 - S$	$X_2 - S$
ω купленных опционов по цене C_{X_1}	0	$\omega(S - X_1)$	$\omega(S - X_1)$	$\omega(S - X_1)$
$(1 - \omega)$ купленных опционов по цене C_{X_3}	0	0	0	$(1 - \omega)(S - X_3)$
Суммарный доход по сделке	0	$\omega(S - X_1)$	$X_2 - \omega X_1 - (1 - \omega)S$	0

Поскольку суммарный денежный поток неотрицателен или положителен, то тем самым получена арбитражная прибыль.

Предположим далее, что короткий опцион колл исполняется досрочно, когда цена за акцию равна S . Тогда, если $\omega C_{X_1} + (1 - \omega) C_{X_3} > S - X_2$, то продаем длинные опционы колл и получаем чистый денежный поток в сумме $\omega C_{X_1} + (1 - \omega) C_{X_3} - (S - X_2) > 0$. В противном случае исполняем длинные опционы колл, т. е. оплачиваем сумму $\omega X_1 + (1 - \omega) X_3 = X_2$ и получаем акцию. При этом ее и отдаем владельцу опциона колл C_{X_2} за сумму X_2 . И это означает, что суммарный денежный поток в этом случае является нулевым. Итак, денежный поток всегда неотрицательный, а иногда положительный. Тем самым в рассматриваемой ситуации опять есть арбитражная прибыль. $\square$

Из леммы 8.2.3 мы знаем, что наклон кривой стоимости опциона колл (пут), рассматриваемой как функция цены исполнения, не больше единицы (соответственно, не меньше минус единицы). Лемма 8.5.1 добавляет к этому, что форма этой кривой выпукла (вниз).

Пример 8.5.2. В соответствии с котировками из таблицы на рис. 7.4 стоимости июльских опционов колл компании Merck с ценами исполнения 30, 35 и 40 равны, соответственно, \$15,25, \$9,5, и \$5,5. Эти цены удовлетворяют свойству выпуклости, поскольку $9,5 \times 2 < 15,25 + 5,5$.

Посмотрите и на цены апрельских опционов пут компании Microsoft с ценами исполнения 60, 65 и 70. Они равны, соответственно, \$0,125, \$0,375, и \$1,5, что опять-таки подтверждает свойство выпуклости (соответствующих кривых).

8.6 Свойство портфеля, составленного из опционов

Опционы на индексы акций по существу являются опционами на портфель из акций. В настоящее время Американский опцион на Составной Индекс Цен Акции (Composite Stock Price Index) под названием Standard & Poor's 100 (S&P 100) является наиболее активно раскупаемым опционным контрактом в США [150, 746, 865]. Опционы на Составной Индекс Цен Акции Standard & Poor's 500 (S&P 500) также доступны. Однако они являются Европейскими. Опционы на индекс Доу—Джонса (DJIA = Dow Jones Industrial Average) появились в 1997 г. Соответствующий им индекс DJX определяется как DJIA, поделенный на 100. Другими популярными рыночными индексами акций являются Russell 2000 Index, отвечающий акциям малых компаний, и основанный на акциях самого большого числа компаний Wilshire 5000 Index. В таблице на рис. 8.2 приведена информация по некоторым индексам на 7 февраля 2000 г.

Как показывает следующая теорема, опцион на портфель из акций дешевле портфеля из опционов. Поэтому дешевле построить защиту против колебаний рынка в целом с помощью опционов на индекс, чем с помощью опционов на отдельные акции.

Теорема 8.6.1. *Рассмотрим портфель из бездивидендных активов с весами ω_i . И пусть C_i означает цену Европейского опциона колл на актив i с ценой исполнения X_i . Тогда стоимость индексного опциона колл на портфель с ценой исполнения $X \equiv \sum_i \omega_i X_i$ не превышает величины $\sum_i \omega_i C_i$. Аналогичный результат имеет место и для Европейского опциона пут. Срок действия всех опционов один и тот же.*

Индекс	Котировка на 7.02.2000			Абсолютное изменение по сравнению с 6.02.2000	Изменение по сравнению с 31.12.1999	
	верхняя граница	нижняя граница	при закрытии		абсолютное	в %
DJ Indus (DJX)	109,71	108,46	109,06	−0,58	−5,91	−5,1
S&P 100 (OEX)	778,01	768,45	774,19	−1,32	−18,64	−2,4
S&P 500 (SPX)	1427,23	1413,33	1424,24	−0,13	−45,01	−3,1
Nasdaq 100 (NDX)	3933,75	3858,89	3933,34	+58,97	+225,51	+6,1
NYSE (NYA)	627,03	621,14	623,84	−3,06	−26,46	−4,1
Russell 2000 (RUT)	532,40	525,52	532,39	+6,87	+27,64	+5,5
Major Mkt (XMI)	1110,00	1096,63	1098,09	−11,64	−67,89	−5,8
Value Line (VLE)	1011,29	1003,91	1006,99	−2,13	−18,81	−1,8

Рис. 8.2. Котировки индексов акций. Источник: газета Wall Street Journal от 8 февраля 2000 г.

В случае опционов колл теорема вытекает из неравенства:

$$\max\left(\sum_{i=1}^n \omega_i(S_i - X_i), 0\right) \geq \sum_{i=1}^n \max(\omega_i(S_i - X_i), 0),$$

в котором S_i обозначает цену актива i . Ясно, что у портфеля из опционов и опциона на портфель одна и та же выплата, если все базовые акции оканчивают либо в деньгах, либо вне денег. Выплаты по ним отличаются лишь когда эти акции мало коррелированы друг с другом. Причем разница имеет тенденцию увеличиваться тем больше, чем менее коррелированы рассматриваемые акции.

Упражнение 8.6.1. Рассмотрим портфель из опционов пут и опцион пут на портфель из теоремы 8.6.1. Почему цены на них разные, несмотря на то, что пол цен исполнения одинаков: $\sum_i \omega_i X_i$?

Заключительные замечания и дополнительная литература

Принцип безарбитражности, возможно, был предложен еще Паскалем (1623—1662), философом, богословом и основателем теории вероятностей и решающих правил [409, 410]. В 1950-х гг. Миллер и Модильяни положили этот принцип в основу финансовой теории [64, 853]. Полученные в этой главе оценки не зависят от модели и должны выполняться в любой из них [236, 346, 470]. Обратите внимание, что все они являются *относительными* оценками для цен. В следующей же главе пойдет речь об абсолютных ценах на опционы, основанных на правдоподобных моделях изменения цен акций. Соображения, оправдывающие использование индексных опционов можно найти в [236, п. 8.3].

9 Модели оценки стоимости опционов

Жизнь можно понять лишь оглядываясь назад, но прожить ее надо, обращая свой взор вперед.

Сорен Кьеркегоор (1813—1855)

Хотя оценить стоимость опциона в момент окончания срока его действия довольно просто, но оценка его стоимости в любой предшествующий момент представляет собой серьезную проблему. Принцип безарбитражности, хотя и пригодился при выводе различных оценок, оказывается недостаточным для определения точной стоимости опциона без дальнейших предположений о вероятностном поведении цен акций. Основной задачей в этом параграфе является вывод формул и разработка алгоритмов для оценки стоимости опциона в разумных моделях изменения цен акций. При этом основное внимание здесь сфокусировано на мощной биномиальной модели оценки стоимости опционов и на выводе знаменитой формулы Блэка—Шоулса.

9.1 Введение

Основным препятствием на пути создания модели оценки стоимости опционов является уверенность, что она должна зависеть от распределения вероятностей цены базового актива, а также от выбора процентной ставки, отражающей риск актива, по которой дисконтируется выплата по опциону. А ни один из этих факторов нельзя наблюдать непосредственно. После многих попыток, в некоторых из которых к решению проблемы подошли очень близко, в 1973 г. произошло землетрясение, когда Блэк (1938—1995) и Шоулс, с помощью Мертона опубликовали свою знаменитую модель оценки стоимости опциона, в настоящее время всемирно известную как **модель Блэка—Шоулса оценки стоимости опциона** [87]¹. Являясь одним из королевских драгоценных камней финансовой теории, это исследование привело к далеко идущим последствиям. Оно также способствовало успеху Чикагской Биржи Опционов (Chicago Board Options Exchange = СВОЕ) [660]. А в 1997 г. Мертону и Шоулсу была присуждена нобелевская премия по экономике за их работу по «оценке стоимости опционов на акции».

Математика в модели Блэка—Шоулса замечательна, поскольку цена может принимать любое из бесконечного множества возможных значений на любом конечном отрезке времени. Альтернативная **биномиальная модель оценки стоимости опциона** (БМОО) ограничивает движение цены двумя возможными значениями в периоде, заметно упрощая математику за счет некоторого удаления от действительности. Однако в результате

ничего не теряется, поскольку биномиальная модель сходится к модели Блэка—Шоулса при уменьшении длины периода к нулю. И что более важно, биномиальная модель приводит к эффективным численным алгоритмам оценки стоимости опциона. Главное внимание в этой главе уделяется именно БМОО.

На всем протяжении этой главы C будет обозначать стоимость опциона колл, P — стоимость опциона пут, X — цену исполнения, S — цену акции и D — величину дивидендов. Индексы будут использоваться для того, чтобы подчеркнуть или отличить различное время, оставшееся до истечения срока, цены акций или цены исполнения. Символ $PЗ(x)$ будет означать приведенное значение суммы x момента истечения (на момент 0), если не оговорено противное. Пусть также $\hat{r} > 0$ обозначает безрисковую ставку непрерывного начисления процентов периода, а $R \equiv e^{\hat{r}}$ — соответствующий ей **грубый доход**.

9.2 Биномиальная модель оценки стоимости опциона

В модели БМОО время дискретно и измеряется в периодах. В ней предполагается, что если текущая цена акции в начале периода есть S , то в конце его она может стать равной Su с вероятностью q и Sd с вероятностью $1 - q$, где $0 < q < 1$ и $d < u$ (см. рис. 9.1). В действительности, чтобы исключить арбитражную прибыль, должны выполняться даже неравенства $d < R < u$ (см. упр. 9.2.1). Оказывается, что для определения стоимости опциона с помощью арбитражных соображений достаточно использовать шесть фрагментов информации: S , u , d , X , $\hat{r}$ и число периодов n до истечения срока.

Упражнение 9.2.1. Покажите, что неравенства $d < R < u$ нужны для того, чтобы исключить арбитражную прибыль.

9.2.1 Опционы на бездивидендную акцию: один период

Предположим, что окончание срока действия опциона наступит через период после настоящего момента. И пусть стоимость опциона колл в момент 1 (т. е. выплата по нему) будет равна C_u , если цена акции

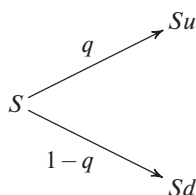


Рис. 9.1. Биномиальная модель для цен акций.

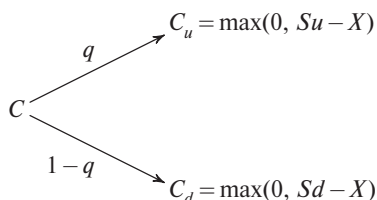


Рис. 9.2. Стоимость однопериодного опциона колл в БМОО.

стала равной S_u , и C_d , если цена акции уменьшилась до S_d . Ясно, что

$$C_u = \max(0, S_u - X), \quad C_d = \max(0, S_d - X).$$

См. рис. 9.2, который служит иллюстрацией этих соображений.

Соберем теперь портфель из h акций и B долларов в безрисковых облигациях. Его стоимость в момент 0 равна $hS + B$, и величина h здесь называется **коэффициентом хеджирования** или **дельтой**. Стоимость же портфеля в момент 1 будет равна либо $hS_u + RB$, либо $hS_d + RB$. Ключевой шаг теперь сводится к выбору таких величин h и B , чтобы стоимость портфеля в момент 1 оказывалась равной выплате по опциону колл:

$$hS_u + RB = C_u, \quad hS_d + RB = C_d.$$

Решая выписанные уравнения, получаем, что

$$h = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \geq 0, \quad (9.1)$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R}. \quad (9.2)$$

Тем самым *искусственно* создан **эквивалентный портфель**, который копирует рассматриваемый опцион колл. Этот портфель называется также **портфелем-копией** или **хеджирующим портфелем**.

В силу принципа безарбитражности стоимость Европейского опциона колл должна совпадать со стоимостью эквивалентного портфеля в момент 0, или быть равной $C = hS + B$. Поскольку легко проверить, что

$$uC_d - dC_u = \max(0, S_d - Xu) - \max(0, S_d - Xd) < 0,$$

то ясно, что эквивалентный портфель представляет собой длинную позицию по акции одновременно с займом (поскольку $B < 0$!).

Для Американских опционов колл следует рассмотреть немедленное исполнение. Если $hS + B \geq S - X$, то опцион колл не следует исполнять сразу и потому $C = hS + B$. С другой стороны, если $hS + B < S - X$, то опцион следует исполнить немедленно, поскольку полученную выручку $S - X$ можно использовать для покупки эквивалентного портфеля плюс еще какое-то количество облигаций; поэтому $C = S - X$. Отсюда мы заключаем, что $C = \max(hS + B, S - X)$. Но для бездивидендных акций раннее исполнение не является оптимальным по теореме 8.4.1 (см. также упр. 9.2.6). Опять получается, что $C = hS + B$.

Опцион пут можно оценивать аналогично. Дельта для него равна $\frac{P_u - P_d}{S_u - S_d} \leq 0$, где $P_u = \max(0, X - S_u)$, а $P_d = \max(0, X - S_d)$. Европейский опцион пут стоит $hS + B$, а Американский — $\max(hS + B, X - S)$, где $B = \frac{uP_d - dP_u}{(u-d)R}$.

Упражнение 9.2.2. Рассмотрим две ценных бумаги, A и B . За один период цена ЦБ A может измениться от \$ 100 либо до (а) \$ 160, либо до (б) \$ 80, в то время как цена ЦБ B может стать равной \$ 50 в случае (а), или \$ 60 в случае (б). Определите стоимость ЦБ B , если ставка периода равна 10 %.

9.2.2 Риск-нейтральная оценка стоимости

Удивительно, но стоимость опциона не зависит от q , вероятности повышения цены, и потому ожидаемый грубый доход по акции, равный $qSu + (1 - q)Sd$, также не зависит от q . А, следовательно, напрямую она не зависит и от инвесторского **отношения к риску** и будет оценена одинаково вне зависимости от того, с каким отвращением к риску он относится. Арбитражная аргументация предполагает лишь, что более определенное богатство предпочтительно перед менее определенным. В то же время стоимость опциона зависит от величин u и d , уточняющих изменение цены, с которыми инвесторы должны согласиться.

После подстановки и перегруппировки получим, что

$$hS + B = \frac{\frac{R-d}{u-d}C_u + \frac{u-R}{u-d}C_d}{R} > 0. \quad (9.3)$$

Перепишем это равенство в следующем виде

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}, \quad (9.4)$$

полагая

$$p \equiv \frac{R-d}{u-d}. \quad (9.5)$$

Поскольку $0 < p < 1$, то это число можно считать вероятностью. В биномиальной модели ожидаемая доходность по акции равна безрисковой ставке $\hat{r}$ в предположении, что $q = p$, поскольку $pSu + (1-p)Sd = RS$.

Назовем инвестора **нейтральным к риску**, если ему все равно, получит ли он гарантированный доход или неопределенный доход, но с тем же средним значением. Нейтрального к риску инвестора беспокоит лишь средний доход. И если инвесторы нейтральны к риску, то ожидаемая ставка доходности по всем ЦБ должна равняться безрисковой ставке. По этой причине величина p называется **риск-нейтральной вероятностью**. Поскольку же отношение значение q прямо не вовлечены в оценку стоимости опционов, то любое отношение к риску, и в том числе нейтральное, должны приводить к одному результату. Поэтому стоимость опциона в **риск-нейтральной экономике** можно интерпретировать как математическое ожидание дисконтированной будущей выплаты по нему. Поэтому же оказывается, что ставкой дисконтирования накопленного значения (НЗ) в риск-нейтральной экономике является безрисковая ставка. Риск-нейтральная оценка стоимости, возможно, является наиболее важным инструментом анализа производных ЦБ.

Вскоре нам понадобятся следующие обозначения. Так, вероятности **биномиального распределения** с параметрами n и p будем обозначать через

$$b(j; n, p) \equiv \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \frac{n!}{j! (n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}. \quad (9.6)$$

Напомним, что $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ при $n \geq 0$, если полагать, что $0! = 1$. Тем самым величина $b(j; n, p)$ является вероятностью получения j гербов в n независимых бросаниях монеты, в каждом из которых вероятность

выпадения герба имеет вероятность p . Вероятность же получения по меньшей мере k гербов в n бросаниях монеты можно будет записать с помощью так называемой **дополнительной функции биномиального распределения** с параметрами n и p :

$$\Phi(k; n, p) \equiv \sum_{j=k}^n b(j; n, p).$$

Поскольку получение меньшего чем k числа гербов эквивалентно получению по меньшей мере $n - k + 1$ решеток, то

$$1 - \Phi(k; n, p) = \Phi(n - k + 1; n, 1 - p). \quad (9.6')$$

Упражнение 9.2.3. Покажите, что грубый ожидаемый доход по опциону колл в риск-нейтральной экономике равен R .

Упражнение 9.2.4. Предположим, что опцион колл стоит $hS + B + k$ при некотором $k \neq 0$, а не $hS + B$. Как тогда можно получить арбитражную прибыль в размере M долларов?

Упражнение 9.2.5. При получении стоимости опциона выше была использована стандартная арбитражная аргументация. Для получения той же стоимости используйте риск-нейтральную аргументацию.

9.2.3 Опционы на бездивидендные акции: случай многих периодов

Рассмотрим опцион колл, которому предстоит жить два периода. В биномиальной модели цена акции в момент два может принять одно из трех значений: S_{uu} , S_{ud} и S_{dd} (см. рис. 9.3). Заметим, что в любом узле графа следующие два значения цены зависят лишь от текущей цены, но не от цен предыдущих моментов. Это свойство отсутствия памяти является ключевым моментом эффективного рынка².

Пусть C_{uu} означает стоимость опциона колл в момент два, если цена акции равна S_{uu} . Таким образом,

$$C_{uu} = \max(0, S_{uu} - X).$$

Величины C_{ud} и C_{dd} можно рассчитать аналогично:

$$C_{ud} = \max(0, S_{ud} - X), \quad C_{dd} = \max(0, S_{dd} - X).$$

Иллюстрацией к сказанному служит рис. 9.4. Стоимость опциона колл в момент 1 можно получить, используя логику п. 9.2.2, следующим образом:

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{R}, \quad C_d = \frac{pC_{ud} + (1-p)C_{dd}}{R}. \quad (9.7)$$

Значение же дельта можно получить по формуле (9.1). Скажем, дельта в точке C_u равна $\frac{C_{uu} - C_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}$.

А теперь обратимся к текущему периоду. Эквивалентный портфель из h акций и безрисковых облигаций на сумму $\$B$ можно подобрать для опциона колл, который стоит C_u (C_d), если цена акции изменилась на S_u (S_d). Значения же h и B можно взять из (9.1) и (9.2).

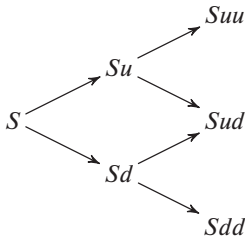


Рис. 9.3. Изменение цены акции на двух периодах. Этот граф называется **биномиальным деревом**, хотя термин **биномиальная решетка** подходит лучше, поскольку ветви реального дерева не слипаются на концах.

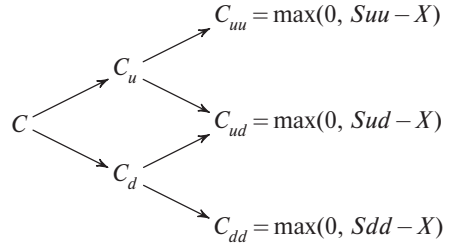


Рис. 9.4. Стоимость двухпериодного опциона колл до истечения срока.

Поскольку опцион колл не будет исполнен в момент один, даже если он Американский, то $C_u > Su - X$ и $C_d > Sd - X$. Следовательно,

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R} > \frac{(pu + (1-p)d)S - X}{R} = S - \frac{X}{R} > S - X.$$

Поэтому в настоящий момент опцион колл не будет исполнен и потому

$$C = hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}.$$

Вышеуказанное выражение представляет величину C с помощью последующих узлов C_u и C_d и ничего более. Но как было продемонстрировано равенствами (9.7), аналогичный расчет производится также в узлах C_u и C_d . Эта рекуррентная процедура называется **обратной индукцией**, поскольку она выражает более ранние величины через более поздние [27, 66]. Поэтому

$$\begin{aligned} C &= \frac{p^2 C_{uu} + 2p(1-p) C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{R^2} = \\ &= \frac{p^2 \max(0, Su^2 - X) + 2p(1-p) \max(0, Sud - X) + (1-p)^2 \max(0, Sd^2 - X)}{R^2}. \end{aligned}$$

Искомое выражение в общем случае возникает так же просто: нужно лишь в каждом узле проделать одинаковые вычисления и собрать их, «двигаясь в направлении, обратном по времени». В результате, при n периодах будем иметь:

$$C = R^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \max(0, Su^j d^{n-j} - X). \quad (9.8)$$

Полученное представление означает, что в риск-нейтральной экономике стоимость опциона колл на бездивидендную акцию является математическим ожиданием дисконтированной выплаты по нему в момент окончания его срока действия. Поскольку же это C является единственным значением стоимости опциона, при котором отсутствуют арбитражные

возможности, то оно называется **арбитражной стоимостью**. Обратите внимание, что стоимость опциона зависит от S , X , $\hat{r}$, u , d , и n . Аналогично устанавливается, что стоимость Европейского опциона пут равна

$$P = R^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \max(0, X - Su^j d^{n-j}).$$

Итог проведенным вычислениям подведем ниже.

Лемма 9.2.1. *В риск-нейтральной экономике стоимость Европейского опциона равняется математическому ожиданию дисконтированной выплаты по нему в момент окончания его срока действия.*

В действительности стоимость любой производной ЦБ можно оценить, предположив, что экономика риск-нейтральна [420]. Для производной ЦБ Европейского типа с терминальной функцией выплаты $\mathcal{D}$, ее стоимость может быть записана в виде

$$e^{-\hat{r}n} E^\pi[\mathcal{D}],$$

где символ E^π означает, что математическое ожидание берется по риск-нейтральной вероятностной мере π .

Поскольку величина дельты со временем меняется, то сохранение свойства эквивалентности у портфеля представляет собой динамический процесс. Это динамическое поддержание эквивалентного портфеля не зависит от наших корректно предсказанных будущих цен акций. По построению стоимость портфеля в конце текущего периода, а она может быть равна C_u или C_d , представляет собой в точности сумму, достаточную для образования следующего портфеля. Торговая стратегия поэтому является **само-финансируемой**, поскольку в ней нет ни притока капитала, ни его оттока, а изменение стоимости целиком определяется лишь приростом капитала.

Пусть a — минимальное число скачков цены вверх для того, чтобы опцион колл оказался в деньгах*). Очевидно, для этого a должно быть таким минимальным неотрицательным целым числом, что $Su^a d^{n-a} \geq X$, т. е.

$$a = \left\lceil \frac{\ln(X/Sd^n)}{\ln(u/d)} \right\rceil. \quad (9.9)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - X)}{R^n} = \\ &= S \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \frac{(pu)^j [(1-p)d]^{n-j}}{R^n} - \frac{X}{R^n} \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \\ &= S \sum_{j=a}^n b(j; n, pue^{-\hat{r}}) - Xe^{-\hat{r}n} \sum_{j=a}^n b(j; n, p). \quad (9.10) \end{aligned}$$

* Напоминаем, что про опцион говорят «в деньгах», если его предъявляют к исполнению, т. е. если выплата по нему в этот момент положительна. — Прим. перев.

Сформулируем вышеизложенное в следующем утверждении.

Теорема 9.2.2. *Стоимости Евроколла и Европута равны*

$$C = S\Phi(a; n, rie^{-\hat{r}}) - Xe^{-\hat{r}n}\Phi(a; n, p),$$

$$P = Xe^{-\hat{r}n}\Phi(n - a + 1; n, 1 - p) - S\Phi(n - a + 1; n, 1 - rie^{-\hat{r}}),$$

соответственно, где $p \equiv (\hat{e} - d)/(u - d)$, а число a представляет собой минимальное число скачков цены акции вверх для того, чтобы опцион колл оказался в деньгах в момент n .

Стоимость опциона пут можно получить с помощью паритета пут—колл и формулы (9.6'). Она может быть получена также, следуя вышеизложенной логике для опциона колл, но с заменой терминальной выплаты $\max(0, S - X)$ на $\max(0, X - S)$. Полезно заметить, что с помощью случайной величины S , обозначающей стоимость акции в момент окончания срока действия опциона, стоимость опционов можно записать в виде

$$C = S \times P_1\{S \geq X\} - Xe^{-\hat{r}n} \times P_2\{S \geq X\}, \quad (9.11)$$

$$P = Xe^{-\hat{r}n} \times P_2\{S \leq X\} - S \times P_1\{S \leq X\}, \quad (9.11')$$

где символы P_l , $l = 1, 2$, означают, что имеется в виду биномиальное распределение (9.6) для числа скачков цены акции вверх на всех n периодах, причем вероятность скачка цены акции вверх за один период в случае P_1 равна pu/R а в случае P_2 — p . Символ P_2 фактически представляет вероятность того, что опцион будет исполнен в риск-нейтральном мире. Интерпретация же для P_1 будет предложена в упр. 13.2.12.

Рынок называется **полным**, если любая производная ценная бумага (ЦБ) воспроизводима*) [420]. Так, в рассматриваемой модели можно считать, что в момент окончания срока действия опциона для его стоимости имеется $n + 1$ возможное состояние, которые соответствуют $n + 1$ возможной цене акции $Su^i d^{n-i}$, $0 \leq i \leq n$. Рассмотрим $n + 1$ условно-постоянное требование, по i -му из которых в момент погашения выплачивается \$1, если цена акции равна $Su^i d^{n-i}$, и ничего в противном случае. Эти требования делают рынок полным для произвольных ЦБ Европейского типа, заканчивающихся в момент n . Причина состоит в том, что стоимость произвольной производной ЦБ Европейского типа (т.е. выплата по ней), по которой выплачивается p_i долларов при последней цене акции в $Su^i d^{n-i}$, можно воспроизвести с помощью портфеля, состоящего из p_i единиц того из вышеуказанных требований, по которому в этом случае выплачивается \$1, $0 \leq i \leq n$. В случае **непрерывной торговли**, когда совершение сделок разрешается в любом периоде, для воспроизведения любой производной ЦБ и, следовательно, полноты рынка оказывается достаточно двух ЦБ (см. упр. 9.2.10) [289, 434].

*) Продавец любой производной ЦБ, получая за нее в начальный момент 0 некоторую сумму x от покупателя, берет на себя определенное обязательство, скажем, оплатить в некоторый более поздний момент N сумму f_N . И если при любой f_N существует возможность выполнить это обязательство с помощью простейших финансовых операций при некоторой сумме x , то платежное поручение или сама производная ЦБ называются воспроизводимыми или достижимыми. — Прим. перев.

Существование риск-нейтральной оценки стоимости обычно используется для *определения* арбитражной свободы в модели, в которой ни по одной само-финансируемой стратегии нельзя получить арбитражную прибыль. В действительности, существование риск-нейтральной оценки стоимости влечет арбитражную свободу для дискретных моделей типа БМОО. Обратное утверждение, что арбитражная свобода влечет существование риск-нейтральной вероятности, может быть строго доказано; кроме того, в полных рынках эта вероятностная мера оказывается единственной. «Эквивалентность» между арбитражной свободой в модели и существованием риск-нейтральной вероятности называется (первой) **фундаментальной теоремой оценки стоимости активов**.

Упражнение 9.2.6. Докажите, что для Американских опционов колл раннее исполнение не является оптимальным.

Упражнение 9.2.7. Покажите, что дельта опциона колл всегда неотрицательна.

Упражнение 9.2.8. Исследуйте формулу (10) в предположении, что $u \rightarrow d$, т.е. в ситуации, когда цены акций имеют нулевую волатильность.

Упражнение 9.2.9. Докажите паритет пут—колл для Европейских опционов с помощью БМОО.

Упражнение 9.2.10. Предположим, что справедлива БМОО.

1) Покажите, что условно-постоянное требование, по которому в момент n выплачивается \$1, если цена акции становится равной $Su^i d^{n-i}$, и \$0 в противном случае, можно воспроизвести с помощью портфеля из опционов колл.

2) Объясните, почему любое условно-постоянное требование можно воспроизвести с помощью непрерывной торговли облигациями и акциями.

Упражнение 9.2.11. Рассмотрите одно-периодную биномиальную модель с двумя рисковыми активами S_1 и S_2 , а также с одной безрисковой облигацией. И пусть на следующем шагу для рискованных активов есть лишь два состояния $(S_1 u_1, S_2 u_2)$ и $(S_1 d_1, S_2 d_2)$. Покажите, что эта модель при некоторых u_1, u_2, d_1, d_2 , и R не допускает риск-нейтральной вероятности. И потому она не свободна от арбитража.

Численный пример. Некоторая бездивидендная акция продается по цене \$160 за акцию. От любого своего значения S цена может либо подняться до $S \times 1,5$, либо опуститься до $S \times 0,5$. Имеется также и безрисковая облигация со ставкой непрерывного начисления процентов за период, равной 18,232 %. Рассмотрим Европейский опцион колл на эту акцию с ценой исполнения в \$150 и тремя периодами до окончания срока действия. Изменение цены акции и стоимости опциона показано на рис. 9.5. По методу обратной индукции было определено, что стоимость опциона колл равна \$85,069. Но то же самое значение можно получить и как ПЗ ожидаемой выплаты при окончании его срока действия:

$$\frac{(390 \times 0,343) + (30 \times 0,441)}{(1,2)^3} = 85,069.$$

Обратите внимание, что значение дельты меняется в зависимости от цены и времени.

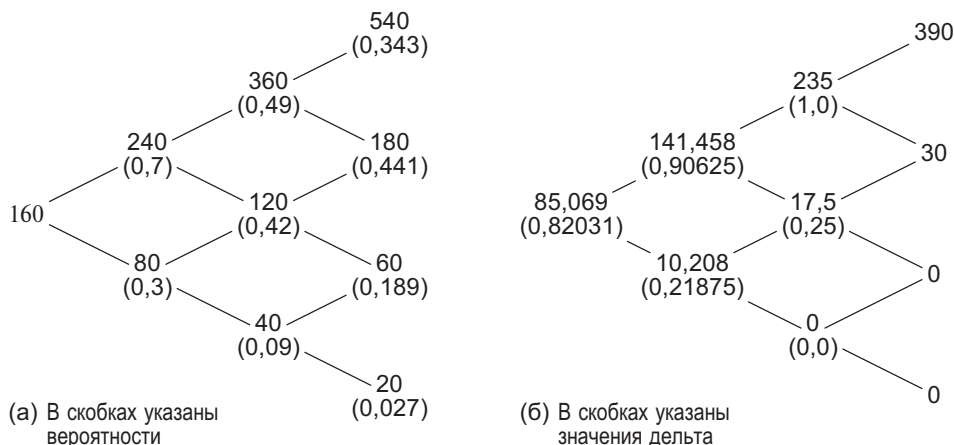


Рис. 9.5. Представлены два биномиальных процесса изменения (а) цены акции и (б) стоимости европейского опциона колл. Используемые параметры: $S=160$, $X=150$, $n=3$, $u=1,5$, $d=0,5$, $R=e^{0,18232}=1,2$, $p=\frac{R-d}{u-d}=0,7$, $h=\frac{C_u-C_d}{Su-Sd}=\frac{C_u-C_d}{S}$, $C=\frac{pC_u+(1-p)C_d}{R}=\frac{0,7\times C_u+0,3\times C_d}{1,2}$.

Любая неправильная оценка ведет к арбитражной прибыли. Предположим, что опцион продается за \$90, т.е. по более высокой цене. Тогда мы продаем колл за \$90 и инвестируем \$85,069 в эквивалентный портфель с 0,82031 сертификата акции, как того и требует дельта. Чтобы собрать такой портфель, нам нужно занять $0,82031 \times 160 - 85,069 = 46,1806$ долларов. В остатке останется $90 - 85,069 = 4,931$ долларов. Как мы вскоре увидим, эта сумма и будет арбитражной прибылью.

Шаг 1. Предположим, что цена акции поднимается до \$240. Новое дельта равно 0,90625. Покупаем на $0,90625 - 0,82031 = 0,08594$ больше акций за $0,08594 \times 240 = 20,6256$ долларов, занимая и эту сумму. Тем самым наш долг становится равным $20,6256 + (46,1806 \times 1,2) = 76,04232$ долларам.

Шаг 2. Предположим, что цена акции падает до \$120. Новое дельта равно 0,25. Продаем $0,90625 - 0,25 = 0,65625$ акций и получаем доход в сумме $0,65625 \times 120 = 78,75$ долларов. Используем эту сумму для уменьшения долга до $(76,04232 \times 1,2) - 78,75 = 12,5$ долларов.

Шаг 3 (случай роста цены). Цена акции поднимается до \$180, и проданный опцион колл заканчивает в деньгах. Из-за потери в $180 - 150 = 30$ долларов закрываем позицию либо выкупая опцион, либо покупая нужное количество акций для поставки. Финансирование этих расходов увеличивает сумму займа до $(12,5 \times 1,2) + 30 = 45$ долларов, которые мы возвратим, когда продадим 0,25 акции за $0,25 \times 180 = 45$ долларов.

Шаг 4 (случай падения цены). Цена акции понизилась до \$60. Проданный опцион колл становится бесполезным. Продаем 0,25 акции на сумму $0,25 \times 60 = 15$ и возвращаем наш долг, ставший к этому моменту равным $12,5 \times 1,2 = 15$ долларам.

9.2.4 Численные алгоритмы для Европейских опционов

Алгоритмы биномиального дерева. В модели БМО естественно возникает **алгоритм биномиального дерева**, который использует обратную индукцию. Алгоритм рис. 9.6 оценивает стоимость опционов колл на бездивидендную акцию с помощью идеи, проиллюстрированной на рис. 9.7. Этот алгоритм легко анализировать. Первый цикл можно реализовать за $O(n)$ шагов, а последующий двойной цикл — за $O(n^2)$ шагов. Общее используемое время, таким образом, квадратично. Требования к памяти также квадратичны. Чтобы приспособить алгоритм, представленный на рис. 9.6 к оценке Европейских опционов пут, нужно просто заменить $\max(0, Su^{n-i}d^i - X)$ на шаге 1 на $\max(0, X - Su^{n-i}d^i)$.

Реализация алгоритма биномиального дерева начинается с последнего периода и прокладывает себе дорогу к текущему. Это означает, что требования к памяти можно ослабить за счет повторного использования пространства. А именно, заменим величину $C[0..n][0..n]$ в схеме на рис. 9.6 на одномерное множество $C[0..n]$ размера $n+1$. После этого изменим шаг 1 на

$$C[i] := \max(0, Su^{n-i}d^i - X);$$

Шаг 2.1 следует скорректировать следующим образом:

$$C[i] := \{p \times C[i] + (1-p) \times C[i+1]\}/R;$$

Наконец ответом будет служить $C[0]$ вместо $C[0][0]$. Объем памяти теперь стал линейным. А одномерное множество представлено полосой на рис. 9.7 и будет использовано на протяжении всей книги.

Но можно и продолжить улучшение алгоритма, замечая, что если $C[j+1][i]$ и $C[j+1][i+1]$ оба нули, то $C[j][i]$ также есть нуль. Поэтому i -му циклу внутри двойного цикла следует позволить пробегать только от нуля до $\min(n-a, j)$, а не до j , где a определено в (9.9). Это позволит алгоритму реализоваться за $O(n(n-a))$ шагов, что может быть существенно

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости опциона колл на бездивидендную акцию:

ввод: $S, u, d, X, n, \hat{r}$ ($u > \hat{e}^{\hat{r}} > d, \hat{r} > 0$);
 действительные числа $R, p, C[0..n+1][0..n+1]$;
 целые i, j ;
 $R := \hat{e}^{\hat{r}}$;
 $p := (R - d)/(u - d)$;
 для ($i = 0$ до n)
 1. $C[n][i] := \max(0, Su^{n-i}d^i - X)$;
 для ($j = n - 1$ вниз до 0)
 для ($i = 0$ до j)
 2.1. $C[j][i] := (p \times C[j+1][i] + (1-p) \times C[j+1][i+1])/R$;
 вывод $C[0][0]$;

Рис. 9.6. Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости опциона колл на бездивидендную акцию. Величины $C[j][i]$ представляют стоимость опциона в момент j при условии, что цена акции падает i раз из общего числа j своих изменений.

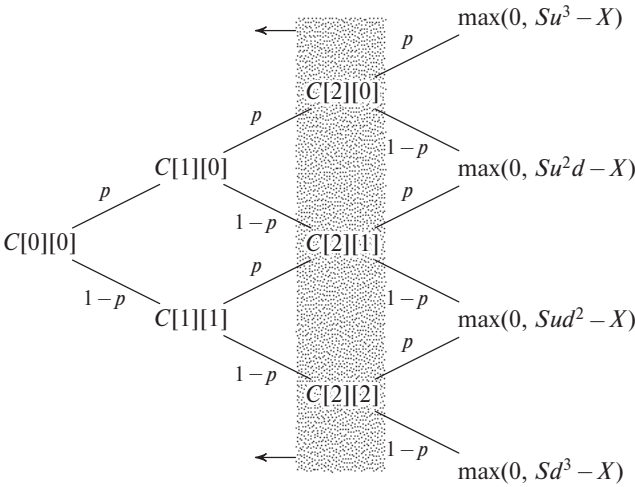


Рис. 9.7. Обратная индукция на биномиальных деревьях. Алгоритмы биномиального дерева сначала, на шаге 1, определяют значения стоимости в конце срока с помощью алгоритма на рис.9.6. Затем они используются для последовательного получения промежуточных значений стоимости в полосе, пробегающей от конечного момента времени до корня дерева.

меньше, чем $O(n^2)$, если a велико. Ограничение по памяти также может быть сведено до $O(n - a)$ с помощью меньшего одномерного множества $C[0 \dots n - a]$. На рис. 9.8 это одномерное множество представлено полосой.

Задание по программированию 9.2.12. Реализуйте алгоритмы биномиального дерева для опционов колл и пут.

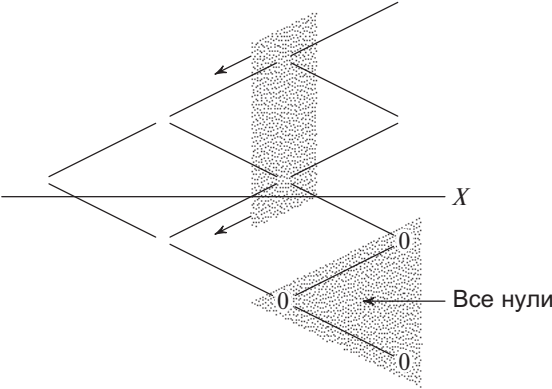


Рис. 9.8. Пропуск узлов с нулевой стоимостью для повышения эффективности. Акция станет бесполезной, если ее стоимость в конце окажется ниже горизонтальной линии. Нули же в заключительных узлах «породят» нули внутри дерева, скажем, для колла это будет так, как изображено на рисунке. Все эти узлы из алгоритма биномиального дерева можно убрать. Заметим, что цены акции в узлах одного уровня равны, если $ud = 1$.

Оптимальный алгоритм. Чтобы уменьшить затрачиваемое время до $O(n-a)$ и требования к памяти до $O(1)$, заметим, что

$$b(j; n, p) = \frac{p(n-j+1)}{(1-p)j} b(j-1; n, p).$$

Следующая программа рассчитывает $b(j; n, p)$ в $b[j]$ для $a \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} b[a] &:= \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a}; \\ \text{для } (j = a+1 \text{ до } n) \\ b[j] &:= b[j-1] \times p \times (n-j+1) / [(1-p) \times j]; \end{aligned}$$

Очевидно, ей требуется для этого $O(n-a)$ шагов. Но при наличии величин $b(j; n, p)$ провести риск-нейтральную оценку стоимости по формуле (9.10) не составит труда. Случай опционов пут аналогичен. Что же касается памяти, то для хранения величин $b(j; n, p)$ нам нужна лишь одна переменная вместо целого их набора, поскольку они вычисляются последовательно. Соответствующий алгоритм приведен на рис. 9.9. Этот линейный по времени алгоритм вычисляет дисконтированное ожидаемое значение величины $\max(S-X, 0)$. Его можно использовать для оценки любого Европейского опциона. Так, например, если функция выплаты есть $\max(\sqrt{S}-X, 0)$, то мы просто заменяем $D-X$ в алгоритме на $\sqrt{D}-X$. Но применить вышеуказанный подход к Американским опционам нельзя, поскольку там возможно досрочное исполнение. Как следствие для своей реализации алгоритмы для Американских опционов обычно требуют не линейного, а квадратичного времени. При этом этот разрыв в эффек-

**Линейный по времени алгоритм с постоянной памятью
для оценки стоимости опционов колл на бездивидендную акцию:**

```

ввод:  $S, u, d, X, n, \hat{r}$  ( $u > \hat{e}^{\hat{r}} > d$  и  $\hat{r} > 0$ );
действительные числа  $R, p, b, D, C$ ;
целые  $j, a$ ;
 $a := \lceil \ln(X/Sd^n) / \ln(u/d) \rceil$ ;
 $p := (\hat{e}^{\hat{r}} - d) / (u - d)$ ;
 $R := \hat{e}^{n\hat{r}}$ ;
 $b := p^a (1-p)^{n-a}$ ; // величины  $b(a; n, p)$  вычисляются
 $D := S \times u^a d^{n-a}$ ;
 $C := b \times (D - X) / R$ ;
для  $(j = a+1 \text{ до } n)$  {
     $b := b \times p \times (n-j+1) / ((1-p) \times j)$ ;
     $D := D \times u/d$ ;
     $C := C + b \times (D - X) / R$ ;
}
вывод  $C$ ;
```

Рис. 9.9. Оптимальный алгоритм для Европейских опционов колл на бездивидендную акцию. Переменная b размещает величины $b(j; n, p)$ для $j = a, a+1, \dots, n$, именно в этом порядке, а переменная C производит суммирование слагаемых из равенства (9.10), а точнее, величин $b(j; n, p) \times (Su^j d^{n-j} - X) / \hat{e}^{j\hat{r}}$ при $j = a, a+1, \dots, n$.

тивности при оценке стоимости между Американскими и Европейскими опционами представляется, вообще говоря, отражающим суть дела.

Упражнение 9.2.13. Преобразуйте линейный по времени алгоритм, представленный на рис. 9.9, так, чтобы он смог оценивать стоимость опционов пут.

Задание по программированию 9.2.14. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 9.9, и определите его скорость. Поскольку переменные b и D могут принимать экстремальные значения, то для поддержания точности их следует представлять с помощью логарифмов.

Метод Монте-Карло. А теперь самое время познакомить читателя с **методом Монте-Карло**. Выражение (9.8) можно считать математическим ожиданием с.в. Z , принимающей значения

$$R^{-n} \max(0, Su^j d^{n-j} - X) \text{ с вероятностью } b(j; n, p), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Чтобы получить оценку для этого математического ожидания, проведем эксперимент с бросанием n монет, в котором при каждом бросании герб выпадает с вероятностью p , и будем считать исходом эксперимента величину

$$R^{-n} \max(0, Su^j d^{n-j} - X),$$

если в результате выпадет j гербов. Повторим процедуру m раз и возьмем среднее арифметическое полученных исходов. Ясно, что это среднее, рассматриваемое как случайная величина, имеет нужное математическое ожидание EZ . Более того, его дисперсия равна DZ/m и потому при увеличении m стремится к нулю.

Оценка стоимости Европейских опционов может оказаться слишком простой проблемой, чтобы использовать метод Монте-Карло. Но в п. 18.2 мы увидим, что метод Монте-Карло является неоценимым инструментом для оценки стоимости производных ЦБ Европейского типа и ЦБЗ (ЦБ, обеспеченная закладными).

Задание по программированию 9.2.15. Примените метод Монте-Карло. Понаблюдайте за его скоростью сходимости при увеличении объема выборки m .

Рекуррентный подход и его алгоритм. Большинство задач по оценке стоимости производных ЦБ могут быть четко и естественно представлены *рекуррентным* образом, хорошо знакомым всем программистам. Но прямолинейных подходов к реализации алгоритма следует избегать. К примеру, рекуррентная реализация проблемы оценки стоимости опционов в биномиальной модели для опционов колл имеет следующий вид:

```
Оценить  $(S, u, d, X, n, \hat{r})$  { // рекуррентная оценка стоимости Евроколл
   $p := (e^{\hat{r}} - d)/(u - d)$ ;
  если  $[n = 0]$  вывод  $\max(S - X, 0)$ ;
  в противном случае вывод  $[p \times \text{Оценить}(Su, u, d, X, n - 1, \hat{r}) +$ 
     $+ (1 - p) \times \text{Оценить}(Sd, u, d, X, n - 1, \hat{r})]/e^{\hat{r}}$ ;
}
```

Однако, если использовать все возможные последовательности цен акций длины n , то время прогона такого алгоритма окажется равным $O(n2^n)$, что не очень-то практично.

9.3 Формула Блэка—Шоулса

На первый взгляд кажется, что биномиальная модель страдает от следующих двух нереалистичных предположений: 1) цена акции принимает лишь два значения в периоде и 2) торговля происходит в дискретные моменты времени. Однако эти недостатки скорее кажущиеся, чем реальные. По мере роста числа периодов диапазон возможных значений цен растет вместе с ним, а торговля начинает происходить практически непрерывно. И все, что требуется сделать, так это подобрать такое сочетание параметров модели, чтобы в пределе модель сходилась к своему непрерывному аналогу.

9.3.1 Распределение доходности

Пусть τ означает время до окончания срока действия опциона, измеряемое в годах, и r — ежегодная ставка непрерывного начисления процентов. При n периодах жизни опциона, следовательно, каждый период представляет собой временной интервал τ/n . Наша работа состоит в том, чтобы так подобрать выбранные для периода параметры u , d , и процентную ставку, представляемую величиной $\hat{r}$, чтобы модель приводила к результатам, совпадающим с эмпирическими данными при n стремящемся к бесконечности. При этом ясно, что должно быть $\hat{r} = r\tau/n$. И, как и прежде, пусть R обозначает грубый доход $e^{\hat{r}}$ за период.

Приступим далее к поиску «подходящих» u и d . В биномиальной модели величины $\ln u$ и $\ln d$ можно интерпретировать как две возможные ставки (доходности акции) непрерывного начисления за период. Сама же доходность (или ставка доходности) как с.в., в каждом периоде характеризуется следующей **бернуллиевской с.в.**:

$$B_i = \begin{cases} \ln u & \text{с вероятностью } q, \\ \ln d & \text{с вероятностью } 1 - q, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n,$$

имеющей математическое ожидание и дисперсию, соответственно, равные

$$\hat{\mu} \equiv EB_i = q \ln(u/d) + \ln d, \quad \hat{\sigma}^2 \equiv DB_i = q(1 - q) \ln^2(u/d). \quad (9.12)$$

С другой стороны, если S_τ означает цену акции в момент окончания срока действия опциона, то совокупная непрерывная доходность акции $\ln(S_\tau/S)$ является суммой n независимых вышеуказанных бернуллиевских с.в. и

$$\ln \frac{S_\tau}{S} = B \equiv \sum_{i=1}^n B_i = \ln \frac{Su^z d^{n-z}}{S} = z \ln(u/d) + n \ln d, \quad (9.13)$$

где z — это число скачков цены акции вверх за n периодов. Причем, как известно, с.в. z имеет биномиальное распределение, точнее говоря,

$$P\{z = j\} = b(j; n, q), \quad 0 \leq j \leq n,$$

и $Ez = nq$, $Dz = nq(1 - q)$.

Итак, мы разбили промежуток в τ лет на n периодов длины τ/n лет, каждому из которых поставили в соответствие с.в. B_i с параметрами $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$. Поэтому, если мы хотим, чтобы математическое ожидание и дисперсия истинных ставок ежегодной доходности акции непрерывного начисления (рассматриваемых как независимые, но одинаково распределенные с.в.) за каждый из τ лет сходились, соответственно, к некоторым положительным числам μ и σ^2 , то в силу вышеуказанных соображений должны выполняться условия

$$n\hat{\mu} \rightarrow \mu\tau, \quad n\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2\tau. \quad (9.14)$$

Назовем σ (ежегодной) **волатильностью** акции. И предположим, что выполнено условие $ud=1$, благодаря которому цены в узлах на одной горизонтальной линии биномиального графа будут одинаковыми (см. рис. 9.8). В этом случае убедиться в справедливости соотношений (9.14) нетрудно, если предположить, что

$$u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}} \quad (9.15)$$

(в отношении альтернативного выбора величин u , d , и q см. упр. 9.3.1 и 9.3.8.). В самом деле, при выполнении (9.15) и с учетом (9.12)

$$n\hat{\mu} = \mu\tau, \quad n\hat{\sigma}^2 = \left[1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{\tau}{n}\right] \sigma^2\tau \rightarrow \sigma^2\tau.$$

Отметим, кроме того, что безарбитражные неравенства $d < R < u$ в условиях (9.15) могут не выполняться, а риск-нейтральная вероятность может находиться вне интервала $[0, 1]$. Одно из решений этой проблемы приведено в упр. 9.3.1, а другое в п. 12.4.3. Но в любом случае проблемы исчезают, когда n становится достаточно большим.

Каким же является предельное распределение вероятностей ставки доходности непрерывного начисления процентов B ? Центральная предельная теорема говорит о том, что при некоторых слабых условиях суммы независимых с.в., такие как B , сходятся к нормальному распределению, т.е. равномерно по y

$$P\left\{\frac{\ln(S_\tau/S) - n\hat{\mu}}{\sqrt{n}\hat{\sigma}} \leq y\right\} \rightarrow \Phi(y), \quad \text{где} \quad \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx.$$

Одним из простых условий, гарантирующих справедливость центральной предельной теоремы, является **условие Ляпунова** [100], в котором так называемая «дробь Ляпунова» должна сходиться к нулю и которое для сумм независимых и одинаково распределенных с.в. с конечным третьим абсолютным моментом выполняется со «скоростью» $1/\sqrt{n}$. Точнее говоря, в рассматриваемой ситуации оно может быть записано в виде

$$\frac{q|\ln u - \hat{\mu}|^3 + (1-q)|\ln d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{n}} = \frac{(1-q)^2 + q^2}{\sqrt{n}q(1-q)} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что с учетом соотношений (9.15) это условие выполняется.

Итак, ставка доходности непрерывного начисления за τ лет сближается с нормальным законом со средним $\mu\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$. Как следствие, $\ln S_\tau$ сближается с нормальным законом со средним $\mu\tau + \ln S$ и дисперсией $\sigma^2\tau$. Таким образом, величина S_τ в пределе имеет логнормальное распределение. Причина использования ставки непрерывного начисления теперь понятна: желательно превратить доходность в нормально распределенную с.в.

Логнормальность цены акции имеет ряд положительных свойств. Прежде всего цены остаются положительными, если такова первая из них. Далее, хотя и не существует верхней границы для цены акции, но большие ее скачки вверх или вниз маловероятны. Наконец, одинаковые изменения ставки вокруг среднего равновероятны в силу симметрии нормального закона: S_1 и S_2 равновероятны, если $S_1/S = S/S_2$.

Упражнение 9.3.1. Волатильность цены в биномиальной модели должна совпадать с волатильностью реальной акции в пределе. Поскольку величина q не играет особой роли в БМОО, то существуют и другие способы выбора параметров u и d . Предположим, что мы исходим из равенства $q=0,5$ вместо предположения, что $ud=1$.

1) Покажите, что при выборе

$$u = \exp \left[\frac{\mu\tau}{n} + \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} \right], \quad d = \exp \left[\frac{\mu\tau}{n} - \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} \right]$$

соотношения в (9.14) выполняются как равенства.

2) Имеет ли смысл использовать вероятность 0,5, проводя обратную индукцию в этих новых условиях?

Замечание 9.3.1. Напомним, что в методе Монте-Карло в п.9.2.4 использовалась не симметричная монета. Схема из упр.9.3.1, наоборот, использует симметричную монету, что может облегчить задачи программирования. Тем не менее преимуществом выбора (9.15) является равенство $ud=1$, при котором часто проще строить алгоритмы. Однако альтернативные способы выбора величин u и d , если и оказывают влияние на сходимость алгоритмов биномиального дерева, то небольшое.

◁

Упражнение 9.3.2. Покажите, что

$$\frac{E[(S_{\Delta t} - S)/S]}{\Delta t} \rightarrow \mu + \frac{\sigma^2}{2}, \quad (9.16)$$

при $\Delta t \equiv \tau/n \rightarrow 0$.

Замечание 9.3.2. Обратите внимание на разницу между первым соотношением в (9.14) и сходимостью (9.16). Первое утверждает, что ежегодная ставка доходности непрерывного начисления на протяжении τ лет, $\ln(S_\tau/S)/\tau$, имеет среднее μ , в то время как из второй вытекает, что у мгновенной ставки доходности $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ((S_{\Delta t} - S)/S)/\Delta t$, среднее больше, а именно, оно равно $\mu + \sigma^2/2$.

◁

9.3.2 Вывод формулы Блэка—Шоулса

Предпримем теперь последний шаг на пути к формуле Блэка—Шоулса при условии, что $n \rightarrow \infty$, а q совпадает с риск-нейтральной вероятностью $p \equiv (e^{r\tau/n} - d)/(u - d)$. А именно, покажем, что в такой ситуации $\mu = r - \sigma^2/2$, а заодно и подведем итог сказанному выше.

Лемма 9.3.3 *Ставка доходности непрерывного начисления B из (9.13) в риск-нейтральной экономике при $n \rightarrow \infty$ сближается с нормальным распределением со средним $\mu\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$, причем $\mu = r - \sigma^2/2$.*

Доказательство. Используя представление $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots$ для записи вероятности p получаем, что

$$p \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}}. \quad (9.17)$$

Поэтому из выражения для q в (9.15) вытекает, что $\mu = r - \sigma^2/2$. Что же касается сходимости распределения суммы B к нормальному закону с указанными параметрами, то она была установлена выше в силу (9.14) и справедливости условия Ляпунова при q из (9.15). $\square$

Из леммы 9.3.3 и равенств (6.11) вытекает, что ожидаемая цена акции в момент окончания срока действия опциона в риск-нейтральной экономике равна $Se^{r\tau}$. Таким образом, ожидаемая ежегодная ставка доходности акции совпадает с безрисковой ставкой r .

Теорема 9.3.4 (формула Блэка—Шоулса). *Если $q = p$ и $n \rightarrow \infty$, то в пределе получится, что*

$$\begin{aligned} C &= S\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \\ P &= Xe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - S\Phi(-x), \end{aligned}$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Доказательство. Поскольку для вывода формулы стоимости Европейского опциона пут из формулы для опциона колл можно использовать паритет пут—колл, то установим формулу лишь для опциона колл. Биномиальная же формула для оценки стоимости из теоремы 9.2.2 похожа на формулу Блэка—Шоулса. Более того, ясно, что для доказательства настоящей теоремы достаточно лишь проверить соотношения

$$\Phi(a; n, p e^{-\hat{r}}) \rightarrow \Phi(x), \quad \Phi(a; n, p) \rightarrow \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}). \quad (9.18)$$

В силу полной аналогии их доказательств установим лишь второе: $\Phi(a; n, p) \rightarrow \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})$.

Напомним, что $\Phi(a; n, p)$ есть вероятность получения не меньше a успехов в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха равна p . Пусть, как и ранее, z обозначает число

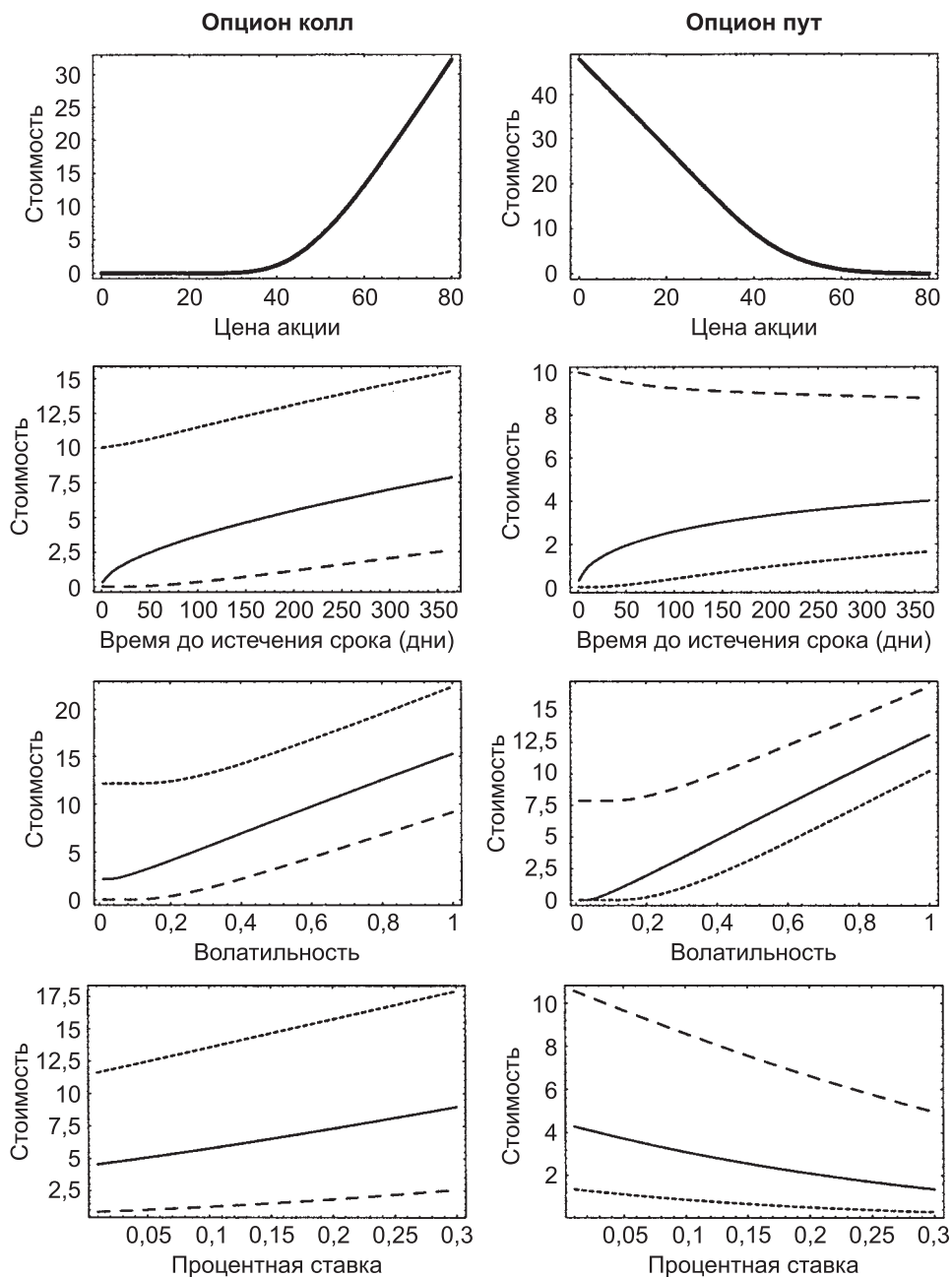


Рис. 9.10. Стоимость Европейского опциона как функция параметров. Параметры: $S=50$, $X=50$, $\sigma=0,3$, $\tau=201$ день и $r=8\%$. Если на одном графике изображены три кривые, то редкая пунктирная линия представляет значение $S=40$ (опцион колл вне денег или пут в деньгах), сплошная — представляет значение $S=50$ (около денег) и частая пунктирная линия относится к значению $S=60$ (опцион колл в деньгах).

успехов (т.е. скачков цены вверх) в n таких испытаниях. Тогда в силу (9.13) и (9.14)

$$1 - \Phi(a; n, p) = P\{z < a\} = P\{B < a \ln(u/d) + n \ln d\} = \\ = P\left\{ \frac{B - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} < \frac{a \ln(u/d) + n \ln d - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \sim \frac{\ln(X/S) - \varepsilon \ln(u/d) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right\}, \quad (9.19)$$

если еще учесть, что из определения величины a в (9.9) вытекает равенство $(a + \varepsilon) \ln(u/d) = \ln(X/S) - n \ln d$ при некотором фиксированном $0 \leq \varepsilon < 1$. Но $\varepsilon \ln(u/d) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, в силу (9.15). Поэтому мы доказали, что $1 - \Phi(a; n, p) \rightarrow \Phi(-y)$, где $y = \frac{\ln(X/S) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$. А это и означает, что $\Phi(a; n, p) \rightarrow \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})$,

поскольку $1 - \Phi(-y) = \Phi(y)$, а $y = x - \sigma\sqrt{\tau}$. $\square$

Представим теперь на рис. 9.10 стоимость опционов колл и пут в виде функции от каждого из следующих четырех параметров: текущей цены акции, времени до окончания срока действия опциона, волатильности и процентной ставки. Заметим, в частности, что стоимость опционов в случае «при своих» по существу является линейной функцией волатильности.

Упражнение 9.3.3. Проверьте нижеследующие утверждения с помощью формулы Блэка—Шоулса, а также приведите эвристические соображения, объясняющие их справедливость без нее.

- 1) $C \approx S - Xe^{-r\tau}$, если $S \gg X$.
- 2) $C \rightarrow S$ при $\tau \rightarrow \infty$.
- 3) $C \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$ и если $S < Xe^{-r\tau}$.
- 4) $C \rightarrow S - Xe^{-r\tau}$ при $\sigma \rightarrow 0$ и если $S > Xe^{-r\tau}$.
- 5) $C \rightarrow S$ при $r \rightarrow \infty$.

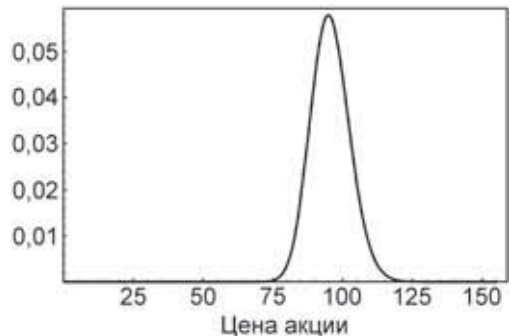
Упражнение 9.3.4. Проверьте справедливость соотношения (9.17).

Упражнение 9.3.5. По двойному опциону колл выплачивается \$1, если стоимость используемого актива оказывается выше цены исполнения и ничего в противном случае³. Покажите, что его стоимость равна $e^{-r\tau} \times \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})$.

Упражнение 9.3.6. Докажите равенство $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}$ (см. рис. 9.11).

Упражнение 9.3.7. Покажите, что теорема 9.3.4 вытекает из леммы 9.3.3 и упр. 6.1.6.

Рис. 9.11. Стоимость условно постоянного требования. Упр. 7.4.5 утверждает, что функция $\partial^2 C / \partial x^2$, изображенная здесь для цены исполнения \$95, является стоимостью условно постоянного требования. А фундаментальное тождество из упр. 9.3.6 применяется при оценке стоимости активов.



Табулирование значений стоимости опциона. Перепишем формулу Блэка—Шоулса для Евроколл в следующем виде:

$$C = Xe^{-r\tau} \left[\frac{S}{Xe^{-r\tau}} \Phi(x) - \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}) \right], \quad \text{где} \quad x \equiv \frac{\ln \frac{S}{Xe^{-r\tau}}}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}.$$

Таблица со входами

$$\frac{S}{Xe^{-r\tau}} \Phi(x) - \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}),$$

зависящими от величин $S/(Xe^{-r\tau})$ и $\sigma\sqrt{\tau}$, позволяет любому человеку взглянуть на стоимость опциона, определяемую по значениям S , X , r , τ и σ . Ведь стоимость опциона колл тогда получается простым умножением табулированных значений на величину $Xe^{-r\tau}$. Заранее построенная таблица тщательно выбранных значений стоимости опциона может в действительности использоваться для оценки стоимости опциона при помощи интерполяции [529].

9.3.3 Модель Блэка—Шоулса и БМОО

Формуле Блэка—Шоулса нужны пять параметров: S , X , σ , τ , и r . Однако, алгоритмы биномиального дерева используют шесть входов: S , X , u , d , $\hat{r}$ и n . Связи между ними просты:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}, \quad \hat{r} = r\tau/n.$$

Возникающие в результате алгоритмы биномиального дерева сходятся достаточно быстро, но как видно по рис. 9.12, им свойственны колебания [704]. Эти колебания могут быть устранены тщательным подбором значений u и d (см. упр. 9.3.8).

Пример 9.3.5. Рассмотрим 3-месячный опцион с ежегодной процентной ставкой 8% и ежегодной волатильностью 30%. Тем самым, у нас $\tau = 0,25$, $r = 0,08$, и $\sigma = 0,3$. Если алгоритм биномиального дерева исполь-

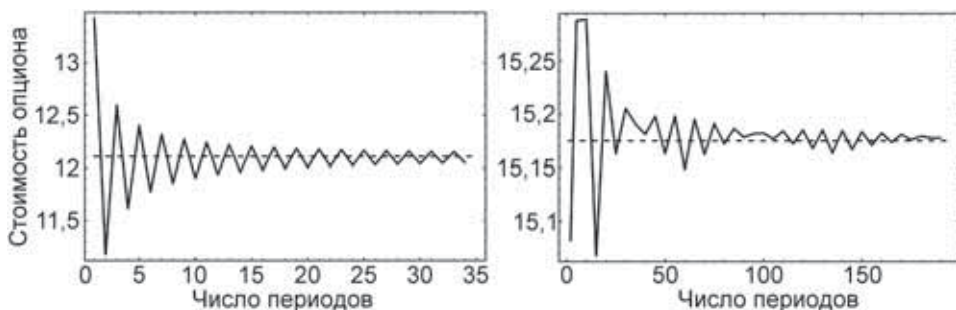


Рис. 9.12. Сходимость алгоритма биномиального дерева. Изображена стоимость Европейского опциона колл как функция числа периодов n , получаемая при помощи алгоритма биномиального дерева. Параметрами являются: $S = 100$, $X = 100$ (слева) и $X = 95$ (справа), $r = 8\%$, $\sigma = 0,2$ и $\tau = 1$. Для сравнения приведены теоретические значения, 12,1058 (слева) и 15,1749 (справа).

зует значение $n=5$, то соответственно будут использоваться значения $u = e^{0,3\sqrt{0,25/5}} = 1,0694$ и $d = e^{-0,3\sqrt{0,25/5}} = 0,9351$. $\triangleleft$

Упражнение 9.3.8. Вот еще один способ выбора u и d :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n} + (1/n) \ln(X/S)}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n} + (1/n) \ln(X/S)}, \quad q = \frac{e^{r\tau/n} - d}{u - d}.$$

- 1) Покажите, что он работает.
- 2) Есть ли что-то характерное у этого выбора?

9.4 Использование формулы Блэка—Шоулса

9.4.1 Процентная ставка

Безрисковой ставкой r должна быть спот-ставка со сроком погашения, близким к дате окончания срока действия опциона (на практике конкретный выбор ставки зависит от инвестора [228]). Такой выбор может быть оправдан следующим образом. Обозначим r_i однопериодную процентную ставку непрерывного начисления, относящуюся к периоду с номером i . Тогда облигация со сроком погашения, совпадающим со сроком жизни опциона стоит в процентах от номинала $\exp \left[- \sum_{i=1}^n r_i \right]$. Это означа-

ет, что $r\tau = \sum_{i=1}^n r_i$. Поэтому лишь цена дисконтной облигации с погашением в момент n (или, что эквивалентно, n — периодная спот-ставка) содержит в себе всю информацию, нужную для процентных ставок. В пределе $\sum_{i=0}^{n-1} r_i \rightarrow \int_0^\tau r(t) dt$, где $r(t)$ — мгновенная ставка момента t . Соответствующая средняя ежегодная ставка, таким образом, есть $r = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau r(t) dt$.

Неопределенность процентной ставки может не сказываться слишком сильно на опционах со сроком жизни, меньшим 1 года. Графики на рис. 9.10 также подтверждают, что малые изменения процентных ставок, при прочих равных условиях, заметно на стоимости опциона не сказываются.

9.4.2 Оценивание волатильности по прошлым данным

Параметр волатильности σ является единственным, за которым нельзя наблюдать непосредственно и потому его следует оценивать. В формуле Блэка—Шоулса предполагается, что цены акций распределены логнормально. Другими словами, n ставок непрерывного начисления доходности за период,

$$u_i \equiv \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

представляют собой независимую выборку из нормального равнораспределения со средним $\mu\tau/n$ и дисперсией $\sigma^2\tau/n$, где S_i обозначает цену акции в момент i . Хорошей оценкой стандартного отклонения однопериодной

ставки доходности является величина

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

где $\bar{u} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{n} \ln \frac{S_n}{S_0}$. Указанная оценка является смещенной, и в том числе по причине разрыва в спросе и предложении, а также в связи с дискретностью цен акций [48, 201]. Оценки, использующие верхние и нижние цены могут теоретически быть лучше в том смысле, что имеют меньшую дисперсию [374]. Отметим, что $\bar{u}$ и $s^2(n-1)/n$ являются МП-оценками (оценками максимального правдоподобия) для μ и σ^2 , соответственно (см. п. 20.1).

Чтобы избежать обращения к логарифмам, иногда вместо u_i используется **ставка простых процентов** $(S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$. Это не совсем корректно, поскольку $\ln x \approx x - 1$ лишь если x близок к единице, а небольшая ошибка при такой аппроксимации может привести к большой разнице в стоимости опциона [147].

Если же период содержит дату выплаты дивидендов, то прежнюю выборочную ставку доходности следует заменить на

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}},$$

где D — сумма выплаченных дивидендов. Если в периоде происходит дробление акции в соотношении « n -за- m », то выборочную ставку доходности следует использовать в виде

$$u_i = \ln \frac{nS_i}{mS_{i-1}}.$$

Поскольку стандартное отклонение доходности равняется $\sigma\sqrt{\tau/n}$, то оценкой для σ будет величина $s/\sqrt{\tau/n}$. Это значение называется **исторической волатильностью**. Эмпирические наблюдения подсказывают также, что дни, когда акции не торгуются, должны быть исключены из расчета. А некоторые аналитики при определении промежутка τ вообще учитывают лишь торговые дни [514].

Как и с процентной ставкой, волатильности можно позволить быть функцией времени до тех пор, пока она останется предсказуемой. В биномиальной модели это будет означать, что u и d также зависят от времени. Тогда дисперсия величины $\ln(S_\tau/S)$ становится скорее равной $\int_0^\tau \sigma^2(t) dt$, чем $\sigma^2\tau$, а для волатильности имеем выражение $\left[\int_0^\tau \sigma^2(t) dt/\tau \right]^{1/2}$. Но здесь мы предостережем читателя: имеются экспериментальные данные, заставляющие думать, что волатильность случайна (см. п. 15.5).

9.4.3 Индуцированная волатильность

Формулу Блэка—Шоулса можно использовать для выявления мнения рынка о волатильности. Для этого достаточно рассматривать формулу как уравнение относительно σ при данной стоимости опциона, а также известных S , X , τ , r , и решать его с помощью численных методов из

п. 3.4.3. Полученная таким образом волатильность называется **выявленной волатильностью**, индуцированной — или волатильностью, обусловленной рыночной ценой опциона. Численные значения волатильности часто помещаются в таблицах со входами «сроки погашения» и «цены акций» [470, 482].

На практике выявленную волатильность предпочитают исторической, но это не всегда правильно. Опционы, выписываемые на один и тот же базовый актив обычно не отличаются одной и той же волатильностью. Типичной её формой является «улыбка» по отношению к цене исполнения: т. е. выявленная волатильность*) минимальна для опционов «при своих» и становится тем больше, чем глубже опцион оказывается в деньгах или вне денег [150]. Этот пример особенно показателен для краткосрочных опционов [44] и не может быть объяснен возможностью раннего исполнения Американских опционов [97]. Если обратиться к этому изданию, то волатильности часто комбинируют для получения составной обусловленной волатильности. Теоретически такая практика не обоснована. В действительности же существование различных обусловленных волатильностей у опционов на один и тот же актив показывает, что модель оценки стоимости опциона Блэка—Шоулса не может быть до конца верной. В п. 15.5 дается краткий обзор попыткам объяснить эту «улыбку».

Упражнение 9.4.1. Расчет волатильности, вытекающей из рассматриваемой ситуации, с помощью цены опциона может быть упрощен, если она является монотонной функцией волатильности. Покажите, что для формулы Блэка—Шоулса это верно.

Упражнение 9.4.2. Попытка найти обусловленную волатильность у Американских опционов точно так же, как если бы они были Европейскими, переоценивает истинную волатильность. Обсудите эту тему.

Упражнение 9.4.3 (обусловленное биномиальное дерево). Предположим, что нам даны m различных цен Европейских опционов с одинаковым сроком до погашения, их цены исполнения, текущие цены базовых активов, значения σ для этих активов и безрисковая ставка.

1) Каким должно быть n ?

2) Предположим, что вероятности выбора конкретного пути для всех путей, ведущих в один и тот же узел равны. Как следует рассчитать (обусловленные) вероятности выхода из каждого узла биномиального дерева для того, чтобы стоимость этих опционов была определена правильно?

Задание по программированию 9.4.4. Напишите программу для расчета обусловленной волатильности Американских опционов.

9.5 Американские опционы пут на бездивидендные акции

При оценке стоимости Американских путов следует рассматривать и досрочное исполнение. Поскольку тот, кто исполняет пут, получает цену исполнения и зарабатывает временную стоимость денег,

*) Как функция цены исполнения. — Прим. перев.

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости Американских опционов пут на бездивидендные акции:

ввод: $S, u, d, X, n, \hat{r}$ ($u > e^{\hat{r}} > d$ и $\hat{r} > 0$);
 действительные числа $R, p, P[0..n]$;
 целые i, j ;
 $R := e^{\hat{r}}$;
 $p := (R - d)/(u - d)$;
 для ($i = 0$ до n) { $P[i] := \max(0, X - Su^{n-i}d^i)$; }
 для ($j = n - 1$ и далее до 0)
 для ($i = 0$ до j)
 $P[i] := \max((p \times P[i] + (1 - p) \times P[i + 1])/R, X - Su^{j-i}d^i)$;
 вывод $P[0]$;

Рис. 9.13. Алгоритм биномиального дерева для Американских опционов пут на бездивидендные акции.

то для досрочного исполнения имеется стимул. Но, с другой стороны, раннее исполнение может оказаться для владельца невыгодным, если позже цена акции начнет расти.

Алгоритм биномиального дерева начинается с определения последней выплаты $\max(0, X - Su^j d^{n-j})$ и опирается на обратную индукцию. На каждом промежуточном узле он проверяет целесообразность досрочного исполнения, сравнивая выплату в случае исполнения с продолжением. Полный алгоритм квадратичного времени представлен на рис. 9.13. На рис. 9.14 сравниваются стоимости Американского опциона пут и его Европейского двойника.

Давайте подробно разберем численный пример. Предположим, что $S = 160$, $X = 130$, $n = 3$, $u = 1,5$, $d = 0,5$ и $R = e^{0,18232} = 1,2$. Можно проверить, что при этом $p = \frac{R-d}{u-d} = 0,7$, $h = \frac{P_u - P_d}{S(u-d)} = \frac{P_u - P_d}{S}$ и $P = \frac{pP_u + (1-p)P_d}{R} = \frac{0,7 \times P_u + 0,3 \times P_d}{1,2}$. Рассмотрим узел A на рис. 9.15. В этом случае ожида-

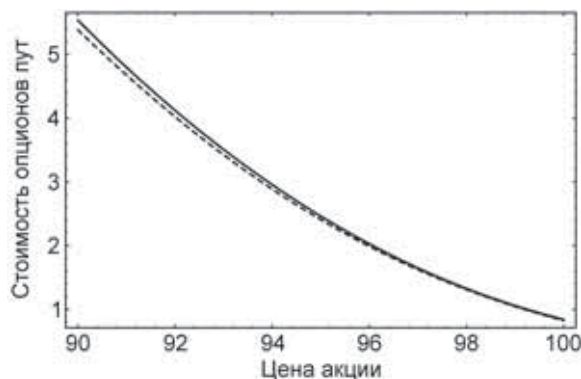


Рис. 9.14. Американский опцион пут в сравнении с Европейским. Изображена цена Американского опциона пут за 1 месяц до истечения срока действия. Цена исполнения равна \$95, а безрисковая ставка $r = 8\%$. Предполагается, что волатильность акции равна 0,25. Для сравнения изображена и стоимость аналогичного Европейского опциона пут (пунктирная кривая).

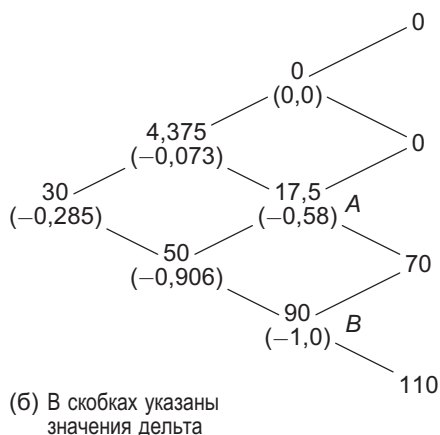
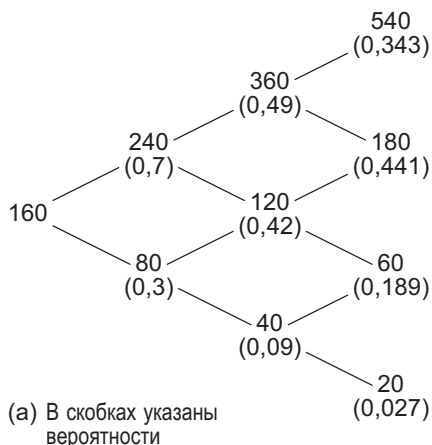


Рис. 9.15. Цены (а) акции и (б) Американского опциона пут.

емая стоимость (при продолжении наблюдений за ценами) равна величине

$$\frac{(0,7 \times 0) + (0,3 \times 70)}{1,2} = 17,5,$$

которая больше внутренней стоимости $130 - 120 = 10$. Поэтому опцион не следует исполнять, даже если он оказывается в деньгах, и стоимость опциона пут равна 17,5. Что же касается узла *B*, то на этот раз ожидаемая стоимость при продолжении равна

$$\frac{(0,7 \times 70) + (0,3 \times 110)}{1,2} = 68,33,$$

что ниже внутренней стоимости $130 - 40 = 90$. Поэтому опцион следует исполнять, а стоимость опциона пут равна 90.

Задание по программированию 9.5.1. Примените алгоритм из рис. 9.13 к Американским опционам пут.

9.6 Опционы на акции с дивидендами

9.6.1 Европейские опционы на акцию с дивидендами по известной ставке

Если дивиденды предсказуемы, то БМОО остается в силе. Известная **дивидендная доходность** означает, что доход от дивидендов представляет собой постоянный процент от цены акции. При дивидендной доходности δ в любой момент выплаты дивидендов по акции составляют сумму $S\delta$. Следовательно, в периоде с дивидендной выплатой цена акции изменяется от значения S до $Su(1 - \delta)$ или $Sd(1 - \delta)$. Если же период не содержит даты выплаты дивидендов, то биномиальная модель не меняется. На рис. 9.16 это соображение проиллюстрировано.

Для Европейских опционов играет роль лишь число дивидендных выплат, а не конкретные их даты. Убедиться в этом можно следующим

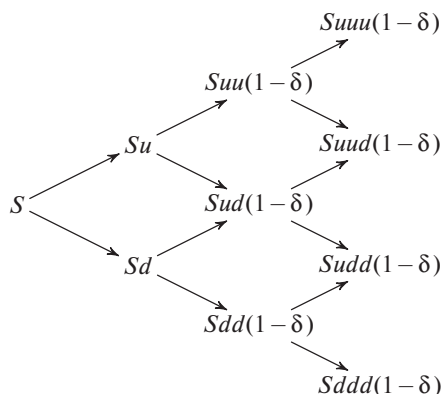


Рис. 9.16. Биномиальная модель для акции с постоянной дивидендной доходностью. Дата оплаты дивидендов падает на второй период.

образом. Пусть m означает число дивидендных выплат до окончания срока. Цена акции в момент окончания срока действия тогда имеет вид $(1 - \delta)^m Su^j d^{n-j}$, независимо от конкретных моментов этих выплат. Следовательно, алгоритмы биномиального дерева можно использовать для опционов на бездивидендную акцию, но с текущей ценой $(1 - \delta)^m S$ вместо S . Таким образом, оценка стоимости может быть произведена за линейное время и при постоянном объеме памяти.

Упражнение 9.6.1. Объясните, почему стоимость Европейского опциона в случае известной дивидендной доходности составляет долю $(1 - \delta)^m$ от стоимости Европейского опциона на бездивидендную акцию с ценой исполнения $(1 - \delta)^{-m} X$.

9.6.2 Американские опционы на акцию с дивидендами по известной ставке

Алгоритм для Американских опционов колл использует обратную индукцию и учитывает все моменты выплаты дивидендов (см. рис. 9.17). Его легко приспособить к оценке стоимости Американских опционов пут. Досрочное исполнение может быть оптимальным, если период содержит момент выплаты дивидендов. Предположим, что $Sd(1 - \delta) > X$. Тогда $C_u = Su(1 - \delta) - X$ и $C_d = Sd(1 - \delta) - X$. Следовательно,

$$\frac{pC_u + (1-p)C_d}{R} = (1 - \delta)S - \frac{X}{R},$$

что меньше $S - X$ при достаточно больших S . Это и доказывает, что досрочное исполнение может быть оптимальным.

Упражнение 9.6.2. Начнем с Американского опциона колл на акцию с d дивидендными выплатами. Рассмотрим пакет из $d + 1$ Европейских опционов колл с ценой исполнения Американского опциона колл и таких, что для каждой дивидендной выплаты есть опцион колл с датой исполнения непосредственно предшествующей выплате, а также опцион колл с датой исполнения, совпадающей с моментом окончания срока

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости Американских опционов колл на акцию, оплачивающую дивиденды по известной ставке:

```

ввод:  $S, u, d, X, n, \delta$  ( $1 > \delta > 0$ ),  $m, \hat{r}$  ( $u > \hat{e}^{\hat{r}} > d$  и  $\hat{r} > 0$ );
действительные числа  $R, p, C[n+1]$ ;
целые  $i, j$ ;
 $R := \hat{e}^{\hat{r}}$ ;
 $p := (R - d)/(u - d)$ ;
для ( $i = 0$  до  $n$ ) {  $C[i] := \max(0, Su^{n-i}d^i(1 - \delta)^m - X)$ ; }
для ( $j = n - 1$  и далее до  $0$ )
    для ( $i = 0$  до  $j$ ) {
        если [ период  $(j, j + 1]$  содержит момент выплаты дивидендов ]
            {  $m := m - 1$ ; }
         $C[i] := \max((p \times C[i] + (1 - p) \times C[i + 1])/R, Su^{j-i}d^i(1 - \delta)^m - X)$ ;
    }
вывод  $C[0]$ ;

```

Рис. 9.17. Алгоритм биномиального дерева для Американских опционов колл на акцию с дивидендами постоянного уровня. Напомним, что изначально параметр m означает общее число моментов невыплаты дивидендов до окончания срока действия опциона включительно.

действия Американского опциона колл. В связи с теоремой 8.4.2 естественно спросить: эквивалентен ли данный Американский опцион колл этому пакету Европейских опционов колл?

Задание по программированию 9.6.3. Напишите программу к алгоритму биномиального дерева для Американских опционов на акцию, по которой дивиденды выплачиваются по известной ставке.

9.6.3 Опционы на акцию с постоянными дивидендами

Хотя компании могут и пытаться поддерживать постоянную дивидендную доходность на протяжении длительного времени, но в течение небольшого времени удобны и постоянные дивиденды. Правда, в отличие от постоянной дивидендой доходности постоянные дивиденды приводят к осложнениям. Пусть D означает величину дивидендов. Предположим, что их выплата падает на первый период. Тогда в конце этого периода возможные цены акции будут равны $Su - D$ или $Sd - D$. Проследим за ценой акции в течение еще одного периода. Очевидно, что число возможных значений цен в его конце не три, а четыре: $(Su - D)u$, $(Su - D)d$, $(Sd - D)u$ и $(Sd - D)d$. Другими словами, в биномиальном дереве больше нет совпадений (см. рис. 9.18). И фундаментальный вывод состоит в том, что моменты выплат дивидендов играют роль: скажем, величина $(Su - D)u$ отличается от $Suu - D$. Нетрудно видеть также, что m моментов выплат приведут к по меньшей мере 2^m заключительным узлам. Таким образом, случай постоянных дивидендов «поглощает» огромное количество вычислительного времени и памяти.

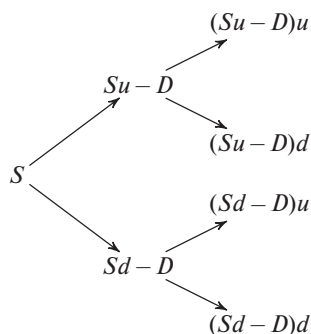


Рис. 9.18. Биномиальная модель для акции с постоянными дивидендами. Размер дивидендов равен D , а момент их выплаты падает на первый период.

Упрощающее предположение. Один из способов учета дивидендов состоит в том, чтобы использовать формулу Блэка—Шоулса с ценой акции, уменьшенной на приведенное значение (ПЗ) предстоящих дивидендов. Эта процедура проходит, если цену акции можно разложить в сумму двух компонент, безрисковую, по которой известные дивиденды выплачиваются в течение всей жизни опциона, и рисковую. Стоимость безрисковой компоненты в любой момент времени представляет собой ПЗ дивидендов оставшегося срока жизни. В этом случае формула Блэка—Шоулса применима с S , равной рисковей компоненте цены и σ , совпадающей с волатильностью процесса, описывающего стоимость рисковей компоненты. Цена акции между двумя смежными датами выплаты дивидендов следует одному и тому же логнормальному распределению. Это означает, что формулу Блэка—Шоулса можно использовать, если цена акции уменьшена на ПЗ дивидендов оставшегося срока жизни. Заметим также, что неопределенность в отношении дивидендов редко сказывается на опционах со сроком жизни меньше 1 года.

Используя вышеуказанное предположение, мы можем начать с текущей цены акции, уменьшенной на ПЗ всех будущих дивидендов, и строить биномиальное дерево для новой цены акции так, как если бы дивидендов не было. Затем мы добавляем к каждой цене акции на дереве ПЗ всех будущих дивидендов. С помощью так получаемого дерева цен можно рассчитать стоимость Европейского опциона как и ранее. Что же касается Американских опционов, то применима та же процедура, за исключением необходимости проверять в каждом узле целесообразность досрочного исполнения.

Задание по программированию 9.6.4. Воплотите в программу идеи, описанные в этом подразделе.

9.6.4 Опционы на акцию с дивидендами по ставке непрерывного начисления

В модели с непрерывными выплатами дивиденды выплачиваются непрерывно. Такая модель является приближением для рыночного портфеля с большим числом акций, по которому некоторая компания выплачивает дивиденды практически каждый день. Оплата **непрерывной дивидендной доходности** по ставке q уменьшает показатель роста цены

акции на q . Другими словами, увеличение цены акции от S до S_τ при непрерывной дивидендной доходности q соответствует увеличению цены от S до $S_\tau e^{q\tau}$ для акции без дивидендов. Тем самым Европейский опцион на акцию с ценой S , по которой оплачивается непрерывная дивидендная доходность q , имеет ту же стоимость, что и Европейский опцион на акцию с ценой $Se^{-q\tau}$, по которой дивиденды не выплачиваются. Таким образом, формулы Блэка—Шоулса сохраняют силу при замене S на $Se^{-q\tau}$:

$$C = Se^{-q\tau}\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \quad (9.20)$$

$$P = Xe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Se^{-q\tau}\Phi(-x), \quad (9.20')$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Формулы (9.20) и (9.20'), которые принадлежат Мертону [660], остаются в силе даже если дивидендная доходность не является постоянной до тех пор, пока она предсказуема, и в этом случае q заменяется на усредненную ежегодную дивидендную доходность на протяжении жизни опциона [470, 746].

Чтобы привести в действие алгоритмы биномиального дерева, выберем риск-нейтральную вероятность в виде

$$\frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}, \quad (9.21)$$

где $\Delta t \equiv \tau/n$. Причина такого выбора состоит в том, что в риск-нейтральной экономике цена акции растет в среднем по ставке $r - q$. Заметим, что u и d из (9.15) в рассматриваемой ситуации будут характеризовать движения цены бездивидендной акции. Алгоритмы же биномиального дерева совпадают с алгоритмами бездивидендного случая во всем, за исключением измененной вероятности (9.21).

Упражнение 9.6.5. Докажите, что в модели с непрерывной оплатой дивидендов паритет пут—колл имеет вид $C = P + Se^{-q\tau} - \text{ПЗ}(X)$.

Упражнение 9.6.6. Выведите формулу для вероятности (9.21), используя лишь арбитражную логику.

Упражнение 9.6.7. 1) Некто аргументирует необходимость выбора риск-нейтральной вероятности в виде $(e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$ следующим образом: поскольку стоимость опциона независима от ожидаемой доходности акции $\mu - q$, то ее можно заменить на r . Укажите ему на ошибку в таком рассуждении.

2) Предположим, что нас попросили использовать указанную выше риск-нейтральную вероятность $(e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$. Опишите необходимые изменения в алгоритме биномиального дерева.

Упражнение 9.6.8. Приведите пример, где бы использование риск-нейтральной вероятности (9.21) делало бы досрочное исполнение Американского опциона оптимальным.

Задание по программированию 9.6.9. Адаптируйте алгоритм биномиального дерева для Американских опционов на акцию, по которой оплачивается непрерывная дивидендная доходность.

9.7 Пересечение дерева по диагонали

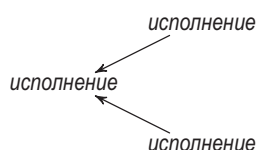
Можно ли улучшить стандартный алгоритм с обратной индукцией и квадратичным временем? Опишем кратко алгоритм, предложенный Курраном, который обычно пропускает много узлов, и тем самым экономит время поиска [242]. И, хотя ниже рассматриваются только Американские опционы пут, но в силу паритета из упр. 9.7.1 его можно использовать точно так же и для Американских опционов колл.

На рис. 9.19 упомянуты два факта связанных с «распространением» в процессе обратной индукции свойства быть узлом раннего исполнения или узлом, в котором такого исполнения нет. Первое правило утверждает, что узел является узлом досрочного исполнения, если оба следующих за ним узла являются таковыми. Последний узел, если он в деньгах, для удобства считается узлом раннего исполнения. В соответствии со вторым правилом, если узел не является узлом раннего исполнения, то все предыдущие узлы на том же горизонтальном уровне также не являются узлами раннего исполнения. Узел раннего исполнения легко оценить, если его тип установлен: ему соответствует разница цен исполнения и акции. Однако узел не раннего исполнения следует оценивать с помощью обратной индукции.

Алгоритм Куррана использует нетрадиционный способ пересечения дерева, который уточняется на рис. 9.20. Оценка стоимости в каждом узле проводится как и ранее, с помощью обратной индукции. Причем для любого оцениваемого узла оба следующих за ним узла уже были оценены ранее.

Если придется исследовать все дерево целиком, то ничего выиграть не удастся. Введем правило остановки. Процесс останавливается, когда встречается диагональ D , целиком состоящая из узлов нераннего исполнения. По правилу 2 рис. 9.19 (в этом случае) все узлы раннего исполнения уже были определены. Если, двигаясь по диагонали, алгоритм встречает узел раннего исполнения, то он может немедленно остановиться и перейти не следующую диагональ. Это объясняется тем, что по правилу 1 и в силу выбранной манеры прохождения узлов диагонали все оставшиеся на текущей диагонали узлы должны быть узлами раннего исполнения, а потому легко оцениваемыми в случае необходимости. Кроме того, и также по правилу 1, этот переход (с одной диагонали на другую) может начаться с того нулевого заключительного узла, который лежит

Правило 1



Правило 2

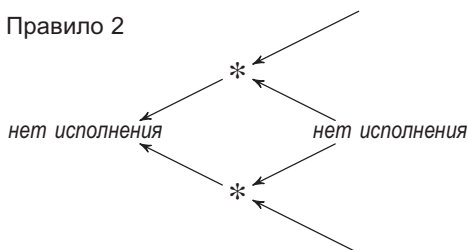


Рис. 9.19. Два правила в отношении исполнения. Правило 2 требует равенства $ud = 1$.

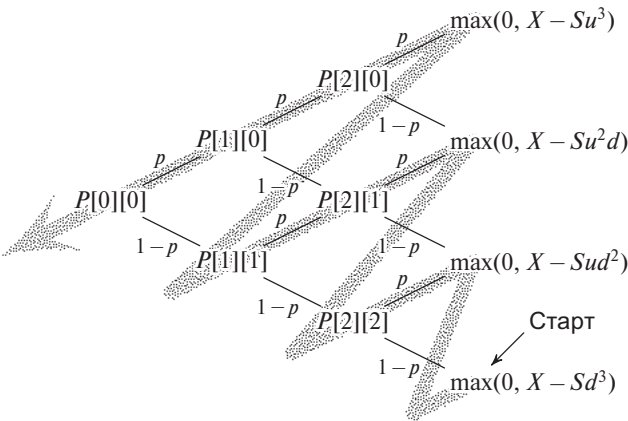


Рис. 9.20. Диагональный метод для алгоритмов биномиального дерева. В отличие от вертикального просмотра узлов в стандартном алгоритме обратной индукции рис. 9.7, в новом методе предлагается просматривать их начиная с правого нижнего узла, а затем по всем диагоналям, параллельным верхней стороне дерева, начиная с нижней, поднимаясь на следующие и всегда двигаясь по ним справа-налево и сверху-вниз (см. рис. 9.7).

непосредственно выше цены исполнения (т. е. с самого «нижнего» такого узла). Ясно, что цена акции в таком узле равна $Su^a d^{n-a}$, где величина a определяется равенством (9.9). Треугольник выше этой цены может быть пропущен, поскольку оценки стоимости для всех его узлов нулевые. Общая стратегия уточняется на рис. 9.21. Обычно при использовании диагонального метода пропускается много узлов (см. рис. 9.22).

Стоимость опциона равна сумме дисконтированных стоимостей опциона в узлах диагонали D , умноженных на вероятность того, что цена акции *попадет* на диагональ именно через данный узел, т. е. сверху. Перейти от корня дерева к узлу, в котором опцион будет исполнен, и минуя диагональ D , невозможно. Для узла на D , который является результатом i движений вверх и j движений вниз от корня дерева, вышеупомянутая вероятность равна величине $\binom{i+j-1}{i} p^i (1-p)^j$. Это объясняется тем, что

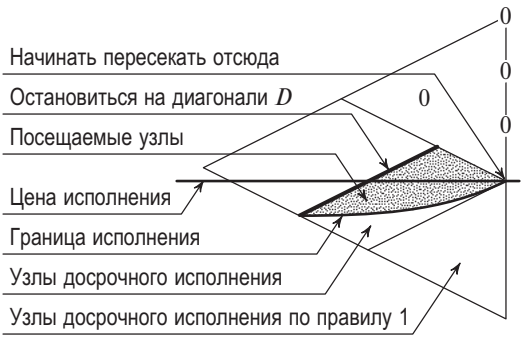


Рис. 9.21. Поиск диагонали узлов не-досрочного исполнения. Посещать надо лишь узлы, которые указаны. **(Оптимальная) граница исполнения** уточняет цену акции в каждый момент, когда исполнение опциона становится оптимальным.

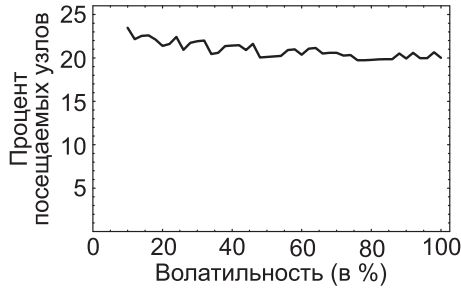


Рис. 9.22. Эффективность диагонального метода. Отношение числа посещаемых в методе узлов к общему числу узлов, представлено как функция волатильности. Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $n = 100$, $r = 5\%$, $q = 1\%$ и $\tau = 1/3$.

Диагональный метод для Американских опционов пут:

```

ввод:  $S, u, d, \tau, X, n, r, q$  ( $r \geq q > 0$ );
действительные числа  $p, P[0..n]$ , низ,  $c$ ;
целые  $i, j, a$ ;
 $p := (e^{(r-q)(\tau/n)} - d)/(u - d)$ ;
 $a := \lceil \ln(X/Sd^n) / \ln(u/d) \rceil$ ;
 $P[a] := 0$ ; // собрать нижнюю границу нулевых узлов в одном месте
для ( $i = 0$  до  $a - 1$ )  $P[i] := -1$ ; // верхняя граница узлов досрочного исполнения
для ( $j = n - a$  вниз до  $0$ )
    для ( $i = a - 1$  вниз до  $0$ ) {
        низ :=  $P[i]$ ; // движение вниз (вычисляется на предыдущем этапе)
        если [ низ < 0 ] низ :=  $X - Su^i d^{i+1}$ ;
         $c := (p \times P[i + 1] + (1 - p) \times \text{низ}) / R$ ;
        если [  $c \geq X - Su^i d^j$  и  $i > 0$  ]
             $P[i] := c$ ; // досрочное исполнение отсутствует
        в противном случае если [  $C \geq X - Su^i d^j$  и  $i = 0$  ] { // найти  $D$ 
             $P[i] := c$ ;
            если [  $j = 0$  ] вывод  $P[0]$ ; в противном случае
                вывод  $\sum_{k=0}^{a-1} \binom{k+j-1}{k} p^k (1-p)^j \times P[k] \times e^{-(k+j)r(\tau/n)}$ ;
        }
        в противном случае прервать;
        // узел раннего исполнения; выйти из текущего цикла
    }
если [  $P[0] < 0$  ]  $P[0] := X - S$ ;
вывод  $P[0]$ ;

```

Рис. 9.23. Диагональный метод для Американских опционов пут. Ячейка $P[i]$ размещает стоимость опциона, если цена акции равна $Su^i d^j$, где j — переменная цикла. Поскольку стоимость опциона в узле раннего исполнения найти легко, то будем использовать символ -1 , чтобы констатировать, что узел является узлом раннего исполнения.

нужный путь должен проходить через узел, который является результатом i движений цены вверх и $j - 1$ движений вниз. Обозначим стоимость опциона в этом узле через P_i . Тогда искомая стоимость опциона равна $\sum_{i=0}^{a-1} \binom{i+j-1}{i} p^i (1-p)^j P_i e^{-(i+j)r\Delta t}$. Поскольку каждый узел на D к этому времени уже был оценен, то эта часть вычислений занимает по времени $O(n)$ единиц. Требования по памяти также линейны по n , поскольку место нужно лишь для размещения элементов диагонали. Эта идея приводит к экономии времени, если для поиска диагонали D не потребуется много времени. Алгоритм приведен на рис. 9.23.

До сих пор предполагалось, что дивиденды по акции не выплачиваются. Предположим теперь, что по акции полагается непрерывная дивидендная доходность $q \leq r$ (или $r \leq q$ для коллов в силу симметрии). Следовательно,

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}.$$

Правило 1 рис. 9.19 остается в силе, поскольку при текущей цене акции, равной величине $Su^i d^j$,

$$\begin{aligned} [pP_u + (1-p)P_d]e^{-r\Delta t} &= [p(X - Su^{i+1}d^j) + (1-p)(X - Su^i d^{j+1})]e^{-r\Delta t} = \\ &= Xe^{-r\Delta t} - Su^i d^j [pu + (1-p)d]e^{-r\Delta t} = Xe^{-r\Delta t} - Su^i d^j e^{-q\Delta t} \leq \\ &\leq Xe^{-r\Delta t} - Su^i d^j e^{-r\Delta t} \leq X - Su^i d^j. \end{aligned}$$

Правило же 2 имеет место всегда, с дивидендами акция или без них.

Упражнение 9.7.1. Докажите, что Американский опцион колл будет стоить так же, как и Американский опцион пут, если у них поменять текущую цену акции с ценой исполнения и безрисковую ставку с непрерывной дивидендной доходностью.

Упражнение 9.7.2. Проверьте справедливость правила 2 в биномиальной модели.

Задание по программированию 9.7.3. Реализуйте диагональный метод «поаккуратней» и оцените его эффективность по сравнению со стандартным алгоритмом обратной индукции.

Дополнительная литература

В основной модели Блэка—Шоулса делается несколько предположений. Так, игнорируются требования по марже, налоги и операционные издержки, а также лишь малые изменения цены акции допускаются на коротком промежутке времени. С ранней экспериментальной работой можно познакомиться в [86]. За различными обобщениями основной модели обращайтесь к [236, 470], а за аналитическими результатами по Американским опционам к [154, 423, 531, 683]. Сама формула Блэка—Шоулса может быть выведена по меньшей мере 4 другими способами [289]. Изобилием формул для опционов отличаются [344, 423, 894].

В [613] рассматривается случай предсказуемых доходов. Если искать информацию по оценке волатильности на основании исторических данных, то можно обратиться к [48, 201, 346]. Больше соображений по «улыбке» можно найти в [147, п.9.3.5] и [514, п.8.7.2]. Чтобы лучше разобраться с составными обусловленными волатильностями, такими как улыбка, можно использовать обобщенное дерево, называемое индуцированным биномиальным деревом, для точной оценки стоимости всех опционов по одному и тому же базовому активу (см. упр.9.4.3) [215, 269, 299, 502, 503, 685]. Индуцированные биномиальные деревья предложены Рубинштейном [770]. Неправильные модели оценки стоимости опционов и некорректные прогнозы волатильности подвергают большому риску продавцов опционов [400]. Больше информации по фундаментальным теоремам об оценке стоимости активов можно найти в [56, 378, 420, 681, 753].

Вообще говоря, БМОО приписывается работе Шарпа 1975 г. [768], но широкой публике она стала известной благодаря его популярной монографии 1978 г., *Инвестиции*. Мы следуем подходу, изложенному в [235, 738]. Для Американских опционов БМОО предлагает корректное решение, хотя его обоснование и является весьма деликатным [18, 243, 576]. Эффективность нескольких численных методов оценки стоимости Американских опционов рассмотрена в [127, 531, 834]. Сходимость биномиальных моделей для Европейских и Американских опционов проанализирована в [589, 590].

Проблематику опционов затрагивают многие великолепные монографии [236, 317, 346, 470, 878]. Об интеллектуальной эволюции, которая предшествовала прорыву Блэка и Шоулса, можно почитать в [494, 811]. Если же есть желание больше узнать о Блэке, как ученом, профессионале в практических финансах и человеке, то можно обратиться к [345, 662].

Примечания

1. Их статья «Оценка стоимости опционов (и корпоративных обязательств)» в 1970 г. была направлена в газету *Journal of Political Economy* и сразу же была отклонена издателями [64, 65].

2. Точнее говоря, **слабая форма гипотезы эффективного рынка** утверждает, что текущие цены полностью включают в себя информацию, содержащуюся в исторических ценах [317]. Из этой формы эффективности рынка следует, что технический анализ не может привести к доходам выше среднего при помощи изучения таблиц цен акций прошлых лет. Испытание временем эта гипотеза выдержала скорее хорошо [635].

3. Один «умный» кандидат однажды покупал голоса, используя выпуск подобных опционов, которые оплачивались бы лишь в случае его избрания. Вот его логика: владельцы опциона будут не просто голосовать, но и твердо агитировать за него, и во всяком случае он сохранит себе премию за опцион, даже если и проиграет выборы (что, впрочем, он и сделал).

10 Анализ чувствительности опционов

Если бы нос Клеопатры был короче, то изменилась бы физиономия всего мира.

Блез Паскаль (1623—1662)

Понимание того, как стоимость ценных бумаг (ЦБ) меняется по отношению к изменениям данного параметра, является ключевым моментом в хеджировании*). Скажем, дюрация измеряет интенсивность изменения стоимости облигации по отношению к изменениям процентной ставки. В этой главе подобные вопросы задаются в отношении опционов.

10.1 Меры чувствительности («Гречанки»)

Далее мы полагаем, что $x \equiv \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, как и в формуле Блэка—Шоулса из теоремы 9.3.4, а $\Phi'(y) = e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального распределения.

10.1.1 Дельта

Для такого производного инструмента, как опцион, дельта определяется равенством $\Delta \equiv \partial f / \partial S$, где f — стоимость производного инструмента, а S — цена его базового актива. Дельта портфеля из производных инструментов по одному и тому же активу определяется как сумма дельт отдельных производных инструментов. Дельта, используемая в биномиальной оценке стоимости опциона (БМОО) для копирования опционов, является дискретным аналогом параметра дельта, определяемого здесь. Дельта Европейского опциона колл на бездивидендную акцию равна

$$\partial C / \partial S = \Phi(x) > 0, \quad (10.1)$$

а дельта Европейского опциона пут есть $\partial P / \partial S = \Phi(x) - 1 < 0$. См. графики на рис. 10.1. Конечно, дельта длинной позиции по акции равна единице.

Позиция называется **дельта-нейтральной**, если отвечающее ей совокупное значение параметра дельта равно нулю. Поскольку дельта-нейтральный портфель не реагирует на малые изменения цены базового актива, то построение такого портфеля может оказаться полезным при хеджировании. Например, портфель, состоящий из опциона колл и $-\Delta$ единиц акции является дельта-нейтральным. Поэтому можно занять короткую позицию по Δ единицам акции для хеджирования длинной

*) Хеджирование (hedging) — это стратегия, используемая для уменьшения рисков капиталовложения. Совершенным называется такой хедж, который исключает возможность иметь в будущем прибыль или потери. — Прим. перев.

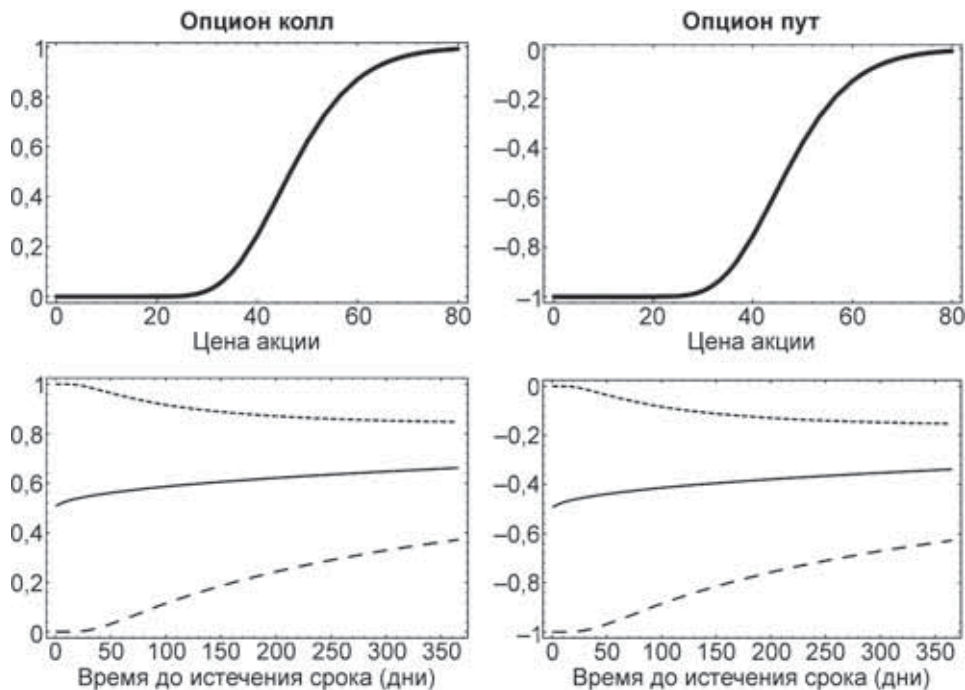


Рис. 10.1. Дельта опциона. Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $\sigma = 0,3$, $\tau = 201$ день и $r = 8\%$. Частая пунктирная линия представляет значение $S = 60$ (опцион колл в деньгах или опцион пут вне денег), сплошная представляет значение $S = 50$ (опцион около денег) и редкая пунктирная линия относится к значению $S = 40$ (опцион колл вне денег или опцион пут в деньгах).

позиции по опциону колл. И, если обобщить, то можно хеджировать длинную позицию по какому-то производному инструменту с дельта, равной Δ_1 , занимая короткую позицию по Δ_1/Δ_2 единицам другого производного инструмента с дельта, равной Δ_2 .

Упражнение 10.1.1. Проверьте правильность равенства (10.1), а также, что дельта опциона колл на акцию, по которой дивиденды выплачиваются по непрерывной ставке q равна $e^{-q\tau}\Phi(x)$.

Упражнение 10.1.2. Докажите, что $\partial P/\partial X = e^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau})$.

Упражнение 10.1.3. Покажите, что у опционов при своих временная стоимость максимальна.

Упражнение 10.1.4. Чему равен **амулет** Европейского опциона, т.е. величина, определяемая выражением $\partial\Delta/\partial\tau$?

10.1.2 Тэта

Тэта или **распад во времени** определяется как скорость изменения стоимости ценной бумаги (ЦБ) со временем, т.е. равенством $\Theta \equiv -\partial P/\partial\tau$, где P — стоимость ЦБ. Для Европейского опциона колл на

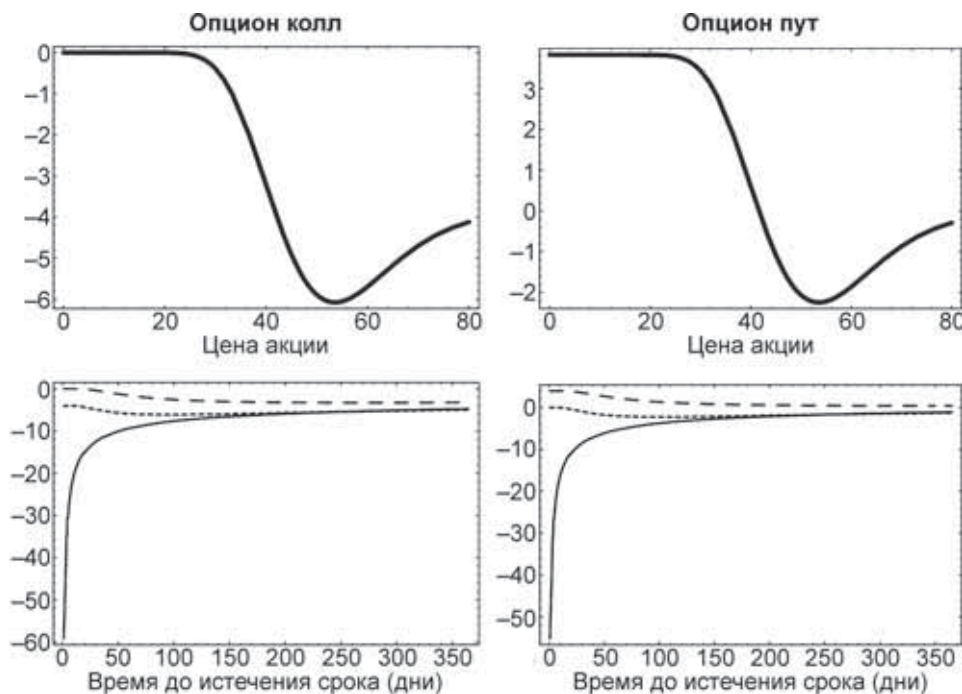


Рис. 10.2. Тэта опциона. Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $\sigma = 0,3$, $\tau = 201$ день и $r = 8\%$. Частая пунктирная линия представляет значение $S = 60$ (опцион колл в деньгах или опцион пут вне денег), сплошная представляет значение $S = 50$ (опцион около денег) и редкая пунктирная линия относится к значению $S = 40$ (опцион колл вне денег или опцион пут в деньгах).

бездивидендную акцию

$$\Theta = -\frac{S\Phi'(x)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rXe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}) < 0.$$

Поэтому опцион колл со временем теряет свою стоимость. Для Европейского опциона пут

$$\Theta = -\frac{S\Phi'(x)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + rXe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}),$$

т.е. эта величина может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Вид этой характеристики показан на рис. 10.2.

Упражнение 10.1.5. 1) При какой цене акции тэта Европейского опциона колл минимальна?

2) Покажите, что тэта Американского опциона пут всегда отрицательна.

10.1.3 Гамма

Параметр **гамма** ЦБ — это скорость изменения ее дельта по отношению к цене базового актива, т.е. $\Gamma \equiv \partial^2 \Pi / \partial S^2$. Гамма измеряет

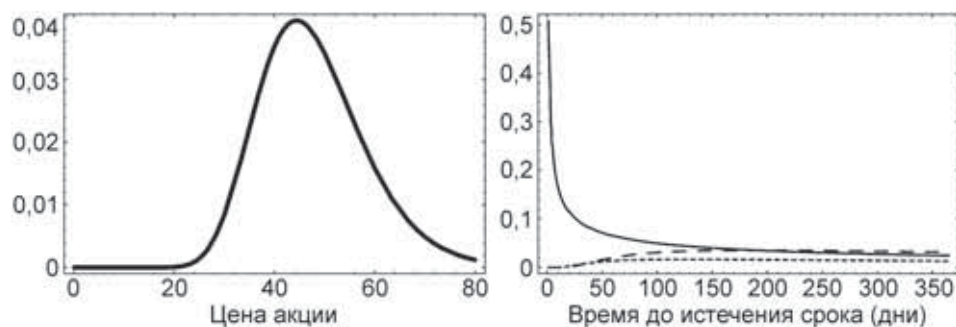


Рис. 10.3. Гамма опциона (ее значения для опционов колл и пут совпадают). Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $\sigma = 0,3$, $\tau = 201$ день и $r = 8\%$. Частая пунктирная линия представляет значение $S = 60$ (опцион колл в деньгах или опцион пут вне денег), сплошная представляет значение $S = 50$ (опцион около денег) и редкая пунктирная линия относится к значению $S = 40$ (опцион колл вне денег или опцион пут в деньгах).

чувствительность дельта к изменениям цены базового актива. Портфель с высоким значением гамма на практике требуется пересматривать чаще, чтобы поддерживать его дельта-нейтральность. У дельта и гамма есть очевидные двойники в облигациях: дюрация и выпуклость. Для Европейских опционов колл или пут на бездивидендную акцию $\Gamma = \frac{\Phi'(x)}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$. Вид этой функции представлен на рис. 10.3.

10.1.4 Вега

Волатильность часто меняется со временем. **Вега**¹ (иногда называемая **лямбда**, **каппа**, или **сигма**) производного инструмента — это ско-

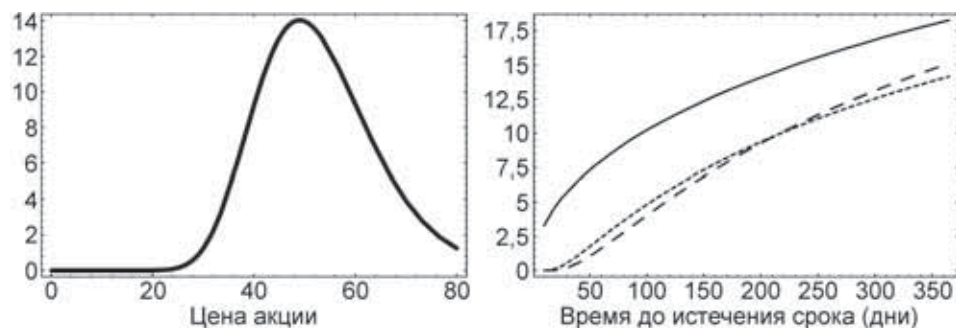


Рис. 10.4. Вега опциона (ее значения для опционов колл и пут совпадают). Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $\sigma = 0,3$, $\tau = 201$ день и $r = 8\%$. Частая пунктирная линия представляет значение $S = 60$ (опцион колл в деньгах или опцион пут вне денег), сплошная представляет значение $S = 50$ (опцион около денег) и редкая пунктирная линия относится к значению $S = 40$ (опцион колл вне денег или опцион пут в деньгах).

рость изменения его стоимости по отношению к волатильности базового актива, т.е. $\Lambda \equiv \partial \Pi / \partial \sigma$. Ценная бумага с высокой вега очень чувствительна к малым изменениям волатильности. Вега Европейских опционов колл или пут на бездивидендную акцию равна $S\sqrt{\tau} \Phi'(x) > 0$, и между прочим дает решение упр.9.4.1. Такое значение веги соответствует интуитивному представлению о том, что более высокая волатильность увеличивает стоимость опциона. Эта функция изображена на рис.10.4.

Упражнение 10.1.6. Докажите, что вега, как функция σ унимодальна в области $\sigma > 0$. Функция называется унимодальной, если она сначала возрастает, а затем убывает, и, следовательно, имеет единственную точку максимума.

10.1.5 ρ_o

ρ_o производного инструмента — это скорость изменения его стоимости по отношению к процентной ставке, или $\rho \equiv \partial \Pi / \partial r$. Показатели ρ_o Европейских опционов колл и пут на бездивидендную акцию

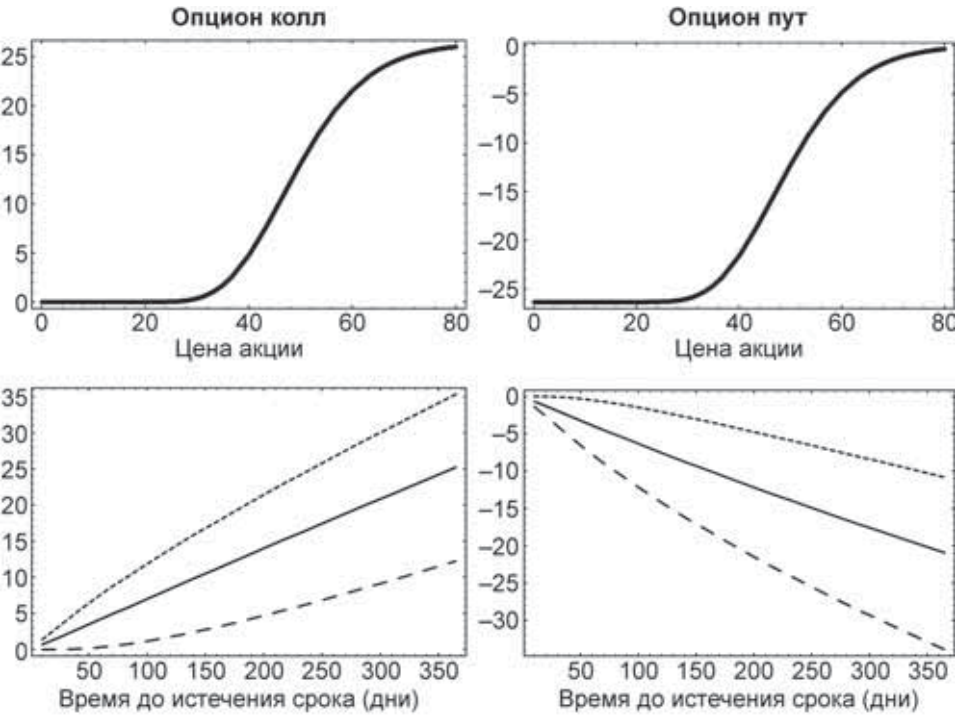


Рис. 10.5. ρ_o опциона. Параметры: $S = 50$, $X = 50$, $\sigma = 0,3$, $\tau = 201$ день и $r = 8\%$. Частая пунктирная линия представляет значение $S = 60$ (опцион колл в деньгах или опцион пут вне денег), сплошная представляет значение $S = 50$ (опцион около денег) и редкая пунктирная линия относится к значению $S = 40$ (опцион колл вне денег или опцион пут в деньгах).

равны, соответственно, $Xte^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}) > 0$ и $-Xte^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) < 0$. Вид этого показателя как функции двух разных параметров представлен на рис. 10.5.

Упражнение 10.1.7. 1) Чему равна **скорость** Европейского опциона, если определяется она выражением $\partial\Gamma/\partial S$?

2) Каков **цвет** Европейского опциона, если определяют его производной $\partial\Gamma/\partial\tau$?

10.2 Техника численных расчетов

Меры чувствительности производных инструментов, для которых конкретные формулы отсутствуют, следует рассчитывать численно. Возьмем в качестве примера показатель дельта. Эта характеристика определяется как $\Delta f/\Delta S$, где ΔS представляет собой малое изменение цены акции, а Δf — соответствующее изменение цены производной ЦБ. В соответствии со стандартным подходом следует вычислить значения $f(S - \Delta S)$ и $f(S + \Delta S)$ и уже затем в качестве искомого значения дельта взять величину

$$\frac{f(S + \Delta S) - f(S - \Delta S)}{2\Delta S}.$$

Время на вычисления по этой схеме численного дифференцирования приблизительно в два раза больше времени расчета стоимости самой производной ЦБ.

В рассматриваемой ситуации напрашивается использовать промежуточные результаты в алгоритме биномиального дерева. Когда этот алгоритм «добирается» до конца первого периода, то значения f_u и f_d уже получены. Напомним, что эти значения соответствуют стоимости производных ЦБ, отвечающих ценам акций S_u и S_d , соответственно. Поэтому дельта полагается приближенно равной величине

$$\frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}.$$

Тем самым время на вычисления сверх использованного в алгоритме биномиального дерева практически сводится к нулю. Соответствующий алгоритм представлен на рис. 10.6.

Аналогичным образом можно получить и другие характеристики чувствительности. Например, гамму. Так, при цене акции в $(S_{uu} + S_{ud})/2$ дельта приближенно равна $\frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}$, а при цене $(S_{ud} + S_{dd})/2$ эта же дельта приближенно равна $\frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}}$. Ну а гамма представляет собой величину относительного изменения дельта соответствующих ценам $(S_{uu} + S_{ud})/2$ и $(S_{ud} + S_{dd})/2$, т.е. она равна отношению

$$\frac{\frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} - \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}}}{(S_{uu} - S_{dd})/2}. \quad (10.2)$$

Алгоритм биномиального дерева для определения значений дельта Американских опционов пут на бездивидендную акцию:

ввод: $S, u, d, X, n, \hat{r}$ ($u > e^{\hat{r}} > d$ и $\hat{r} > 0$);
 действительные числа $R, p, P[n+1]$;
 целые i, j ;
 $R := e^{\hat{r}}$;
 $p := (R - d)/(u - d)$;
 для ($i = 0$ до n) { $P[i] := \max(0, X - Su^{n-i}d^i)$; }
 для ($j = n - 1$ вниз до 1)
 для ($i = 0$ до j)
 $P[i] := \max((p \times P[i] + (1 - p) \times P[i + 1])/R, X - Su^{j-i}d^i)$;
 вывод $(P[0] - P[1])/(Su - Sd)$;

Рис. 10.6. Алгоритм биномиального дерева для определения значений дельта Американских опционов пут на бездивидендную акцию. Построен он по аналогии с алгоритмом на рис.9.13.

С другой стороны, численное дифференцирование приводит к выражению

$$\frac{f(S + \Delta S) - 2f(S) + f(S - \Delta S)}{(\Delta S)^2}.$$

Но последнее отношение может также привести к неточным результатам, в чем мы вскоре убедимся.

Строго говоря, рассчитанные подобным образом дельта и гамма представляют собой значения дельта в конце первого периода и гамма в конце второго. Другими словами, они являются мерами чувствительности не настоящего момента, а моментов τ/n и $2(\tau/n)$ единиц времени спустя, соответственно, где n обозначает число периодов, на которые разбит промежуток времени τ до истечения срока действия. Однако, при увеличении n такие величины должны хорошо приближать как дельта, так и гамма. Расчет тэта можно провести аналогично, по формуле

$$\frac{f_{ud} - f}{2(\tau/n)}.$$

Что же касается вега и ро, то здесь нет альтернативы тому, чтобы пробегать дважды алгоритм биномиального дерева. С помощью выражения (15.3) будет показано, что значение тэта можно вычислять по данным дельта и гамма.

10.2.1 О недостатках численного дифференцирования

Если внимательно посмотреть на формулу (9.8), то станет понятным, почему не следует использовать численное дифференцирование для Европейских опционов. Прежде всего, стоимость опциона является непрерывной кусочно-линейной функцией текущей цены акции S . С изломами при значениях цены $Xu^{-j}d^{-(n-j)}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Как следствие, если ΔS достаточно мало, то дельта, полученная численным диффе-

ренцированием, будет кусочно-постоянной функцией S и потому не дифференцируемой в изломах. А это плохой предвестник для численного расчета гаммы. И действительно, если ΔS достаточно мало, то получаемая численным дифференцированием гамма будет равна нулю большую часть времени, поскольку $f'(S - \Delta S) = f'(S) = f'(S + \Delta S)$, пока S удалена от излома. Если же S находится вблизи от излома, то возникает другая проблема. Предположим, что S находится справа от излома в точке S' и $S - \Delta S < S' < S$. В этом случае $f'(S) = f'(S + \Delta S)$ и $f'(S) - f'(S - \Delta S) = \delta$ при некотором $\delta > 0$ (см. рис. 10.7). И значение гамма оказывается равным величине

$$\frac{f(S + \Delta S) - 2f(S) + f(S - \Delta S)}{(\Delta S)^2} = \frac{\delta \Delta S}{(\Delta S)^2}.$$

Но это число при уменьшении ΔS может становиться очень большим, и потому общепринятая практика устремления величины шага ΔS к нулю не поможет.

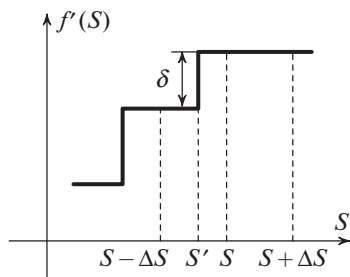


Рис. 10.7. Численное дифференцирование при получении значений дельта и гамма.

Упражнение 10.2.1. Почему вычисление значения гамма по формуле (10.2) не теряет свой смысл по той же причине?

10.2.2 Алгоритм расширенного биномиального дерева

Если расчет параметров дельта и гамма ведется по стандартному биномиальному дереву, то определяемые величины будут относиться не к текущему времени, а моментам на один или два периода спустя, соответственно [718]. Поэтому так называемая «улучшенная» методика прибегает к расширенному биномиальному дереву, корень которого располагается за два периода до настоящего момента, см. рис. 10.8. В этом случае дельта вычисляется по формуле

$$\frac{f_{u/d} - f_{d/u}}{(Su/d) - (Sd/u)},$$

а гамма — с помощью выражения

$$\frac{\frac{f_{u/d} - f}{(Su/d) - S} - \frac{f - f_{d/u}}{S - (Sd/u)}}{[(Su/d) - (Sd/u)]/2}.$$

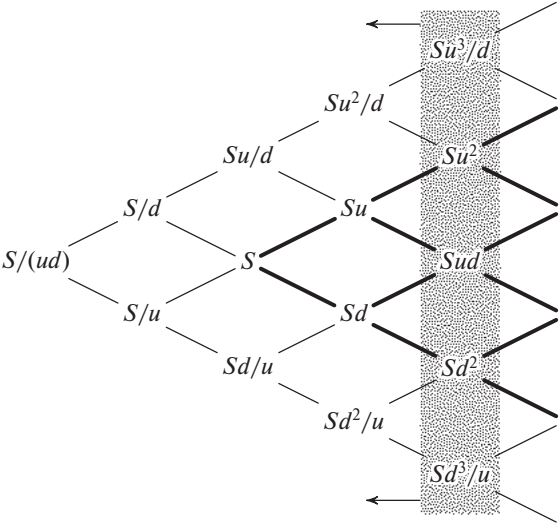


Рис. 10.8. Расширенное биномиальное дерево. Такое дерево получается из первоначального биномиального дерева (жирные линии), но с привлечением дополнительно двух периодов, предшествующих нулевому моменту времени, т.е. корню исходного дерева.

Задание по программированию 10.2.2. Напишите программу алгоритма расширенного биномиального дерева для численного расчета дельта и гамма. Сравните ответ при таком подходе с результатами, полученными при численном дифференцировании и использовании точных формул.

Примечание

- 1. В греческом алфавите буква с названием «вега» отсутствует.

11 Теория опционов.

Продолжение

Поскольку я никогда не изучала математику, то мне приходилось думать.
Джоан Робинсон (1903—1983)

В этой главе представлены различные типы финансовых инструментов, использующих опционы, и указаны важные приложения теории, позволяющей оценивать стоимость опционов. Для нескольких нетривиальных опционов приведены алгоритмы.

11.1 Корпоративные ценные бумаги

Если за базовый актив взять совокупную стоимость фирмы, то как отметили Блэк и Шоулс, методология оценки стоимости опционов вполне может быть применена и для оценки стоимости корпоративных ценных бумаг (ЦБ) [87, 236, 658]. В нижеследующих рассуждениях предполагается, что 1) фирма имеет возможность профинансировать выплаты за счет продажи активов и 2) если по обязательствам, не связанным с акционерным капиталом, обещанная выплата не производится, то фирма переходит в собственность предъявителя претензий, а акционеры не получают ничего.

11.1.1 Рискованные бескупонные облигации и акционерный капитал

Рассмотрим фирму с названием XYZ.com. Структура ее капитала проста: n обычных акций стоимостью S каждая, на которые делится ее собственный акционерный капитал, и бескупонные облигации совокупного номинала X . При этом основным является вопрос о том, какова же стоимость облигаций B и акционерного капитала.

Если совокупная стоимость фирмы V^* на момент погашения облигаций меньше коллективного требования держателей облигаций X , то фирма объявляет себя банкротом и акционерный капитал теряет свою стоимость. С другой стороны, если $V^* > X$, то держатели облигаций получают X , а акционеры $V^* - X$. В следующей таблице представлены эти выплаты:

	$V^* \leq X$	$V^* > X$
Облигации	V^*	X
Акционерный капитал	0	$V^* - X$

Тем самым акционерный капитал является опционом колл на совокупную стоимость фирмы с ценой исполнения X и датой истечения срока его действия, совпадающей с моментом погашения облигаций. Именно

этот опцион колл и представляет собой ограниченное обязательство для акционеров. Облигации же являются покрытым коллом на совокупную стоимость фирмы.

Пусть C означает стоимость этого опциона колл, а V — совокупную стоимость фирмы. Тогда $nS = C$ и $B = V - C$. Знание величины C сводится, таким образом, к знанию того, как стоимость фирмы распределяется между акционерами и держателями облигаций. Но какова бы ни была стоимость C , совокупная стоимость акционерного капитала и облигаций при погашении остается равной V^* . Тем самым относительная стоимость обычных акций и долговых обязательств не связана с текущей стоимостью фирмы V , которая является математическим ожиданием приведенного значения (ПЗ) величины V^* .

Из теоремы 9.3.4 и равенства $B = V - C$ вытекает, что

$$\begin{aligned} nS &= V\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \\ B &= V\Phi(-x) + Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \end{aligned}$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(V/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Доходность до погашения облигаций фирмы как ставка непрерывного начисления процентов поэтому равна $(1/\tau) \ln(X/B)$. Премия за риск (банкротства) определяется как разница в доходности между рискованными и безрисковыми облигациями:

$$\frac{1}{\tau} \ln \frac{X}{B} - r = -\frac{1}{\tau} \ln \left(\Phi(-z) + \frac{1}{\omega} \Phi(z - \sigma\sqrt{\tau}) \right), \quad (11.1)$$

где $\omega \equiv Xe^{-r\tau}/V$, а $z \equiv (\ln \omega)/(\sigma\sqrt{\tau}) + (1/2)\sigma\sqrt{\tau} = -x + \sigma\sqrt{\tau}$. Отметим, что ω представляет собой **отношение долговых обязательств к совокупной стоимости**. На волатильности стоимости фирмы, σ , можно смотреть как на меру **оперативного риска**. Премия же за риск зависит лишь от структуры капитала фирмы, оперативного риска и срока погашения обязательств. Концепция премии за риск представляет собой частный случай статического спреда из п. 5.6.2.

Упражнение 11.1.1. Покажите, что гарантийное поручительство по ссуде, которое компенсирует держателям облигаций все возможные невыплаты, представляет собой опцион пут с ценой исполнения B . Естественно, при этом подразумевается, что поручитель не подвержен банкротству.

Упражнение 11.1.2. Докажите равенство (11.1).

Упражнение 11.1.3. Проверьте справедливость следующих утверждений и объясните словами смысл указанных неравенств:

1) $\partial B/\partial V > 0$, 2) $\partial B/\partial X > 0$ и 3) $\partial B/\partial \tau < 0$.

Численные примеры. Предположим, что активы компании XYZ.com состоят из 1000 акций компании Merck, чья рыночная стоимость на 20 марта 1995 г. равнялась \$ 44,5 за акцию (см. таблицу на рис. 11.1). Ценные бумаги компании XYZ.com состоят из 1000 обычных акций и 30 бескупонных облигаций с погашением 21 июля 1995 г. По каждой из этих

Компания, текущая цена акции	Цена испол- нения	Срок исте- чения	Опционы колл		Опционы пут	
			Объем продаж	Цена при закрытии	Объем продаж	Цена при закрытии
Merck	30	Июль	328	15 1/4	—	—
44 1/2	35	Июль	150	9 1/2	10	1 1/16
44 1/2	40	Апр	887	4 3/4	136	1 1/16
44 1/2	40	Июль	220	5 1/2	297	1/4
44 1/2	40	Окт	58	6	10	1/2
44 1/2	45	Апр	3050	7/8	100	1 1/8
44 1/2	45	Май	462	13/8	50	13/8
44 1/2	45	Июль	883	1 15/16	147	13/4
44 1/2	45	Окт	367	2 3/4	188	2 1/16

Рис. 11.1. Котировки опционов компании Merck. Источник: таблица на рис. 7.4.

облигаций обещано выплатить при погашении \$1000. Следовательно, $n = 1000$, $V = 44,5 \times n = 44\,500$, а $X = 30 \times 1000 = 30\,000$. Опцион компании Merck, связанный с нашим рассмотрением, представляет собой июльский опцион колл с ценой исполнения $X/n = 30$ долларов. Такой опцион действительно существует и продается по цене \$15,25. Таким образом, стоимость акционерного капитала компании XYZ.com составляет $15,25 \times n = 15\,250$ долларов, а стоимость всех облигаций равна $B = 44\,500 - 15\,250 = 29\,250$ долларам, или \$975 за облигацию.

Облигации компании XYZ.com эквивалентны неподверженным дефолту бескупонным облигациям номинала \$X плюс n выписанным Европейским опционам пут на акции компании Merck по цене исполнения \$30 в силу паритета пут—колл. Разница между стоимостью не подверженных дефолту облигаций и (подверженных) B как раз и представляет собой стоимость этих опционов. Таблица на рис. 11.2 показывает, чему равна совокупная рыночная стоимость акций и облигаций компании XYZ.com при различных долговых обязательствах X. Например, если обещанные выплаты держателям облигаций составляют сумму \$45 000, то соответствующий опцион является июльским опционом колл с ценой исполнения $45\,000/n = 45$ долларов. Поскольку этот опцион продается по цене \$1 15/16, то рыночная стоимость акционерного капитала компании XYZ.com составляет $(1 + 15/16) \times n = 1\,937,5$ долларов. Вообще же рыночная стоимость акционерного капитала уменьшается при увеличении коэффициента «долговые обязательства/стоимость обыкновенных акций».

Конфликт между акционерами и держателями акций. Опционы и корпоративные ценные бумаги имеют одно существенное отличие: фирма может изменить структуру своего капитала, но условия опционного контракта изменить после его выпуска нельзя. Это означает, что такие параметры как волатильность, дивиденды и цена исполнения контролируются акционерами лишь частично.

Предположим, что компания XYZ.com выпускает еще 15 облигаций на тех же условиях, чтобы выкупить часть акционерного капитала. Таким образом, общая задолженность $X = 45\,000$ долларов. Из рис. 11.2 видно, что совокупная рыночная стоимость облигаций должна быть рав-

Рис. 11.2. Распределение стоимости фирмы в зависимости от структуры капитала. Численные данные основаны на данных таблицы на рис.11.1.

Обещанные выплаты держателям облигаций	Текущая рыночная стоимость облигаций	Текущая рыночная стоимость акций	Совокупная текущая стоимость фирмы
X	B	nS	V
30000	29250,0	15250,0	44500
35000	35000,0	9500,0	44500
40000	39000,0	5500,0	44500
45000	42562,5	1937,5	44500

на \$42 562,5. *Новые* держатели облигаций, следовательно, оплачивают сумму в $42\,562,5 \times (15/45) = 14\,187,5$ долларов, которая используется компанией XYZ.com для выкупа акций. Оставшийся акционерный капитал стоит \$1937,5. Поэтому акционеры получают выигрыш в

$$(14\,187,5 + 1937,5) - 15\,250 = 875$$

долларов. Ну а *первые* держатели облигаций теряют такую же сумму

$$29\,250 - \left(\frac{30}{45} \times 42\,562,5\right) = 875. \tag{11.2}$$

Эти простые расчеты и говорят о внутреннем конфликте интересов между акционерами и владельцами облигаций.

В качестве другого примера предположим, что акционеры делят между собой сумму \$14 833,3 в форме дивидендов наличными, продавая $(1/3) \times n$ акций компании Merck. В этом случае они получают наличными \$14 833,3, а также опцион колл на акции этой компании в количестве $(2/3) \times n$ единиц. Цена исполнения остается равной $X = 30\,000$. Это эквивалентно владению двумя третями опциона колл на n акций компании Merck с общей ценой исполнения \$45 000. Поскольку n таких опционов колл в соответствии с рис. 11.1 стоят \$1937,5, то совокупная рыночная стоимость акционерного капитала компании XYZ.com составит $(2/3) \times 1937,5 = 1291,67$ доллара. Поэтому рыночная стоимость облигаций компании XYZ.com равняется $(2/3) \times n \times 44,5 - 1291,67 = 28\,375$ долларам. В результате акционеры получают выигрыш в сумме

$$(14\,833,3 + 1\,291,67) - 15\,250 \approx 875$$

долларов, а держатели облигаций наблюдают за тем, как стоимость их актива падает с \$29 250 до \$28 375, что означает потерю \$875.

Обычно держатели облигаций не любят акционеров за то, что те предпринимают несоразмерно рискованные капиталовложения. Теория опционов объясняет такие действия, указывая на то, что более высокая волатильность увеличивает вероятность того, что опцион колл будет исполнен к финансовому разочарованию держателей облигаций.

Упражнение 11.1.4. Если держатели облигаций могут потерять деньги, как это было в ситуации равенства (11.2), то почему они не просят уменьшить стоимость облигаций?

Упражнение 11.1.5. Повторите все шаги, которые привели к равенству (11.2) предположив, что теперь вместо пятнадцати облигаций фирма выпускает лишь пять.

Упражнение 11.1.6. Предположим, что ценные бумаги владеющей ими компании состоят из 1000 обычных акций компании Microsoft и 55 бескупонных облигаций с той же датой погашения, что и у апрельского опциона колл на акции Microsoft. Рассчитайте выигрыш акционеров (а, следовательно, потери первых держателей облигаций) при условии, что фирма выпустит на 5, 10, или 15 облигаций больше, соответственно. Рыночные котировки возьмите из таблицы на рис. 7.4.

Упражнение 11.1.7. Почему для держателей облигаций дивиденды — это плохо?

Подчиненные (или второстепенные) обязательства. Предположим, что компания XYZ.com добавляет к структуре своего капитала **подчиненный долг** (или **долг с меньшей приоритетностью**) номинала X_j . Первоначальный долг номинала X_s тогда превращается в **долг с большей приоритетностью** и получает преимущество над подчиненным долгом в случае дефолта (т.е. невыполнения обязательств). И пусть оба долга имеют одну и ту же дату погашения. В следующей таблице указаны выплаты по различным ценным бумагам.

	$V^* \leq X_s$	$X_s < V^* \leq X_s + X_j$	$X_s + X_j < V^*$
Долг с большей приоритетностью	V^*	X_s	X_s
Долг с меньшей приоритетностью	0	$V^* - X_s$	X_j
Акции	0	0	$V^* - X_s - X_j$

Получается, что у подчиненного долга та же выплата, что и у портфеля, состоящего из длинного опциона колл с ценой исполнения X_s и короткого опциона колл с ценой исполнения $X_s + X_j$, т.е. другими словами, как у бычьего колл-спреда.

11.1.2 **Варранты**

Варранты дают право купить акции корпораций. В отличие от опциона колл корпорации выпускают варранты на свой собственный акционерный капитал и *новые* акции выпускаются, когда варрант исполняется. Большая часть варрантов имеет срок жизни в промежутке от 5 до 10 лет, хотя существуют и вечные варранты. Обычно варранты защищены от дробления акций и выплаты дивидендов наличными.

Рассмотрим корпорацию с n единицами акций и m Европейскими варрантами. Каждый варрант может быть превращен в одну акцию при выплате цены исполнения X . Совокупная стоимость корпорации, следовательно, равна $V = nS + mW$, где W означает текущую стоимость каждого варранта. По окончании срока жизни варранта, если его исполнение становится выгодным, то стоимость каждого варранта должна

быть равной величине

$$W^* = \frac{1}{n+m}(V^* + mX) - X = \frac{1}{n+m}(V^* - nX),$$

где V^* обозначает совокупную стоимость корпорации непосредственно перед конверсией. Поэтому с выгодой исполнить варранты можно будет тогда и только тогда, когда $V^* > nX$. А, следовательно, Европейский варрант является Европейским опционом колл на одну $(n+m)$ -ю часть совокупной стоимости корпорации с ценой исполнения $Xn/(n+m)$ — или, что эквивалентно, $n/(n+m)$ часть Европейского опциона колл на одну n -ю часть совокупной стоимости корпорации (т. е. величину $S + (m/n)W$) с ценой исполнения X . Поэтому

$$W = \frac{n}{n+m}C(W), \quad (11.3)$$

где $C(W)$ — стоимость Европейского опциона колл по формуле Блэка—Шоулса, но с заменой цены акции на величину $S + (m/n)W$. При известном S значение W может быть найдено численными методами.

Задание по программированию 11.1.8. 1) Напишите программу для решения уравнения (11.3).

2) Напишите алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости Американских варрантов.

11.1.3 Отзывные облигации

Корпорации выпускают отзывные облигации для того, чтобы долги можно было профинансировать на более выгодных условиях, скажем, если будущие процентные ставки упадут или улучшится финансовая ситуация в корпорации. Рассмотрим корпорацию с двумя типами обязательств: n единиц обычных акций и единственный выпуск отзывных облигаций. Общий номинал этих облигаций равен X , и акционеры получают право отозвать эти облигации в любое время за общую цену X_c . Причем всякий раз, когда облигации отзываются до момента погашения, то акционеры получают сумму $V - X_c$. Акционерный капитал, следовательно, эквивалентен Американскому опциону колл на совокупную стоимость фирмы с ценой исполнения X_c при досрочном исполнении и X при окончании его срока действия.

11.1.4 Конвертируемые облигации

Конвертируемая облигация (КО) похожа на обычную облигацию, за исключением того, что по усмотрению своего владельца она может быть конвертирована в новые акции. Рассмотрим не выплачивающую дивидендов корпорацию с двумя классами обязательств: n единиц обычных акций и m бескупонных КО. При погашении каждая КО может быть преобразована в k вновь выпущенных акций (величина k называется **коэффициентом конверсии**). Если же облигации не конвертируются, то при погашении их держатели получают в сумме X .

Если выбирается конверсия, то держатели облигаций становятся владельцами доли $\lambda \equiv \frac{mk}{n + mk}$ стоимости фирмы (λ называется **коэффициентом разбавления**). Ковертировать же имеет смысл, лишь если часть совокупной рыночной стоимости корпорации, которая отойдет к держателям облигаций после конверсии, или λV^* , превосходит X , т.е. $V^* > X/\lambda$. Выплата по облигации при погашении равна 1) V^* , если $V^* \leq X$, 2) X , если $X < V^* \leq X/\lambda$ или 3) λV^* , если $X/\lambda < V^*$.

Предпринимать рискованные проекты в интересах акционеров потому, что более высокая волатильность увеличивает стоимость акции. Корпорации могут также утаивать интересную внутреннюю информацию от держателей облигаций; но как только благоприятная информация «расходится», корпорация отзывает облигации. КО решают обе проблемы, давая держателям облигаций право на замену облигации акцией [837].

Упражнение 11.1.9. Представьте стоимость бескупонных КО с помощью совокупной стоимости корпорации и Европейских опционов колл на эту стоимость.

Упражнение 11.1.10. 1) Представьте бескупонную КО с помощью бескупонных облигаций и Европейских опционов колл на долю общей стоимости корпорации.

2) Продублируйте бескупонную КО с помощью бескупонных облигаций и воррантов.

3) Покажите, что ранняя конверсия не является оптимальной.

Конвертируемые облигации с возможностью отзыва. Многим КО придана возможность отзыва. Когда КО отзываются, то их владельцы могут либо конвертировать КО, либо выкупить их по стоимости отзыва. Стратегия отзыва имеет целью минимизировать стоимость КО. В последующем анализе предполагается, что КО можно отозвать в любое время до истечения их срока жизни и что стоимость корпорации изменяется непрерывно, без прыжков.

Рассмотрим ту же корпорацию еще раз. В частности, пусть совокупный номинал КО будет равен X , общая стоимость отзыва P , причем $P \geq X$. При конверсии держатели облигаций станут собственниками доли стоимости фирмы λ . Сначала мы объясним, что отзываться КО невыгодно, если $\lambda V < P$. Как показывает нижеследующая таблица,

	$V^* \leq X$	$X < V^* \leq X/\lambda$	$X/\lambda < V^*$
<i>Немедленный отзыв (ПЗ)</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
Отзыва не будет (НЗ при погашении)	V^*	X	λV^*
Отзыва не будет (ПЗ)	V	ПЗ(X)	λV

отказ от отзыва оставляет держателям облигаций в момент погашения стоимость в размере V^* , X или λV^* , если они предпочтут не конвертировать их ранее. Величины приведенных значений (ПЗ) во всех трех случаях либо меньше, либо равны P . Поэтому немедленный отзыв не оптимален.

	$V^* < X$	$X \leq V^* < X/\lambda$	$X/\lambda \leq V^*$
Отзыва не будет	V^*	X	λV^*
Отзыв где-то в будущем	λV^*	λV^*	λV^*

Далее объясним, почему отзываться КО не выгодно после того, как возникло равенство $\lambda V = P$. Отзыв КО в ситуации $\lambda V = P$ при погашении оставляет держателям облигаций сумму λV^* . Если же КО не отзываются, то конечная выгода держателей облигаций представлена в следующей таблице, указанной выше.

Поэтому отказ от отзыва КО может привести к большей заключительной выплате держателям облигаций, нежели его использование. В общем, оптимальной стратегией отзыва будет отзыв КО в случае, когда равенство $\lambda V = P$ возникает в первый раз. Более общие подходы будут рассмотрены в п. 15.3.7.

Упражнение 11.1.11. Доведите до конца рассуждение, объяснив, что в случае $\lambda V > P$ отзываться КО невыгодно.

11.2 Барьерные опционы

Если выплата по опциону зависит от достижения ценой базового актива некоторого уровня H , то он называется **барьерным опционом**. Например, **нокаут-опцион** (knock-out option) подобен обычному Европейскому опциону во всем, кроме того, что он прекращает свое существование, если цена базового актива достигает барьера H . Нокаут-опцион колл иногда называют **вниз-и-выход опционом**, если $H < X$. Нокаут-опцион пут иногда называют **вверх-и-выход опционом**, если $H > X$. **Начало-опцион** (knock-in option), наоборот, начинает свое существование, если достигается некоторый барьер. Так, **вниз-и-вход опционом** называется такой начало-опцион колл, который начинает свое существование, лишь если достигнут барьер и $H < X$. **Вверх-и-вход опционом** называется такой начало-опцион пут, который начинает свою жизнь, лишь если достигнут барьер и $H > X$. Барьерными опционами в Соединенных Штатах начали торговать с 1967 г. и, вероятно, они являются наиболее популярными среди внебиржевых опционов [370, 740, 894].

Стоимость Европейского вниз-и-вход опциона колл на акцию, по которой выплачивается дивидендная ставка доходности q равна

$$Se^{-q\tau} \left(\frac{H}{S} \right)^{2\lambda} \Phi(x) - Xe^{-r\tau} \left(\frac{H}{S} \right)^{2\lambda-2} \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \quad S \geq H, \quad (11.4)$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(H^2/(SX)) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

и $\lambda \equiv (r - q + \sigma^2/2)/\sigma^2$ (см. рис. 11.3). Стоимость Европейского вниз-и-выход опциона колл можно оценить с помощью **паритета вход—выход**

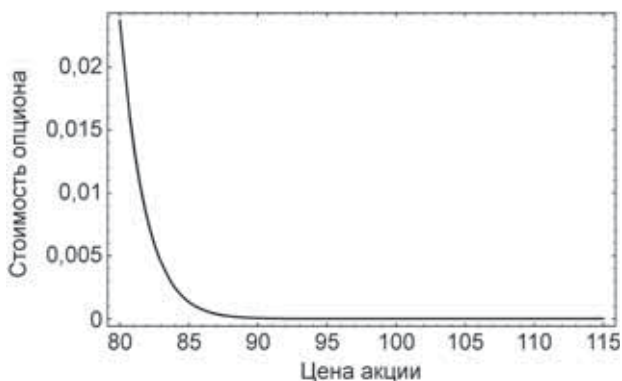


Рис. 11.3. Стоимость опциона колл вниз-и-вход. Стоимость опциона представлена как функция цены акции с барьером $H = 80$. Другие параметры совпадают с параметрами рис. 7.3: $X = 95$, $\sigma = 0,25$, $\tau = 1/12$, $r = 0,08$. Обратите внимание: графики сильно отличаются.

(см. замечание 11.2.1). Стоимость Европейского вверх-и-вход опциона пут равна

$$Xe^{-r\tau} \left(\frac{H}{S} \right)^{2\lambda-2} \Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Se^{-q\tau} \left(\frac{H}{S} \right)^{2\lambda} \Phi(-x),$$

где $S \leq H$. Стоимость Европейского вверх-и-выход опциона колл можно также оценить с помощью паритета вход—выход (см. упр. 11.2.1 (2)). Формулы принадлежат Мертону [660]. За доказательством обращайтесь к [660] или упр. 17.1.6.

Для оценки стоимости барьерных опционов на биномиальном дереве можно использовать обратную индукцию. Поскольку алгоритм биноми-

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости опциона колл вниз-и-выход на бездивидендную акцию:

ввод: S , u , d , X , H ($H < X$, $H < S$), n , $\hat{r}$;
 действительные числа R , p , $C[0..n]$;
 целые i , j , h ;
 $R := e^{\hat{r}}$; $p := (R - d)/(u - d)$;
 $h := \lfloor \ln(H/S) / \ln u \rfloor$; $H := Su^h$;
 для ($i = 0$ до n) { $C[i] := \max(0, Su^{n-i}d^i - X)$; }
 если [$n - h$ чётно и $0 \leq (n - h)/2 \leq n$]
 $C[(n - h)/2] := 0$; // удар (достижение барьера)
 для ($j = n - 1$ вниз до 0) {
 для ($i = 0$ до j) { $C[i] := (p \times C[i] + (1 - p) \times C[i + 1])/R$; }
 если [$j - h$ чётно и $0 \leq (j - h)/2 \leq j$]
 $C[(j - h)/2] := 0$; // удар
 }
 вывод $C[0]$;

Рис. 11.4. Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости вниз-и-выход опциона колл на бездивидендную акцию. Поскольку уровень H может не совпадать с реальной ценой акции, то мы понижаем его до величины Su^h , т. е. до максимальной цены акции, не превосходящей H . Новый барьер отвечает значению $C[(j - h)/2]$ для моментов времени $j = n, n - 1, \dots, h$. Если при достижении барьера опцион предоставляет скидку K , переход на ноль заменяется соответствующим переходом с K .

ального дерева действует в обратном направлении по отношению ко времени, то он проверяет достижение барьерной цены базовым активом, и, если это происходит, заменяет стоимость опциона соответствующим образом (см. рис. 11.4). На практике за барьером часто следят в дискретные моменты времени, скажем, в конце торгового дня, и алгоритм должен отражать и это обстоятельство.

Упражнение 11.2.1. 1) Докажите, что Европейский опцион колл эквивалентен портфелю из одного Европейского вниз-и-выход опциона колл и одного Европейского вниз-и-вход опциона колл с одним и тем же барьером.

2) Докажите, что Европейский опцион пут эквивалентен портфелю из одного Европейского вверх-и-выход опциона пут и одного Европейского вверх-и-вход опциона пут с одним и тем же барьером.

Замечание 11.2.1. Эквивалентные представления для стоимости опционов из упр. 11.2.1 называются паритетом вход—выход [271]. Отметим, что эти утверждения не зависят от того, является ли барьер постоянной величиной или нет. $\triangleleft$

Упражнение 11.2.2. Сохранится ли свойство паритета вход—выход по отношению к опционам Американского типа?

Упражнение 11.2.3. Проверьте, превращаются ли формулы для стоимости опционов вверх-и-вход и вниз-и-вход в формулы Блэка—Шоулса для стандартных Европейских опционов при $S = H$.

Упражнение 11.2.4. Опцион переустановки подобен обычному опциону за исключением того, что его цена исполнения полагается равной H , если цена акции достигает значения H . Предположим, что $H < X$. Постройте искусственный опцион переустановки с помощью портфеля из барьерных опционов.

Задание по программированию 11.2.5. 1) Реализуйте алгоритмы биномиального дерева для оценки стоимости Европейских нокаут-опционов и начало-опционов со скидками. Обратите особое внимание на их сходимость (см. рис. 11.5). Вот одна из решенных проблем: стоимость Европей-

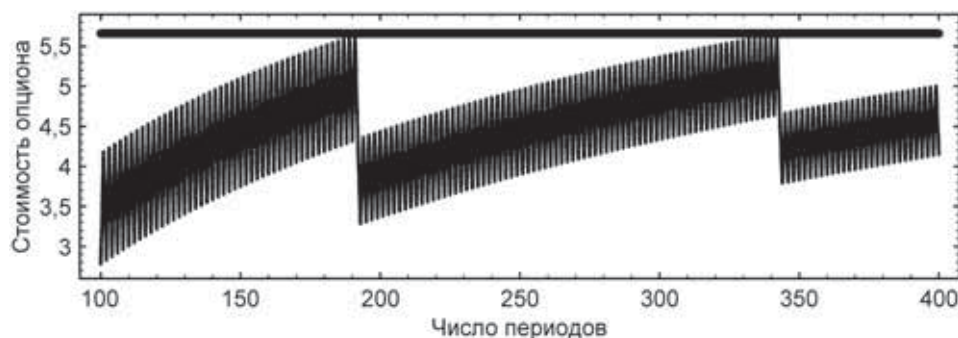


Рис. 11.5. Сходимость биномиальной модели для опционов колл вниз-и-вход. Стоимость опциона представлена как функция числа периодов времени. Параметры опциона: $S = 95$, $X = 100$, $H = 90$, $r = 10\%$ (непрерывного начисления), $\sigma = 0,25$ и $\tau = 1$ год. Для сравнения указано и теоретическое значение стоимости 5,6605.

ского опциона колл вниз-и-вход без скидок равна \$ 5,6605 при условии, что $S = 95$, $X = 100$, $H = 90$, $r = 10\%$ (ставка непрерывного начисления), $\sigma = 0,25$ и $\tau = 1$ год.

2) Измените алгоритм таким образом, чтобы он мог оценивать одновременно и стоимость Американских барьерных опционов.

11.2.1 Облигации с условием «безрисковости»

Облигации с условием безрисковости можно оценить с помощью нокаут-опционов. Предположим, что от фирмы требуют передать свою собственность держателям облигаций, если ее стоимость падает ниже заданного барьера H , который может зависеть от времени. Следовательно, держатели облигаций получают сумму V , как только стоимость фирмы упадет впервые ниже H . При погашении же держатели облигаций получают X , если $V > X$, и V , если $V < X$, где X — совокупный номинал облигаций. Таким образом, стоимость облигаций равняется стоимости фирмы за вычетом стоимости опциона колл вниз-и-выход с ценой исполнения X и барьером H .

11.2.2 Непостоянный барьер

Рассмотрим обобщенный барьерный опцион с барьером $H(t) = He^{-\rho\tau}$, где $\rho \geq 0$ и $H \leq X$. Стандартный барьерный опцион соответствует значению $\rho = 0$. Стоимость Европейского опциона колл вниз-и-вход равна

$$S \left[\frac{H(t)}{S} \right]^{2\lambda} \Phi(x) - Xe^{-r\tau} \left[\frac{H(t)}{S} \right]^{2\lambda-2} \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}),$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(H(t)^2/(SX)) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$\lambda \equiv (r - \rho + \sigma^2/2)/\sigma^2$ и $S \geq H(t)$. Этот результат принадлежит Мертону [660]. Американские опционы можно рассматривать как барьерные, причем барьером является момент исполнения, который следует рассчитывать вместо того, чтобы считать заданным с самого начала.

11.2.3 Другие типы барьерных опционов

Среди барьерных опционов существует много разновидностей [158]. Если барьер действует лишь на некотором начальном промежутке времени, то опцион называется **частично-барьерным опционом**, а если же барьер действует на некотором заключительном этапе жизни опциона, то такой опцион называется **впереди-стартовым барьерным опционом**. Если же действие барьера прерывается на какое-то время, то это — **парижский опцион**. У опционов с **двойным барьером** есть два барьера. В **катящихся опционах** задается последовательность барьеров. У опционов колл (пут) цена исполнения понижается (соответственно, повышается) всякий раз, когда достигается очередной барьер, а при достижении последнего барьера опцион прекращает свое существование.

Упражнение 11.2.6. Катящийся опцион колл имеет барьеры $H_1 > H_2 > \dots > H_n$ (причем все они меньше исходной цены акции) и цены исполнения $X_0 > X_1 > \dots > X_{n-1}$. Этот опцион стартует как некоторый Европейский опцион колл с ценой исполнения X_0 . Когда достигается первый барьер H_1 , то цена исполнения меняется на X_1 . И в общем случае цена исполнения становится равной X_i при достижении барьера H_i . А когда достигается последний барьер H_n , то срок действия опциона заканчивается. Постройте дубликат этого опциона с помощью портфеля из опционов колл вниз-и-выход.

11.3 Шапки и полы процентных ставок

В долговых обязательствах под плавающую ставку заемщика беспокоит подъем ставок, а кредитора — их падение. Они могут искать защиты от подобных поворотов в **шапках или полах процентных ставок**, соответственно. Продавец шапки выплачивает ее покупателю некоторую сумму при каждой дате оплаты всякий раз, когда **базовая ставка** (упоминаемая в контракте) оказывается выше **ставки-шапки** по контракту (или **потолковой ставки**). Продавец пола выплачивает его покупателю некоторую сумму при каждой дате оплаты всякий раз, когда **базовая ставка** оказывается ниже **ставки-пола** по контракту. В результате дело сводится к тому, что шапка устанавливает потолок для процентной ставки, определяющей стоимость долгового обязательства под плавающую ставку, а пол устанавливает минимальный уровень для процентной ставки, определяющей доходность актива, предоставленного под плавающую ставку. Заранее определенный уровень процентной ставки, такой как шапка-ставка или пол-ставка, называется **ставкой исполнения** [325]. Но можно также купить процентную ставку-шапку и одновременно продать процентную ставку-пол, чтобы создать **воротник процентных ставок**. С воротником процентная ставка-стоимость находится в коридоре между ставкой полом и ставкой потолком: если базовая ставка поднимается выше ставки шапки, то этот выход за границу компенсируется продавцом шапки, а если эта ставка опускается ниже ставки пола — то некоторая сумма выплачивается покупателю пола.

Если же более формально, то при каждой дате выплаты по шапке держатель шапки получает

$$\max(\text{базовая ставка} - \text{ставка шапка}, 0) \times \text{исходный номинал} \times t, \quad (11.5)$$

где t — длительность оплачиваемого периода. И, совершенно аналогично, выплата по полу равна

$$\max(\text{ставка пол} - \text{базовая ставка}, 0) \times \text{исходный номинал} \times t.$$

Выплата (11.5) характеризует Европейский опцион колл на процентную ставку с ценой исполнения, совпадающей со ставкой шапкой. Поэтому шапку можно рассматривать как пакет Европейских опционов колл (или **шапочек**) на базовую процентную ставку. И, аналогично, пол можно рассматривать как пакет Европейских опционов пут (или **маленьких полов**) на базовую процентную ставку.

	Один месяц	Три месяца	Шесть месяцев	Один год
\$ LIBOR FT London Межбанковское соглашение	61/16	61/8	61/8	63/16

Рис. 11.6. Выборочные котировки ставки LIBOR. Источник: газета Financial Times от 19 мая 1995 г.

Например, если базовой является 6-месячная ставка LIBOR, то длительность t , как правило, равна 181/360 или 184/360, поскольку при расчете ставки LIBOR используется способ расчета срока в днях «действительный/360 дней». Ставка LIBOR строится на основе ставок по кредиту для вкладов в долларах США (**Евродолларах**) среди больших банков Лондона. Многие краткосрочные долговые обязательства и ссуды под плавающую ставку заключаются под ставку выше LIBOR в том смысле, что котировки их процентной ставки на некоторую фиксированную величину (маржу) выше котировок ставки LIBOR. Эта разница между ставкой LIBOR и местной ставкой определяется уровнем риска, постановлениями правительства и налогами [767]. Но котируются также и ставки LIBOR по недолларовым депозитам, таким как LIBOR по немецкой марке [646]. Выборочные котировки по ставкам LIBOR приведены в таблице на рис. 11.6.

В отличие от опционов на акции, расчет по шапкам и полам совершается наличными. Премия выражается в виде процента от исходного номинала, на который и продается шапка или пол. Например, при исходном номинале в \$ 10 млн., премия в 20 базисных пунктов выливается в $10 \times 20 / 10\,000 = 0,02$ млн. долларов. Вся премия обычно выплачивается вперед.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда фирма выпускает банкноту с плавающей ставкой, оплачиваемую по 6-месячной ставке LIBOR плюс 90 базисных пунктов. Но финансовая ситуация этой фирмы не позволяет ей оплачивать кредит по ежегодной ставке выше 11 %. Поэтому она может приобрести шапку на процентную ставку с величиной ставки-шапки, равной 10,1 %. После этого всякий раз, когда базовая ставка зайдет за границу 10,1 % и фирма будет выплачивать более 11 %, излишек будет компенсироваться дилером, продавшим шапку.

11.4 Опционы на индексы акций

Акционный индекс является математическим выражением стоимости портфеля из акций. К примеру, Составной индекс (сокращенное обозначение NYA) Нью-Йоркской фондовой биржи (NYSE) является средне-взвешенной стоимостью всех акций, которыми торгуют на NYSE; причем веса пропорциональны совокупной рыночной стоимости акций, находящихся в обращении. Таким образом, покупка индекса эквивалентна покупке портфеля из всех обычных акций, торгуемых на NYSE. А такой способ усреднения называется **взвешиванием относительно капитала**, в нем компаниям с большим капиталом соответствуют большие веса.

Другие четыре примера акционных индексов — это индекс Доу-Джонса (DJIA), индекс S&P 100 (сокращенное обозначение OEX), индекс S&P 500 (сокращенное обозначение SPX), а также индекс Основного Рынка (сокращенное обозначение XMI). Индексы SPX и OEX являются усреднениями относительно капитала, в то время как индексы Доу-Джонса и XMI представляют собой средние **относительно стоимости (или цены)**. Если индекс является средневзвешенным относительно стоимости, то он рассчитывается по формуле $\sum_i P_i/\alpha$, где P_i — стоимость акции с номером i в индексе, а α является корректировочным коэффициентом, который учитывает дробление акции, ее дивиденды, банкротство, слияния и т.д. с тем, чтобы индексы можно было сравнивать через какое-то время. Например, у индекса Доу-Джонса на 26 октября 1999 г. $\alpha = 0,19740463$. Третьим способом взвешивания является **геометрическое взвешивание**, в котором влияние всех акций на индекс одинаково. Примером индекса, получаемого геометрическим взвешиванием, является Value Line Index (сокращенное обозначение VLE) [646]. Такой индекс рассчитывается по формуле

$$I(t) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} \right]^{1/n} I(t-1),$$

где n — число акций индекса, $I(t)$ — значение индекса на день t , а $P_i(t)$ — цена акции i на день t . Индексы акций обычно не учитывают дивиденды наличными [317]. См. таблицу на рис. 11.7. Другие индексы акций можно найти в [95, 346, 470].

Индексы акций отличаются также по составу входящих в них акций. Например, индекс Доу-Джонса является индексом 30 наиболее привилегированных акций (голубых фишек)¹, в то время как индекс S&P 500 состоит из 500 акций, котируемых на трех разных биржах. Тем не менее их доходности обычно сильно коррелируют друг с другом.

Диапазоны значений базовых индексов						
Индекс	Котировка на 20.03.1995			Абсолютное изменение по сравнению с пред. днем	Изменение по сравнению с 31.12.1994	
	верхняя граница	нижняя граница	при закрытии		абсолютное	в %
S&P 100 (OEX)	465,88	464,31	465,42	+0,57	+36,79	+8,6
S&P 500 -A.M. (SPX)	496,61	495,27	496,14	+0,62	+36,87	+8,0
Nasdaq 100 (NDX)	447,67	442,83	446,61	+2,67	+42,34	+10,5
Russell 2000 (RUT)	257,87	257,28	257,83	+0,51	+7,47	+3,0
Major Mkt (XMI)	435,14	432,82	434,90	+1,93	+34,95	+8,7
NYSE (NYA)	268,36	267,68	268,05	+0,21	+17,11	+6,8
Wilshire S-C (WSX)	332,50	331,69	332,11	+0,16	+11,05	+3,4
Value Line (VLE)	474,41	473,46	474,12	+0,58	+21,59	+4,8

Рис. 11.7. Котировки индексов. Поразительный подъем рынка акций между 1995 г. и началом 2000 г. очевиден при сравнении этой таблицы с таблицей на рис.8.2. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

	Цена исполнения	Объем продаж	Цена при закрытии	Абсолютное изменение	Открытая позиция
ЧИКАГО					
ИНДЕКС S&P 100 (OEX)					
Май	380п	8	5/16	—	897
Апр	385п	50	1/8	—	1672
Апр	390п	335	1/8	—	4 406
.					
Апр	410к	12	57	+12	37
.					
Июнь	490к	42	13/4	—1/4	719
Колл	объем	75 513	откр. поз.	415 627	
Пут	объем	104 773	откр. поз.	447 094	
ИНДЕКС S&P 500 -А.М. (SPX)					
Июнь	350п	15	1/8	—1/8	2 027
Июнь	375п	8	1/4	—1/8	5 307
Апр	400п	50	1/16	—	5 949
.					
Апр	405к	2	913/4	—	—
.					
	Цена исполнения	Объем продаж	Цена при закрытии	Абсолютное изменение	Открытая позиция
АМЕРИКАНСКИЕ					
ОСНОВНОЙ РЫНОК (ХМІ)					
Июнь	325п	20	1/16	—3/16	45
Апр	350п	300	1/16	—	400
.					
Колл	объем	1 973	откр. поз.	6 011	
Пут	объем	4 071	откр. поз.	27 791	

Рис. 11.8. Котировки индексных опционов. Обозначения: п — пут, к — колл. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

Опцион на индекс является опционом на значение индекса. Опционы на рыночные портфели из акций впервые были предложены страховыми компаниями в 1977 г. Индексные опционы, торгуемые на биржах, впервые появились в марте 1983 г. в сделках по индексу ОЕХ на Чикагской бирже опционов СВОЕ (Chicago Board Options Exchange) [346]. См. их выборочные котировки в таблице на рис. 11.8. Опционы на индексы акций урегулируются наличными: причем когда опцион исполняется, из рук в руки переходит лишь разница в наличных между текущей рыночной стоимостью индекса и ценой исполнения. Опционы на индексы SPX, ХМІ и DJIA являются Европейскими, а на индексы ОЕХ и NYA — Американскими.

Тот факт, что урегулирование происходит в наличных, для держателей и продавцов Американских опционов представляет некоторый риск. Поскольку точное значение выплачиваемой при исполнении опциона суммы определяется заключительной ценой, то имеется неопределенность, называемая **риском исполнения**. Рассмотрим инвестора, который занимает короткую позицию по опциону колл на ОЕХ и длинную позицию по соответствующему количеству обычных акций, которое включает в себя индекс. Если опцион колл исполняется сегодня, то продавец будет уведомлен об этом на следующий рабочий день и уплатит наличными сумму, определяемую по цене закрытия на сегодня. Поскольку же (на

следующий рабочий день) индекс может иметь цену, отличающуюся от цены закрытия на сегодня, то акции могут иметь стоимость, отличающуюся от стоимости индекса при закрытии сегодня. А если бы сделки по опционам урегулировались в акциях, то продавец просто бы предоставил акции на следующий рабочий день, не беспокоясь о возможном изменении значения индекса.

Стоимость одного опционного контракта на акционный индекс определяется как сумма в долларах, равная произведению \$ 100 на значение индекса. Майский опцион пут на индекс OEX с ценой исполнения в \$ 380 стоит $100 \times (5/16) = 31,25$ доллара, если судить по данным таблицы на рис. 11.8. Этот конкретный опцион пут находится вне денег.

Оценка стоимости опционов на акционные индексы обычно опирается на модель оценки стоимости опционов Блэка—Шоулса с непрерывной дивидендной доходностью. Поэтому стоимость Европейских опционов на акционные индексы может определяться по формулам (9.20). В действительности же эта модель оценивает рыночный индекс из большого числа акций даже лучше, чем она позволяет оценить стоимость индивидуальных акций².

Одной из важнейших целей опционов на индексы акций является хеджирование больших диверсифицированных портфелей. Опционы пут на индекс NYA, к примеру, можно использовать для защиты портфеля, составленного в основном из ценных бумаг, котируемых на NYSE, против падений рынка. Альтернативный подход, состоящий в покупке опционов пут на отдельные акции был бы значительно более громоздким и дорогостоящим по теореме 8.6.1. Опционы на акционные индексы можно использовать и для создания длинной позиции в некотором портфеле из акций с помощью паритета пут—колл. Гораздо легче реализовать эту искусственную ценную бумагу, чем покупать отдельные акции.

Упражнение 11.4.1. Проверьте следующие утверждения:

1) Однопроцентное изменение стоимости дешевой акции приводит к меньшему изменению величины индекса, рассчитанного по методу взвешивания относительно стоимости (цены), чем такое же изменение стоимости дорогой акции.

2) Однопроцентное изменение стоимости у акций малого объема ведет к меньшему влиянию на величину индекса, получаемого по методу взвешивания относительно капитала, чем у акций большого объема.

3) Однопроцентное изменение стоимости дешевой акции имеет такое же влияние на индекс, полученный по методу геометрического взвешивания, как и такое же изменение стоимости дорогой акции.

11.5 Форексные опционы

На **спот-рынке** (или **рынке наличных**), где обмен активов на деньги происходит непосредственно во время сделки, обменные курсы между долларом США и валютами других государств обычно котируются в **Европейской форме**. По этому методу обычно определяется сумма в ино-

ОБМЕННЫЕ КУРСЫ (7 января 1999 г., четверг)				
Страна, валюта	Эквивалентная сумма в \$ США		Курс валюты за \$ США	
	Четверг	Среда	Четверг	Среда
Англия (фунт)	1,6508	1,6548	0,6058	0,6043
1-мес. форвард	1,6493	1,6533	0,6063	0,6049
3-мес. форвард	1,6473	1,6344	0,6071	0,6119
6-мес. форвард	1,6461	1,6489	0,6075	0,6065
.....				
Германия (марка)	0,5989	0,5944	1,6698	1,6823
1-мес. форвард	0,5998	0,5962	1,6673	1,6771
3-мес. форвард	0,6016	0,5972	1,6623	1,6746
6-мес. форвард	0,6044	0,6000	1,6544	1,6666
.....				
Япония (йена)	0,009007	0,008853	111,03	112,95
1-мес. форвард	0,009007	0,008889	111,03	112,50
3-мес. форвард	0,009008	0,008958	111,02	111,63
6-мес. форвард	0,009009	0,009062	111,00	110,34
.....				
Тайвань (доллар)	0,038511	0,038436	25,97	26,02
.....				
SDR	1,4106	1,4137	0,7089	0,7074
Евро	1,1713	1,1626	0,8538	0,8601

Рис. 11.9. Котировки обменных курсов. Источник: газета Wall Street Journal от 8 января 1999 г.

странной валюте, необходимая для покупки одного доллара США, т. е. число единиц иностранной валюты на доллар. С другой стороны, в соответствии с **формой, обратной к Европейской**, указывается сумма в долларах США, эквивалентная по стоимости одной единице иностранной валюты. Например, если Европейская котировка выглядит как 0,63 британского фунта стерлингов за \$1 (или кратко £0,63/\$1), то в форме, обратной к Европейской она звучит как \$1,587 на британский фунт (если кратко, то \$1/£0,63 или \$1,587/£1). Форма, обратная к Европейской, называется также **Американской**.

В таблице на рис. 11.9 представлены текущие обменные курсы валют на 7 января 1999 г. **Текущий обменный курс** — это курс, по которому одна валюта может быть обменена на другую, обычно с урегулированием в течение 2-х дней. Отметим, что немецкая марка является **валютой с премией**, поскольку 3-месячный форвардный обменный курс, \$0,6016/DEM 1, превосходит текущий обменный курс, \$0,5989/DEM 1; т. е. марка больше ценится на форвардном рынке, чем на спот-рынке. И наоборот, Британский фунт является **валютой со скидкой**. **Форвардный обменный курс** — это обменный курс при отложенной поставке валюты.

Опционы на обмен иностранной валюты (форекс) урегулируются поставкой базовой валюты. Основной целью форексных опционов является защита от **валютного риска**. Рассмотрим компанию США, рассчитывающую

за 6 250 000 Японских йен, или, что эквивалентно, как опцион колл на 55 000 долларов США с ценой исполнения в $1/0,0088 \approx 113,6$ йен за доллар.

Еще важно отметить, что «марка/доллар» колл (т.е. опцион на покупку немецких марок за доллары США) и «доллар/фунт» колл не сводятся к опциону колл «марка/фунт». Проиллюстрируем это на примере. Рассмотрим опцион колл на 1 немецкую марку за \$0,71, опцион колл на \$0,71 за £0,452, и опцион колл на 1 немецкую марку за £0,452. Предположим, что доллар США упал до \$0,72 за 1 немецкую марку и до £1 за \$1,60. Тогда чистая прибыль по первому опциону равна \$0,01, но второй опцион оказывается бесполезным. Поскольку $0,72/1,6 = 0,45$, то немецкая марка стоит £0,45 и потому опцион «немецкая марка/фунт» исполнять не имеет смысла. Поэтому портфель из опционов колл «марка/\$» и «\$/£» стоит больше, чем опцион колл «немецкая марка/£». И можно показать, что такой вывод носит общий характер (см. упр.15.3.16). Опционы типа «немецкая марка/£» с точки зрения доллара называются **опционами перекрестной валюты**.

Многие фореक्सные опционы являются внебиржевыми. Одной из возможных причин этого является то, что однородность и ликвидность базового актива упрощает ведение сделок с точки зрения таможи. Фореक्सные опционы, торгуемые на бирже, имеются на Филадельфийский фондовой бирже (PHLX), Чикагской торговой бирже (CME), а также на многих других биржах [346]. Большая часть форексных опционов, торгуемых на биржах, оформляются в долларах США.

Упражнение 11.5.1. Зонный форвардный контракт в момент окончания срока действия характеризует следующая выплата:

$$\begin{aligned} &0, \text{ если обменный курс } S \text{ лежит в интервале } [X_L, X_H], \\ &S - X_H, \text{ если } S > X_H, \\ &S - X_L, \text{ если } S < X_L. \end{aligned}$$

В нем гарантируется, что реальный будущий обменный курс (для владельца такого контракта) будет лежать между X_L и X_H . Постройте дубликат этого контракта с помощью стандартных опционов.

Упражнение 11.5.2. В условном форвардном контракте премия p оплачивается в момент окончания и только при условии, что обменный курс меньше заданного уровня X . Таким образом, выплата при истечении срока его действия равна

$$\begin{aligned} &S - X - p, \text{ если обменный курс } S \text{ превосходит } X, \\ &-p, \text{ если } S \leq X. \end{aligned}$$

В нем гарантируется, что реальный будущий обменный курс будет не больше $X + p$. Постройте дубликат этого контракта с помощью стандартных опционов.

Упражнение 11.5.3. В момент окончания срока действия по участвующему форвардному контракту выплачивается сумма

$$\begin{aligned} &S - X, \text{ если обменный курс } S \text{ превосходит } X, \\ &\alpha(S - X), \text{ если } S \leq X. \end{aligned}$$

Его покупателю гарантируется, что верхняя граница обменного курса

будет равна X , но в то же время покупатель сам оплачивает долю α от величины падения курса ниже X . Постройте дубликат этого контракта из стандартных опционов.

11.5.1 Модель Блэка—Шоулса для форексных опционов

Пусть S обозначает текущий обменный курс в терминах «местная валюта за единицу иностранной», σ — волатильность обменного курса, r — местная процентная ставка и $\hat{r}$ — иностранная процентная ставка. Иностранная валюта аналогична акции, оплачивающей известную дивидендную доходность, поскольку владелец иностранной валюты получает непрерывную дивидендную доходность, равную $\hat{r}$ в иностранной валюте. Поэтому формулы (9.20), установленные для опционов на акционные индексы, можно использовать и здесь с дивидендной доходностью, равной $\hat{r}$:

$$C = Se^{-\hat{r}\tau}\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \quad (11.6)$$

$$P = Xe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Se^{-\hat{r}\tau}\Phi(-x), \quad (11.6')$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(S/X) + (r - \hat{r} + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Параметры дельта опционов колл и пут равны $e^{-\hat{r}\tau}\Phi(x) \geq 0$ и $-e^{-\hat{r}\tau} \times \Phi(-x) \leq 0$, соответственно. Модель Блэка—Шоулса приводит к приемлемым результатам для большинства валют, таких как Немецкая марка, Японская йена и Английский фунт [346].

Упражнение 11.5.4. Рассмотрим биномиальную модель оценки стоимости опциона (БМО).

1) Проверьте, что риск-нейтральная вероятность для форексных опционов равна $\frac{e^{(r-\hat{r})\Delta t} - d}{u - d}$, где u и d обозначают скачки вверх и вниз, соответственно, обменного курса «местная валюта за 1 иностранной» (местная/иностранная) за интервал времени Δt .

2) Пусть S — обменный курс «местная валюта/иностранная валюта». Покажите, что дельта для форексного опциона колл равна величине

$$h \equiv e^{-\hat{r}\Delta t} \frac{C_u - C_d}{Su - Sd},$$

если использовать иностранный безрисковый актив (безрисковый в терминах иностранной валюты) и местный безрисковый актив для построения дубликата опциона. Вышеприведенное h представляет собой стоимость иностранного безрискового актива в иностранной валюте (указание: посмотрите еще раз на равенство (9.1)).

Упражнение 11.5.5. Докажите, что в модели Блэка—Шоулса Европейские форексные опционы колл и пут стоят одинаково, если $S = X$ и $r = \hat{r}$.

11.5.2 **Некоторые соотношения для оценки стоимости**

Многие из соотношений п. 8.2 после необходимых изменений, связанных с существованием непрерывной дивидендой доходности (равной иностранной процентной ставке) остаются в силе и для форексных опционов. Чтобы показать, что стоимость Европейского опциона колл удовлетворяет неравенству

$$C \geq \max(Se^{-\hat{r}\tau} - Xe^{-r\tau}, 0),$$

(11.7)

рассмотрим следующие стратегии:

	Начальный капитал	Выплаты при истечении срока	
		$S_\tau > X$	$S_\tau \leq X$
Покупка опциона колл	C	$S_\tau - X$	0
Покупка местной облигации (номинала $\$X$)	$Xe^{-r\tau}$	X	X
Суммарно	$C + Xe^{-r\tau}$	S_τ	X
Покупка иностранной валюты (номинала 1 в иностранной валюте)	$Se^{-\hat{r}\tau}$	S_τ	S_τ

Из них вытекает, что первый портфель стоит не меньше второго при любом развитии событий и, следовательно, не может стоить меньше. Полученная оценка (11.7) обобщает результат упр. 8.3.2.

Стоимость Европейского опциона колл может приближаться к нижней границе в неравенстве (11.7) настолько близко, насколько можно пожелать (см. упр. 11.5.6). Поскольку внутренняя стоимость $S - X$ Американского опциона колл может превосходить нижнюю границу в (11.7), то оптимальным может быть и досрочное исполнение. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 11.5.1. *Американские форексные опционы колл могут исполняться и досрочно.*

Упражнение 11.5.6. Покажите как оценку (11.7) можно приближенно получить с помощью величины C из равенства (11.6).

Упражнение 11.5.7 (паритет пут—колл). Докажите, что

- 1) $C = P + Se^{-\hat{r}\tau} - Xe^{-r\tau}$ для Европейских опционов;
- 2) $P \geq \max(Xe^{-r\tau} - Se^{-\hat{r}\tau}, 0)$ для Европейских опционов пут.

11.6 **Сложные опционы**

Сложные опционы — это опционы на опционы. Существует четыре основных типа сложных опционов: опцион колл на колл, опцион колл на пут, опцион пут на пут и опцион пут на колл. Формулы для стоимости сложных опционов можно найти в [470].

Если считать, что акция исполняет роль опциона колл на стоимость фирмы, как в п. 11.1.1, то опцион на акцию становится сложным опционом. Условия по возобновлению контракта страхования жизни предлагают другой пример: выплата премии дает право возобновить контракт на

следующий срок. Таким образом, решение оплатить премию представляет собой опцион на опцион [646]. У **опциона с расколотым вознаграждением** предусматривается окно на рынке, к концу которого покупатель может решить, продлевать ли срок действия опциона до объявленной даты или позволить ему «закончить» свою жизнь бесполезно [54, 346]. Если же срок действия опциона с расколотым вознаграждением продлевается до объявленной даты, то второй опцион может либо закончить свои дни неиспользованным, либо оказаться исполненным. Название же связано с тем фактом, что для исполнения базового актива владелец должен оплачивать комиссионные два раза [746].

Сложные опционы подходят для ситуаций, в которых заявка, объявленная в иностранной валюте, относится к продаже оборудования. В подобных случаях есть неопределенность двух типов: выигрыш заявки и валютный риск (ведь даже если заявка выигрывается, то обесценивание иностранной валюты может заметно пошатнуть привлекательность сделки). И возникает необходимость в соглашении, с помощью которого компания сможет обезопасить опцион на иностранную валюту, защищающий от ее обесценивания, *если* заявка выигрывается. Это пример **условного форексного опциона**. Сложный опцион пут, который дает его держателю право купить опцион пут в будущем по цене, которая согласована сегодня, решает проблему. Но форексные опционы не идеальны, поскольку они превращают подателя заявки в зрителя, если заявка проигрывается.

Упражнение 11.6.1. Вспомним нашу фирму XYZ.com из п. 11.1.1. У нее было лишь два типа ценных бумаг, находящихся в обращении: обычные акции ее собственного акционерного капитала и облигации. Объясните, почему акционерный капитал превращается в сложный опцион, если проценты по облигациям выплачиваются до погашения.

Упражнение 11.6.2. Почему условный форексный опцион пут дешевле стандартного опциона пут?

Упражнение 11.6.3. Опцион с выбором (или опцион «как хотите») дает своему владельцу право либо купить по цене X_1 в момент τ_1 опцион колл, либо купить по цене X_2 в момент τ_2 опцион пут. Опишите алгоритм биномиального дерева для этого опциона.

Задание по программированию 11.6.4. Реализуйте алгоритмы биномиального дерева для четырех типов сложных опционов.

11.7 Производные ценные бумаги, стоимость которых зависит от траектории

Пусть $S_0, S_1, \dots, S_n$ обозначают цены базового актива на протяжении всего срока жизни опциона. При этом S_0 является известной ценой в момент ноль, а S_n — цена в момент окончания этого срока. Заключительная выплата стандартного Европейского опциона колл зависит только от последней цены и равна $\max(S_n - X, 0)$. Таким образом, его стоимость зависит лишь от последней цены, и совсем не зависит от того, как эта цена возникает; она является **независимой от траектории**.

И наоборот, некоторые производные инструменты являются **зависимыми от траектории** в том смысле, что их заключительная выплата существенно зависит от траектории. Так, у **опциона колл с (арифметически) усредненной ценой** заключительная выплата равна величине

$$\max \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i - X, 0 \right),$$

а у **опциона пут со средневзвешенной ценой** — величине

$$\max \left(X - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i, 0 \right).$$

В обоих случаях выплата зависит от всей траектории цен. В начале своего срока жизни средневзвешенные опционы не могут оказаться более дорогими, чем стандартные Европейские опционы в модели Блэка—Шоулса оценки стоимости опционов [379, 548]. Опционы с усредненной выплатой удовлетворяют также некоторым тождествам типа паритета пут—колл [105, 598]. Опционы с усредненной выплатой называются также **Азиатскими опционами** и являются полезным хеджирующим инструментом для фирм, желающих совершить на каком-то промежутке времени целую серию покупок, поскольку вероятно, что их стоимости будут связаны со средней ценой. В основном такие опционы и по той же причине являются Европейскими.

Хорошо известно, что стоимость усредненных опционов трудно оценивать. Возьмем заключительную цену $S_0 u^2 d$. Ясно, что к ней ведут различные траектории, скажем, такие, как $(S_0, S_0 u, S_0 u^2, S_0 u^2 d)$ и $(S_0, S_0 d, S_0 du, S_0 du^2)$. На каждой из них свое среднее и, соответственно, своя заключительная выплата: $\max((S_0 + S_0 u + S_0 u^2 + S_0 u^2 d)/4 - X, 0)$ и $\max((S_0 + S_0 d + S_0 du + S_0 du^2)/4 - X, 0)$ (см. рис. 11.11). Поэтому заключительные узлы биномиального дерева

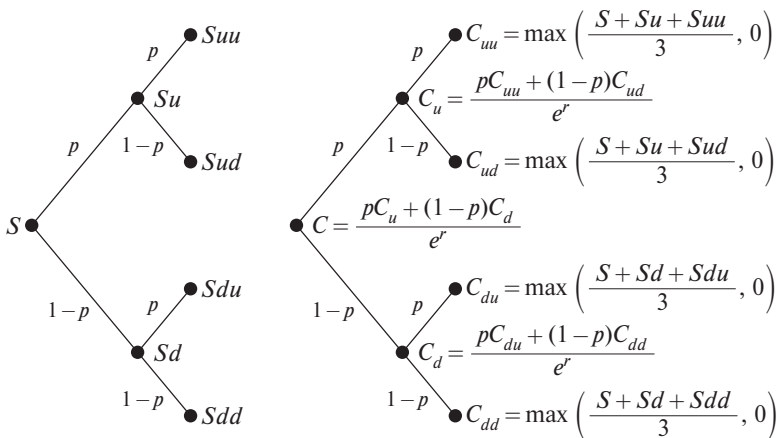


Рис. 11.11. Биномиальное дерево для усредненного опциона колл. Число узлов дерева, оценивающего стоимость (выплаты) справа, растет экспоненциально. Период на рисунке отвечает одному году.

для средних значений не совпадают. И алгоритм прямого пересчета сводится к перечислению всех 2^n траекторий цен при n -периодном биномиальном дереве и затем усреднению выплат. Однако экспоненциальная сложность расчетов делает такой «наивный» алгоритм непрактичным. Как следствие, в качестве возможных альтернатив остаются метод Монте-Карло и **алгоритмы последовательного приближения**.

Однако не все производные инструменты, зависящие от траектории цен, трудно оценивать. Стоимость барьерных опционов, например, оценивать легко. Когда усреднение происходит *геометрическим способом*, то выплатами являются величины

$$\max((S_0 S_1 \dots S_n)^{1/(n+1)} - X, 0), \quad \max(X - (S_0 S_1 \dots S_n)^{1/(n+1)}, 0).$$

Для Европейских опционов с геометрически усредняемой выплатой в пределе теоретическое значение стоимости дают формулы Блэка—Шоулса с волатильностью $\sigma_a \equiv \sigma/\sqrt{3}$ и дивидендной доходностью $q_a \equiv (r + q + \sigma^2/6)/2$, т. е. выражения

$$C = S e^{-q_a \tau} \Phi(x) - X e^{-r \tau} \Phi(x - \sigma_a \sqrt{\tau}) \quad (11.8)$$

$$P = X e^{-r \tau} \Phi(-x + \sigma_a \sqrt{\tau}) - S e^{-q_a \tau} \Phi(-x), \quad (11.8')$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(S/X) + (r - q_a + \sigma_a^2/2) \tau}{\sigma_a \sqrt{\tau}}.$$

На практике же в опционах с усредненной выплатой почти всегда используется арифметическое усреднение [894].

В другом классе опционов, **«оглядывающихся назад» опционах (с плавающей ценой исполнения)**, саму **цену исполнения** определяют цены акций [225, 388, 833]. Так, у опциона колл, «оглядывающегося» на минимум, заключительная выплата равна $S_n - \min_{0 \leq i \leq n} S_i$, а для опциона пут, «оглядывающегося» на максимум, заключительная выплата равна $\max_{0 \leq i \leq n} S_i - S_n$. Связанный с ними **оглядывающийся назад опцион с фиксированной ценой исполнения** имеет заключительную выплату $\max(\max_{0 \leq i \leq n} S_i - X, 0)$ для опциона колл и $\max(X - \min_{0 \leq i \leq n} S_i, 0)$ — для опциона пут. Вечный Американский оглядывающийся назад опцион называется **Русским опционом** [575]. Можно также определить опционы пут и колл, оглядывающиеся на «среднее». Такие опционы называются также **опционами со средневзвешенной ценой исполнения** [470].

Ниже описан алгоритм последовательного приближения для оценки стоимости арифметически средневзвешенных опционов, который принадлежит Халлу и Уайту [478]. Этот алгоритм основан на биномиальном дереве. Рассмотрим узел момента j с ценой базового актива, равной $S_0 u^{j-i} d^i$. Обозначим такой узел через $N(j, i)$. Максимальное значение

текущей суммы $\sum_{m=0}^j S_m$ в таком узле равно величине

$$S_0(1 + \underbrace{u + u^2 + \dots + u^{j-i} + u^{j-i}d + \dots + u^{j-i}d^i}_j) = S_0 \frac{1 - u^{j-i+1}}{1 - u} + S_0 u^{j-i} d \frac{1 - d^i}{1 - d}.$$

Разделим это значение на $j+1$ и обозначим результат через $A_{\max}(j, i)$. Аналогично, минимальное значение вышеуказанной суммы в нашем узле равно величине

$$S_0(1 + \underbrace{d + d^2 + \dots + d^i + d^i u + \dots + d^i u^{j-i}}_j) = S_0 \frac{1 - d^{i+1}}{1 - d} + S_0 d^i u \frac{1 - u^{j-i}}{1 - u}.$$

Разделим это значение на $j+1$ и обозначим полученное число $A_{\min}(j, i)$. Как $A_{\min}$, так и $A_{\max}$ являются текущими усредненными значениями (см. рис. 11.12).

Хотя возможных значений средневзвешенных цен в узле $N(j, i)$ и слишком много (их всего $\binom{j}{i}$), но все они лежат между величинами $A_{\min}(j, i)$ и $A_{\max}(j, i)$. Выберем в этом промежутке следующие $k+1$ равноудаленные друг от друга значения

$$A_m(j, i) \equiv \left(\frac{k-m}{k} \right) A_{\min}(j, i) + \left(\frac{m}{k} \right) A_{\max}(j, i), \quad m = 0, 1, \dots, k,$$

и будем считать их истинными и единственными возможными текущими усредненными значениями. Такое «черпание ведрами» приводит к ошибкам, но зато хорошо проявляет себя на практике [366]. Альтернативный подход состоит в выборе таких значений, что равноотстоящими друг от друга являлись бы не сами выбранные числа, а их логарифмы [478, 555].

В процессе обратной индукции мы вычисляем значения стоимости опциона в каждом узле для $k+1$ из возможных текущих средних следующим образом. Предположим, что текущим является узел $N(j, i)$, а текущее среднее -- величина a . Предположим также, что следующим узлом будет $N(j+1, i)$, т.е. результат движения цены вверх. Поскольку цена актива там равна $S_0 u^{j+1-i} d^i$, то записываем стоимость опциона, соответствующую текущему среднему в виде:

$$A_u \equiv \frac{(j+1)a + S_0 u^{j+1-i} d^i}{j+2}.$$

Можно быть уверенным, что значение A_u не совпадет с каким-нибудь из $k+1$ средних значений в узле $N(j+1, i)$. Поэтому ищем текущие средние,

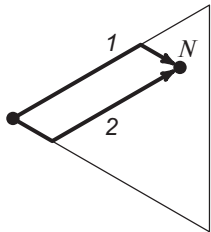
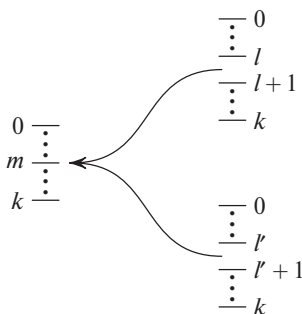


Рис. 11.12. Две траектории, на которых достигается максимальное и минимальное значения текущей усредненной цены. Изображены они от корня дерева и до узла N включительно. На одной достигается максимальное (1) значение средневзвешенной цены, а на другой — минимальное (2).

Рис. 11.13. Обратная индукция для арифметически усредненных опционов. Все $k+1$ возможные значения стоимости опциона в узле $N(j, i)$ помещаются сгруппированно под индексами $0, 1, \dots, k$, и каждое отвечает конкретному арифметическому среднему. Каждое же из $k+1$ значений стоимости опциона зависит от двух значений стоимости в узле $N(j+1, i)$ и двух значений стоимости опциона в узле $N(j+1, i+1)$.



которые окаймляют его, записывая в виде

$$A_l(j+1, i) \leq A_u \leq A_{l+1}(j+1, i).$$

После этого представляем величину A_u в виде линейной комбинации найденных текущих средних:

$$A_u = xA_l(j+1, i) + (1-x)A_{l+1}(j+1, i), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(альтернативой является квадратическая интерполяция [276, 555]; см. упр. 11.7.7). И, наконец, придем к приближенному значению стоимости опциона при данном текущем среднем A_u :

$$C_u \equiv xC_l(j+1, i) + (1-x)C_{l+1}(j+1, i),$$

где $C_l(t, s)$ означает стоимость опциона в узле $N(t, s)$ с текущим средним $A_l(t, s)$. С такой интерполяцией связан второй источник ошибки. Поэтому те же шаги повторяются для следующего («нижнего») узла $N(j+1, i+1)$, чтобы получить другое приближенное значение стоимости опциона C_d . В конце концов мы получим стоимость опциона в виде $[pC_u + (1-p)C_d]e^{-r\Delta t}$. Идея выхода на такое значение проиллюстрирована на рис. 11.13, а алгоритм его поиска со временем $O(kn^2)$ приведен на рис. 11.14.

Упражнение 11.7.1. Проведите в жизнь стратегию «продать по высокой цене, а купить по низкой» с помощью опционов, оглядывающихся назад.

Упражнение 11.7.2. Проверьте, что при условии $ud=1$ число возможных значений геометрических усреднений цены в момент n равно $1 + n(n+1)/2$.

Упражнение 11.7.3. Объясните, почему опционами с усредненными ценами труднее управлять (впервые их выписали на акции, которыми торговали на Азиатских биржах, предположительно по причине небольших объемов сделок, отсюда и возникло их название «Азиатские опционы»).

Упражнение 11.7.4. В отношении опционов с арифметически усредненными ценами предполагалось, что они появились недавно и потому не накопилось данных, с которыми можно было бы иметь дело. Покажите, что из-за этого их рассмотрение не потеряло в общности.

Алгоритм для оценки стоимости Американских арифметически усредненных опционов колл на бездивидендную акцию:

ввод: $S, u, d, X, n, \hat{r}$ ($u > e^{\hat{r}} > d, \hat{r} > 0$), k ;
 действительные числа $p, a, A_u, x, A_d, C_u, C_d, C[0..n][0..k], D[0..k]$;
 // $C[\cdot][m]$ хранит m -е среднее
 целые i, j, m, l ;
 $p := (e^{\hat{r}} - d)/(u - d)$;
 для ($i = 0$ до n) // заключительная цена равна $Su^{n-i}d^i$
 для ($m = 0$ до k)
 $C[i][m] := \max(0, A_m(n, i) - X)$;
 для ($j = n - 1$ вниз до 0) // обратная индукция
 для ($i = 0$ до j) { // цена равна $Su^{j-i}d^i$
 для ($m = 0$ до k) {
 $a := A_m(j, i)$; // «среднее»
 $A_u := ((j + 1)a + Su^{j+1-i}d^i)/(j + 2)$;
 Пусть l таково, что $A_l(j + 1, i) \leq A_u \leq A_{l+1}(j + 1, i)$;
 Пусть x таково, что $A_u = xA_l(j + 1, i) + (1 - x)A_{l+1}(j + 1, i)$;
 $C_u := xC[i][l] + (1 - x)C[i][l + 1]$; // линейная интерполяция
 $A_d := ((j + 1)a + Su^{j-i}d^{i+1})/(j + 2)$;
 Пусть l таково, что $A_l(j + 1, i + 1) \leq A_d \leq A_{l+1}(j + 1, i + 1)$;
 Пусть x таково, что $A_d = xA_l(j + 1, i + 1) + (1 - x)A_{l+1}(j + 1, i + 1)$;
 $C_d := xC[i + 1][l] + (1 - x)C[i + 1][l + 1]$; // линейная интерполяция
 $D[m] := \max(a - X, (pC_u + (1 - p)C_d)e^{-\hat{r}})$;
 }
 Скопировать $D[0..k]$ в $C[i][0..k]$;
 }
 }
 вывод $C[0][0]$;

Рис. 11.14. Приближенный алгоритм для оценки стоимости Американских арифметически усредненных опционов колл на бездивидендные акции. Идеи из упр. 11.7.5 могут уменьшить время вычислений. При заданном k и увеличении n этот алгоритм может и не сходиться [249, 251]. Естественно, что «подходящие» k зависят от n . Отметим, что $C[0][0], C[0][1], \dots, C[0][k]$ идентичны, если не считать ошибок округления.

Упражнение 11.7.5. Пусть $\hat{r} \neq 0$ означает безрисковую ставку периода непрерывного начисления.

1) Среднее выплаты по усредненному опциону колл

$$E \left[\max \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i - X, 0 \right) \right],$$

вероятно, трудно оценить. Но покажите, что

$$E \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i \right) = \frac{S_0}{n+1} \cdot \frac{1 - e^{\hat{r}(n+1)}}{1 - e^{\hat{r}}}.$$

2) Покажите, что если у траектории $S_0, S_1, \dots, S_k$ текущая сумма $\sum_{i=0}^{k-1} S_i$ равна $(n+1)X + a$, $a \geq 0$, то ожидаемая конечная стоимость усредненного опциона колл при условии такой начальной траектории равна

величине

$$\frac{a}{n+1} + \frac{S_k}{n+1} \cdot \frac{1 - e^{\widehat{r}(n-k+1)}}{1 - e^{\widehat{r}}}$$

(поэтому дерево, растущее из узла S_k , при оценке стоимости опциона колл можно обрезать, и тем самым получить более высокую эффективность ее расчета).

Упражнение 11.7.6. Предположим, что $ud = 1$. Покажите, что разница между максимальным и минимальным значением текущей суммы цен в узле с ценой актива $S_0 u^i d^{n-i}$ является возрастающей функцией i при $i < n/2$ и убывающей функцией i при $i > n/2$.

Упражнение 11.7.7. Найдите коэффициенты квадратичного многочлена $y = a + bx + cx^2$, который проходит через следующие три точки: (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , и (x_2, y_2) .

Упражнение 11.7.8. При обсуждении приближенного алгоритма были упомянуты два источника ошибок. Покажите, что они исчезнут, если все цены актива на дереве являются целыми числами.

Упражнение 11.7.9. Предположим, что существует алгоритм, который дает верхнюю оценку для истинной стоимости опциона, и алгоритм, позволяющий получить для нее нижнюю оценку. Как нам следует организовать получение приближенной оценки стоимости опциона вместе с информацией об имеющейся ошибке оценивания?

Задание по программированию 11.7.10. Запрограммируйте алгоритм биномиального дерева со временем поиска $O(n^4)$ для оценки стоимости Европейских и Американских опционов с геометрическим усреднением цены.

Задание по программированию 11.7.11. Составьте программу для алгоритма, приведенного на рис. 11.14.

Задание по программированию 11.7.12. 1) Составьте программу по алгоритмам биномиального дерева для Европейских и Американских опционов, оглядывающихся назад. Временная сложность должна быть не больше кубической.

2) Уменьшите время поиска до квадратического для недавно появившихся оглядывающихся назад опционов с плавающей ценой исполнения, по которым наверняка нет прошлых данных по ценам.

Дополнительная литература

Обращайтесь к [565] за альтернативными моделями для ворантов и к [370] за теоретическим подходом к оценке стоимости Американских барьерных опционов. См. [346, гл. 7] и [514, гл. 11] при желании получить информацию по другим форексным опционам, а также [886] — по временной структуре волатильности обменных курсов. Приближенный алгоритм со временем поиска $O(kn^2)$, реализующий идеи, похожие на использованные на рис. 11.14, можно найти в [215, 470, 478]. Другие финансовые инструменты, зависящие от траектории, рассматриваются в [377, 449, 470, 485, 746, 812]. По усредненным опционам существует

большое количество литературы как по оценке их стоимости [25, 105, 168, 169, 170, 241, 366, 379, 478, 530, 548, 555, 700, 755], так и по теоретически приближенным выражениям для их стоимости [423, 596, 597, 664, 748, 851]. Алгоритм последовательного поиска со временем поиска $O(kn^2)$ для усредненных опционов из [10] похож на алгоритм, приведенный на рис. 11.14, но несколько проще. Причем более важным является тот факт, что в случае Европейских усредненных опционов он не отличается от алгоритма с наивным временем поиска $O(2^n)$ больше, чем на $O(Xn/k)$. Число k представляет здесь параметр, позволяющий выбирать между затрачиваемым временем и точностью. Величина ошибки может быть еще более уменьшена до $O(X\sqrt{n}/k)$ [250]. Один из эффективно сходящихся алгоритмов последовательного приближения, принадлежащий Даи и Люу, основан на идее из упр. 11.7.8 [251]. Общие вопросы обращения с алгоритмами последовательного поиска обсуждаются в [459]. О применениях теории оценки стоимости опционов в управлении капиталовложениями можно почитать в [279, 672].

Примечания

1. На февраль 2001 г. это число 30 составляли акции компаний: Allied Signal, Alcoa, American Express, AT&T, Boeing, Caterpillar, Citigroup, Coca-Cola, DuPont, Eastman Kodak, Exxon, General Electric, General Motors, Hewlett-Packard, Home Depot, Intel, IBM, International Paper, J. P. Morgan Chase, Johnson & Johnson, McDonald's, Merck, Microsoft, Minnesota Mining & Manufacturing, Philip Morris, Procter & Gamble, SBC Communications, United Technologies, Wal-Mart Stores и Walt Disney.

2. Строго говоря, предполагать, что как отдельные цены акций, так и индексы акций удовлетворяют модели Блэка—Шоулса оценки стоимости неправильно, поскольку сумма логнормально распределенных с. в. не является логнормально распределенной.

12 Форварды, фьючерсы, опционы на фьючерсы, свопы

Говорю я или нет, это не имеет никакого значения; будущее уже было определено до этого.

Софокл (496—406 гг. до н. э.),

Эдипус Тираннус

В этой главе продолжает идти речь о производных финансовых инструментах, т. е. финансовых контрактах, чья стоимость зависит от некоторых базовых активов или индексов. Эти инструменты играют существенную роль в управлении риском, игре на бирже, составлении эффективного портфеля и арбитражных соображениях. Производные ценные бумаги, чувствительные к процентной ставке, потребовали отдельной главы, гл. 21.

12.1 Введение

Многие финансовые учреждения вкладывают значительные средства в производные финансовые инструменты. Например, Чейз Манхэттен банк в начале 1998 г. держал в них \$7,6 трлн. (в номинальном исчислении) [57]. Однако торговля производными инструментами может оказаться рискованным занятием. Так, потеря \$1,6 млрд. компанией Orange County (California) привела к ее банкротству в декабре 1994 г., а вовлеченным в эту операцию фирмам по ценным бумагам при последующем урегулировании сделок пришлось выплатить \$739 млн. [527]. Заключение свопа на процентные ставки компанией Sears в 1997 г. привело к потере \$382 млн. при стоимости базового актива в \$996 млн. [884]. J. P. Morgan и компания в 1997 г. имели в неработающих активах \$659 млн., 90 % которых попали под банкротство их партнеров из Азии¹. Объединенному банку Швейцарии (Union Bank of Switzerland = UBS) пришлось списать со счета \$699 млн., которые он вложил в частный инвестиционный фонд под названием «Долгосрочное управление капиталом» (Long-Term Capital Management = LTCM).

Выделяются четыре типа производных инструментов: фьючерсные контракты, форвардные контракты, опционы и свопы. Фьючерсные и форвардные контракты являются контрактами на поставку в будущем базового актива. В роли же такого актива может выступать физический предмет потребления (зерно, нефть, живой крупный рогатый скот, свиные желудки, драгоценные металлы и т. д.) или финансовый инструмент (облигации, валюта, индексы акций, ЦБ на закладных, другие производные инструменты и т. д.) [95, 470]. **Фьючерсными контрактами** называются форвардные контракты, которые существенным образом стандартизованы и торговля ими происходит на крупных биржах, таких, как Чикагская Торговая Палата СВТ (Chicago Board of Trade) или Чикагская Торговая

Биржа CME (Chicago Mercantile Exchange)². Фьючерсные и форвардные контракты можно использовать для игры на бирже, хеджирования или реализации арбитражных возможностей при покупке с рынков немедленной поставки для перепродажи на рынках отложенной поставки.

Фьючерсные и форвардные контракты являются обязательствами как для покупателя, так и для продавца. Напомним, опционы обязывают лишь продавца. А покупатель имеет право занять позицию по базовому активу, но не должен этого делать. Такое право, естественно, требует премии. Опционы можно использовать для хеджирования риска разорения, игры на бирже или действиях на арбитражных рынках*).

Своп — это контракт между двумя сторонами по обмену денежными потоками в будущем в соответствии с определенной формулой. Обычно одна сторона платит фиксированную цену другой в обмен на плавающую цену, определяемую рынком. Свопы можно использовать для уменьшения стоимости финансирования или для хеджирования. В действительности, свопы процентных ставок и фоксские форвардные контракты составляют большую часть банковских активов, связанных с производными инструментами [60]. Подобно форвардным контрактам свопы продаются и покупаются финансовыми учреждениями и их корпоративными клиентами вне организованных бирж.

Наиболее подходящей безрисковой процентной ставкой для многих перекупщиков, действующих на рынке фьючерсов является ставка «репо». **Репо (соглашение о продаже и последующей покупке или RP)** — это соглашение, по которому собственник ценных бумаг (ЦБ) («продавец») соглашается продать свои ЦБ другой стороне («покупателю») и затем выкупить их позднее по несколько более высокой цене. Тем самым эта другая сторона предоставляет ссуду. Однако риск, связанный с такой ссудой невелик, поскольку кредитор оставляет у себя ЦБ в случае, если продавец не сможет их выкупить (кредитор фактически исполняет роль ростовщика). С точки зрения перспектив кредитора такое соглашение называется **обратным репо**. Ночные ставки репо меньше ставок по федеральным вкладам. Ссуда на срок больший 1 дня называется **репо на срок**. Сумма процентов в долларах определяется в ней выражением

$$\text{основная сумма в долларах} \times \text{ставка репо} \times \frac{\text{срок репо}}{360}.$$

Банк Англии был первым центральным банком, который ввел ставки репо в 1830 г. Федеральный Резервный Банк США использует рынок репо для влияния на краткосрочные процентные ставки. Когда этот банк использует репо, то он в действительности дает деньги в долг, а не занимает их [827].

На всем протяжении этой главы r обозначает безрисковую процентную ставку. Наряду с другими обозначениями используются, если не оговорено противное, текущий момент времени t , дата погашения производного инструмента T , оставшийся промежуток времени до по-

* Арбитраж (arbitrage) — безрисковый перевод средств из одного рынка на другой с тем, чтобы воспользоваться разницей в процентных ставках, обменных курсах или товарных ценах на этих рынках. — Прим. перев.

гашения $\tau \equiv T - t$ (все в годах), спот-цена S (или текущая цена), спот-цена при погашении S_T , цена поставки X , цена форварда или фьючерса F для нового контракта и стоимость контракта f . Цена с индексом t обычно относит цену к моменту времени t . На протяжении всей главы в основном будет использовано непрерывное начисление процентов.

12.2 Форвардные контракты

Форвардные контракты предназначены для поставки базового актива по фиксированной **цене поставки** в определенный момент в будущем. Они идеально подходят для целей хеджирования. Рассмотрим зернового фермера, который заключает форвардный контракт с производителем питания на поставку 100 000 бушелей*) зерна по цене \$2,5 за бушель 27 сентября 1995 г. Предположим, что стоимость семенного зерна составляет \$2,0 за бушель. Тогда подобный контракт выгоден обеим сторонам: фермеру, поскольку у того есть покупатель по приемлемой цене, и производителю, поскольку зная стоимость зерна задолго до событий, он сможет уменьшить неопределенность в планировании. Если же спот-цена к моменту поставки возрастет, то фермер упустит возможность получить сверхприбыль. С другой стороны, если цена упадет, то производитель заплатит больше, чем он хотел бы. Таким образом, форвардное соглашение ограничивает как риск, так и потенциальную выгоду.

Проблемы могут возникнуть, если один из участников не сможет выполнить свои обязательства. Производитель питания может обанкротиться, а фермер может разориться, поскольку окажется не в состоянии поставить 100 000 бушелей зерна из-за плохой погоды или стоимость семенного зерна стремительно поднимется вверх. Но еще более важно то, что как бы ни менялась стоимость зерна, либо производитель питания, либо фермер будут иметь основания к невыполнению своих обязательств. Даже корпоративные гиганты прекращают платежи по своим форвардным контрактам [767].

12.2.1 Обменный курс форварда

Наряду с фьючерсными опционами форвардные контракты предоставляют широкие возможности для защиты от валютного риска. В таблице на рис. 12.1 представлены текущий и форвардный обменные курсы немецкой марки. Рассмотрим компанию из США, которая должна получить 10 млн. немецких марок через 3 месяца. Используя форвардную продажу по 3-месячному форвардному обменному курсу \$0,7147/DEM 1, фирма получит через 3 месяца ровно \$7 147 000. В сравнении с хеджированием при помощи фьючерсных опционов, форвардный хедж лишит фирму возможности поменять обменный курс, и не важно, изменится он на более выгодный или нет.

Упражнение 12.2.1. Продажа 10 млн. немецких марок по форвардному курсу, как было отмечено выше, лишит хеджера прибыли, если немецкая

*) Бушель (bushel) — мера емкости, примерно равная 36,3 л. — Прим. перев.

20 марта 1995 г., понедельник
ОБМЕННЫЕ КУРСЫ

Страна	Эквивалентная сумма в \$		Валюта за \$ 1	
	Понед.	Пятн.	Понед.	Пятн.
Германия (Марка)	0,7126	0,7215	1,4033	1,3860
30-дн. форвард	0,7133	0,7226	1,4019	1,3839
90-дн. форвард	0,7147	0,7242	1,3991	1,3808
180-дн. форвард	0,7171	0,7265	1,3945	1,3765

Рис. 12.1. Котировки обменного курса немецкой марки. Форвардная цена немецкой марки выше ее текущей стоимости. Форвардные обменные курсы в терминах «долларов за марку» (\$/DEM) выше текущего обменного курса, возможно, по причине меньшей инфляции в Германии. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

марка поднимется в цене. Рассмотрим стратегию «60:40», по которой лишь 60 % немецких марок продается по форвардному курсу, а остальные остаются незащищенными. Запишите платежную функцию в терминах обменного курса \$/DEM через 3 месяца.

Текущий и форвардный обменные курсы. Пусть S означает текущий обменный курс (спот-курс), а F — форвардный обменный курс на момент 1 год спустя (оба в терминах «местная за 1 иностранной»). И будем использовать символы r_f и r_l для обозначения ежегодной процентной ставки иностранной и местной валюты, соответственно. Как было впервые указано Кейнсом³ в 1923 г. [303], обязательно возникнут арбитражные возможности, если вышеуказанные четыре числа не будут удовлетворять определенному соотношению, известному под названием **паритет процентных ставок**:

$$\frac{F}{S} = \frac{e^{r_l}}{e^{r_f}} = e^{r_l - r_f}. \quad (12.1)$$

Вот объяснение. Владелец местной валюты может либо 1) предоставить деньги в кредит на местном рынке и получить год спустя в e^{r_l} раз большую сумму, либо 2) конвертировать на спот-рынке местную валюту в иностранную, предоставить ссуду на 1 год на иностранном рынке и затем конвертировать иностранную валюту в местную по фиксированному форвардному обменному курсу в будущем, F , покупая сейчас форвардный контракт на продажу иностранной валюты. Как это и принято, деньги из рук в руки при заключении форвардного контракта не переходят. Но в этом случае 1 денежная единица местной валюты через год превратится в Fe^{r_f}/S единиц. Тогда, если $Fe^{r_f}/S > e^{r_l}$, то арбитражная прибыль может возникнуть при займе на местном рынке и предоставлении кредита на иностранном. И, наоборот, если $Fe^{r_f}/S < e^{r_l}$, то арбитражную прибыль можно получить от заимствования на иностранном рынке и предоставления денег в кредит на местном. Отсюда заключаем, что $Fe^{r_f}/S = e^{r_l}$. Если же начисление процентов периодическое, то так же легко проверить, что

$$\frac{F}{S} = \frac{1 + r_l}{1 + r_f}. \quad (12.2)$$

Паритет процентных ставок говорит о том, что если местная процентная ставка выше иностранной, то валюта другой страны на фор-

вардном рынке будет продаваться с премией. И наоборот, если местная процентная ставка меньше, то иностранная валюта на форвардном рынке будет продаваться со скидкой.

Упражнение 12.2.2. 1) Что говорят данные таблицы на рис. 12.1 о соотношении между процентными ставками США и Германии?

2) Оцените немецкие процентные ставки с помощью рис. 12.1 и формулы (12.2), если ежегодные варианты ставок США для 30-дневных, 90-дневных и 180-дневных ВК (векселей Казначейства) равны 5,66 %, 5,9 % и 6,15 %, соответственно.

Упражнение 12.2.3. Покажите, что равенства (11.6) можно упростить до выражений

$$C = Fe^{-r\tau}\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}),$$

$$P = Xe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Fe^{-r\tau}\Phi(-x),$$

в которых

$$x \equiv \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

не привлекая в явном виде обменного курса. Отметим, что использованные выше величины S , F и X записаны в терминах «местной за 1 иностранной».

12.2.2 Форвардная цена

Выплата держателю форвардного контракта при погашении равна $S_T - X$ (см. рис. 12.2). Сопоставьте эту сумму с выплатой по Европейскому опциону колл, равной $\max(S_T - X, 0)$. Форвардные контракты не предполагают никаких начальных капиталовложений. **Форвардная цена** — это та цена поставки, которая делает стоимость форвардного контракта нулевой; другими словами, $f = 0$ если $F = X$. Цена поставки не может измениться, поскольку она записана в контракте, но стоимость форварда после вступления контракта в силу может измениться. Если же выразиться иначе, то стоимость форвардного контракта f , будучи равной

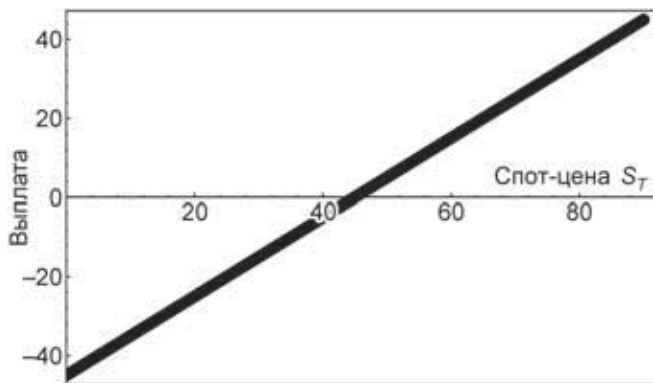


Рис. 12.2. Выплата по форвардному контракту. Выплата длинного форвардного контракта с ценой поставки \$45 представлена как функция спот-цены S_T при погашении.

нулю при его подписании, будет затем колебаться вместе с ценой-спот. Очевидно, эта величина увеличивается с ростом спот-цены и уменьшается с ее падением. Цена форварда зависит и от даты погашения контракта, в чем можно убедиться по данным таблицы на рис. 12.1.

Например, репо является форвардным контрактом на ЦБ Казначейства США. Его стоимость вначале нулевая, поскольку ЦБ Казначейства обмениваются на наличные по справедливой цене, а цена последующей покупки полагается равной цене форварда [510].

По базовому активу доход не выплачивается.

Лемма 12.2.1. *Для форвардного контракта на базовый актив, по которому доход не предусматривается,*

$$F = Se^{r\tau}. \quad (12.3)$$

Доказательство. Если $F > Se^{r\tau}$, то инвестор может занять сумму S долларов на τ лет, купить базовый актив и занять короткую позицию по форвардному контракту с ценой поставки F . При погашении актив продается за F , а сумма $Se^{r\tau}$ используется для оплаты ссуды и приводит к арбитражной прибыли в размере $F - Se^{r\tau} > 0$.

Если же $F < Se^{r\tau}$, то инвестор может занять короткую позицию по базовому активу, инвестировать выручку на τ лет, и затем занять длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки F . При погашении актив покупается за F для закрытия короткой позиции и получения прибыли в размере $Se^{r\tau} - F$. $\square$

Пример 12.2.1. Новый 3-месячный контракт на 6-месячную бескупонную облигацию должен иметь цену поставки, равную $Se^{r/4}$, где r — ежегодная процентная ставка с ежеквартальным начислением процентов, а S — спот-цена облигации. Например, если $r = 6\%$ и $S = 970,87$, то цена поставки равна $970,87 \times e^{0,06/4} = 985,54$. $\triangleleft$

Стоимость форварда, как выше упоминалось, может и не оставаться равной цене поставки с течением времени. И на самом деле, стоимость форвардного контракта, по которому вплоть до момента погашения не возникает никакого дохода, должна равняться величине

$$f = S - Xe^{-r\tau}.$$

В этом можно убедиться, рассматривая портфель из одного длинного форварда, суммы в наличных $Xe^{-r\tau}$, и одной короткой позиции по базовому активу. Наличные к моменту погашения превратятся в X и их можно будет использовать для оплаты поставки по форвардному контракту. Поставленный же актив закроет короткую позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении равна нулю, то и его ПЗ должно быть нулевым. Указанное тождество позволяет доказывать лемму 12.2.1 по-другому, поскольку X должно равняться $Se^{r\tau}$ для того, чтобы $f = 0$.

Упражнение 12.2.4. 1) Докажите, что только что подписанный форвардный контракт эквивалентен портфелю, состоящему из одного длинного Европейского опциона колл и одного короткого Европейского опциона пут на один и тот же базовый актив, с одной и той же датой

поставки и с общей ценой исполнения, равной цене форварда (про опцион говорят, что он **при своих форвардно**, если $X = F$).

2) Докажите альтернативный паритет пут—колл, который утверждает, что $C = P$ для опционов колл и пут из (1).

3) Выведите лемму 12.2.1 из паритета пут—колл.

4) Проверьте, что заменяя в равенстве (12.3) форвардную цену на цену исполнения X из формулы Блэка—Шоулса теоремы 9.3.4, мы получим равенство $C = P$.

По базовому активу выплачивается предсказуемый доход.

Лемма 12.2.2. Для форвардного контракта на базовый актив, по которому предусматривается предсказуемый доход с ПЗ, равным I ,

$$F = (S - I)e^{r\tau}. \quad (12.4)$$

Доказательство. Если $F > (S - I)e^{r\tau}$, то инвестор может занять S долларов на τ лет, купить базовый актив и занять короткую позицию по форвардному контракту с ценой поставки F . При погашении актив продается за F и сумма $(S - I)e^{r\tau}$ используется для оплаты ссуды (поскольку недостающую часть предоставит доход $Ie^{r\tau}$), оставляя арбитражную прибыль величины $F - (S - I)e^{r\tau} > 0$. Если же $F < (S - I)e^{r\tau}$, то инвестор может занять короткую позицию по базовому активу, инвестировать полученную выручку на τ лет и занять длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки F . При погашении актив покупается за F для закрытия короткой позиции (при этом помимо возвращения самого актива следует оплатить и доход $Ie^{r\tau}$ по нему) и получения прибыли в размере $(S - I)e^{r\tau} - F > 0$. $\square$

Пример 12.2.2. Приведенные выше результаты можно обобщить на случай неплоских кривых доходности. Так, для форвардной цены 10-месячного форвардного контракта на акцию стоимостью \$50, по которой каждые 3 месяца выплачиваются дивиденды в размере \$1, имеем выражение

$$(50 - e^{-r_3/4} - e^{-r_6/2} - e^{-3 \times r_9/4})e^{r_{10} \times (10/12)}$$

в котором, скажем, r_i — ежегодная ставка процента ежеквартального начисления моментов $i = 3, 6, 9$, а r_{10} — ежегодная ставка ежемесячного начисления процентов момента 10 (месяцев). $\triangleleft$

Стоимость форвардного контракта, по которому предполагается предсказуемый доход с ПЗ, равным I , составляет величину

$$f = (S - I) - Xe^{-r\tau}.$$

Мы можем подтвердить это, рассматривая портфель из одного длинного форвардного контракта, суммы в наличных $Xe^{-r\tau} + I$ и одной короткой позиции по базовому активу. К моменту погашения сумма в наличных возрастет до X после оплаты дохода $Ie^{r\tau}$ первому акционеру. Тем самым будет в наличии сумма, достаточная для оплаты поставки по форвардному контракту, после чего можно будет закрыть короткую

позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении нулевая, то его стоимость должна быть равна нулю и в настоящий момент, т.е. $f - (S - I) + Xe^{-r\tau} = 0$.

По базовому активу оплачивается непрерывная дивидендная доходность. Непрерывная дивидендная доходность означает, что дивиденды выплачиваются непрерывно по ежегодной ставке q . Стоимость форвардного контракта в любой момент до погашения должна быть равна величине

$$f = Se^{-q\tau} - Xe^{-r\tau}. \quad (12.5)$$

В этом можно убедиться, рассматривая портфель из одного длинного форвардного контракта, суммы в наличных $Xe^{-r\tau}$ и короткой позиции по $e^{-q\tau}$ единицам базового актива. Все дивиденды будут оплачены за счет продажи дополнительных единиц базового актива. Поэтому к моменту погашения сумма в наличных возрастет до X и точно так же, из-за выплачиваемых дивидендов, короткая позиция возрастет до точно одной единицы базового актива. Но тем самым окажется достаточно средств для оплаты поставки по форвардному контракту, что позволит закрыть короткую позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении нулевая, то ее ПЗ также должно равняться нулю. Одним из следствий равенства (12.5) является тот факт, что форвардная цена

$$F = Se^{(r-q)\tau}. \quad (12.6)$$

Упражнение 12.2.5. Во всех рассмотренных выше случаях выполняется следующее соотношение:

$$f = (F - X)e^{-r\tau}. \quad (12.7)$$

Докажите его с помощью арбитражных соображений.

12.3 Фьючерсные контракты

Фьючерсные контракты отличаются от форвардных несколькими чертами. Прежде всего, ими торгуют скорее на центральных биржах, чем на внебиржевом рынке, что приводит к более эффективному и точному определению цены. Во-вторых, учреждение клиринговой палаты означает, что продавцы и покупатели не смотрят в глаза друг другу. Как и на рынке опционов, клиринговая палата осуществляет роль продавца для всех покупателей и покупателя для всех продавцов. Поэтому кредитный риск, который присущ форвардным контрактам, тем самым минимизируется. В-третьих, фьючерсные контракты являются весьма стандартизованными инструментами. В них точно указывается, поставка какого товара и в каком количестве, причем удовлетворяющего определенным стандартам качества, должна произойти в заранее определенном месте и в определенный момент времени. Все это резко контрастирует с форвардными контрактами, единственным условием которых является обоюдное соглашение. Наконец, выигрыши и потери фьючерсных контрактов

ежедневно **отмечаются на рынке**. Поэтому оценки корректируются в конце каждого торгового дня, исходя из **цены сделки**, чтобы лучше отражать выигрыши или потери инвесторов. Цена же сделки определяется как среднее цен, по которым контракты заключаются непосредственно перед тем, как колокол просигналит конец рабочего дня.

Пример 12.3.1. Июльский контракт по пшенице в Чикагской Торговой Палате СВТ уточняет, среди прочего, что поставляемая пшеница должна составлять 5000 бушелей мягкой красной пшеницы N.2, твердой красной зимней пшеницы N.2, темной северной весенней пшеницы N.2, или северной весенней пшеницы N.1 и быть поставленной в тот день июля месяца, который укажет продавец [95, 799]. <

Объем контракта, или просто **объем** фьючерсного контракта — это просто количество базового актива, которое должно быть поставлено по контракту. К примеру, он составляет 5000 бушелей по зерновым фьючерсным контрактам на СВТ и 1 млн. долларов США по Евродолларовым фьючерсным контрактам на Чикагской Торговой Бирже СМЕ. Позиция может быть **закрыта** или **скомпенсирована** открытием сделки противоположного типа. Так, инвестор, занимающий длинную позицию по одному ноябрьскому фьючерсному контракту по соевым бобам, может закрыть свою позицию, к примеру, занятием короткой позиции по одному ноябрьскому контракту. А клиринговая палата просто вычеркивает компенсирующие позиции из своего списка. Большая часть фьючерсных контрактов закрываются именно таким образом, а не поставкой базового актива. И наоборот, форвардные контракты предназначены для поставки.

Пример 12.3.2. Фермер коротко продал зерновой фьючерс, а стоимость семенного зерна начала подниматься. Он может компенсировать свою короткую позицию по фьючерсу для уменьшения потерь. Рассмотрим ситуацию другого фермера, который столкнулся с тем, что урожай должен оказаться отличным от предполагаемых 100 000 бушелей. Поскольку зерновые фьючерсы делятся на части в 5000 бушелей, то для покрытия предполагаемого урожая в 100 000 бушелей было продано 20 контрактов. Но если сейчас представляется, что урожай будет в районе 80 000 бушелей, то фермер сможет компенсировать четыре из этих контрактов. Такая гибкость не доступна форвардным контрактам. <

Поскольку изменения в цене фьючерсного контракта определяются ежедневно, то разница цен оплачивается периодическими взносами в течение всей жизни контракта. Поэтому на момент поставки выплачивается скорее спот-цена, чем первоначальная стоимость фьючерса. И это слежение за ценой на рынке фактически уничтожает любые финансовые стимулы для непоставки. Предположим, что фермер заключает форвардный контракт на продажу производителю питания 100 000 бушелей зерна по цене \$2,00 за бушель в ноябре. Если цена зерна в ноябре поднимется до \$2,5, то у фермера скорее возникнет желание продать весь свой урожай на спот-рынке по \$2,5, чем отдать его производителю питания по \$2,00. Однако, в связи с фиксацией цен на рынке, фермер уже перевел к ноябрю со своего фьючерсного счета на счет производителя питания \$0,5 за бушель. И если фермер организует поставку, то ему заплатят

спот-цену, т.е. \$2,5 за бушель. Таким образом, у фермера немного стимулов для невыполнения своих обязательств. Отметим, что чистой ценой поставки остаются \$2,00 за бушель, т.е. первоначальная цена поставки.

Перспектива поставки связывает фьючерсную цену со спот-ценой (или **ценой в наличных**), что делает возможным хеджирование. На момент поставки цена урегулирования фьючерсного контракта определяется спот-ценой. Однако до этого момента фьючерсная цена может быть как больше спот-цены, так и меньше нее.

Финансовыми фьючерсами называются фьючерсные контракты на финансовые инструменты или индексы. С тех пор, как в 1972 г. был «запущен» первый финансовый фьючерс, объемы торговли финансовыми фьючерсами превзошли объемы аграрных фьючерсов. Наиболее популярным финансовым фьючерсом по обыкновенным акциям на сегодня является фьючерс на индекс S&P 500, который был создан в 1982 г. [865]. Подобно опционам на индексы акций урегулирование по некоторым финансовым фьючерсам чаще совершается в наличных, чем поставкой базового актива. Фьючерсный контракт на индекс S&P 500, например, чаще завершается выплатой наличных, чем поставкой 500 акций. Стоимость любого такого контракта определяется как произведение \$500 на значение индекса (см. таблицу на рис. 12.3). В другом примере фьючерсного контракта на усредненный индекс 225 акций Nikkei его цена определяется умножением \$5 на значение индекса. Все это приводит к проблеме фиксации обменного курса доллар/йена. Значение же индекса определяется по методу взвешивания относительно цены и по портфелю, состоящему из 225 крупнейших акций, которыми торгуют на бирже Токио.

Разница между спот-ценой и фьючерсной ценой, $S - F$, называется **базисом**. Например, если соевые бобы стоят \$7,80 за бушель, а их цена по ноябрьскому фьючерсному контракту в тот же день равна \$7,90, то базис составит 10 центов ниже стоимости ноябрьского контракта (–10 центов). В другом случае облигаций казначейства (ОК), если их рыночная цена в наличных равна 88-16, а стоимость по июньскому фьючерсу равна 90-22, то базис составит 2-06 ниже июньского контракта. Причем, поскольку цены фьючерсов на ОК котируются в 32-х долях, то цена 88-16 означает $88\frac{16}{32}$. Базис может быть как положительным, так и отрицательным, но со временем он должен стремиться к нулю. Если базис движется к нулю, то его называют **сужающимся**, а если же его значение удаляется от нуля — то **расширяющимся**. И, хотя предсказать значение базиса точно нельзя, но, как правило, он менее волатилен, чем фьючерсная цена или спот-цена.

Пример 12.3.3. Предположим, что спот-цена пшеницы равна \$4,225 за бушель, а ее стоимость по июльскому фьючерсному контракту на пшеницу составляет \$3,59 за бушель при объеме контракта в 5000 бушелей. Базис равен $4,225 - 3,59 = 0,635$ на бушель. Представим себе, что базис расширится на \$0,1 и составит \$0,735 по причине, скажем, падения фьючерсной цены до \$3,54 и росту спот-цены до \$4,275. Тогда тот, кто занимает короткую позицию по одному фьючерсному контракту и длин-

20 марта 1995 г., понедельник

ЦЕНЫ ФЬЮЧЕРСОВ

	Цена при открытии	Верхнее значение	Нижнее значение	Цена урегу- лирования	Изменение	За период жизни		Открытая позиция
						Верхнее значение	Нижнее значение	
ЗЕРНОВЫЕ И НЕФТЕПРОДУКТЫ								
Зерно (CBT) 5 000 буш.; в центах за бушель								
Мар	2401/4	241	2391/2	2393/4	—1	2821/2	2201/2	2 432
Май	2463/4	248	2461/4	2461/2	—3/4	285	228	113 058
.								
ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА								
Облигации Казначейства (CBT) \$ 100 000; в 1/32 долях от 100 %								
Мар	104-31	105-05	104-18	104-20	—11	116-20	95-13	28 210
Июн	104-12	104-19	104-00	104-02	—11	113-15	94-27	328 566
.								
1-мес. LIBOR (CME) \$ 3 млн.; в сотых долях от 100 %								
Апр	93,84	93,84	93,82	93,83	...	6,17	...	27 961
.								
Евродоллар (CME) \$ 1 млн.; в сотых долях от 100 %								
Июн	93,52	93,54	93,51	93,52	...	6,48	...	515 578
Сен	93,31	93,32	93,28	93,30	...	6,70	...	322 889
.								
ВАЛЮТА								
Японская йена (CME) 12,5 млн. йен; \$ за 100 йен								
Июн	1,1363	1,1390	1,1240	1,1301	—0,0030	1,1390	0,9915	56 525
Сен	1,1490	1,1491	1,1385	1,1430	—0,0029	1,1491	1,0175	2 282
.								
Немецкая марка (CME) 125 000 марок; \$ за марку								
Июн	0,7249	0,7255	0,7124	0,7147	—0,0087	0,7448	0,5980	56 053
Сен	0,7182	0,7215	0,7153	0,7171	—0,0087	0,7415	0,6290	1 776
.								
Британский фунт (CME) 62 500 фунтов; \$ за фунт								
Июн	1,5910	1,5936	1,5680	1,5734	—0,0102	1,6530	1,5330	21 050
Сен	1,5770	1,5830	1,5680	1,5704	—0,0102	1,6480	1,5410	149
.								
ИНДЕКС								
Индекс S&P 500 (CME) \$ 500 на индекс								
Июн	499,75	500,75	498,90	500,15	+0,40	501,00	449,50	186 725
.								

Рис. 12.3. Котировки фьючерсов. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

ную позицию по 5000 бушелей пшеницы получит $5000 \times 0,1 = 500$ долларов в качестве прибыли. А если базис сузится на \$0,1 до \$0,535, то прежний инвестор потеряет ту же сумму. $\triangleleft$

Пример 12.3.4. Одну фирму, которой через 60 дней должны будут выплатить £1 млн., беспокоит, что фунт ослабеет. Предположим, что у фьючерсного контракта на английский фунт стерлингов на международном валютном рынке (IMM) Чикагской Торговой Палаты (CME) урегулирование произойдет через 71 день. Тогда, если этот срок и условия контракта фирму устраивают, то ей придется продать $1\,000\,000/62\,500 = 16$ контрактов, поскольку каждый контракт соответствует 62 500 фунтам. $\triangleleft$

12.3.1 Ежедневный денежный поток

Рассмотрим фьючерсный контракт с n днями до погашения. И пусть F_i означает цену фьючерса в конце дня i при $0 \leq i \leq n$. Тогда денежная выплата по контракту на день i равна $F_i - F_{i-1}$, как следствие ежедневного урегулирования. Поэтому чистый денежный поток в течение срока жизни контракта можно представить в виде

$$(F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \dots + (F_n - F_{n-1}) = F_n - F_0 = S_T - F_0. \quad (12.8)$$

Напомним, что F_n равно спот-цене при погашении, S_T . Но, хотя суммарная выплата по фьючерсному контракту $S_T - F_0$ и совпадает с выплатой по форвардному контракту, реальная стоимость выплат может отличаться, поскольку ежедневные выплаты по фьючерсному контракту могут инвестироваться и, кроме того, их стоимость зависит от того, как складываемые суммы $S_T - F_0$ «разбросаны» на n -дневном промежутке времени. По форвардным же контрактам никаких сумм до окончательного урегулирования не выплачивается.

Упражнение 12.3.1. Предположим, что процентная ставка такова, что \$1 превращается в \$ R через 1 день, причем эта ставка относится не только к предоставлению кредита, но и к его получению. Определите выплату по фьючерсному контракту, если периодически поступающие суммы отдаются в долг, когда они положительны, и финансируются получением займа, когда отрицательны.

12.3.2 Цены форвардов и фьючерсов

Как ни удивительно, но Кокс и др. доказали, что цена фьючерса совпадает с ценой форварда, если процентные ставки не являются стохастическими [233]. Этот результат часто оправдывает обращение с фьючерсным контрактом, как если бы он был форвардным, т. е. игнорируя его ежедневную фиксацию цен на рынке.

Рассмотрим форвардный и фьючерсный контракты на один и тот же базовый актив с n днями до погашения. Предположим, что процентная ставка дня i есть r_i , т. е. стоимость \$1 в начале дня i возрастает до величины $R_i \equiv e^{r_i}$ к его концу. Пусть F_i — цена фьючерса в конце

дня i . Заметим, что \$1, вложенный в n -дневную дисконтную облигацию в конце дня ноль, будет стоить $R \equiv \prod_{j=1}^n R_j$ долларов в конце дня n .

Начиная со дня один, будем занимать $\prod_{j=1}^i R_j$ длинных позиций по фьючерсу в конце дня $i-1$ и вкладывать получаемые суммы в конце дня i в безрисковые облигации, погашаемые в день n , т.е. в момент поставки. Денежная сумма, возникающая от этих позиций на день i равна $(F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^i R_j$, поскольку день i начинается с $\prod_{j=1}^i R_j$ контрактов. И на нее вплоть до дня n будут начисляться проценты, увеличивая ее до суммы

$$(F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^i R_j \prod_{j=i+1}^n R_j = (F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^n R_j = (F_i - F_{i-1})R.$$

Следовательно, стоимость нашего денежного потока к концу дня n будет равна

$$\sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1})R = (F_n - F_0)R = (S_T - F_0)R.$$

Причем заметим, что никаких капиталовложений для реализации этой стратегии не потребовалось.

Предположим далее, что форвардная цена f_0 превосходит фьючерсную цену F_0 . Тогда мы сможем занять короткую позицию по R форвардным контрактам, занять сумму $f_0 - F_0$ и реализовать вышеупомянутую стратегию. Исходная сумма тогда будет равна $f_0 - F_0 > 0$. К концу дня n долг возрастет до $(f_0 - F_0)R$, а чистая стоимость от предпринятых действий окажется равной

$$f_0 R - S_T R - (f_0 - F_0)R + (S_T - F_0)R = 0.$$

Следовательно, сумма $f_0 - F_0 > 0$ представляет собой чистую арбитражную прибыль. Случай $f_0 < F_0$ симметричен. Это завершает доказательство.

При стохастических процентных ставках стоимости форвардов и фьючерсов теоретически уже не одинаковы. В действительности этот факт и является основной причиной разницы в цене у форвардов и фьючерсов на фьючерсных рынках [176, 275]. Однако для краткосрочных контрактов, разница оказывается маленькой. Более того, разница значительна лишь по долгосрочным контрактам по активам, чувствительным к процентной ставке. Мы же будем предполагать, что цены форвардов и фьючерсов одинаковы.

Упражнение 12.3.2. Завершите доказательство, рассмотрев случай $f_0 < F_0$.

Упражнение 12.3.3. Предположим, что процентные ставки неопределенны, а цены фьючерсов меняются в том же направлении, что и эти ставки. Покажите, что тогда фьючерсные цены будут выше форвардных. И аналогично, если фьючерсные цены меняются в противоположном направлении по отношению к изменению процентных ставок, то фьючерсные цены будут уступать форвардным.

12.3.3 Фьючерсы на индексы акций

Фьючерсы на индексы акций впервые появились в 1982 г., когда Торговая палата Канзас-сити ввела фьючерсы на индекс акций Value Line. В настоящее время существуют фьючерсы на индекс S&P 500, на средневзвешенное 225 акций Nikkei, на составной индекс NYSE (продаваемые на Нью-Йоркской фьючерсной бирже по цене, равной произведению \$ 500 на значение индекса), на индекс Основного рынка (торгуемые на Чикагской бирже СВТ по цене «\$ 500 на индекс»), на индекс Доу-Джонса (эти фьючерсы продаются по цене «\$ 10 на индекс»; краткое обозначение индекса DJ) и т. д.

Индексы можно рассматривать как ценные бумаги, по которым выплачиваются дивиденды, причем под ценными бумагами понимается корзина акций, составляющих индекс, а в роли дивидендов оказываются выплачиваемые по ним дивиденды. И если у индекса широкая база, то можно считать, что дивиденды выплачиваются непрерывно. Тогда, если через q обозначить усредненную ежегодную дивидендную доходность для всей жизни контракта, то цена фьючерса оказывается равной

$$F = Se^{(r-q)\tau}. \quad (12.9)$$

Пример 12.3.5. Рассмотрим фьючерсный контракт на индекс S&P 500. В нем минимальные колебания значения индекса (**величина тика**) составляют 0,05 пункта. А поскольку стоимость контракта определяется умножением \$ 500 на значение индекса, то изменение его значения на 0,05 сводится к тикю в $\$ 500 \times 0,05 = \$ 25$. Рассмотрим 3-месячный фьючерсный контракт на индекс S&P 500. И предположим, что акции, составляющие корзину этого индекса, имеют 3 % ежегодную дивидендную доходность, текущее значение индекса равно 480, а процентная ставка — 8 %. Тогда теоретическая цена фьючерса оказывается равной $480 \times e^{(0,08-0,03) \times 0,25} = 486,038$. $\triangleleft$

Если равенство (12.9) перестает выполняться, то можно получить арбитражную прибыль, организовав сделку с акциями индекса и его фьючерсом. Скажем, если $F > Se^{(r-q)\tau}$, то можно добиться прибыли, покупая акции индекса и занимая короткую позицию по фьючерсным контрактам. Обратное следует сделать в случае, когда $F < Se^{(r-q)\tau}$. Эти стратегии известны под названием **индексный арбитраж** и выполняются на компьютерах, причем деятельность такого рода также имеет название **торговля с помощью программы**. Однако равенство (12.9) неприменимо к фьючерсам на индекс Nikkei 225. Напомним, что стоимость одного такого контракта *в долларах* определяется как пятикратное значение индекса, но измеряется он *в йенах*. А ценной бумаги со стоимостью, равной значению индекса, умноженному на \$ 5, не существует; поэтому арбитражная логика не применима.

Для индексов, дивиденды по акциям которого стремятся оплачивать одновременно, можно рассчитать как размер дивидендов, так и моменты выплат. Тогда индекс превращается в ценную бумагу с известным доходом и в соответствии с равенством (12.4) стоимость такого фьючерса равна

$$F = (S - I)e^{r\tau}. \quad (12.10)$$

Упражнение 12.3.4. Предполагается ли в (12.9) и (12.10), что рассматриваемый в них индекс акций не учитывает выплату дивидендов наличными?

12.3.4 Форвардные и фьючерсные контракты на валюту

Пусть S означает обменный курс «местная за 1 иностранной», а X — цену поставки по форвардному контракту. Будем использовать также символ r_f для обозначения иностранной безрисковой процентной ставки. Тогда стоимость портфеля, состоящего из одного длинного форвардного контракта, суммы $Xe^{-r_f\tau}$ в наличных местной валюты и одной короткой позиции по сумме $e^{-r_f\tau}$ в иностранной валюте, очевидно, равна нулю в момент T . Поэтому нулевой должна быть и его текущая стоимость, т. е. $f + Xe^{-r_f\tau} - Se^{-r_f\tau} = 0$. Но значение X , при котором $f = 0$, является ценой форварда (т. е. обменным курсом форварда). Таким образом, приходим к равенству $F = Se^{(r-r_f)\tau}$, которое в точности совпадает с паритетом процентных ставок.

12.3.5 Фьючерсы на товары и стоимость «переноса»

Некоторые товары приобретаются исключительно для вложения средств (такие как золото и серебро), в то время как другие — в основном для потребления. В первом случае для получения стоимости фьючерсов можно использовать арбитражную логику, но во втором она дает лишь оценки сверху.

Для товаров, которыми владеют в инвестиционных целях и хранение которых не нужно оплачивать, стоимость фьючерса равна $F = Se^{r\tau}$ в соответствии с равенством (12.3). Вообще же, если U означает приведенное значение (ПЗ) стоимости хранения в течение всей жизни фьючерсного контракта, то из (12.4) вытекает, что $F = (S + U)e^{r\tau}$, поскольку стоимость хранения является отрицательным доходом. Но можно действовать и по-другому. Тогда, если u означает ежегодную стоимость хранения в смысле доли от спот-цены, то из равенства (12.6) вытекает, что $F = Se^{(r+u)\tau}$, поскольку стоимость хранения можно воспринимать и как отрицательную дивидендную доходность. Однако, если товар используется в основном для потребления, то можно лишь сказать, что

$$F \leq (S + U)e^{r\tau}, \quad F \leq Se^{(r+u)\tau},$$

соответственно, поскольку владение материальными вещами связано с определенной выгодой. И измеряется эта выгода с помощью так называемой **доходности удобства**, которая определяется как такое u , для которого

$$Fe^{r\tau} = (S + U)e^{r\tau}, \quad Fe^{r\tau} = Se^{(r+u)\tau}, \quad (12.11)$$

соответственно.

Но можно указать соотношение, связывающее фьючерсную цену и спот-цену в терминах **стоимости переноса**, которая определяется как стоимость хранения плюс стоимость в процентах за оплату переноса

актива (во времени), за вычетом дохода, заработанного этим активом. Для бездивидендной акции стоимостью переноса является величина r , поскольку в этом случае нет ни стоимости хранения, ни произведенного дохода; для индекса акций — это $r - q$, поскольку доход «поступает» со скоростью q ; для валюты — это $r - r_f$; для товара, за хранение которого нужно платить — это $r + u$. Предположим, что стоимость переноса равна s , а доходность удобства есть y . Тогда в случае инвестиционного актива $F = Se^{c\tau}$, а в случае потребительского — $F = Se^{(c-y)\tau}$.

Стоимость переноса часто задается в денежном выражении, и тогда она называется **нагрузкой переноса** или **денежной стоимостью переноса**. Она характеризует стоимость переноса актива в долларах за какой-то период времени и состоит из расходной суммы в процентах I и стоимости хранения U , но за вычетом денежного потока D , создаваемого активом:

$$C \equiv I + U - D. \quad (12.12)$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, слова «стоимость переноса» будем воспринимать именно как стоимость в денежном выражении. Аналогично, доходность удобства также может быть выражена в долларах:

$$\text{доходность удобства} \equiv S + C - F.$$

Как следствие, базис $S - F$ тогда окажется просто равным доходности удобства минус стоимость переноса:

$$\text{базис} = \text{доходность удобства} - C. \quad (12.13)$$

Напомним, что доходность удобства для финансовых инструментов и товаров, приобретаемых в основном для инвестиционных целей пренебрежимо мала. Для таких активов изменения базиса целиком связаны с изменением стоимости переноса.

Посмотрите на цены фьючерсов на зерно в таблице на рис. 12.3. Поскольку цены на фьючерсы для ближайших месяцев меньше, чем для далеких, то такой рынок называется **нормальным**. Премия, которую дальние месяцы требуют по сравнению с ближними, как раз и объясняется большей стоимостью переноса. На **перевернутом** или **дисконтном** рынке фьючерсы на дальние месяцы продаются по меньшим ценам, чем на ближние. Высокий спрос на поставки живого зерна или готовность владельцев элеваторов хранить зерно по меньшей, чем нормальная стоимость хранения могут привести к возникновению перевернутого рынка.

Если цена форвардного контракта равняется сумме спот-цены и нагрузки по переносу (другими словами, когда доходность удобства нулевая), то о форвардной цене говорят, что она отвечает **полному переносу**. Форвардные и фьючерсные цены должны отвечать «полному переносу» для активов с нулевой стоимостью хранения, которые либо могут быть проданы из короткой позиции, либо поставлены почти целиком (см. упр. 12.3.7 и 12.3.8). Как упоминалось ранее, стоимость товаров, приобретенных в инвестиционных целях, также должна отражать «полный перенос». Если суммарная стоимость хранения зерна, скажем, равна четырем центам за бушель в месяц и если цены фьючерсов отражают

полную стоимость переноса, то цены для разных месяцев поставки могут выглядеть примерно как в следующей таблице:

<i>Декабрь</i>	<i>Март</i>	<i>Май</i>	<i>Июль</i>	<i>Сентябрь</i>
\$ 2,00	\$ 2,12	\$ 2,20	\$ 2,28	\$ 2,36

Упражнение 12.3.5. Для фьючерсов стоимость переноса может быть определена формулой **плати наличные и забирай**, что означает стратегию покупки актива за наличные с помощью заемных средств.

1) Проиллюстрируйте эту точку зрения с помощью фьючерсных контрактов, когда по базовому активу доход не выплачивается.

2) Покажите, что стоимость переноса можно использовать для нахождения фьючерсной цены в п. 1, отвечающей полному переносу.

Упражнение 12.3.6. Производителю требуется купить золото через 3 месяца. Перед ней открываются следующие возможности:

1) купить золото сейчас, или

2) занять длинную позицию по 3-месячному фьючерсному контракту на золото и принять поставку через 3 месяца.

Если она купит золото сейчас, то деньги, которые окажутся связанными, можно было бы вложить в финансовые инструменты на рынке. Эта разница и составит стоимость осуществления данной возможности, состоящей в покупке физического золота. Чему равна стоимость переноса в отношении владения 100 унциями золота в течение года и купленного по цене \$ 350 за унцию, если векселя Казначейства (ВК) приносят ежегодную доходность в 6 %?

Упражнение 12.3.7. Докажите, что $F \leq S + C$, где C — чистая денежная стоимость переноса единицы товара до даты поставки.

Упражнение 12.3.8. Покажите, что для товара, который можно продать из короткой позиции, такого, как некоторый финансовый актив, $F \geq S + C - U$, где U — чистая стоимость хранения при переносе единицы товара до даты поставки.

12.4 Опционы на фьючерсы и опционы на форварды

Базовым активом фьючерсного опциона является фьючерсный контракт. При его исполнении владелец опциона занимает позицию по фьючерсному контракту с фьючерсной ценой, равной цене исполнения опциона. В частности, владелец фьючерсного опциона колл (пут) приобретает длинную (соответственно, короткую) фьючерсную позицию. Тот, кто выписывает опцион, совершает противоположное: продавец фьючерсного опциона колл (соответственно, пут) приобретает короткую (соответственно, длинную) фьючерсную позицию. Фьючерсный контракт затем немедленно фиксируется на рынке, а фьючерсная позиция двух сторон будет отмечаться по существующей фьючерсной цене. Владелец опциона может получить в наличных разницу между существующей фьючерсной ценой и ценой исполнения. Естественно, момент окончания срока действия опциона должен предшествовать дате поставки фьючерсного контракта.

20 марта 1995 г., понедельник

ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА							1-мес. LIBOR (CME) \$ 3 млн.;						
ОК (СВТ) \$ 100 000;							пункты от 100 %						
пункты и 1/64 доли от 100 %													
Цена исполнения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование			Цена исполнения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн		Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
102	2-06	2-26	2-47	0-03	0-23	0-43	9325	0,58	0,51	0,45	0,00	0,01	0,03
103	1-12	1-44	...	0-08	0-40	...	9350	0,34	0,29	0,24	0,01	0,04	0,07
104	0-30	1-05	1-29	0-26	1-01	1-25	9375	0,11	0,10	0,09	0,03	...	0,17
105	0-07	0-39	...	1-03	1-34	...	9400	0,01	...	0,03	...	...	...
106	0-01	0-21	0-40	1-61	...	2-35	9425	...	...	...	...	...	...
107	0-01	0-10	...	...	...	...	9450	0,00	0,00	...	...	...	...
.													
БК (СВТ) \$ 100 000;							ИНДЕКС						
пункты и 1/64 доли от 100 %							Индекс S&P 500 (CME) \$ 500 на премию						
Цена исполнения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование			Цена исполнения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн		Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
102	2-26	...	2-45	0-01	...	0-20	490	12,55	14,80	16,75	2,45	4,75	6,75
103	1-28	...	1-60	0-02	0-19	0-35	495	8,75	11,25	13,35	3,65	6,15	8,25
104	0-36	...	1-19	0-11	...	0-57	500	5,70	8,10	10,20	5,55	7,95	10,05
105	0-07	0-32	0-51	0-45	1-06	1-25	505	3,45	5,55	7,50	8,25	10,35	12,30
106	0-01	...	0-28	1-39	...	2-01	510	1,85	3,55	5,30	11,65	...	15,00
107	0-01	0-05	0-14	...	...	2-51	515	0,85	2,15	3,55	...	...	...
.													

Рис. 12.4. Котировки фьючерсных опционов. Месяц относится к месяцу окончания срока базового фьючерсного контракта. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

А все происходит так, как если бы продавец опциона поставил фьючерсный контракт владельцу опциона и оплатил ему разницу между существующей фьючерсной ценой и ценой исполнения в случае опциона колл. В случае опциона пут дело происходит так, как если бы продавец опциона принял поставку по фьючерсному контракту от владельца опциона и оплатил ему цену исполнения за вычетом существующей фьючерсной цены. Обратите внимание, что сумма денег, которая переходит из рук в руки при исполнении опциона есть всего лишь разница между ценой исполнения и существующей фьючерсной ценой. Выборочные котировки фьючерсных опционов см. в таблице на рис. 12.4.

Пример 12.4.1. Один инвестор владеет июльским фьючерсным опционом колл на поставку 5000 бушелей соевых бобов с ценой исполнения 600 центов за бушель. Предположим, что текущая фьючерсная цена соевых бобов при поставке в июле равна 610 центам. Тогда инвестор может исполнить свой опцион и получить \$ 500 (5000×10 центов) плюс длинную позицию во фьючерсном контракте на покупку 5000 бушелей соевых

бобов в июле. Аналогично, рассмотрим инвестора с июльским фьючерсным опционом пут на 5000 бушелей соевых бобов с ценой исполнения в 620 центов за бушель. В этом случае, исполняя опцион, инвестор получит \$ 500 (5000×10 центов) плюс короткую позицию во фьючерсном контракте на покупку 5000 бушелей соевых бобов в июле. <

Пример 12.4.2. Предположим, что владелец фьючерсного опциона колл с ценой исполнения \$ 35, исполняет его, когда фьючерсная цена равна \$ 45. Тогда владельцу этого опциона отдается длинная позиция во фьючерсном контракте по \$ 35 (т. е. с ценой исполнения \$ 35), а продавцу опциона колл «отходит» соответствующая короткая позиция по \$ 35. Фьючерсные позиции обоих немедленно отмечаются на рынке. Поскольку большей является цена \$ 45, то длинная фьючерсная позиция (владельца опциона колл) реализует выигрыш в \$ 10, а короткую фьючерсную позицию (продавца опциона колл) характеризует потеря \$ 10. Продавец опциона колл оплачивает при обмене \$ 10, которые и получает владелец опциона колл. После этого длинная фьючерсная позиция владельца опциона колл имеет новую цену исполнения \$ 45, и он может либо ликвидировать свою фьючерсную позицию на \$ 45 без оплаты, либо сохранить ее. <

Фьючерсные опционы появились в 1982 г., когда Чикагская Торговая Палата СВТ начала торговлю опционами на фьючерсы по облигациям Казначейства (ОК). Фьючерсные опционы предпочтительнее опционов на инструменты в наличных на некоторых рынках по следующим причинам. В отличие от рынков наличных, которые часто незначительны и являются внебиржевыми, торговля фьючерсами происходит в конкурентоспособных и централизованных рынках. Фьючерсные опционы имеют меньше проблем с ликвидностью, возникающих при занятии короткой позиции по активам в наличных — короткая продажа товаров может быть значительно более трудным делом, чем продажа фьючерсного контракта. Фьючерсные опционы используются также для реализации некоторых стратегий. Наконец, фьючерсные опционы популярны в связи с тем, что не требуют значительных капиталовложений [746].

Форвардные опционы подобны фьючерсным, за исключением того, что в их случае поставляется форвардный контракт с ценой поставки, равной цене исполнения опциона. В частности, исполнение форвардного опциона колл (пут) приводит к длинной (соответственно, короткой) позиции по форвардному контракту. Отметим, что исполнение форвардного опциона не приводит к немедленным денежным поступлениям. И, в отличие от фьючерсных опционов форвардными торгуют не на организованных биржах, а на внебиржевых рынках.

Пример 12.4.3. Рассмотрим опцион колл с ценой исполнения \$ 100 и датой окончания срока действия в сентябре. И пусть его базовым активом является форвардный контракт с датой поставки в декабре. Предположим, что форвардная цена в июле равна \$ 110. При исполнении владелец опциона колл получает форвардный контракт с ценой поставки \$ 100. И если затем на форвардном рынке будет занята компенсирующая позиция, то в сентябре ему будет обеспечена прибыль в \$ 10. Если бы контракт был опционом колл на фьючерс, то \$ 10 прибыль была бы реализована в июле. <

Упражнение 12.4.1. При конверсии брокер покупает опцион пут, продает опцион колл и покупает фьючерсный контракт. У опционов пут и колл одни и те же цена исполнения и месяц истечения срока. У фьючерсного контракта тот же месяц окончания срока действия, что и у опционов, а его цена совпадает с ценой исполнения опционов. Покажите, что поступление любой положительной суммы от конверсии означает гарантированную прибыль.

12.4.1 Соотношения по оценке стоимости

Предположим, что процентная ставка положительна и фиксирована. В краткосрочных контрактах это допустимо. Но даже при таком предположении, которое уравнивает цену форварда с ценой фьючерса, стоимость форвардного опциона отличается от стоимости фьючерсного опциона. Пусть поставка отнесена на момент T , текущее время равно нулю, а датой окончания срока действия опциона на форвардный или фьючерсный контракт будет момент t ($t \leq T$). Заметим, что фьючерсный контракт могут отметить на рынке, если опцион будет исполнен. В примере 12.4.3 установлены следующие тождества для фьючерсных и форвардных опционов, если они исполняются в момент t :

$$C_{fs} = \max(F_t - X, 0), \tag{12.14}$$

$$C_{fd} = \max(F_t - X, 0)e^{-r(T-t)}; \tag{12.15}$$

здесь C_{fs} (C_{fd}) — стоимость фьючерсного (соответственно, форвардного) опциона. Более того, Европейский фьючерсный опцион стоит столько же, сколько и соответствующий Европейский опцион на базовый актив, если сроки погашения фьючерсного контракта и опциона совпадают. Причина в том, что стоимость фьючерса при погашении равна спот-цене. И этот вывод не зависит от модели для спот-цены.

Паритет же пут—колл слегка отличается от своего аналога из (8.1). В то время, как в случае опционов на акции использовалась недисконтированная цена акции, теперь следует использовать дисконтированную цену фьючерса или форварда. (см. также упр. 12.2.4).

Теорема 12.4.4 (паритет пут—колл). Для Европейских опционов на фьючерсные контракты $C = P - (X - F)e^{-rt}$. Для Европейских опционов на форвардные контракты $C = P - (X - F)e^{-rT}$.

Доказательство. Рассмотрим портфель, состоящий из одного короткого опциона колл, одного длинного опциона пут, одного длинного фьючерсного контракта и взятие ссуды размера $(X - F)e^{-rt}$. Тогда в момент t мы будем иметь следующий денежный поток:

	$F_t \leq X$	$F_t > X$
Короткий опцион колл	0	$X - F_t$
Длинный опцион пут	$X - F_t$	0
Длинный фьючерсный контракт	$F_t - F$	$F_t - F$
Ссуда в размере $(X - F)e^{-rt}$	$F - X$	$F - X$
Всего (у портфеля)	0	0

Поскольку поступающая сумма в будущем у портфеля нулевая в обоих случаях, то стоимость портфеля сегодня также должна быть нулевой. Это доказывает теорему для фьючерсного опциона.

Обоснование для форвардного опциона отличается лишь тем, что на этот раз величина взятой ссуды равна $(X - F)e^{-rT}$. Причина в том, что форвардный контракт можно урегулировать лишь в момент T . $\square$

Стоимость Американского форвардного опциона должна быть такой же, как и у его Европейского двойника. Другими словами, возможность досрочного исполнения не играет роли.

Теорема 12.4.5. *Американские форвардные опционы не должны исполняться до своего окончания, пока вероятность закончить им свою жизнь вне денег остается положительной.*

Доказательство. Рассмотрим портфель, состоящий из одного длинного форвардного опциона колл, одного короткого форвардного контракта с ценой поставки F и ссуды в размере $(F - X)e^{-rT}$. Если $F_t < X$ в момент t , то стоимость портфеля в момент t равна

$$0 + (F - F_t)e^{-r(T-t)} - (F - X)e^{-r(T-t)} = (X - F_t)e^{-r(T-t)} > 0.$$

Если же $F_t \geq X$ в момент t , то эта стоимость равна

$$(F_t - X)e^{-r(T-t)} + (F - F_t)e^{-r(T-t)} - (F - X)e^{-r(T-t)} = 0.$$

Поэтому стоимость форвардного опциона колл C удовлетворяет неравенству $C - (F - X)e^{-rT} \geq 0$. Если же опцион колл исполняется немедленно, то его ПЗ на момент 0 равно лишь $\max(F - X, 0)e^{-rT}$. Случай форвардных опционов пут объяснен в упр. 12.4.3. $\square$

Для Американских фьючерсных опционов досрочное исполнение может быть оптимальным. Поэтому стоимость Американского фьючерсного опциона больше стоимости его Европейской копии, даже если по базовому активу выплаты не производятся [125].

Теорема 12.4.6. *Исполнение Американских фьючерсных опционов может оказаться оптимальным и до истечения срока.*

Упражнение 12.4.2. Докажите теорему 12.4.5 для Американских форвардных опционов пут (указание: покажите сначала, что $P - (X - F) \times e^{-rT} > 0$).

Упражнение 12.4.3. Докажите, что для Американских фьючерсных опционов $Fe^{-rt} - X \leq C - P \leq F - Xe^{-rt}$.

12.4.2 Модель Блэка

В 1976 г. Блэк вывел следующие формулы для стоимости Европейских фьючерсных опционов:

$$C = Fe^{-rt}\Phi(x) - Xe^{-rt}\Phi(x - \sigma\sqrt{t}), \quad (12.16)$$

$$P = Xe^{-rt}\Phi(-x + \sigma\sqrt{t}) - Fe^{-rt}\Phi(-x), \quad (12.16')$$

где [81]

$$x \equiv \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Формулы (16) связаны с аналогичными формулами для опционов на акцию, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность. Более того, они в точности совпадают с формулами (9.20), в которых дивидендная доходность q заменена на процентную ставку r , а цена акции S — на цену фьючерса F . Сделанное замечание доказывает и теорему 12.4.6, если использовать и соображения п.9.6.2. Эти же формулы подойдут и для стоимости Европейских форвардных опционов, если их правые части умножить на $e^{-r(T-t)}$, поскольку стоимость форвардного опциона отличается от стоимости фьючерсного множителем $e^{-r(T-t)}$, что вытекает из равенств (12.14) и (12.15).

Формулы Блэка можно записать с помощью параметра S вместо F , используя замену $F = Se^{(r-q)T}$ (приведенные же формулы отличает то преимущество, что они не используют ни q , ни T . Дельта для опциона колл тогда будет равна $\partial C/\partial F = e^{-rt}\Phi(x)$, а для опциона пут — величине $\partial P/\partial F = e^{-rt}[\Phi(x) - 1]$. Дельта для опциона колл можно также определить и по отношению к спот-цене:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial S} = e^{-rt}\Phi(x)e^{(r-q)T} = e^{-r(t-T)-qT}\Phi(x).$$

Так же легко можно получить и выражения для остальных мер чувствительности [746, с. 345].

Наряду с индексными опционами и индексными фьючерсами существует и третий тип производных инструментов на акционные индексы: фьючерсные опционы на индекс. Стоимость фьючерсных евроопционов на индекс можно оценить по формулам Блэка. Индексы S&P 500 и Доу-Джонса охватывают все три типа производных инструментов. По индексу NYA есть опционы и фьючерсные опционы. Хотя по индексам SPX и Доу-Джонса индексные опционы являются Европейскими, их фьючерсные опционы на индекс являются Американскими. Как опционы, так и фьючерсные опционы на индекс NYA являются Американскими.

Упражнение 12.4.4. 1) Проверьте, что в модели Блэка—Шоулса стоимость Европейских фьючерсных опционов совпадает со стоимостью соответствующих Европейских опционов на актив в наличных, если даты погашения опционов и фьючерсных контрактов одинаковы. Причем по активу в наличных может выплачиваться и непрерывная дивидендная доходность. А затем объясните, что

2) в действительности утверждение (1) имеет место в любой модели.

12.4.3 Биномиальная модель для форвардных и фьючерсных опционов

Цена фьючерса ведет себя подобно цене акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность r . В биномиальной модели риск-нейтральной вероятностью для цены фьючерса по форму-

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости Американских фьючерсных опционов колл:

```

ввод:  $F, \sigma, t, X, r, n$ ;
действительные числа  $R, p, u, d, C[0..n]$ ;
целые  $i, j$ ;
 $R := e^{r(t/n)}$ ;
 $u := e^{\sigma\sqrt{t/n}}$ ;  $d := e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$ ;
 $p := (1-d)/(u-d)$ ; // Риск-нейтральная вероятность
для ( $i=0$  до  $n$ ) {  $C[i] := \max(0, Fu^{n-i}d^i - X)$ ; }
для ( $j=n-1$  вниз до 0) {
    для ( $i=0$  до  $j$ ) {  $C[i] := \max((p \times C[i] + (1-p) \times C[i+1])/R, Fu^{j-i}d^i - X)$ ; }
}
вывод  $C[0]$ ;

```

Рис. 12.5. Алгоритм биномиального дерева для Американских фьючерсных опционов колл.

ле (9.21) является $p_f \equiv \frac{1-d}{u-d}$. При этом подразумевается, что фьючерсная цена от значения F переходит к значению Fu с вероятностью p_f и значению Fd с вероятностью $1-p_f$. На рис.12.5 приведен алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости фьючерсных опционов. Алгоритм биномиального дерева для форвардных опционов идентичен, за исключением того, что на этот раз в качестве выплаты по нему при исполнении опциона используется выражение (12.15) вместо (12.14). Поэтому на рис.12.5 следует заменить величину $Fu^{n-i}d^i$ на $Fu^{n-i}d^i e^{-r(T-t)}$, а величину $Fu^{j-i}d^i$ на $Fu^{j-i}d^i e^{-r(T-t/j/n))}$.

Напомним, что фьючерсная цена связана со спот-ценой равенством $F = Se^{rT}$, если дивиденды по базовому активу не выплачиваются. Из вышеуказанной биномиальной модели для фьючерсных цен вытекает, что цена акции $S = Fe^{-rT}$ за период длины Δt заменяется на $S_u \equiv Fue^{-r(T-\Delta t)} = Sue^{r\Delta t}$ с вероятностью p_f и на $S_d \equiv Sde^{r\Delta t}$ с вероятностью $1-p_f$.

Опционы можно воспроизвести с помощью портфеля из фьючерсных контрактов и облигаций. И эту возможность можно предпочесть использованию акций, поскольку ограничения, связанные с занятием короткой позиции по фьючерсам слабее соответствующих ограничений по акциям. Для построения портфеля из h_f фьючерсных контрактов и суммы $\$B$, вложенной в безрисковые облигации, эквивалентного опциону колл стоимостью C_u , если цена акции возрастет до S_u и стоимостью C_d , если она упадет до S_d , мы полагаем

$$h_f(Fu - F) + e^{r\Delta t}B = C_u, \quad h_f(Fd - F) + e^{r\Delta t}B = C_d.$$

Решая эти уравнения, находим, что

$$h_f = \frac{C_u - C_d}{(u-d)F} \geq 0, \quad B = \frac{(u-1)C_d - (d-1)C_u}{(u-d)e^{r\Delta t}}.$$

Сравнивая со значением дельта из (9.1) — которое здесь напомним:

$$h = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{(Su - Sd)e^{r\Delta t}},$$

— заключаем, что

$$h_f = \frac{C_u - C_d}{(u - d)Se^{rT}} = he^{-r(T-\Delta t)} < h.$$

Поэтому дельта фьючерсов никогда не превосходит дельта акций.

Поскольку $0 < p_f < 1$, то и $0 < 1 - p_f < 1$. Это подсказывает следующий подход к решению проблемы с отрицательной риск-нейтральной вероятностью, упомянутой в п. 9.3.1: построить биномиальное дерево для цены F фьючерсного контракта, заканчивающегося в то же время, что и опцион, а затем рассчитать значение S по F в каждом узле с помощью равенства $S = Fe^{-(r-q)(T-t)}$, если по акции выплачивается непрерывная дивидендная доходность q [470].

Упражнение 12.4.5. Начните со стандартного дерева для базовой бездивидендной акции (т.е. со случая, когда цена акции S за время Δt может измениться на Su или на Sd с вероятностью ее движения вверх $\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$).

1) Постройте биномиальную модель для фьючерсной цены, основанную на этом дереве.

2) Что изменится, если по акции выплачивается непрерывная дивидендная доходность q ?

Задание по программированию 12.4.6. Напишите программу биномиального дерева для оценки стоимости фьючерсных и форвардных опционов.

Задание по программированию 12.4.7. Напишите программу биномиального дерева, которая реализует идею по избавлению от отрицательных риск-нейтральных вероятностей, указанную выше.

12.5 Свопы

Свопы представляют собой соглашения между двумя **партнерскими сторонами** по обмену денежных потоков в будущем и в соответствии с заранее определенной формулой. Существуют два основных типа свопов: связанные с процентной ставкой и с валютой. **Своп процентной ставки** имеет место, когда две стороны периодически обмениваются процентными выплатами. **Валютные свопы** — это соглашения на поставку одной валюты в обмен на другую [767]. Валютные свопы впервые появились в 1979 г., а свопы процентной ставки последовали за ними в 1981 г. В последующее десятилетие рост их объема в номинальном исчислении был настолько впечатляющим, что как бы превращал в карликовый рост любого другого рынка. Так, например, объемы только по свопам процентной ставки в 1993 г. превышали \$ 2 трлн. Свопы также подстегнули

рост таких связанных с ними инструментов, как многопериодные опционы (шапки и полы процентой ставки и т.д.) и **соглашения по форвардным ставкам**.

Оба типа свопов, как валютные, так и связанные с процентной ставкой, называются **свопами ставки**. Но существуют и свопы на товары. Например, компания, которая ежегодно потребляет 200 000 баррелей нефти, может каждый год оплачивать \$ 2 млн. в течение следующих 5 лет и взамен получать сумму $200\,000 \times S$, где S — существующая рыночная цена нефти за баррель. Такая сделка «запирает» цену на нефть за баррель на уровне \$ 10. Далее мы переходим к валютным свопам.

12.5.1 Валютные свопы

В валютном свопе участвуют две стороны по обмену денежных потоков в разных валютах. В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию, в которой сторонам A и B доступны следующие фиксированные ставки в долларах США и Японских йенах:

	Доллары	Йены
A	D_A %	Y_A %
B	D_B %	Y_B %

Предположим, что A желает взять ссуду по фиксированной ставке в йенах, а B хотел бы получить ссуду под фиксированную ставку в долларах. Тогда напрашивающийся вариант для A — занять йены под Y_A % годовых, а для B — занять доллары под D_B % годовых.

Предположим далее, что A *относительно* более конкурентоспособен чем B на долларовом рынке, чем на рынке йен, а для B верно противоположное — другими словами, что $Y_B - Y_A < D_B - D_A$. И рассмотрим следующую альтернативную договоренность: A занимает доллары, B занимает йены и они заключают валютный своп, возможно, при участии банка в роли финансового посредника. В условиях свопа обе стороны обмениваются выбранной суммой в начале и в конце жизни свопа. И этот акт преобразует ссуду в долларах для A в йеновую форму, а ссуду B в йенах в долларовую ссуду. Совокупный выигрыш для обеих сторон составляет $[(D_B - D_A) - (Y_B - Y_A)]$ %, поскольку совокупная процентная ставка вначале равна $(Y_A + D_B)$ %, а по альтернативной договоренности она несколько меньше: $(D_A + Y_B)$ %. Конечно, этот сценарий будет реализован лишь если совокупный выигрыш будет распределен таким образом, что его стоимость для каждой из сторон будет меньше стоимости в первоначальном сценарии.

Пример 12.5.1. Две стороны, A и B , сталкиваются со следующими ставками по займу:

	Доллары	Йены
A	9 %	10 %
B	12 %	11 %

Предположим, что *A* желает занять в долг йены, а *B* — доллары. *A* может занять йены сам под 10 %, а *B* может занять доллары под 12 %. Поскольку разница в ставках по доллару (3 %) отличается от разницы по йене (1 %), то валютный своп с общим выигрышем $3 - 1 = 2\%$ возможен. Заметим, что *A* оказывается относительно более конкурентоспособен чем *B* на долларовом рынке, чем на рынке йены. На рис. 12.6 представлена договоренность, которая является выгодной для обеих вовлеченных сторон, в которой *A* реально занимает йены под 9,5 %, а *B* занимает доллары под 11,5 %. Выигрыш составляет 0,5 % для *A*, 0,5 % для *B*, и, если доллары и йены рассматриваются как равноправные валюты, то 1 % для банка.

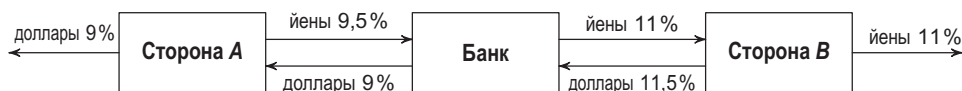


Рис. 12.6. Валютный своп: он превращает обязательство по долларам в обязательство по йенам и наоборот.

По соглашению из рис. 12.6 и при основных суммах в размере \$ 1 млн. и 100 млн. йен, банк получит в виде дохода за год \$ 0,025 млн., а с другой стороны потеряет за год 1,5 млн. йен. Таким образом, банку приходится нести некоторый валютный риск, но ни *A*, ни *B* такому риску не подвержены. Ясно, что валютный риск может быть перераспределен, но не исключен. ◁

Упражнение 12.5.1. Используйте числа из примера 12.5.1 для построения таких же реальных ставок займа, но без банка в качестве посредника.

Упражнение 12.5.2. Перестройте своп из примера 12.5.1 таким образом, чтобы выигрыш составил 1 % для *A*, 0,5 % для *B* и 0,5 % для банка.

12.5.2 Оценка стоимости валютных свопов

Свопы как пакеты рыночных инструментов в наличных. При отсутствии риска неплатежеспособности оценка стоимости валютного свопа скорее не представляет труда. Возьмем в качестве примера сторону *B* из рис. 12.6. Для нее своп эквивалентен длинной позиции по облигации в йенах, по которой выплачивается 11 % годовых и короткой позиции по долларовой облигации, оплачивающей 11,5 % годовых. Таким образом, общая формула для оценки стоимости свопа имеет вид $SP_Y - P_D$, где P_D — стоимость долларовых облигаций в долларах, P_Y — стоимость йеновых облигаций в йенах, а S является текущим обменным курсом \$/йена (т. е. долларов за 1 йену). И, следовательно, стоимость валютного свопа зависит от временной структуры процентных ставок участвующих валют и текущего обменного курса. Стоимость свопа равна нулю, когда $SP_Y = P_D$.

Пример 12.5.2. Возьмем 3-летний своп с основными суммами в \$ 1 млн. и 100 млн. йен, представленный на рис. 12.6. Выплаты по нему делаются один раз в год. Предположим, что текущий обменный курс равен 90 йен/\$ (т.е. йен за \$1) и временная структура плоская по обеим валютам — 8% в США и 9% в Японии. Тогда стоимость свопа равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{90} \times (11 \times e^{-0,09} + 11 \times e^{-0,09 \times 2} + 111 \times e^{-0,09 \times 3}) - \\ & - (0,115 \times e^{-0,08} + 0,115 \times e^{-0,08 \times 2} + 1,115 \times e^{-0,08 \times 3}) = \\ & = 0,074 \text{ млн. долларов} \end{aligned}$$

для стороны B . ◁

Свопы как пакеты форвардных контрактов. Свопы можно рассматривать и как пакет форвардных контрактов. По формуле (12.5) стоимость форвардного контракта в долларовом выражении при погашении через i лет равна

$$f_i \equiv (SY_i)e^{-qi} - D_i e^{-ri}, \quad (12.17)$$

где Y_i — поступление в йенах за год i , S — обменный курс \$/йена, q — процентная ставка по йене, D_i — отток денежных средств в долларах года i и r — долларовая процентная ставка. Такую формулировку можно предпочесть подходу с рынком наличных в случаях, когда требуется рассматривать стоимость переноса и доходность удобства, поскольку цены форвардов их уже включают в себя [514]. Для простоты здесь мы предполагаем, что временные структуры плоские, но обобщение провести несложно.

Возьмем своп, рассмотренный в примере 12.5.2. Каждый год B получает 11 млн. йен и платит \$0,115 млн. Кроме того, в конце третьего года B получает 100 млн. йен и платит \$1 млн. Каждая из этих сделок представляет собой форвардный контракт. В частности, $Y_1 = Y_2 = 11$, $Y_3 = 111$, $S = 1/90$, $D_1 = D_2 = 0,115$, $D_3 = 1,115$, $q = 0,09$, и $r = 0,08$. Подставим эти числа в (12.17), сложим и получим, что $f_1 + f_2 + f_3 = 0,074$ млн. долларов, как и в примере 12.5.2.

Равенство (12.17) можно записать эквивалентным способом с помощью форвардного обменного курса в виде

$$f_i \equiv (F_i Y_i - D_i) e^{-ri},$$

где F_i — форвардный обменный курс года i . При этом хотя своп и может иметь нулевую стоимость (или, что эквивалентно, $\sum_i f_i = 0$), но это не будет означать, что стоимость f_i каждого из форвардных контрактов является нулевой.

Упражнение 12.5.3. Выведите равенство (12.17), используя логику форвардного обменного курса.

Дополнительная литература

При желании получить больше информации по производным ЦБ можно обратиться к [88, 95, 346, 369, 470, 514, 646, 698, 746, 878, 879]. Использование производных инструментов делает цену базового актива более информативной [151]. Модель Блэка весьма популярна [94]. Про более «экзотические» опционы можно прочесть в [423, 894], а об оценке стоимости опционов с риском разорения (или неплатежеспособности) — в [521]. О результатах эмпирических исследований связи между фьючерсными и форвардными ценами можно почитать в [514].

Примечания

1. Компания J. P. Morgan была приобретена в 2000 г. компанией Chase Manhattan и стала называться после этого J. P. Morgan Chase.

2. Чикагская Торговая Палата СВТ ввела фьючерсные контракты в 1865 г. На бирже Амстердама фьючерсными контрактами торговали еще в XVII в.

3. Кейнс (1883—1946) был одним из величайших экономистов XX века [805, 806, 807].

НЕПРЕРЫВНАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА И ХЕДЖИРОВАНИЕ

13 Стохастические процессы и броуновское движение

14 Финансовая математика с непрерывным временем

15 Оценка стоимости производных инструментов в случае непрерыв- ного времени

16 Хеджирование

В первых трех главах (13—15) из четырех вводятся основные понятия финансовой математики с непрерывным временем. Так, глава 13 посвящена мартингальной оценке стоимости и броуновскому движению, а глава 14 смещает рассмотрение в сторону стохастического интегрирования и процесса Ито. Вместе же они на доступном уровне дают сравнительно полное представление о предмете. При этом время от времени мы возвращаемся к дискретным моделям и устанавливаем связи с ними в рассматриваемых вопросах. В главе 15 внимание фокусируется на дифференциальных уравнениях в частных производных, которым удовлетворяют производные ценные бумаги. В последней главе 16 речь идет о хеджировании с использованием производных инструментов.

13 Стохастические процессы и броуновское движение

Из всех интеллектуальных препятствий, с которыми человеческий разум столкнулся и которые преодолел в последние пятнадцать столетий, одно, которое кажется мне наиболее поразительным по сути и наиболее важным по последствиям, связано с решением проблемы движения.

Герберт Баттерфилд (1900—1979), *Происхождение современной науки*

В этой главе вводятся основные идеи стохастических процессов и броуновского движения. Само же броуновское движение в этой книге¹ лежит в основе всех моделей с непрерывным временем. Но мы будем часто возвращаться к рассмотренным ранее дискретной и биномиальной моделям, чтобы лучше охарактеризовать переход к непрерывному времени.

13.1 Случайные процессы

Случайный процесс $X = \{X(t)\}$ — это временной ряд из случайных величин. Другими словами, $X(t)$ — случайная величина (с.в.) при любом t и обычно эта с.в. называется **состоянием** процесса в момент t . Для простоты $X(t)$ часто записывается в виде X_t . **Реализация** процесса X называется **выборочной траекторией** случайного процесса. Заметим, что выборочная траектория представляет собой обычную функцию параметра t . Если моменты t образуют счетное множество, то X называется случайным процессом с дискретным временем или **временным рядом**. В этом случае вместо аргумента в скобках обычно используются целые индексы и запись $X = \{X_n\}$. Если же моменты времени образуют множество мощности континуум, то X называется случайным процессом с непрерывным временем.

О случайном процессе с непрерывным временем $\{X(t)\}$ говорят, что он имеет **независимые приращения**, если для любых $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины

$$X(t_1) - X(t_0), \quad X(t_2) - X(t_1), \quad \dots, \quad X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независимы. Говорят также, что процесс обладает **стационарными приращениями**, если при любом s величины $X(t+s) - X(t)$ одинаково распределены при всех t , т.е. если это распределение зависит лишь от s .

Ковариационная функция случайного процесса $X = \{X(t)\}$ определяется выражением

$$K_X(s, t) \equiv \text{Cov}(X(s), X(t)).$$

Заметим, что $K_X(s, t) = K_X(t, s)$. **Функция среднего** определяется равенством $m_X(t) \equiv EX(t)$. Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется **строго стационарным**, если для любых n моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и h , множества с.в. $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ и $\{X(t_1+h), X(t_2+h), \dots, X(t_n+h)\}$

имеют одну и ту же совместную функцию распределения. Согласно этому определению

$$m_X(t) = EX(t) = EX(t+h) = m_X(t+h)$$

при любом h ; другими словами, функция среднего постоянна. Более того,

$$K_X(s, s+t) = E((X(s) - m_X)(X(s+t) - m_X)) = E((X(0) - m_X)(X(t) - m_X)).$$

Иными словами, ковариационная функция $K_X(s, t)$ зависит лишь от **запаздывания** $|s-t|$. Процесс $\{X(t)\}$ называется **стационарным**, если $E[X(t)^2] < \infty$, функция среднего постоянна, а ковариационная функция зависит лишь от запаздывания, т.е. от модуля разности $|s-t|$.

Случайный процесс является **марковским процессом**, если все, что мы знаем о его будущем сейчас, сконцентрировано в его текущем значении. Говоря более формально, случайный процесс с непрерывным временем $X = \{X(t), t \geq 0\}$ является марковским, если при любых $s < t$

$$P\{X(t) \leq x | X(u), 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t) \leq x | X(s)\}.$$

Случайные блуждания различного типа служат фундаментом для построения дискретных вероятностных моделей процесса изменения цен активов [334]. Скажем, биномиальная модель для описания динамики цен акций есть случайное блуждание в чистом виде. В следующих примерах вводятся два важных класса случайных блужданий.

Пример 13.1.1. Рассмотрим движение частицы по целочисленной прямой $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. И пусть на каждом шагу эта частица может перейти на единичный шаг вправо с вероятностью p , либо на такой же шаг влево с вероятностью $1-p$ (см. рис. 13.1). Пусть $P_{i,j}$ означает вероятность того, что частица перейдет в точку j , если находится она в точке i . Тогда у нас $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$ при любом $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это случайное блуждание является **симметричным**, если $p = 1/2$. Связь с биномиальной моделью оценки стоимости опциона (БМОО) очевидна: положение X_n частицы в момент времени n представляет собой разницу между числом ее переходов вверх и, соответственно, вниз, если вначале она находилась в нуле ($X_0 = 0$). $\triangleleft$

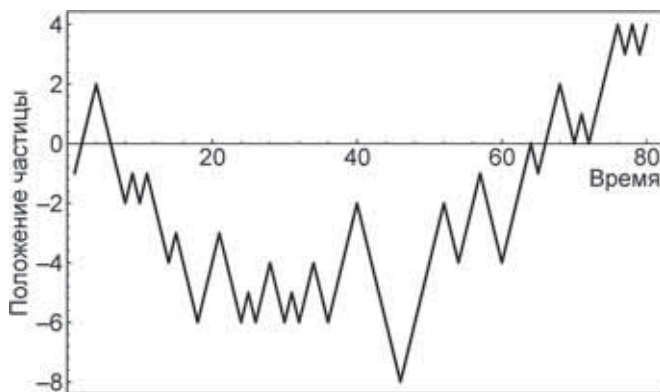


Рис. 13.1. Случайное блуждание. Частица на каждом шаге может перейти вверх или вниз.

Пример 13.1.2. Случайное блуждание со сносом — это процесс $X = \{X_n\}$ с дискретным временем, для которого

$$X_n = \mu + X_{n-1} + \xi_n, \quad (13.1)$$

где ξ_n независимы и одинаково распределены со средним нуль. Смещение μ представляет собой среднее значение «переходов» $X_n - X_{n-1}$. Это случайное блуждание является марковским процессом и может быть определено эквивалентным образом как $\{X_n \equiv \sum_{i=1}^n \eta_i, n \geq 1\}$, где с. в. $\eta_i = \xi_i + \mu$ независимы, одинаково распределены и имеют среднее $E\eta_i = \mu$. $\triangleleft$

Упражнение 13.1.1. Докажите, что

$$E(X(t) - X(0)) = t \times E(X(1) - X(0)), \quad DX(t) - DX(0) = t \times (DX(1) - DX(0)),$$

если $\{X(t), t \geq 0\}$ — процесс со стационарными и независимыми приращениями.

Упражнение 13.1.2. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — с. в., независимые в совокупности, а X_0 — произвольная с. в. Положим $X_n \equiv X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$ при $n > 0$. Покажите, что $\{X_n, n \geq 0\}$ является случайным процессом с независимыми приращениями.

Упражнение 13.1.3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность некоррелированных с. в. с нулевым средним и единичной дисперсией. Докажите, что процесс $\{X_n\}$ является стационарным.

Упражнение 13.1.4. 1) Уточните, каким частным случаем равенства (13.1) описывается случайное блуждание из примера 13.1.1.

2) Покажите, что дисперсия положения частицы в симметричном случайном блуждании после n шагов равна n .

Упражнение 13.1.5. Постройте два симметричных случайных блуждания с коэффициентом корреляции, равным ρ .

13.2 Мартингалы («справедливые игры»)

Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ называется **мартингалом**, если $E|X(t)| < \infty$ при всех $t \geq 0$ и

$$E(X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s) = X(s). \quad (13.2)$$

В дискретном случае для мартингала справедливы равенства

$$E(X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n. \quad (13.3)$$

Если величину X_n считать капиталом игрока после n -й игры, то равенство (13.3) означает, что ожидаемое значение капитала после $(n+1)$ -й игры равняется капиталу после n -й игры, независимо от того, что же было до нее. Следовательно, мартингал представляет собой один из вариантов понятия справедливой игры. Если взять математическое ожидание от обеих сторон равенства (13.3), то получим, что

$$EX_n = EX_1 \quad (13.4)$$

при всех n . Аналогично, в непрерывном случае $EX(t) = EX(0)$.

Пример 13.2.1. Возьмем случайный процесс $\{Z_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1\}$, где с.в. X_i независимы и имеют нулевое среднее. Этот процесс является мартингалом, поскольку

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n) &= E(Z_n + X_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = \\ &= E(Z_n | Z_1, Z_2, \dots, Z_n) + E(X_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = Z_n + E X_{n+1} = Z_n. \end{aligned}$$

Заметим, что процесс $\{Z_n\}$ обобщает случайное блуждание из примера 13.1.2. $\triangleleft$

Мартингал определяется по отношению к вероятностной мере, по которой берутся условные математические ожидания. А **вероятностная мера** приписывает вероятность каждому «состоянию мира». Но мартингал определяется и по отношению к информационному множеству [692]. В определяющих мартингал свойствах (13.2) и (13.3) это информационное множество неявно содержит текущие и прошлые значения процесса X . Однако, так поступать не обязательно. Вообще говоря, случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ можно называть мартингалом по отношению к информационным множествам $\{I_t\}$, если $E|X(t)| < \infty$ при любых $t \geq 0$ и

$$E(X(u) | I_t) = X(t)$$

при всех $u > t$. В дискретном случае процесс определяется равенствами

$$E(X_{n+1} | I_n) = X_n,$$

при всех $n > 0$ и данной последовательности информационных множеств $\{I_n\}^*$. Из этого определения и телескопического свойства (6.6) вытекает, что $E(X_{n+m} | I_n) = X_n$ при всех $m > 0$. Типичным примером множеств I_n при оценке стоимости активов является информация о ценах вплоть до момента n . В этом случае данное определение означает, что будущие значения X систематически не будут отличаться от значений на сегодня при данной ценовой истории; более того, значение на сегодня является лучшей оценкой для будущих значений (см. упр. 13.2.2).

Пример 13.2.2. Рассмотрим случайный процесс $\{Z_n - n\mu, n \geq 1\}$, где $Z_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i$, а $X_1, X_2, \dots$ — независимые с.в. со средним μ . Поскольку

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} - (n+1)\mu | X_1, X_2, \dots, X_n) &= E(Z_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) - (n+1)\mu = \\ &= Z_n + \mu - (n+1)\mu = Z_n - n\mu, \end{aligned}$$

то процесс $\{Z_n - n\mu, n \geq 1\}$ является мартингалом по отношению к последовательности $\{I_n\}$, где информационное множество $I_n \equiv \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. $\triangleleft$

Упражнение 13.2.1. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ — случайный процесс с независимыми приращениями. Покажите, что $\{X(t), t \geq 0\}$ является мартингалом, если $E(X(t) - X(s)) = 0$ при любых $s, t \geq 0$ и $P\{X(0) = 0\} = 1$.

* В общепринятом у нас подходе условное математическое ожидание с.в. X_{n+1} из равенства (13.3) определяют по отношению к некоторой неубывающей последовательности событий $(F_n)_{n \geq 1}$, причем чаще всего в роли F_n выступает семейство событий $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, порождаемых начальным отрезком заданной последовательности с.в. (X_n) . В этом последнем случае имеет место равенство $E(X_{n+1} | F_n) = E(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n)$ и, следовательно, можно считать, что в роли информационного множества выступает семейство событий $I_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. — Прим. перев.

Упражнение 13.2.2. Покажите, что если доход по активу является мартингалом, то наилучшим прогнозом дохода на завтра будет доход на сегодня, если оценивать его по методу наименьших квадратов (указание: см. упр. 6.4.3 (2)).

Упражнение 13.2.3. Пусть $Z_n \equiv \prod_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые с.в. с $EX_i = 1$. Докажите, что $\{Z_n\}$ мартингал.

Упражнение 13.2.4. Рассмотрим мартингал $\{Z_n, n \geq 1\}$ и пусть $X_i \equiv Z_i - Z_{i-1}$, а $Z_0 = 0$. Покажите, что $DZ_n = \sum_{i=1}^n DX_i$.

Упражнение 13.2.5. Пусть $\left\{S_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1\right\}$ — случайное блуждание, для которого X_i — независимые с.в. с $EX_i = 0$ и $DX_i = \sigma^2$. Покажите, что $\{S_n^2 - n\sigma^2, n \geq 1\}$ — мартингал.

Упражнение 13.2.6. Пусть $\{X_n\}$ — мартингал, а C_n означает ставку в n -й игре, причем C_n может зависеть от $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ и ограничена, а C_1 — постоянна. Интерпретируем величину $C_n(X_n - X_{n-1})$ как выигрыш в n -й игре. Тогда совокупным выигрышем за n игр будет величина $Y_n \equiv \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1})$, а $Y_0 = 0$. Докажите, что $\{Y_n\}$ мартингал по отношению к $\{I_n\}$, где $I_n \equiv \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

13.2.1 Мартингальная оценка стоимости и риск-нейтральная оценка

Из леммы 9.2.1 мы узнали, что цена Европейского опциона в риск-нейтральной экономике определяется как ожидаемое и дисконтированное значение его выплаты по истечении срока его действия. Этот важный принцип можно обобщить, используя понятие мартингала. Вспомним рекуррентную оценку стоимости Европейского опциона с помощью равенства $C = [pC_u + (1-p)C_d]/R$, в котором p является риск-нейтральной вероятностью и \$1 вырастает до \$R за период. Рассмотрим **дисконтированный процесс** $\{C(i)/R^i, i = 0, 1, \dots, n\}$, в котором $C(i)$ означает стоимость опциона в момент i . Тогда

$$E\left(\frac{C(i+1)}{R^{i+1}} \mid C(i) = C\right) = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R^{i+1}} = \frac{C}{R^i}.$$

Этот факт можно легко обобщить:

$$E\left(\frac{C(k)}{R^k} \mid C(i) = C\right) = \frac{C}{R^i}, \quad i \leq k. \quad (13.5)$$

Значит, дисконтированный процесс является мартингалом, поскольку

$$\frac{C(i)}{R^i} = E_i^\pi\left(\frac{C(k)}{R^k}\right), \quad i \leq k, \quad (13.6)$$

где символ E_i^π означает условное математическое ожидание по риск-нейтральной вероятности и при условии, что ценовая информация известна вплоть до момента i ². Эта риск-нейтральная вероятность называется

также эквивалентной мартингалной вероятностной мерой [514]. Две вероятностные меры называются эквивалентными, если они предписывают ненулевые вероятности одному и тому же множеству состояний.

В общих моделях с дискретным временем соотношение (6) выполняется для любых активов, а не только для опционов. Скажем, если процентные ставки случайны, то это соотношение можно записать в виде

$$\frac{C(i)}{M(i)} = E_i^\pi \left(\frac{C(k)}{M(k)} \right), \quad i \leq k, \quad (13.7)$$

в котором $M(j)$ означает величину остатка вклада в момент j при использовании стратегии «перекапывания» и начальном вкладе в \$1. По этой причине последовательность таких с.в. называется **процессом на банковском счету**. Ведь $M(j)$ являются с.в., если ставки случайны. Однако, заметим, что $M(0) = 1$, а $M(j)$ известны в момент $j - 1$. Тождество (13.7) можно рассматривать как общее выражение для риск-нейтральной оценки, которое означает, что дисконтированный процесс является мартингалом по отношению к π . Таким образом, мы имеем следующую фундаментальную теорему по оценке стоимости актива.

Теорема 13.2.3. *Дискретная модель свободна от арбитража тогда и только тогда, когда существует такая вероятностная мера, при которой дисконтированный процесс является мартингалом. Эта вероятностная мера называется риск-нейтральной.*

Упражнение 13.2.7. Проверьте справедливость равенства (13.5).

Упражнение 13.2.8. Предположим, что стоимость одной денежной единицы местной (иностранной) валюты к концу периода становится равной R (соответственно, R_f), а u и d представляют величину скачка обменного курса «местная/иностранная» вверх или вниз, соответственно. Воспользуйтесь тождеством (13.7) для вывода риск-нейтральной вероятности $\frac{(R/R_f) - d}{u - d}$ для фьючерсных опционов в условиях БМО из упр. 11.5.4 (1).

Упражнение 13.2.9. Покажите, что последовательность дисконтированных цен $S(i)/R^i$ образует мартингал по отношению к риск-нейтральной вероятности; и, в частности, что $S(0) = E^\pi(S(i)/R^i)$.

13.2.2 Стоимость фьючерсов в биномиальной модели

Цены фьючерсов образуют мартингал по отношению к риск-нейтральной вероятности, поскольку ожидаемая цена фьючерса в следующем периоде равна

$$p_f F u + (1 - p_f) F d = F \left(\frac{1 - d}{u - d} u + \frac{u - 1}{u - d} d \right) = F$$

(просмотрите еще раз п.12.4.3). И это равенство нетрудно обобщить, получив соотношения

$$F_i = E_i^\pi F_k, \quad i \leq k, \quad (13.8)$$

где F_i — цена фьючерса в момент i . Выполняются они и в предположении случайности процентных ставок (см. упр. 13.2.11).

Упражнение 13.2.10. Покажите, что $F = E^\pi S_n$, где S_n означает цену базовой бездивидендной акции на момент n поставки фьючерсного контракта (таким образом, фьючерсная цена в *риск-нейтральной экономике* является несмещенной оценкой ожидаемой спот-цены).

Упражнение 13.2.11. Покажите, что тождество (13.8) справедливо и в предположении случайности процентных ставок.

13.2.3 Мартингальная оценка стоимости и выбор условной платежной единицы

Формула мартингальной оценки стоимости (13.7) использует счет на денежном рынке в качестве условной платежной единицы, позволяющей выразить по отношению к ней³ стоимость любого актива. Но счет на денежном рынке — это не единственная возможность выбрать условную платежную единицу. Если в качестве такого платежного средства выбирается актив S , стоимость которого в любой момент времени положительна, то в соответствии с мартингальной оценкой стоимости существует такая риск-нейтральная вероятностная мера π , при которой относительная стоимость любого актива C является мартингалом:

$$\frac{C(i)}{S(i)} = E_i^\pi \left(\frac{C(k)}{S(k)} \right), \quad i \leq k, \quad (13.9)$$

где $S(j)$ обозначает стоимость S в момент j ; при этом дисконтированный процесс остается мартингалом.

Возьмем биномиальную модель с двумя активами в качестве примера. И пусть через период стоимость S одного актива может измениться на S_1 или S_2 , а стоимость P другого — на P_1 или P_2 . Предположим, что $S_1/P_1 < S/P < S_2/P_2$ для полноты рынка и исключения арбитражных возможностей. Пусть далее для любой производной ценной бумаги ее цена в момент один будет равна C_1 , если стоимость первого актива изменится на S_1 , и C_2 , если стоимость первого актива изменится на S_2 . Построим вспомогательный портфель, эквивалентный производной ценной бумаге, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha S_1 + \beta P_1 = C_1, \\ \alpha S_2 + \beta P_2 = C_2, \end{cases}$$

и считая, что этот портфель состоит из α единиц актива 1 и β единиц актива 2. В результате получим, что

$$\alpha = \frac{P_2 C_1 - P_1 C_2}{P_2 S_1 - P_1 S_2}, \quad \beta = \frac{S_2 C_1 - S_1 C_2}{S_2 P_1 - S_1 P_2},$$

а стоимость производной ценной бумаги (ЦБ) можно записать в виде

$$C = \alpha S + \beta P = \frac{P_2 S - P_1 S_2}{P_2 S_1 - P_1 S_2} C_1 + \frac{P S_1 - P_1 S}{P_2 S_1 - P_1 S_2} C_2.$$

Легко проверить, что

$$\frac{C}{P} = p \frac{C_1}{P_1} + (1-p) \frac{C_2}{P_2}, \quad \text{где} \quad p \equiv \frac{(S/P) - (S_2/P_2)}{(S_1/P_1) - (S_2/P_2)}. \quad (13.10)$$

Таким образом, цена производной ценной бумаги при выборе актива два в качестве условной платежной единицы является мартингалом по отношению к риск-нейтральной вероятности p . Интересно отметить, что ожидаемые доходности двух активов здесь ни при чем.

Пример 13.2.4 В случае БМОО из п. 9.2 такими двумя активами были счет на денежном рынке и акционерный капитал. Поскольку счет на денежном рынке выбран в качестве условной платежной единицы, то мы полагаем в уравнении (13.10), что $P = 1$, $P_1 = P_2 = R$, $S_1 = Su$, и $S_2 = Sd$. В результате получаем, что

$$p = \frac{S - (Sd/R)}{(Su/R) - (Sd/R)} = \frac{R - d}{u - d},$$

и тем самым приходим к знакомой риск-нейтральной вероятности. Однако риск-нейтральная вероятность изменится, если в качестве условной платежной единицы выбрать акционерный капитал (см. упр. 13.2.12). $\triangleleft$

Итак, риск-нейтральная вероятностная мера зависит от выбора условной платежной единицы, а ее замена меняет эту риск-нейтральную вероятностную меру. Использование же «правильной» платежной единицы может упростить проблему оценки стоимости, особенно для ЦБ, чувствительных к процентной ставке [25, 731, 783]. Всюду ниже в книге в качестве условной платежной единицы будет и дальше использоваться счет на денежном рынке, если только не будет оговариваться противное.

Упражнение 13.2.12. 1) Покажите, что рассматриваемая нами величина $\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R}\right) \frac{ud}{u-d}$ является такой вероятностью повышения цены акции, которая делает относительную цену облигации мартингалом в условиях биномиальной модели оценки стоимости опциона, в которой в качестве условной платежной единицы выбран *акционерный капитал*. Докажите это.

2) Дайте другую интерпретацию равенств (9.11).

Упражнение 13.2.13. Покажите, что при любом $k > 0$ существует риск-нейтральная вероятностная мера π , по отношению к которой цена любого актива C равняется дисконтированному математическому ожиданию его будущей цены в момент k , т.е. $C(i) = d(k-i) E_i^\pi(C(k))$, где $i \leq k$. Напомним, что $d(i)$ обозначает дисконтирующий множитель момента i . Эта мера π называется **вероятностной мерой, нейтральной к будущему**.

13.3 Броуновское движение

Броуновское движение — это случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ со следующими свойствами:

- 1) начальное значение $X(0) = 0$, если не оговаривается противное;
- 2) случайные величины $X(t_k) - X(t_{k-1})$ при любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и $1 \leq k \leq n$ независимы (поэтому с.в. $X(t) - X(s)$ независима от $X(r)$ при $r \leq s < t$);
- 3) случайные величины $X(t) - X(s)$ при $0 \leq s < t$ нормально распределена со средним $\mu(t-s)$ и дисперсией $\sigma^2(t-s)$, где μ и $\sigma \neq 0$ — некоторые действительные числа.

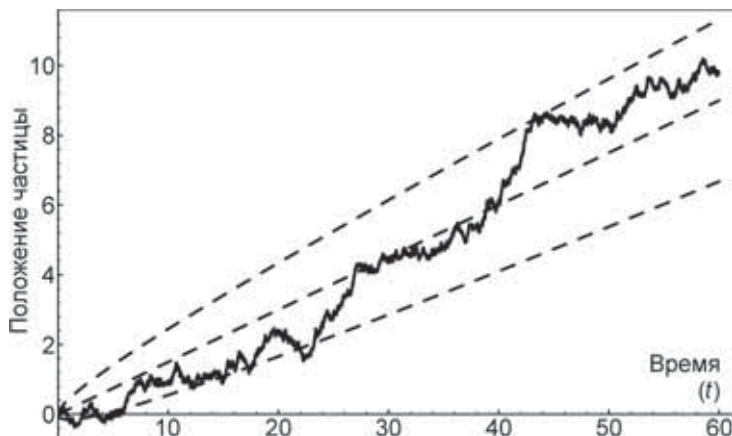


Рис. 13.2. Снос и дисперсия броуновского движения. Изображена выборочная траектория броуновского движения с параметрами $(0,15, 0,3)$. Случайный процесс обладает волатильностью, о чем свидетельствуют горбы траектории. Коридор определяется стандартным отклонением, т.е. величиной $0,3\sqrt{t}$, относительно функции среднего, которая является детерминированным процессом.

Этот процесс называется (μ, σ) -броуновским движением со **сносом** μ и **дисперсией** σ^2 . На рис. 13.2 изображена реализация процесса броуновского движения. Существование и единственность такого процесса гарантируется **теоремой Винера** [73]. Хотя реализация броуновского движения и является непрерывной функцией параметра t с вероятностью единица, но она почти нигде не дифференцируема. **Нормированным броуновским движением** или **винеровским процессом** называется стандартное, или $(0, 1)$ -броуновское движение.

Можно показать, что любой случайный процесс с непрерывным временем, стационарными и независимыми нормальными приращениями, является процессом броуновского движения [419]. Этот факт объясняет значение броуновского движения в стохастическом моделировании. Броуновское движение отличается также свойством **статистического самopodobия** в том смысле, что процесс $X(rx)/\sqrt{r}$ остаётся винеровским процессом, если X является таковым. Это означает, что если мы будем строить выборочную траекторию в 100 раз быстрее и затем сожмем ее в 10 раз (по вертикали), то полученная таким образом траектория будет выглядеть подобно исходной. Это свойство естественно связывает броуновское движение с фракталами [240, 784]. Наконец, броуновское движение является марковским процессом.

Броуновское движение, названное по имени Роберта Брауна (1773—1858), было впервые упомянуто в математической работе Башелье, но строгое исследование его свойств впервые проведено Винером (1894—1964), который и предложил вышеупомянутое точное определение. Поэтому иногда его называют **обобщенным винеровским процессом** или **процессом Винера—Башелье** [343, 543].

Пример 13.3.1. Предположим, что совокупная стоимость компании, измеряемая в миллионах долларов, ведет себя как процесс $(20, 30)$ -броуновского движения (т.е. со сносом 20 и дисперсией 900 за год). Исходная стоимость равна 50. Тогда к концу 1 года совокупная стоимость будет иметь нормальное распределение со средним 70 и стандартным отклонением в 30. Если же взять другой момент, то к концу 6 месяцев эта стоимость будет иметь нормальное распределение со средним 60 и стандартным отклонением $\sqrt{450} \approx 21,21$. $\triangleleft$

По определению, если $\{X(t), t \geq 0\}$ винеровский процесс, то $X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$. С другой стороны, (μ, σ) -броуновское движение $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ с помощью винеровского процесса записывается следующим образом:

$$Y(t) = \mu t + \sigma X(t). \quad (13.11)$$

Поскольку $Y(t+s) - Y(t) \sim N(\mu s, \sigma^2 s)$, то неопределенность относительно будущего значения Y , если измерять ее стандартным отклонением, растет как корень квадратный от того, насколько далеко мы заглядываем в будущее.

Упражнение 13.3.1. Покажите, что процесс $\{(X(t) - \mu t)/\sigma, t \geq 0\}$ является винеровским, если $\{X(t), t \geq 0\}$ есть (μ, σ) -броуновское движение.

Упражнение 13.3.2. Убедитесь в том, что $K_X(t, s) = \sigma^2 \times \min(s, t)$, если $\{X(t), t \geq 0\}$ есть (μ, σ) -броуновское движение.

Упражнение 13.3.3. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ представляет винеровский процесс. Покажите, что связанный с ним процесс $\{X(t) - X(0), t \geq 0\}$ является мартингалом ($X(0)$ может быть с.в.).

Упражнение 13.3.4. Пусть $p(x, y, t)$ обозначает функцию плотности вероятности перехода (μ, σ) -броуновского движения, выходящего из точки x ; иными словами, $p(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp \frac{-(y-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}$. Покажите, что функция p

удовлетворяет **обратному уравнению Колмогорова** $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial p}{\partial x}$ и **прямому уравнению Колмогорова** (называемому также **уравнением Фоккера—Планка**) $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial p}{\partial y}$.

Упражнение 13.3.5. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ есть $(0, \sigma)$ -броуновское движение. Докажите, что следующие три процесса являются мартингалами: 1) $X(t)$, 2) $X(t)^2 - \sigma^2 t$ и 3) $\exp[\alpha X(t) - \alpha^2 \sigma^2 t/2]$ при $\alpha \in \mathbb{R}$; последний процесс называется **мартингалом Вальда**.

13.3.1 Броуновское движение как предел случайного блуждания

Процесс (μ, σ) -броуновского движения можно представить как предел случайного блуждания. Предположим, что за время Δt частица сдвигается на Δx либо вправо с вероятностью p , либо влево с вероятностью $1 - p$. И для простоты будем считать $n \equiv t/\Delta t$ целым числом. Тогда, если в момент ноль частица находилась в нуле, то положение частицы

в момент t можно записать в виде

$$Y(t) \equiv \Delta x(X_1 + X_2 + \dots + X_n),$$

где с. в.

$$X_i \equiv \begin{cases} +1, & \text{если } i\text{-й сдвиг делается вправо,} \\ -1, & \text{если } i\text{-й сдвиг делается влево,} \end{cases}$$

независимы и $P\{X_i = 1\} = p = 1 - P\{X_i = -1\}$. Заметим, что $EX_i = 2p - 1$ и $DX_i = 1 - (2p - 1)^2$. Следовательно,

$$EY(t) = n(\Delta x)(2p - 1) \quad \text{и} \quad DY(t) = n(\Delta x)^2[1 - (2p - 1)^2].$$

Полагая $\Delta x \equiv \sigma\sqrt{\Delta t}$ и $p \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$, заключаем, что

$$EY(t) = n\sigma\sqrt{\Delta t} \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} = \mu t, \quad DY(t) = n\sigma^2 \Delta t \left(1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)^2\right) \rightarrow \sigma^2 t$$

при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, процесс $\{Y(t), t \geq 0\}$ сходится к (μ, σ) -броуновскому движению по центральной предельной теореме. В частности, броуновское движение с нулевым сносом является предельным случаем симметричного случайного блуждания (т. е. когда $p = 1/2$). Заметим также, что

$$D(Y(t + \Delta t) - Y(t)) = D(\Delta x X_{n+1}) = (\Delta x)^2 \times DX_{n+1} \sim \sigma^2 \Delta t.$$

Сходство с биномиальной моделью оценки стоимости опциона (БМОО) поразительно: вышеуказанная вероятность p совпадает с вероятностью из (9.15), а $\Delta x = \ln u$. И это не просто совпадение (см. п. 14.4.3).

Упражнение 13.3.6. Пусть dQ представляет вероятность, с которой случайное блуждание, сходящееся к $(\mu, 1)$ -броуновскому движению, совершает n конкретных сдвигов $X_1, X_2, \dots, X_n$. И пусть dP обозначает вероятность, с которой симметричное случайное блуждание, сходящееся к винеровскому процессу, имеет те же сдвиги. Найдите отношение dQ/dP (процесс dQ/dP в действительности сходится к мартингалу Вальда $\exp[\mu W(t) - \mu^2 t/2]$, где $W(t)$ — винеровский процесс).

13.3.2 Геометрическое броуновское движение

Если $X \equiv \{X(t), t \geq 0\}$ является процессом броуновского движения, то процесс $\{Y(t) \equiv e^{X(t)}, t \geq 0\}$ называется **геометрическим броуновским движением**. Еще этот же процесс называют **экспоненциальным броуновским движением** или **логнормальной диффузией**. Поведение этого процесса проиллюстрировано на рис. 13.3. Если X — это (μ, σ) -броуновское движение, то $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, а его производящая функция моментов

$$Ee^{sX(t)} = EY(t)^s = e^{\mu ts + (\sigma^2 ts^2/2)}$$

в силу (6.8). Таким образом,

$$EY(t) = e^{\mu t + (\sigma^2 t/2)}, \quad (13.12)$$

$$DY(t) = EY(t)^2 - (EY(t))^2 = e^{2\mu t + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (13.12')$$

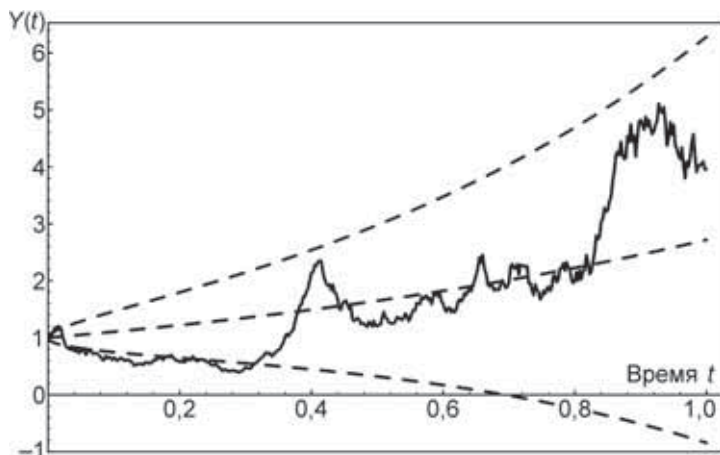


Рис. 13.3. Изображена выборочная траектория геометрического броуновского движения, т.е. процесса $Y(t) = e^{X(t)}$, где $X(t)$ — броуновское движение с параметрами $(0,5, 1)$. Коридор определяется стандартным отклонением, т.е. величиной $\sqrt{(e^t - 1)e^{2t}}$, относительно среднего. Укажите на качественное отличие этого графика от четырех процессов изменения цен акций из рис. 6.4.

Геометрическое броуновское движение хорошо моделирует ситуации, в которых относительные изменения (процесса) в процентах независимы и одинаково распределены. Чтобы в этом убедиться, обозначим цену акции в момент n через Y_n и пусть $Y_0 = 1$. Предположим далее, что относительные доходы $X_i \equiv Y_i/Y_{i-1}$ независимы и одинаково распределены. Тогда $\ln Y_n = \sum_{i=1}^n \ln X_i$ является суммой независимых, одинаково распределенных с.в., а потому процесс $\{\ln Y_n, n \geq 0\}$ можно приближенно считать броуновским движением. И, следовательно, процесс $\{Y_n, n \geq 0\}$ оказывается приближенно геометрическим броуновским движением.

Упражнение 13.3.7. Пусть $Y(t) \equiv e^{X(t)}$, где процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ является (μ, σ) -броуновским движением. Покажите, что

$$E(Y(t) | Y(s)) = Y(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)}$$

при $s < t$.

Упражнение 13.3.8. Предположим, что цены акций описываются процессом геометрического броуновского движения $S(t) \equiv e^{X(t)}$, где $\{X(t), t \geq 0\}$ является (μ, σ) -броуновским движением.

1) Покажите, что цена акции в среднем растет со скоростью $\mu + \sigma^2/2$ (а не μ !), если под этой скоростью мы понимаем величину $R_1 \equiv (t_2 - t_1)^{-1} \ln E(S(t_2)/S(t_1))$ для периода времени $[t_1, t_2]$.

2) Покажите, что альтернативная мера доходности, т.е. величина $R_2 \equiv (t_2 - t_1)^{-1} E(\ln(S(t_2)/S(t_1)))$, приводит к скорости μ .

3) Объясните, почему $R_2 < R_1$ независимо от каких бы то ни было предположений о процессе $\{X(t)\}$.

13.3.3 Стационарность

Винеровский процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ не является стационарным (см. упр. 13.3.2). Однако его можно преобразовать в стационарный процесс

$$Y(t) \equiv e^{-t}X(e^{2t}). \quad (13.13)$$

Проверить это утверждение можно следующим образом. Поскольку с. в. $Y(t) \sim N(0, 1)$, то функция среднего равна нулю, т. е. постоянна. Далее

$$EY(t)^2 = E(e^{-2t}X(e^{2t})^2) = e^{-2t}e^{2t} = 1 < \infty.$$

Наконец, ковариационная функция $K_Y(s, t)$ при $s < t$ равна

$$E(e^{-t}X(e^{2t})e^{-s}X(e^{2s})) = e^{-s-t}E(X(e^{2t})X(e^{2s})) = e^{-s-t}e^{2s} = e^{s-t},$$

причем предпоследнее равенство здесь вытекает из упр. 13.3.2. Следовательно, процесс $\{Y(t), t \geq 0\}$ стационарный. Называется этот процесс Y **процессом Орнштейна—Уленбека** [230, 261, 541].

13.3.4 Вариации

Многие формулы из стандартного анализа не переносятся на броуновское движение. Возьмем **квадратичную вариацию** произвольной функции $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую равенством⁴

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \left[f\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right) - f\left(\frac{kt}{2^n}\right) \right]^2.$$

Нетрудно видеть, что эта квадратичная вариация стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если f дифференцируема. Но этот вывод перестает быть верным, если f — броуновское движение. В самом деле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[X\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right) - X\left(\frac{kt}{2^n}\right) \right]^2 = \sigma^2 t \quad (13.14)$$

с вероятностью единица, если $\{X(t), t \geq 0\}$ есть (μ, σ) -броуновское движение [543]. Неформально это утверждение означает, что $\int_0^t [dX(s)]^2 = \sigma^2 t$ и часто записывается в виде

$$(dX)^2 = \sigma^2 dt. \quad (13.15)$$

Более того, можно показать, что

$$(dX)^n = 0 \quad \text{при } n > 2 \quad (13.16)$$

и $dX dt = 0$.

Из соотношения (13.14) вытекает, что **полная вариация** броуновской траектории бесконечна с вероятностью единица:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| X\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right) - X\left(\frac{kt}{2^n}\right) \right| = \infty. \quad (13.17)$$

Таким образом, броуновское движение непрерывно, но поведение его выборочных траекторий крайне беспорядочно.

Упражнение 13.3.9. Чтобы прочувствовать правдоподобность соотношения (13.14), возьмем математическое ожидание от его левой части, и опустим символ предела $\lim_{n \rightarrow \infty}$, т. е. запишем ее в виде

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E} \left[X \left(\frac{(k+1)t}{2^n} \right) - X \left(\frac{kt}{2^n} \right) \right]^2.$$

Покажите, что последнее выражение равно $\mu^2 t^2 2^{-n} + \sigma^2 t$ и, следовательно, приближается к $\sigma^2 t$ при $n \rightarrow \infty$.

Упражнение 13.3.10. Установить равенство (13.17) можно и не используя соотношение (13.14). Пусть

$$f_n(X) \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| X \left(\frac{(k+1)t}{2^n} \right) - X \left(\frac{kt}{2^n} \right) \right|.$$

1) Покажите, что у с. в. $|X((k+1)t/2^n) - X(kt/2^n)|$ среднее равно $2^{-n/2} \sqrt{2/\pi}$, а дисперсия — $2^{-n}(1 - 2/\pi)$ (таким образом, у $f_n(X)$ среднее равно $2^{n/2} \sqrt{2/\pi}$, а дисперсия — $1 - 2/\pi$).

2) Покажите, что $f_n(X) \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 (указание: по **неравенству Чебышева** $P\{|X - EX| \geq k\} \leq DX/k^2$).

13.4 Броуновский мост

Случайный процесс $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$, который называется **броуновский мост**, является броуновским движением, **опущенным вниз** (в правой точке отрезка $[0, 1]$) [544]. Определяется он как винеровский процесс, удовлетворяющий условию $B(0) = B(1) = 0$. Но его можно определить и по формуле $\{W(t) - tW(1), 0 \leq t < 1\}$, через винеровский процесс $\{W(t), 0 \leq t\}$. Для более общего периода времени $[0, T]$ процесс броуновский мост можно записать в виде

$$B(t) \equiv W(t) - \frac{t}{T} W(T), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $W(0) = 0$, а значение $W(T)$ известно в момент 0 [193]. Отметим, что значение $B(t)$ равно нулю в концевых точках отрезка, т. е. моментах 0 и T .

Упражнение 13.4.1. Докажите следующие тождества:

$$1) \mathbb{E} B(T) = 0, \quad 2) \mathbb{E} B(t)^2 = t - \frac{t^2}{T}, \quad 3) \mathbb{E}(B(s) B(t)) = \min(s, t) - \frac{st}{T}.$$

Упражнение 13.4.2. Запишите процесс броуновский мост с помощью переменных $B(0) = x$ и $B(T) = y$.

Дополнительная литература

Идея мартингала принадлежит Леви (1886—1974), но строгое и серьезное исследование этого класса процессов провел Дуб [205, 280, 541, 877]. Достаточно полная теория случайных блужданий изложена в [817]. Об истории броуновского движения с точки зрения физика

можно почитать в [631], а познакомиться с личным вкладом Башелье в эту проблематику можно по [277]. В [104] собраны результаты и формулы, связанные с броуновским движением. О последних достижениях можно почитать в [210, 230, 364, 543]. Прямое (называемое также уравнением Фоккера—Планка) и обратное уравнения Колмогорова, упомянутые в упр. 13.3.4, описывают широкий класс случайных процессов с непрерывными выборочными траекториями [373]. Эвристическую аргументацию из п. 13.3.1, в которой броуновское движение представлено как предел сходящихся к нему случайных блужданий, можно превратить в строгую с помощью **теоремы Донскера** [73, 289, 541, 573]. Модель геометрического броуновского движения для цен акций была предложена Осборном [709]. Обзор моделей доходности акций приведен в [561].

Примечания

1. Первым, кто предложил для оценки стоимости альтернативный **скачкообразный процесс**, был Мертон [80].

2. Для стандартных Европейских опционов достаточно иметь ценовую информацию, относящуюся *точно* к моменту времени i , поскольку цены независимы от траектории.

3. Вальрас (1834—1910), представленный Шумпетером в его монументальной *Истории экономических исследований* [786] как величайший экономист, в своем анализе условий рыночного равновесия ввел в рассмотрение понятие условной платежной единицы (*numeraire*), признавая, что иметь значение могут лишь *относительные* цены [31].

4. Деление отрезка $[0, t]$ на части выбрано **двоичным**, т. е. точками $\frac{kt}{2^n}$ для $0 < k < 2^n$, лишь по техническим причинам.

14 Финансовая математика с непрерывным временем

Стремление заниматься математикой является прекрасным сумасшествием человеческого духа.

Альфред Норс Уайтхэд (1861—1947),

Наука и современный мир

В этой главе рассматривается математический аппарат, лежащий в основе моделей с непрерывным временем. Впервые такой подход к исследованию финансовых проблем был предложен Мертоном [290]. Кажущийся труднопреодолимым, как и вся математика, тем не менее он может быть изложен на доступном уровне за счет некоторой потери в строгости и общности. Сама же теория будет применена к решению нескольких фундаментальных проблем в финансах.

14.1 Стохастические интегралы

Начиная с настоящего момента символ $W \equiv \{W(t), t \geq 0\}$ будем использовать для обозначения винеровского процесса. Целью же этого пункта будет построение стохастических интегралов от X из некоторого класса случайных процессов по винеровскому процессу:

$$I_t(X) \equiv \int_0^t X dW, \quad t \geq 0.$$

В п. 13.3.4 мы узнали, что классический анализ к броуновскому движению применять нельзя. Одна из причин состоит в том, что его реализация, рассматриваемая как обычная функция, имеет бесконечную полную вариацию. Случайная величина $I_t(X)$ называется **стохастическим интегралом** от X по W . Случайный же процесс $\{I_t(X), t \geq 0\}$ будем обозначать здесь через $\int X dW$. Обычными требованиями к процессу X в финансовых приложениях являются условия:

1) $P\left\{\int_0^t X^2(s) ds < \infty\right\} = 1$ при всех $t \geq 0$, или еще более сильное условие

$\int_0^t E X^2(s) ds < \infty$, а также

2) информационное множество момента t включает в себя всю предысторию процессов X и W вплоть до момента t , но не содержит сведений о поведении процессов X или W после t (т.е. оно является **неупреждающим**, если так можно сказать). Тем самым будущее не может оказывать влияние на настоящее, а процессы $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ и $\{W(t+u) - W(t), u > 0\}$ являются независимыми.

Теорию стохастического интегрирования представляет здесь **стохастический интеграл Ито**. Как и в обычном анализе, его построение

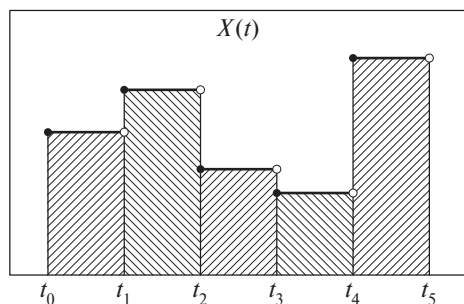


Рис. 14.1. Простой случайный процесс.

начинается со ступенчатых функций. Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется **простым**, если существуют такие $0 = t_0 < t_1 < \dots$, что для любой его реализации

$$X(t) = X(t_{k-1}) \text{ при } t \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

(рис. 14.1). Интеграл Ито для простого процесса определяется формулой

$$I_t(X) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)], \quad (14.1)$$

в которой $t_n = t$. Отметим, что значения суммируемой здесь функции X берутся в точках t_k , а не t_{k+1} .

Следующим естественным шагом будет определение интеграла Ито для более общих случайных процессов, как случайной величины, которая является предельной для последовательности интегралов Ито от простых случайных процессов. В самом деле, для произвольного случайного процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ существует с.в. $I_t(X)$, почти наверное единственная и такая, что $I_t(X_n)$ сходится по вероятности к $I_t(X)$ для любой такой последовательности простых случайных процессов $X_1, X_2, \dots$, которая, в свою очередь, сходится по вероятности к X . В частности, если X непрерывен с вероятностью единица, то $I_t(X_n)$ сходится по вероятности к $I_t(X)$, когда $\delta_n \equiv \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ стремится к нулю. Запишем это в виде

$$\int_0^t X dW = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]. \quad (14.2)$$

Известно, что в этом случае процесс $\int X dW$ непрерывен почти наверное [419, 566]. В следующей теореме говорится о том, что интеграл Ито является мартингалом (о его дискретном аналоге идет речь в упр. 13.2.6), а вытекает из нее известная формула для среднего: $E\left(\int_a^b X dW\right) = 0$.

Теорема 14.1.1. *Интеграл Ито $\int X dW$ является мартингалом.*

Посмотрим на соотношение (14.2) более внимательно. Тогда нам станет ясно, что при построении приближения для стохастического интеграла $\int_0^t X dW$ вместо процесса X можно использовать следующий простой

процесс $\{\hat{X}(t)\}$:

$$\hat{X}(s) \equiv X(t_{k-1}), \quad s \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ключевым отличием будет свойство неупреждаемости процесса $\hat{X}$; иными словами, информация вплоть до момента времени s ,

$$\{\hat{X}(t), W(t), 0 \leq t \leq s\},$$

уже не будет определять будущее поведение процессов X и W . А если бы мы определили стохастический интеграл с помощью суммы $\sum_{k=0}^{n-1} X(t_{k+1})[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$, то использовали бы для приближения другой простой случайный процесс

$$\hat{Y}(s) \equiv X(t_k), \quad s \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

который, очевидно, предугадывает будущее поведение X (и это хорошо видно из рис. 14.2).

Например, процесс $\int W dW$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W(t_{k+1})^2 - W(t_k)^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2}{2} = \\ &= \frac{W(t)^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2}{2}. \end{aligned}$$

И, поскольку последняя сумма сходится к $t/2$ в силу соотношения (13.14), то

$$\int_0^t W dW = \frac{W(t)^2}{2} - \frac{t}{2}. \quad (14.3)$$

Но при использовании обычного анализа получается, что $\int_0^t W dW = W(t)^2/2$. Поэтому дополнительное слагаемое $t/2$ может озадачить. Хотя,

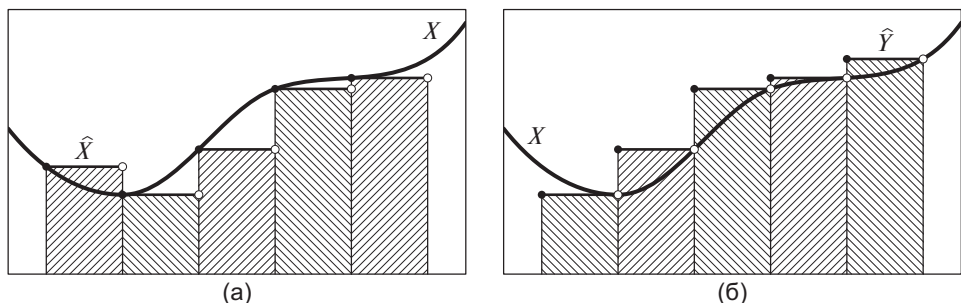


Рис. 14.2. Стохастическое интегрирование. Простой процесс $\hat{X}$ в (а) не предугадывает значения процесса X , а простой процесс $\hat{Y}$ в (б) делает это.

конечно, это можно связать и с бесконечностью полной вариации траектории броуновского движения. Другая возможность убедиться в ошибочности равенства $\int_0^t W \, dW = W(t)^2/2$ вытекает из теоремы 14.1.1: процесс $W(t)^2/2$ в отличие от процесса $[W(t)^2 - t]/2$ не является мартингалом (см. упр. 14.1.3 и упр. 13.3.5).

Упражнение 14.1.1. Докажите теорему 14.1.1 для простых случайных процессов.

Упражнение 14.1.2. Проверьте, что если в качестве приближения к процессу W использовать следующий простой процесс,

$$Y(s) \equiv W(t_k), \quad s \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то придем к выражению $\int_0^t W \, dW = (W(t)^2 + t)/2$.

Замечание 14.1.1. Тот факт, что представления для одного интеграла в (14.3) и в упр. 14.1.2 получились разными, говорит о важности выбора промежуточных точек при составлении интегральных сумм (в нашем случае значение интегрируемого процесса фиксировалось либо в правом конце интервала, либо в левом). Простой случайный процесс в упр. 14.1.2 предугадывает будущее поведение процесса W . В общем же случае, использование следующего простого случайного процесса

$$Z(s) \equiv W((1-a)t_{k-1} + at_k), \quad s \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

приведет к выражению $\int_0^t W \, dW = W(t)^2/2 + (a - 1/2)t$. Ясно, что интеграл Ито соответствует выбору $a=0$, а обычный анализ отвечает значению $a=1/2$, и в этом случае возникает **стохастический интеграл Стратоновича**. $\triangleleft$

Упражнение 14.1.3. Проверьте, что процесс $W(t)^2/2$ мартингалом не является.

Упражнение 14.1.4. Докажите, что $E \int_0^t W \, dW = 0$.

Упражнение 14.1.5. Докажите, что в случае постоянных процессов стохастическое интегрирование сводится к обычному интегралу Римана—Стилтьеса.

14.2 Процессы Ито

Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$, который удовлетворяет уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s) \, ds + \int_0^t b(X_s, s) \, dW_s,$$

называется **процессом Ито**. Здесь X_0 — начальная точка процесса, постоянная, а функции $\{a(X_t, t): t \geq 0\}$ и $\{b(X_t, t): t \geq 0\}$ представляют собой случайные процессы, удовлетворяющие определенным условиям регулярности. Подынтегральные функции $a(X_t, t)$ и $b(X_t, t)$ представляют **снос**

и диффузию, соответственно. Более простая запись (процесса Ито), которая была предложена Ланжевром в 1904 г., представляет собой следующее **стохастическое дифференциальное уравнение** для дифференциала Ито dX_t ,

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t, \quad (14.4)$$

или просто $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ [30, 386]. Этот процесс является броуновским движением с мгновенным сносом a_t и мгновенной дисперсией b_t^2 . В частности, по теореме 14.1.1 при нулевом сносе a_t процесс X является мартингалом. Напомним, что с.в. dW нормально распределена со средним ноль и дисперсией dt . Другая, эквивалентная форма записи уравнения (14.4) — это так называемое **уравнение Ланжевена***:

$$dX_t = a_t dt + b_t \sqrt{dt} \xi, \quad (14.5)$$

в котором $\xi \sim N(0, 1)$. Эта форма записи упрощает получение алгоритмов, используемых для моделирования по методу Монте-Карло. Причем, хотя $dt \ll \sqrt{dt}$, но детерминированное слагаемое с a_t все-таки сохраняет свою значимость, поскольку благодаря с.в. ξ колебания слагаемого с b_t на последующих интервалах взаимно погашают друг друга.

Существуют условия регулярности, которые гарантируют существование и единственность решения стохастических дифференциальных уравнений [30, 373, 566]. Решение стохастического дифференциального уравнения называется также **диффузионным процессом**.

14.2.1 Дискретные приближения

Следующее конечно-разностное приближение естественно вытекает из уравнения (14.4):

$$\hat{X}(t_{n+1}) = \hat{X}(t_n) + a(\hat{X}(t_n), t_n)\Delta t + b(\hat{X}(t_n), t_n)\Delta W(t_n); \quad (14.6)$$

здесь $t_n \equiv n\Delta t$. Такой подход к выбору приближения называется **методом Эйлера** или **методом Эйлера—Маруямы** [556]. И при слабых условиях процесс $\hat{X}(t_n)$ действительно сходится к процессу $X(t_n)$ [572]. Отметим, что $\Delta W(t_n)$ следует интерпретировать как разность $W(t_{n+1}) - W(t_n)$, а не $W(t_n) - W(t_{n-1})$, поскольку требуется, чтобы a и b были не упреждающими. При сносе a и диффузии b , определенных в точке t_n , ожидаемое значение процесса $\hat{X}$ в точке t_{n+1} равно $\hat{X}(t_n) + a(\hat{X}(t_n), t_n)\Delta t$. Однако новая информация $\Delta W(t_n)$, которая является непредсказуемой при наличии информации, имеющейся в момент t_n , смещает процесс $\hat{X}$ с его ожидаемого положения на величину слагаемого $b(\hat{X}(t_n), t_n)\Delta W(t_n)$. Такая же операция повторяется и с положением $\hat{X}(t_{n+1})$. Это соображение проиллюстрировано на рис. 14.3.

В более совершенной **схеме Мильштейна** к правой части представления Эйлера для улучшения качества приближения добавляется слагаемое

* В неформальном равенстве (14.5) не меняя сути дела символ ξ лучше считать зависящим от t , а сами величины $\xi_t \sim N(0, 1)$ независимыми в совокупности, т.е. трактовать их как стандартный гауссовский процесс белого шума. — Прим. ред.

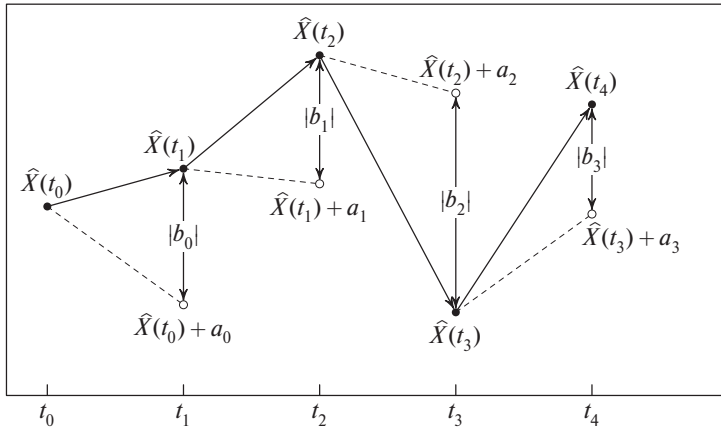


Рис. 14.3. Динамика процесса Ито. Заполненные кружочки «прокладывают» процессу дорогу, а пустые кружочки отмечают ожидаемые положения. Ожидаемые изменения обозначены на графике через $a_i = a(\hat{X}(t_i), t_i)\Delta t$, а случайные отклонения через $b_i = b(\hat{X}(t_i), t_i)\Delta W(t_i)$. Отметим, что $\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a_i + b_i$.

$bb'[(\Delta W)^2 - \Delta t]/2$ [668, 669]. Для геометрического броуновского движения, например, в схеме Эйлера используется выражение

$$\hat{X}(t_{n+1}) = \hat{X}(t_n) + \mu \hat{X}(t_n)\Delta t + \sigma \hat{X}(t_n)\Delta W(t_n),$$

в то время как в схеме Мильштейна к правой части этого равенства добавляется слагаемое $\sigma^2 \hat{X}(t_n)\{[\Delta W(t_n)]^2 - \Delta t\}/2$.

При весьма слабых условиях регулярности приближение (14.6) можно заменить на равенство

$$\hat{X}(t_{n+1}) = \hat{X}(t_n) + a(\hat{X}(t_n), t_n)\Delta t + b(\hat{X}(t_n), t_n)\sqrt{\Delta t} Y(t_n),$$

в котором с.в. $Y(t_0), Y(t_1), \dots$ независимы и одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Этот общий результат вытекает из теоремы Донскера [17]. В более простой дискретной схеме вместо величин $Y(t_k)$ используются бернуллиевские с.в. ξ :

$$\hat{X}(t_{n+1}) = \hat{X}(t_n) + a[\hat{X}(t_n), t_n]\Delta t + b[\hat{X}(t_n), t_n]\sqrt{\Delta t}\xi; \quad (14.7)$$

здесь $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = 1/2$. Заметим, что $E\xi = 0$ и $D\xi = 1$. Очевидно, в этом случае используется биномиальная модель. И если Δt сходится к нулю, то $\hat{X}$ сходится к X [294, 434].

14.2.2 Торговля и интеграл Ито

Рассмотрим процесс Ито $dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, в котором S_t представляет собой вектор цен комплекта ценных бумаг в момент t . Пусть φ_t обозначает стратегию управления ценными бумагами, т.е. определяет количество ценных бумаг каждого типа, которые следует иметь в этот момент t . Тогда ясно, что случайный процесс $\varphi_t S_t$ означает стоимость

портфеля φ_t в момент времени t . А величина $\varphi_t dS_t \equiv \varphi_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$ представляет собой изменение его стоимости при том изменении цен ценных бумаг, которое произошло в точке t . Ну а соответствующий интеграл Ито

$$G_T(\varphi) \equiv \int_0^T \varphi_t dS_t = \int_0^T \varphi_t \mu_t dt + \int_0^T \varphi_t \sigma_t dW_t,$$

характеризует прибыль, реализованную на промежутке времени $[0, T]$ при использовании вышеуказанной стратегии управления. Стратегия называется самофинансируемой, если

$$\varphi_t S_t = \varphi_0 S_0 + G_t(\varphi) \quad (14.8)$$

при всех $0 \leq t < T$. Другими словами, капиталовложение в любой момент времени складывается из начального капиталовложения и совокупной прибыли к этому моменту времени.

Модели с дискретным временем могут прояснить введенные выше понятия. Пусть точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ обозначают моменты совершения торговых сделок. И, как и прежде, S_k обозначает вектор цен момента t_k , а вектор φ_k характеризует количество единиц соответствующих ценных бумаг, находящихся во владении инвестора в промежутке времени $[t_k, t_{k+1})$. Таким образом, величина $\varphi_k S_k$ представляет стоимость портфеля φ_k сразу после его составления в момент t_k , а величина $\varphi_k S_{k+1}$ обозначает стоимость того же портфеля φ_k , но в момент t_{k+1} и *прежде*, чем были предприняты шаги по составлению следующего портфеля φ_{k+1} . Требование неупреждаемости интеграла Ито означает, что значение φ_k должно быть зафиксировано до того, как станут известны цены S_{k+1} *). Величины же $\varphi_k \Delta S_k \equiv \varphi_k (S_{k+1} - S_k)$ представляют собой прибыль на промежутке времени от момента t_k и до момента t_{k+1} , а их сумма $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \Delta S_k$ является совокупной прибылью на всем интервале $[0, t_n)$. Обратите внимание на схожесть этого суммирования с интегралом Ито для простых процессов (14.1). Торговая стратегия (или стратегия управления) называется самофинансируемой, если капиталовложение в любой момент полностью финансируется за счет капитала, набранного в предыдущем периоде, т. е. если

$$\varphi_k S_k = \varphi_{k-1} S_k$$

при всех $0 < k \leq n$. Только что приведенное условие и условие (14.8) эквивалентны (см. упр. 14.2.1).

Если процесс Ито**) $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ является марковским, то будущее поведение процесса X зависит лишь от его текущего значения. Требование же неупреждаемости говорит о том, что значения a_t и b_t не

*) Точнее говоря, если новые цены S_{k+1} становятся известны в конце периода $[t_k, t_{k+1})$, то компоненты портфеля или стратегии φ_k обычно выбираются в его начале, причем когда уже известны цены S_k . — Прим. перев.

**) Эта краткая форма здесь и ниже часто используется вместо более полной: «Если процесс Ито, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением» и далее по тексту. — Прим. перев.

могут содержать в себе информацию о будущих значениях dW . Тем самым процесс Ито оказывается идеальным для моделирования динамики цен активов на эффективном рынке (в слабой форме).

Упражнение 14.2.1. Докажите, что из определения самофинансированности стратегии $\varphi_k S_k = \varphi_{k-1} S_k$ вытекает альтернативное условие $\varphi_k S_k = \varphi_0 S_0 + G_k$ при $0 < k \leq n$, и наоборот.

14.2.3 Лемма Ито

Основным рабочим инструментом в стохастических дифференциальных уравнениях является **лемма Ито**, которая по-существу говорит, что гладкая функция от процесса Ито сама является процессом Ито.

Теорема 14.2.1. *Предположим, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема¹, а $dX = a_t dt + b_t dW$. Тогда $f(X)$ является процессом Ито, удовлетворяющим уравнению*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) a_s ds + \int_0^t f'(X_s) b_s dW + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) b_s^2 ds$$

при $t \geq 0$.

Дифференциальная форма леммы Ито имеет следующий вид

$$df(X) = f'(X) a dt + f'(X) b dW + \frac{1}{2} f''(X) b^2 dt. \quad (14.9)$$

С точки зрения классического анализа интерес представляет последнее, третье слагаемое в правой части уравнения (14.9). Его появление можно связать с положительностью квадратичной вариации броуновской траектории, которая не позволяет пренебрегать величиной $(dW)^2$. В многомерном случае более удобной представляется следующая форма леммы Ито:

$$df(X) = f'(X) dX + \frac{1}{2} f''(X) (dX)^2. \quad (14.10)$$

В ней предполагается, что умножение в равенстве $(dX)^2 = (a dt + b dW)^2$ является символическим и происходит в соответствии со следующей таблицей умножения:

$\times$	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

Отметим, что равенство $(dW)^2 = dt$ из таблицы оправдано, скажем, выражением (13.15). А форму записи (14.10) легко запомнить благодаря аналогии с рядом Тейлора.

Теорема 14.2.2 (многомерная лемма Ито). Пусть $W_1, W_2, \dots, W_n$ — независимые винеровские процессы, а $X \equiv (X_1, X_2, \dots, X_m)$ — некоторый векторный процесс. Предположим, что функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерыв-

но дифференцируема, а X_i — процесс Ито с дифференциалом $dX_i = a_i dt + \sum_{j=1}^n b_{ij} dW_j$. Тогда $f(X)$ является процессом Ито с дифференциалом

$$df(X) = \sum_{i=1}^m f_i(X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m f_{ik}(X) dX_i dX_k,$$

где $f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $f_{ik} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$.

Правило умножения для теоремы 14.2.2 дает таблица

$\times$	dW_i	dt
dW_k	$\delta_{ik} dt$	0
dt	0	0

в которой

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При использовании многомерной леммы Ито обычно одну из переменных, скажем, X_1 , считают параметром времени t и потому $dX_1 = dt$. В этом случае $b_{1j} = 0$ при всех j и $a_1 = 1$. В альтернативной формулировке леммы Ито взаимная зависимость процессов $X_1, X_2, \dots, X_m$ преобразуется в зависимость между винеровскими процессами.

Теорема 14.2.3. Пусть $W_1, W_2, \dots, W_n$ винеровские процессы, а $X \equiv (X_1, X_2, \dots, X_m)$ — некоторый векторный процесс. Предположим, что функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, а X_i — процесс Ито с дифференциалом $dX_i = a_i dt + b_i dW_i$. Тогда $f(X)$ представляет собой процесс Ито

$$df(X) = \sum_{i=1}^m f_i(X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m f_{ik}(X) dX_i dX_k$$

со следующей таблицей умножения:

$\times$	dW_i	dt
dW_k	$\rho_{ik} dt$	0
dt	0	0

Здесь ρ_{ik} обозначает коэффициент корреляции между dW_i и dW_k .

В теореме 14.2.3 коэффициент корреляции между $dW_i = \sqrt{dt} \xi_i$ и $dW_k = \sqrt{dt} \xi_k$ выражается через коэффициент корреляции между нормально распределенными с.в. ξ_i и ξ_k .

Упражнение 14.2.2. Докажите формулу (14.3), используя лемму Ито.

14.3 Применения

В этом разделе представлены приложения процесса Ито, некоторые из которых будут использованы позднее.

Пример 14.3.1. По лемме Ито и в силу (13.11) дифференциал (μ, σ) -броуновского движения равен $\mu dt + \sigma dW$. $\triangleleft$

Пример 14.3.2. Рассмотрим процесс Ито $dX = \mu(t) dt + \sigma(t) dW$. Он фактически совпадает с броуновским движением за исключением того, что его снос $\mu(t)$ и диффузия $\sigma(t)$ больше не являются постоянными. Но, как и ранее, процесс X имеет нормальное распределение, а именно

$$X(t) \sim N\left(X(0) + \int_0^t \mu(s) ds, \int_0^t \sigma^2(s) ds\right). \quad \triangleleft$$

Пример 14.3.3. Рассмотрим процесс геометрического броуновского движения $Y(t) \equiv e^{X(t)}$, где $X(t)$ есть (μ, σ) -броуновское движение. Из формулы Ито (14.9) вытекает, что

$$dY/Y = (\mu + \sigma^2/2)dt + \sigma dW.$$

Таким образом, мгновенная доходность (процесса $Y(t)$) равна $\mu + \sigma^2/2$, а не μ . $\triangleleft$

Пример 14.3.4. Рассмотрим процесс Ито $U \equiv YZ$ с $dY = a dt + b dW_y$ и $dZ = f dt + g dW_z$. В определении процессов Y и Z используется один и тот же винеровский процесс W . С помощью леммы Ито (теоремы 14.2.2) можно показать, что $dU = Z dY + Y dZ + dY dZ$, т. е.

$$dU = Z dY + Y dZ + (a dt + b dW_y)(f dt + g dW_z) = Z dY + Y dZ + bg dt.$$

И если $b \equiv 0$ или $g \equiv 0$, то имеет место формула интегрирования по частям. $\triangleleft$

Пример 14.3.5. Рассмотрим процесс Ито $U \equiv YZ$, где $dY/Y = a dt + b dW_y$ и $dZ/Z = f dt + g dW_z$. И пусть коэффициент корреляции между W_y и W_z равен ρ . Применим лемму Ито (теорему 14.2.3):

$$\begin{aligned} dU &= Z dY + Y dZ + dY dZ = ZY(a dt + b dW_y) + YZ(f dt + g dW_z) + \\ &+ YZ(a dt + b dW_y)(f dt + g dW_z) = U(a + f + bg\rho) dt + Ub dW_y + Ug dW_z. \end{aligned}$$

Заметим, что волатильность процесса dU/U по формуле (6.9) равна $\sqrt{b^2 + 2bg\rho + g^2}$. Таким образом, произведение двух (или большего числа) коррелированных процессов геометрических броуновских движений остается геометрическим броуновским движением. Этот результат используется в анализе **опционов с корреляцией**, чья стоимость зависит от многих активов. Поскольку

$$Y = \exp[(a - b^2/2) dt + b dW_y], \quad Z = \exp[(f - g^2/2) dt + g dW_z],$$

$$U = \exp[\{a + f - (b^2 + g^2)/2\} dt + b dW_y + g dW_z],$$

то $\ln U$ является броуновским движением со средним, равным сумме средних $\ln Y$ и $\ln Z$. И это выполняется даже, если Y и Z коррелированы. Наконец, коэффициент корреляции между $\ln Y$ и $\ln Z$ равен ρ . $\triangleleft$

Пример 14.3.6. Предположим, что процесс S описывается уравнением $dS/S = \mu dt + \sigma dW$. Тогда по лемме Ито процесс $F(S, t) \equiv Se^{y(T-t)}$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF}{F} = (\mu - y) dt + \sigma dW.$$

А этот результат полезен в случае форвардных и фьючерсных контрактов. $\triangleleft$

Упражнение 14.3.1. Предположим, что $dX/X = \mu dt + \sigma dW$.

1) Докажите, что $\ln X$ удовлетворяет уравнению

$$d(\ln X) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW.$$

2) Найдите распределение вероятностей $\ln(X(t)/X(0))$.

Упражнение 14.3.2. Пусть процесс X описывается уравнением процесса геометрического броуновского движения $dX/X = \mu dt + \sigma dW$. Покажите, что тогда процесс $R \equiv \ln X + \sigma^2 t/2$ удовлетворяет уравнению $dR = \mu dt + \sigma dW$.

Упражнение 14.3.3. 1) Какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет процесс W^n ?

2) Покажите, что

$$\int_s^t W^n dW = \frac{W(t)^{n+1} - W(s)^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{2} \int_s^t W^{n-1} dt.$$

(указание: используйте равенства (13.15) и (13.16) или примените лемму Ито).

Упражнение 14.3.4. Рассмотрим процесс Ито $U \equiv (Y + Z)/2$, где $dY/Y = a dt + b dW$ и $dZ/Z = f dt + g dW$. В записи процессов Y и Z используется один и тот же винеровский процесс W . Выведите стохастическое дифференциальное уравнение для процесса dU/U .

Упражнение 14.3.5. Проведите рассуждение примера 14.3.4 заново, но теперь в предположении, что $dY = a dt + b dW_y$ и $dZ = f dt + g dW_z$, где коэффициент корреляции между dW_y и dW_z равен ρ .

Упражнение 14.3.6. Проверьте, что процесс $U \equiv Y/Z$ удовлетворяет уравнению $dU/U = (a - f - bg\rho) dt + b dW_y - g dW_z$, если процессы Y и Z определены в примере 14.3.5.

Упражнение 14.3.7. Какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет процесс $F \equiv X/Y$, если $dY/Y = \mu dt + \sigma dW$ и $dX/X = r dt$?

14.3.1 Процесс Орнштейна—Уленбека

Процесс Орнштейна—Уленбека удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX = -\kappa X dt + \sigma dW, \quad (14.11)$$

где $\kappa, \sigma \geq 0$ (см. рис. 14.4). Известно, что

$$EX(t) = e^{-\kappa(t-t_0)}Ex_0, \quad DX(t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}) + e^{-2\kappa(t-t_0)}Dx_0,$$

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa(t-s)}(1 - e^{-2\kappa(s-t_0)}) + e^{-\kappa(t+s-2t_0)}Dx_0$$

при $t_0 \leq s \leq t$ и $X(t_0) = x_0$. В действительности с.в. $X(t)$ нормально распре-

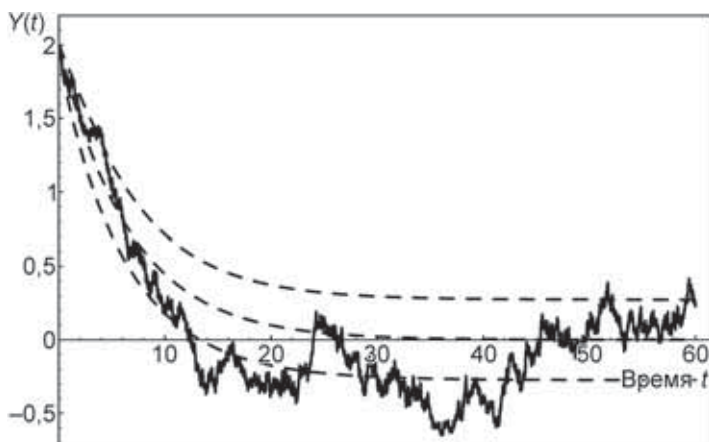


Рис. 14.4. Выборочная траектория процесса Орнштейна—Уленбека. Изображена выборочная траектория процесса, описываемого уравнением $dY = -0,15Y dt + 0,15 dW$, и имеющего начало в точке $Y(0) = 2$. Размах коридора определяется стандартным отклонением, т. е. величиной $\sqrt{[(0,15)^2/0,3](1 - e^{-0,15t})}$, относительно функции среднего $2e^{-0,15t}$. В отличие от броуновского движения, которое расходится к бесконечным значениям (см. рис. 13.2), процесс Орнштейна—Уленбека сходится к стационарному распределению.

делена, если величина x_0 постоянна или нормально распределена [30]. Такой процесс X называют **нормальным процессом**. Конечно, $Ex_0 = x_0$, а $Dx_0 = 0$, если x_0 — постоянная. Если $x_0 \sim N(0, \sigma^2/2\kappa)$, то легко видеть, что X является стационарным процессом. Процесс Орнштейна—Уленбека описывает скорость движения крошечной частицы в жидкости, находящейся в тепловом равновесии — а если кратко, то броуновское движение в природе [386].

У процесса Орнштейна—Уленбека есть следующее свойство **возвращения или притягивания к среднему**. Когда $X > 0$, то элемент dX стремится стать отрицательным, притягивая X к нулю, и в то же время, если $X < 0$, то этот элемент dX стремится быть положительным, снова притягивая X к нулю.

Пример 14.3.7 Предположим, что X является процессом Орнштейна—Уленбека. Тогда процесс $V \equiv X^2$ по лемме Ито имеет следующий дифференциал

$$\begin{aligned} dV &= 2X dX + (dX)^2 = 2\sqrt{V}(-\kappa\sqrt{V} dt + \sigma dW) + \sigma^2 dt = \\ &= (-2\kappa V + \sigma^2) dt + 2\sigma\sqrt{V} dW, \end{aligned}$$

и называется **процессом квадратного корня**. ◁

Рассмотрим следующий процесс, также называемый процессом Орнштейна—Уленбека:

$$dX = \kappa(\mu - X) dt + \sigma dW, \quad (14.12)$$

где $\sigma \geq 0$. Известно, что в предположении постоянства с. в. $X(t_0)$ ($= x_0$)

при $t_0 \leq t$ [855]

$$EX(t) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\kappa(t-t_0)}, \quad (14.13)$$

$$DX(t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}). \quad (14.14)$$

Поскольку при больших t среднее и стандартное отклонение процесса X примерно равны μ и $\sigma/\sqrt{2\kappa}$ соответственно, то вероятность того, что X будет отрицательным в произвольном конечном интервале чрезвычайно мала, если $\mu > 0$ велико по сравнению с $\sigma/\sqrt{2\kappa}$ (скажем, $\mu > 4\sigma/\sqrt{2\kappa}$). Таким образом, у процесса (14.12) есть бросающееся в глаза свойство возвращения к среднему, т.е. стремления X к μ со временем, что делает его полезным при моделировании временной структуры [855], волатильности цен акций [823] и определяемой ими доходности [613].

Упражнение 14.3.8. Пусть $X(t)$ — процесс Орнштейна—Уленбека, задаваемый уравнением (14.11). Покажите, что дифференциал процесса $Y(t) \equiv X(t)e^{\kappa t}$ можно записать в виде $dY = \sigma e^{\kappa t} dW$ (а отсюда вытекает, что с.в. $Y(t)$ и, следовательно, $X(t)$, нормально распределены).

Упражнение 14.3.9. Подтвердите справедливость утверждения из (13.13) показав, что процесс $Y(t) \equiv e^{-t}W(e^{2t})$ является процессом Орнштейна—Уленбека с дифференциалом $dY = -Y dt + \sqrt{2} dW$ (указание: рассмотрите разность $Y(t+dt) - Y(t)$).

Упражнение 14.3.10. Рассмотрим процессы

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1, \quad d\sigma = \beta(\bar{\sigma} - \sigma) dt + \gamma dW_2,$$

предполагая, что dW_1 и dW_2 задают винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ . И пусть $H(S, \sigma, \tau)$ — некоторая функция от S , σ и τ . Найдите стохастическое дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Этот процесс моделирует цену акции с коррелированной стохастической волатильностью, которая оказывается процессом, возвращающимся к среднему.

Упражнение 14.3.11. Покажите, что плотность p вероятности перехода у процесса $dX = -\frac{1}{2}X dt + dW$ удовлетворяет обратному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x \frac{\partial p}{\partial x}$$

(указание: $X(t) \sim N(xe^{-(t-s)/2}, 1 - e^{-(t-s)})$, когда $X(s) = x$).

14.3.2 Процесс квадратного корня

Процесс квадратного корня удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX = \kappa(\mu - X) dt + \sigma\sqrt{X} dW,$$

где $\kappa, \sigma \geq 0$ и начальное значение X — неотрицательная постоянная (см. рис. 14.5). Подобно процессу Орнштейна—Уленбека, процесс квадратного корня также имеет свойство возвратности в том смысле, что X стремится

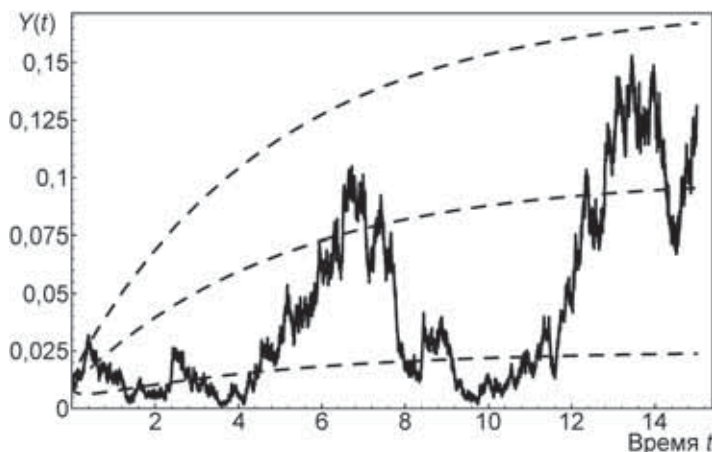


Рис. 14.5. Выборочная траектория процесса квадратного корня. Изображена выборочная траектория процесса, описываемого уравнением $dY = 0,2(0,1 - Y)dt + 0,15\sqrt{Y} dW$, с начальным значением $Y(0) = 0,01$. Размах коридора определяется стандартным отклонением относительно функции среднего $0,01e^{-0,2t} + 0,1(1 - e^{-0,2t})$.

сдвинуться в сторону μ , но его волатильность не постоянна, а пропорциональна $\sqrt{X}$. Если X «добирается» до нуля и $\mu \geq 0$, то вероятность того, что он не перейдет нуль, равна единице; иными словами, нуль (т. е. горизонтальная ось) для него является **отражающим экраном**. По этой причине процесс квадратного корня оказывается подходящим кандидатом для моделирования движений процентной ставки [234]. И напротив, процесс Орнштейна—Уленбека допускает отрицательные значения у процентных ставок. Оба процесса связаны (см. пример 14.3.7).

Феллер (1906—1970) показал, что с. в. $2cX(t)$ имеет нецентральное хи-квадрат-распределение

$$\chi\left(\frac{4\kappa\mu}{\sigma^2}, 2cX(0)e^{-\kappa t}\right),$$

причем $c \equiv (2\kappa/\sigma^2)(1 - e^{-\kappa t})^{-1}$ [234, 341]. При фиксированном $X(0) = x_0$ можно показать, что

$$EX(t) = x_0 e^{-\kappa t} + \mu(1 - e^{-\kappa t}), \quad DX(t) = x_0 \frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \mu \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa t})^2$$

при $t \geq 0$.

14.4 Финансовые приложения

14.4.1 Операционные издержки

Операционные издержки присущи жизни вообще и, хотя иногда ими можно пренебрегать, но они никогда не бывают нулевыми. В модели **пропорциональных операционных издержек** невозможно торговать непрерывно. Интуитивно ясно, что причина такого явления состоит

в том, что операционные издержки на сделку пропорциональны $|dW|$, а $\int_0^T |dW| = \infty$ почти наверное (п. н.) в силу соотношения (13.17). В результате «непрерывный» дилер обанкротится с вероятностью единица [660]. Но можно высказать и более сильные утверждения. Например, самой дешевой торговой стратегией, мажорирующей стоимость Европейского опциона колл при погашении, является покрытый колл [814].

Упражнение 14.4.1. Объясните, почему инвестор, владеющий полной информацией о том какими сделает будущие цены акций мотор броуновского движения, будет бесконечно богат к любому заранее определенному конечному моменту времени. Другими словами, что движения рынка можно эксплуатировать.

14.4.2 Модели стохастических процентных ставок

Мертон впервые предложил следующую методологию моделирования временной структуры [493]. Предположим, что краткосрочная ставка r описывается марковским процессом, удовлетворяющим уравнению $dr = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW$. И пусть $P(r, t, T)$ обозначает цену в момент t бескупонной облигации, по которой выплачивается \$1 в (более поздний) момент T . Тогда соответствующий этой цене процесс также должен быть марковским. Опишем его динамику в виде

$$\frac{dP}{P} = \mu_p dt + \sigma_p dW,$$

из которого следует, что ожидаемая мгновенная ставка доходности у $(T - t)$ -летней бескупонной облигации равна μ_p , а мгновенная дисперсия — σ_p^2 . Конечно, $P(r, T, T) = 1$ при любом T . По лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial T} dT + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial T} dt + \frac{\partial P}{\partial r} [\mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} [\mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW]^2 = \\ &= \left[-\frac{\partial P}{\partial T} + \mu(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma(r, t)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] dt + \sigma(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} dW, \end{aligned}$$

причем во втором равенстве использована связь $dt = -dT$. Поэтому

$$-\frac{\partial P}{\partial T} + \mu(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma(r, t)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = P\mu_p, \quad \sigma(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} = P\sigma_p. \quad (14.15)$$

Модели с краткосрочной ставкой в качестве единственной объясняющей переменной называются **моделями краткосрочной ставки**.

Модель Мертона. Предположим, что мы находимся в рамках теории локального оценивания в среднем. Это означает, что μ_p равняется существующей краткосрочной ставке $r(t)$ при всех T . Предположим также, что μ и σ постоянны. Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных (14.15) имеет следующее решение:

$$P(r, t, T) = \exp \left[-r(T - t) - \frac{\mu(T - t)^2}{2} + \frac{\sigma^2(T - t)^3}{6} \right]. \quad (14.16)$$

Эта модель принадлежит Мертону [660]. Сделаем несколько замечаний. Во-первых, $\sigma_p = -\sigma(T-t)$, из чего прямо вытекает, что стоимость облигации с большим сроком до погашения более волатильна. Динамика P определяется уравнением $dP/P = r dt - \sigma(T-t) dW$. Тем самым у P нет верхних пределов при увеличении T , а это совсем не отражает реальность. Но получается это потому, что модель допускает отрицательные значения ставок.

Упражнение 14.4.2. Из отрицательности процентных ставок вытекает, что по безрисковым облигациям можно получать арбитражную прибыль. Объясните, почему это возможно.

Дюрация при параллельных сдвигах. Рассмотрим дюрацию по отношению к параллельным сдвигам кривой спот-ставок. И предположим для удобства, что $t=0$. Параллельный сдвиг означает, что $S(r+\Delta r, T) = S(r, T) + \Delta r$ при любом Δr ; поэтому $\partial S(r, T)/\partial r = 1$. Из этого уравнения вытекает, что $S(r, T) = r + g(T)$ при некоторой функции g со значением $g(0) = 0$, поскольку $S(r, 0) = r$. Следовательно, $P(r, T) = e^{-[r+g(T)]T}$. Подставим это равенство в левые части уравнений (14.15) и предположим, что у нас справедлива теория локального оценивания в среднем. Тогда получим, что

$$g'(T) + \frac{g(T)}{T} = \mu(r) - \frac{\sigma(r)^2}{2} T.$$

Поскольку левая часть здесь не зависит от r , то такой же должна быть и правая. Ну а так как выполняется это при всех T , то не только $\mu(r)$, но и $\sigma(r)$ должны быть постоянными, т.е. мы имеем модель Мертона. Как уже упоминалось ранее, эта модель имеет недостатки, поэтому такой же является и рассматриваемая модель дюрации [496].

Упражнение 14.4.3. Предположим, что кривая текущих спот-ставок является плоской и допустимы лишь параллельные сдвиги. Что тогда можно сказать о параметрах μ и σ , управляющих процессом краткосрочной ставки?

Об иммунизации при параллельных сдвигах (еще раз). Портфель с заданной дюрацией при параллельных сдвигах кривой спот-ставок порождает арбитражные возможности в том смысле, что стоимость портфеля превосходит обязательства, связанные с любыми мгновенными изменениями ставки. Это было продемонстрировано в п. 5.8.2. Однако это кажущееся несоответствие с равновесным состоянием исчезает, если будут приняты во внимание изменения стоимости портфеля *на протяжении некоторого времени*. В самом деле, в некоторых моделях процентной ставки обязательство, защищенное портфелем с заданной дюрацией, превышает минимальную стоимость портфеля на любой заданный момент времени в будущем. Таким образом, объявленная арбитражная прибыль испаряется, поскольку стоимость портфеля не всегда покрывает обязательство.

Проиллюстрируем этот момент с помощью модели Мертона $dr = \mu dt + \sigma dW$, которая вытекает из предположения о параллельных сдвигах кривой спот-ставок и использования теории локального оценивания в среднем. Чтобы защитить обязательство выплатить \$1 в некоторый момент s , составим портфель из двух облигаций со сроками погашения

t_1 и t_2 , предполагая, что $t_1 < s < t_2$. Каждая облигация является бескупонной и имеет номинал \$1. Портфель этот составлен так, чтобы его стоимость совпадала с приведенным значением (ПЗ) нашего обязательства на сегодня, а его стоимость в дальнейшем по отношению к ПЗ обязательства была минимальной среди всех таких портфелей (обратитесь еще раз к п. 4.4.2). Рассмотрим произвольный момент t в будущем, такой, что $t < t_1$. Тогда, если обозначить через $A(t)$ стоимость портфеля, а через $L(t)$ стоимость обязательства в момент t , то можно показать, что отношение «актив/обязательство» $A(t)/L(t)$ является выпуклой функцией существующей процентной ставки и $A(t) < L(t)$ (см. упр. 14.4.4). Причем такой вывод остается в силе и в других моделях процентной ставки [52].

Упражнение 14.4.4. 1) Докажите, что $A(t)/L(t)$ является выпуклой функцией существующей процентной ставки.

2) А затем убедитесь в том, что $A(t) < L(t)$.

14.4.3 Моделирование цен акций

Наиболее популярной стохастической моделью для цен акций является геометрическое броуновское движение $dS/S = \mu dt + \sigma dW$. Эта модель наилучшим образом описывает положение равновесия, в котором математические ожидания будущих доходов «успокаивались бы» [660].

Из его аналога с дискретным временем $\Delta S/S = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi$, где $\xi \sim N(0, 1)$, мы знаем, что $\Delta S/S \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$. Поэтому доход в процентах за следующий промежуток времени Δt имеет среднее $\mu \Delta t$ и дисперсию $\sigma^2 \Delta t$. Другими словами, доход в процентах на единицу времени имеет среднее μ и дисперсию σ^2 . По этой причине μ называют мгновенной ожидаемой доходностью, а σ^2 — мгновенной дисперсией этой доходности. И если неопределенность в отношении цены акции отсутствует, т. е. $\sigma = 0$, то $S(t) = S(0)e^{\mu t}$.

Замечание 14.4.1. Может показаться странным, что доходность оказалась равной μ , а не $\mu - \sigma^2/2$. Ведь в соответствии с примером 14.3.3 $S(t)/S(0) = e^{X(t)}$, где $X(t)$ является $(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ -броуновским движением, а ставка доходности непрерывного начисления процентов в периоде $[0, T]$ равна

$$\frac{\ln[S(T)/S(0)]}{T} = \frac{X(T) - X(0)}{T} \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right). \quad (14.17)$$

И, следовательно, средняя ежегодная доходность непрерывного начисления равна $\mu - \sigma^2/2$! Все так, но эти доходности относятся к разным определениям такой ставки. И если не оговаривается противное, то мы будем отныне иметь в виду *прежнее* определение (т. е. понимать ее как мгновенную доходность μ). Следует подчеркнуть, что μ из биномиальной модели оценки стоимости опциона (см. (9.13)), относилось к последней ставке доходности. Резюмируя получаем, что

$$\frac{E[\{S(\Delta t) - S(0)\}/S(0)]}{\Delta t} \rightarrow \mu, \quad \frac{\ln E[S(T)/S(0)]}{T} = \mu, \quad \frac{E[\ln(S(T)/S(0))]}{T} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

(см. замечание 9.3.2, лемму 9.3.1, пример 14.3.3 и упр. 13.3.8 и 14.4.5). $\triangleleft$

Упражнение 14.4.5. Докажите, что $ES(T) = S(0)e^{\mu T}$.

Упражнение 14.4.6. Предположим, что цена акции описывается процессом геометрического броуновского движения, задаваемого уравнением $dS/S = \sigma dW$. В соответствии с примером 14.3.3 тогда $S(t)/S(0) = e^{X(t)}$, где $X(t)$ есть $(-\sigma^2/2, \sigma)$ -броуновское движение. Другими словами, средний коэффициент «роста» цены акции отрицателен. Объясните, почему этот коэффициент на равен нулю.

Упражнение 14.4.7. Покажите, что доходность типа простых процентов $[S(t)/S(0)] - 1$ имеет среднее $e^{\mu t} - 1$ и дисперсию $e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Упражнение 14.4.8. Предположим, что волатильность σ случайна, но определяется независимым винеровским процессом. Предположим также, что дана средняя дисперсия на временном промежутке $[0, T]$, определяемая равенством $\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt$. Покажите, что тогда

$$\ln \frac{S(T)}{S(0)} \sim N(\mu T - (\hat{\sigma}^2 T/2), \hat{\sigma}^2 T).$$

Таким образом, с.в. $S(T)$, рассматриваемая по отношению к моменту времени ноль, остается логнормально распределенной.

Упражнение 14.4.9. Почему использование отношения $\Delta S/(S\sqrt{\Delta t})$ для оценки волатильности естественно?

Упражнение 14.4.10. В чем состоят недостатки моделирования динамики цен акций с помощью уравнения $dS = \mu dt + \sigma dW$ при постоянных μ и σ ?

Модель с непрерывным временем как предел биномиальной модели. Каким является процесс Ито, описывающий доходность акции в риск-нейтральной экономике, к которому сходится биномиальная модель из п. 9.2? Доходность акции как ставки непрерывного начисления, относящейся к периоду длины τ , представляет собой сумму следующих n независимых и одинаково распределенных с.в. (это один из вариантов случайной величины B_i из п. 9.3.1):

$$X_i = \begin{cases} \ln u & \text{с вероятностью } p, \\ \ln d & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases}$$

где $u \equiv e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}$, $d \equiv e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}$, и $p \equiv \frac{e^{r\tau/n} - d}{u - d}$. Тем самым указанная доходность представляется случайным блужданием $\sum_{i=1}^n X_i$. И нетрудно проверить, что

$$E \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau, \quad D \left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow \sigma^2 \tau. \quad (14.18)$$

Таким образом, доходность, как ставка непрерывного начисления сходится к $(r - \sigma^2/2, \sigma)$ -броуновскому движению, а цена акции в риск-нейтральной экономике описывается уравнением $dS/S = r dt + \sigma dW$. В самом деле, дисконтированный процесс $\{Z(t) \equiv e^{-rt} S(t), t \geq 0\}$ относительно риск-нейтральной вероятностной меры является мартингалом, поскольку уравнение $dZ/Z = \sigma dW$ задает процесс Ито с нулевым сносом в силу упр. 14.3.6.

Упражнение 14.4.11. Проверьте справедливость соотношений (14.18) (указание: $e^x \approx 1 + x + x^2/2$, $x \rightarrow 0$).

Упражнение 14.4.12. Из вышесказанного следует, что $EX_i \rightarrow (r - \sigma^2/2)\Delta t$ и $\sqrt{DX_i} \rightarrow \sigma\sqrt{\Delta t}$. С другой стороны, пусть $X_{i+1} = \ln(S_{i+1}/S_i)$, где $S_i \equiv S_0 \times e^{X_1 + X_2 + \dots + X_i}$ представляет цену акции в момент i . Тогда

$$X_{i+1} = \ln \left(1 + \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right) \approx \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \equiv \frac{\Delta S_i}{S_i}.$$

И, следовательно, учитывая вышесказанное, приходим к уравнению $dS/S = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW$, которое противоречит указанному ранее! Укажите пробел в аргументации и «избавьтесь» от него.

Упражнение 14.4.13. Доходность непрерывного начисления $X \equiv \ln S$ удовлетворяет уравнению $dX = (r - \sigma^2/2) dt + \sigma dW$ (в риск-нейтральной экономике). Используйте этот факт для обоснования равенств

$$u = \exp[(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}], \quad d = \exp[(r - \sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}]$$

в альтернативной биномиальной модели, в которой повышение цены происходит с вероятностью $1/2$.

Дополнительная литература

В изложении теории случайных процессов мы следуем [541, 543, 763, 764], а при обсуждении проблематики стохастических интегралов -- [30, 289, 419, 544]. Интеграл Ито принадлежит Ито (р. 1915) [500]. Лемма Ито также принадлежит Ито, но на ее вывод сильное влияние оказала диссертация Башелье [501, 512]. Строгие доказательства леммы Ито можно найти в [30, 419], а неформальные — в [470, 492, 660]. Программы пакета *Mathematica* для выполнения некоторых из вычислений перечислены в [854]. По вопросам приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений обращайтесь к [556, 557, 558, 774]. О многомерном процессе Орнштейна—Уленбека можно почитать в [613]. В качестве других полезных ссылок укажем [822] (диффузия), [549] (интеграл Ито), [280, 761] (случайные процессы), [211, 364, 776] (стохастические дифференциальные уравнения), [542] (стохастическая оптимизация при совершении сделок), [70] (невероятностная трактовка непрерывной торговли), [102, 181] (конкурентная торговля без распределений) и [112, 115, 262, 274, 681] (операционные издержки).

Примечание

1. Это означает, что все частные производные первого и второго порядка существуют и непрерывны.

Доказательство — это то, что убеждает разумного человека; а строгое доказательство — то, что убеждает и неразумного.

Марк Кац (1914—1984)

15 Оценка стоимости производных финансовых инструментов в случае непрерывного времени

Проблема времени в музыкальном искусстве имеет фундаментальное значение.

Игорь Стравинский (1882—1971), *Поэзия в музыке*

После краткого введения в проблематику дифференциальных уравнений с частными производными в этой главе приводятся дифференциальные уравнения в частных производных, которым стоимость опциона должна удовлетворять в случае непрерывного времени. Затем общий подход применяется к оценке стоимости различных производных инструментов*), таких, как опционы на акцию с непрерывными дивидендами, фьючерсы, опционы на фьючерсы, опционы с корреляцией, опционы обмена, опционы, зависящие от траектории, опционы, связанные с валютой, барьерные опционы, конвертируемые облигации и опционы при стохастической волатильности. В этой главе обсуждается также и связь между дифференциальными уравнениями в частных производных и мартингаловым подходом к оценке стоимости.

15.1 Дифференциальные уравнения в частных производных

Двумерное уравнение в частных производных второго порядка имеет следующий вид:

$$p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + s \frac{\partial \theta}{\partial x} + t \frac{\partial \theta}{\partial y} + u \theta + v = 0;$$

величины p , q , r , s , t , u и v здесь могут быть функциями двух независимых переменных x и y , как впрочем и зависимая переменная θ и ее производные. Это уравнение называется **эллиптическим**, **параболическим** или **гиперболическим** в зависимости от того, будет ли выполнено условие $q^2 < 4pr$, $q^2 = 4pr$ или $q^2 > 4pr$, соответственно, в рассматриваемой области (независимых переменных). По этой причине величина $q^2 - 4pr$ называется **дискриминантом**. Отметим, что решением дифференциального уравнения в частных производных является некоторая функция.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных различают задачи с **начальными условиями** и задачи с **граничными условиями**. В задаче с начальными условиями решение строится как функция времени, принимающая заданные начальные значения. В отличие от этого

*) Слово derivative в финансах является сокращением от derivative instrument. Поэтому в основном используется его буквальный перевод (производный инструмент), хотя годится и выражение «производный финансовый инструмент». — Прим. перев.

подхода, в проблеме с граничными условиями решение должно удовлетворять заданным условиям на обоих концах рассматриваемых интервалов [391]. Если же условия по некоторым независимым переменным заданы в форме задачи с начальными условиями, а по остальным в виде задачи с граничными условиями, то имеют дело с **граничной задачей с начальными условиями**.

Стандартным эллиптическим уравнением является двумерное **уравнение Пуассона**:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\rho(x, y).$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0,$$

является гиперболическим. Наиболее важным параболическим уравнением является **уравнение диффузии (тепловое уравнение)**

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

которое представляет собой частный случай уравнения Фоккера—Планка. При заданном начальном условии $\theta(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, где $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна при всех действительных x , единственное ограниченное решение уравнения диффузии при $t > 0$ может быть записано в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{2Dt}} dz. \quad (15.1)$$

Как видим, это решение зависит от «всего» начального условия. Произвольное двумерное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка можно свести к обобщенной форме уравнения Пуассона, к уравнению диффузии или волновому уравнению в зависимости от того, является ли оно эллиптическим, параболическим или гиперболическим.

Упражнение 15.1.1. Проверьте, что интеграл (15.1) действительно является решением уравнения диффузии.

15.2 Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса

Цена любого производного инструмента на бездивидендную акцию должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных. Для понимания этого ключевым моментом является признание того, что изменением стоимости как производного инструмента, так и акции управляет один и тот же случайный процесс; другими словами, он является **систематическим**, охватывая целую группу инструментов. При условии, что цены вышеупомянутых инструментов сильно коррелируют, мы можем определить такое количество акций, при котором прибыль от их использования в точности компенсирует потери от производного инструмента, и наоборот. Это снимает неопределенность со

стоимости портфеля из акций и производного инструмента в конце короткого промежутка времени и заставляет его доходность превратиться в безрисковую ставку, чтобы избежать арбитражных возможностей.

При этом делается несколько предположений:

1) изменение цены акции описывается геометрическим броуновским движением $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ с постоянными μ и σ ,

2) в течение всей жизни производного инструмента дивидендов нет,

3) торговля идет непрерывно,

4) короткая продажа разрешена,

5) операционные издержки и налоги отсутствуют,

6) все ценные бумаги (ЦБ) бесконечно делимы,

7) безрисковые арбитражные возможности отсутствуют,

8) временная структура безрисковых ставок является плоской по r ,

9) объем безрискового кредитования и заимствования неограничен.

Некоторые из этих предположений могут быть ослаблены. Например, величины μ , σ и r могут быть не только постоянными величинами, но и детерминированными функциями времени. Ниже через t обозначается текущее время (в годах), T означает момент окончания срока действия (финансового инструмента), а $\tau \equiv T - t$.

15.2.1 Вывод Мертона

Пусть C — стоимость производного инструмента на акцию с ценой S . Тогда по лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$dC = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW.$$

Обращаем ваше внимание на то, что один и тот же процесс W управляет как стоимостью C , так и ценой S . А теперь покажем, что этот случайный источник можно удалить, занимая короткую позицию по одной единице производного инструмента и длинную позицию по $\partial C / \partial S$ единицам акции (см. рис. 15.1). Обозначим стоимость этого портфеля через Π . Тогда по определению $\Pi = -C + S(\partial C / \partial S)$, а изменение стоимости данного портфеля за время dt есть

$$d\Pi = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS.$$

Подставляя в это уравнение формулы для dC и dS , придем к равенству

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt.$$

Поскольку в полученном уравнении отсутствует элемент dW , то в промежутке dt портфель является безрисковым и потому приносит мгновенную доходность r ; т. е. $d\Pi = r\Pi dt$, и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = r \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dt.$$

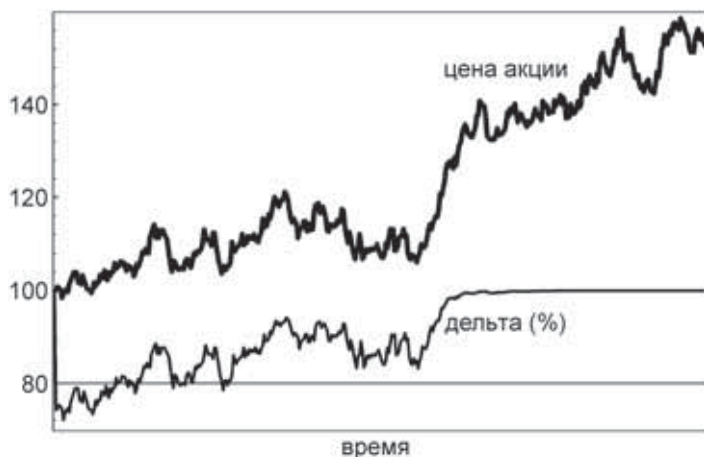


Рис. 15.1. Цена акции и дельта (коэффициент хеджирования). Напоминаем, что параметр дельта определяется выражением $\partial C / \partial S$. Цена исполнения здесь равна \$95.

Приравнивая коэффициенты, в результате получим, что

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC. \quad (15.2)$$

А это и есть знаменитое **дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса** [87].

Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса можно записать и с помощью мер чувствительности, в виде

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = rC \quad (15.3)$$

(см. определения мер чувствительности в п. 10.1). Тожество (15.3) представляет собой альтернативный способ численного расчета величины Θ по Δ и Γ . В частности, если портфель является дельта-нейтральным, то полученное уравнение упрощается:

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = rC.$$

И, таким образом, между Γ и Θ существует определенная зависимость.

Упражнение 15.2.1. 1) Проверьте, что формула Блэка—Шоулса для стоимости Европейского опциона колл из теоремы 9.3.4 действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению Блэка—Шоулса (15.2).

2) Проверьте, что стоимость форвардного контракта на бездивидендную акцию также удовлетворяет дифференциальному уравнению Блэка—Шоулса (15.2).

Упражнение 15.2.2. Чтобы иметь возможность оказывать влияние на стоимость опциона, представляется разумным ожидать предсказуемости доходов от акции, явно выраженной в снос процесса Ито (одна из возможностей здесь состоит в том, чтобы логарифм цены $R \equiv \ln S$ подчинялся уравнению Орнштейна—Уленбека со сносом, а не броуновскому движению). Однако из результатов п. 15.2.1 следует, что снос процесса не

имеет значения: формула Блэка—Шоулса остается прежней. Попробуйте разрешить это противоречие.

Упражнение 15.2.3. Изложите аргументацию по утверждению, что дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса вытекает из биномиальной модели оценки стоимости опциона (БМОО) при переходе к пределу.

Непрерывная коррекция. Портфель P является безрисковым лишь на протяжении бесконечно короткого промежутка времени. И если дельта $\partial C/\partial S$ меняется вместе с S и t , то портфель следует непрерывно «подправлять» для того, чтобы он по-прежнему оставался безрисковым.

Число источников случайности. Совсем необязательно, чтобы источник случайности был единственным. При наличии двух источников случайности для устранения неопределенности достаточно трех ценных бумаг (ЦБ): нужно использовать две из них для устранения первого источника и третью для устранения второго. Чтобы такой подход мог работать, нужно, чтобы этими ЦБ торговали. **Торгуемая ЦБ** — это такой актив, которым владеют исключительно с целью капиталовложения, причем очень много людей. Вообще говоря, рынок называется полным только тогда, когда число торгуемых ценных бумаг превосходит число источников случайности [76].

Риск-нейтральная оценка стоимости. Как и в случае БМОО, дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса прямо не зависит от отношения инвестора к риску. Ни одно из переменных уравнения не зависит от этого отношения, а то, которое зависит от него, т. е. ожидаемая доходность акции, в уравнении отсутствует. Как следствие, при оценке стоимости можно использовать любое отношение к риску, в том числе и риск-нейтральное отношение.

В риск-нейтральной экономике ожидаемой доходностью по всем ценным бумагам является безрисковая ставка r . И цены затем получаются дисконтированием ожидаемой стоимости по ставке r . Лемма 9.2.1 утверждает то же самое о БМОО. Предположение о риск-нейтральности заметно упрощает анализ производных инструментов. И особо подчеркивается, что приравнивается величине r мгновенная ставка доходности акции (за нюансами обращайтесь к замечанию 14.4.1).

Упражнение 15.2.4. Объясните, почему формула

$$e^{-r\tau} \int_X^{\infty} (y - X) \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[-\frac{\{\ln(y/S) - (r - \sigma^2/2)\tau\}^2}{2\sigma^2\tau} \right] dy$$

эквивалентна формуле Блэка—Шоулса для стоимости Европейских опционов колл (указание: взгляните еще раз на формулу (6.10)).

15.2.2 Решение уравнения Блэка—Шоулса в случае Европейских опционов колл

Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса в случае Европейских опционов можно решить весьма просто. Для этого сначала преобразуем уравнение (15.2) с помощью замены переменной $C(S, \tau) \equiv$

$\equiv B(S, \tau)e^{-r\tau}X$ к виду

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + rS \frac{\partial B}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} = 0,$$

где $B(0, \tau) = 0$ при $\tau > 0$ и $B(S, 0) = \max(S/X - 1, 0)$ при $S > 0$. А затем воспользуемся еще одним преобразованием переменных $D(x, \tau) \equiv B(S, \tau)$, $x \equiv (S/X)e^{r\tau}$, чтобы в результате получить уравнение диффузии:

$$-\frac{\partial D}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\sigma x)^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = 0;$$

здесь $D(0, \tau) = 0$ при $\tau > 0$ и $D(x, 0) = \max(x - 1, 0)$ при $x > 0$. Наконец, после еще одной замены $u \equiv \sigma^2 \tau$ получим, что функция $H(x, u) \equiv D(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0,$$

в котором $H(0, u) = 0$ при $u > 0$ и $H(x, 0) = \max(x - 1, 0)$ при $x > 0$. Заключительное же преобразование $\Theta(z, u)x \equiv H(x, u)$ с $z \equiv (u/2) + \ln x$ приведет нас к уравнению

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0.$$

Граничными условиями для него будут неравенство $|\Theta(z, u)| \leq 1$ при $u > 0$ и формула $\Theta(z, 0) = \max(1 - e^{-z}, 0)$.

Вышеуказанное уравнение диффузии имеет решение

$$\begin{aligned} \Theta(z, u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_0^\infty (1 - e^{-y}) e^{-(z-y)^2/(2u)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_0^\infty e^{-(z-y)^2/(2u)} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_0^\infty e^{-y} e^{-(z-y)^2/(2u)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z/\sqrt{u}}^\infty e^{-\omega_1^2/2} d\omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-(z-u)/\sqrt{u}}^\infty e^{-\omega_2^2/2} d\omega_2 = \\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right) - \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{z-u}{\sqrt{u}}\right), \end{aligned}$$

которое нетрудно получить, если воспользоваться формулой (15.1) и провести замены переменных $\omega_1 \equiv (y - z)/\sqrt{u}$ и $\omega_2 \equiv (y - z + u)/\sqrt{u}$. Поэтому

$$H(x, u) = \Theta(\ln x + (u/2), u)x = x\Phi\left(\frac{\ln x + (u/2)}{\sqrt{u}}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x - (u/2)}{\sqrt{u}}\right).$$

Остается проделать шаги в обратном направлении и получить формулу

$$\begin{aligned} C(S, \tau) &= H\left(\frac{S}{X}e^{r\tau}, \sigma^2 \tau\right) e^{-r\tau}X = \\ &= S\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + r\tau + \sigma^2 \tau/2}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) - e^{-r\tau}X\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + r\tau - \sigma^2 \tau/2}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right), \end{aligned}$$

которая в точности совпадает с формулой Блэка—Шоулса для стоимости Европейского опциона колл.

Упражнение 15.2.5. Найдите решение дифференциального уравнения Блэка—Шоулса для Европейских опционов пут.

15.2.3 Начальные и граничные условия

Решение дифференциального уравнения Блэка—Шоулса зависит от начальных и граничных условий, характеризующих конкретный производный инструмент. Эти условия фактически задают стоимость производного инструмента для различных значений S и t . В случае Европейских опционов колл (пут) ключевым заключительным условием является выплата $\max(S(T) - X, 0)$ ($\max(X - S(T), 0)$, соответственно) момента T . Но также имеются и полезные граничные условия. Так, стоимость опциона колл равна нулю, если $S(t) = 0$, а стоимость опциона пут в этом же случае равна $Xe^{-r(T-t)}$ (см. упр. 8.4.5). Далее, если S бесконечно возрастает, то стоимость опциона колл примерно равна S , а опциона пут — нулю. Причем точность будет гораздо выше, если для стоимости Европейского опциона колл вместо S при $S \rightarrow \infty$ используем выражение $S - Xe^{-r(T-t)}$. И, хотя эти граничные условия с точки зрения математика не являются необходимыми, они позволяют добиться большей точности при использовании приближенных методов [879].

Расчет цены Американских опционов пут значительно сложнее по причине возможного досрочного исполнения, граница которого $\bar{S}(t)$ априори неизвестна. Напомним, что граница исполнения определяет ту цену акции в каждый момент времени, при которой исполнение опциона становится оптимальным. Определение стоимости, при котором гарантируется единственное решение, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + rS \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} &= rP & \text{и } P > X - S \text{ при } \bar{S} < S < \infty, \\ & & P = X - S \text{ при } 0 \leq S < \bar{S}, \\ \frac{\partial P}{\partial S} &= -1 & \text{и } P = X - S \text{ при } S = \bar{S}, \\ & & P = 0 \text{ при } S \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

плюс очевидное заключительное условие [154]. Досрочное исполнение является оптимальным в области $0 \leq S < \bar{S}$. Границей же исполнения является непрерывная убывающая функция τ для Американских опционов пут и непрерывная возрастающая функция τ для Американских опционов колл [575].

Упражнение 15.2.6. Проверьте, что дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса нарушается там, где досрочное исполнение Американского опциона пут является оптимальным; т. е. $X - S$ уравнению не удовлетворяет.

15.3 Приложения

15.3.1 Непрерывная дивидендная доходность

Цена акции, по которой дивиденды выплачиваются по ежегодной ставке непрерывного начисления q удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q) dt + \sigma dW,$$

в котором величина μ представляет доходность акции. Этот процесс был введен в п.9.6.4 для индекса акций и обменного курса. В риск-нейтральной экономике $\mu = r$.

Рассмотрим производную ЦБ, стоимость f которой зависит от акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность. По лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$df = \left((\mu - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW.$$

Соберем портфель, состоящий из одной короткой позиции по производной ЦБ и длинной позиции по $\partial f / \partial S$ единицам акции. Его стоимость равна величине $\Pi = -f + (\partial f / \partial S)S$, а изменение этой стоимости за промежуток времени dt записывается в виде $d\Pi = -df + (\partial f / \partial S)dS$. Используя формулы для df и dS , получим выражение

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt.$$

Полное же изменение стоимости равняется сумме вышеуказанного выражения и дивидендов, $d\Pi + qS(\partial f / \partial S)dt$. Ну а поскольку оно не является случайным, то портфель должен быть мгновенно безрисковым:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + qS \frac{\partial f}{\partial S} dt = r\Pi dt.$$

Упрощая последнее уравнение получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Для Европейских опционов колл граничные условия идентичны условиям стандартного опциона за исключением того, что теперь стоимость должна быть равна $Se^{-q(T-t)}$, если S принимает бесконечно большие значения. Решение полученного уравнения приведено в (9.20). Для Американских опционов колл к единственному решению гарантированно приводит следующая формулировка проблемы определения стоимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= rC & \text{и } C > S - X & \text{при } 0 \leq S < \bar{S}, \\ & & C = S - X & \text{при } \bar{S} < S < \infty, \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= 1 & \text{и } C = S - X & \text{при } S = \bar{S}, \\ & & C = 0 & \text{при } S = 0, \end{aligned}$$

естественно, при заключительной выплате $C = \max(S - X, 0)$ [879].

15.3.2 Фьючерсы и опционы на фьючерсы

Цена фьючерса связана со спот-ценой выражением $F = S \times e^{(r-q)(T-t)}$. А в соответствии с примером 14.3.6 $dF/F = \sigma dW$. Следовательно, цену фьючерса можно рассматривать как стоимость акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность, равная r . Это и есть основной вывод, который позволяет сделать модель Блэка.

Упражнение 15.3.1. Выведите дифференциальные уравнения в частных производных для фьючерсных опционов.

15.3.3 Опционы с усредненной ценой акции или ценой исполнения

Для упрощения обозначений предположим, что жизнь опциона начинается в момент ноль. Тогда заключительные выплаты у опционов колл и пут с арифметически усредненной ценой акции имеют следующий вид

$$\max\left(\frac{1}{T} \int_0^T S(u) du - X, 0\right), \quad \max\left(X - \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du, 0\right),$$

соответственно. Как известно, стоимость арифметически усредненных опционов сложно оценивать. Кроме того, на практике обычно фиксируются цены, относящиеся к дискретным моментам времени [598].

Если же используется геометрическое усреднение, то выплаты имеют следующий вид:

$$\max\left(\exp\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S(u) du\right] - X, 0\right), \quad \max\left(X - \exp\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S(u) du\right], 0\right).$$

Геометрическое среднее $\exp\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S(u) du\right]$ распределено логнормально, если цена базового актива распределена логнормально (см. пример 14.3.5). Заключительные выплаты по опционам колл и пут, «оглядывающимся на усредненное прошлое», равны, соответственно,

$$\max\left(S(T) - \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du, 0\right) \quad \text{и} \quad \max\left(\frac{1}{T} \int_0^T S(u) du - S(T), 0\right).$$

Дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет стоимость V Европейского опциона с арифметически усредненной ценой, может быть получено следующим образом. Введем новую переменную $A(t) \equiv \int_0^t S(u) du$. Нетрудно проверить, что $dA = S dt$. Поэтому, если лемму Ито (теорему 14.2.2) применить к функции V , получим, что

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial A} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.$$

Рассмотрим портфель из одной короткой позиции по одной единице производного инструмента и длинной позиции по $\partial V / \partial S$ сертификатам акции. У такого портфеля доход должен быть безрисковым, поскольку случайность в нем отсутствует. Поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial A} = rV.$$

Упражнение 15.3.2. Покажите, что стоимость опционов с геометрически усредненной ценой удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\ln S) \frac{\partial V}{\partial A} = rV,$$

в котором $A(t) \equiv \int_0^t \ln S(u) du$.

15.3.4 Опционы на несколько активов: опционы с корреляцией

Для стоимости C опциона с корреляцией, которая зависит от цен двух активов S_1 и S_2 , в предположении, что каждая из цен описывается геометрическим броуновским движением, дифференциальное уравнение в частных производных имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 r S_i \frac{\partial C}{\partial S_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2 S_i^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} = rC. \quad (15.4)$$

Упражнение 15.3.3. 1) Объясните появление уравнения (15.4).

2) Проведите его обобщение на случай n активов.

15.3.5 Опционы обмена

Опционом обмена называется опцион с корреляцией, который дает своему владельцу право обменять один актив на другой. Таким образом, его стоимость в момент окончания срока жизни равна

$$\max(S_2(T) - S_1(T), 0),$$

где $S_1(T)$ и $S_2(T)$ обозначают цены двух активов в момент T окончания срока действия опциона. Такая выплата позволяет смотреть на опцион с двух точек зрения: как на колл с базовым активом 2 и ценой исполнения, равной будущей цене актива 1 или как на пут по активу 1, но с ценой исполнения, равной будущей стоимости актива 2.

Предположим, что дивиденды по обоим базовым активам не выплачиваются, а их цены удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1, \quad \frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2.$$

И пусть ρ является коэффициентом корреляции между dW_1 и dW_2 . Тогда стоимость опциона в момент t описывается выражением

$$V(S_1, S_2, t) = S_2 \Phi(x) - S_1 \Phi(x - \sigma \sqrt{T-t}), \quad (15.5)$$

в котором

$$x \equiv \frac{\ln(S_2/S_1) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Равенство (15.5) называется **формулой Марграбе** [640].

Формулу Марграбе можно получить следующим образом. Заметим сначала, что функция $V(x, y, t)$ является **однородной функцией степени один** по x и по y , и это означает, что $V(\lambda x, \lambda y, t) = \lambda V(x, y, t)$. Таким образом, опцион обмена при ценах обоих активов, в λ раз больших, равен по стоимости λ первоначальному опциону. Интуитивно это понятно, поскольку с одной стороны

$$\max(\lambda S_2(T) - \lambda S_1(T), 0) = \lambda \times \max(S_2(T) - S_1(T), 0),$$

а с другой принято предположение о совершенстве рынка [660]. Цена актива 2 по отношению к активу 1 измеряется величиной $S \equiv S_2/S_1$. Поэтому опцион продается по цене $V(S_1, S_2, t)/S_1 = V(1, S_2/S_1, t)$, если

стоимость актива 1 взять за единицу. Но процентная ставка при безрисковой ссуде, рассчитанной в единицах актива 1 на совершенном рынке равна нулю, поскольку кредитор за одну единицу актива 1 при погашении основной суммы потребует возвращения одной единицы актива 1. Ну а так как опцион по обмену актива 1 на актив 2 является опционом колл на актив 2 с ценой исполнения равной единице и нулевой процентной ставкой, то по формуле Блэка—Шоулса

$$\frac{V(S_1, S_2, t)}{S_1} = V(1, S, t) = S\Phi(x) - 1 \times e^{-0 \times (T-t)}\Phi(x - \sigma\sqrt{T-t}),$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(S/1) + (0 + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln(S_2/S_1) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Предположим, что владелец опциона продает $V_1 \equiv \partial V / \partial S_1$ единиц актива 1 из короткой позиции и покупает $-V_2 \equiv -\partial V / \partial S_2$ единиц актива 2. Поскольку $V(\cdot)$ однородна степени один по S_1 и S_2 , а $V - V_1 S_1 - V_2 S_2 = 0$ по теореме Эйлера (см. упр. 15.3.6), то общая стоимость указанного портфеля также имеет нулевое значение. Поэтому $dV - V_1 dS_1 - V_2 dS_2 = 0$. Но по лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$dV = V_1 dS_1 + V_2 dS_2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{V_{11}\sigma_1^2 S_1^2 + 2V_{12}\sigma_1\sigma_2\rho S_1 S_2 + V_{22}\sigma_2^2 S_2^2}{2} dt,$$

где $V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}$. И, следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V_{11}\sigma_1^2 S_1^2 + 2V_{12}\sigma_1\sigma_2\rho S_1 S_2 + V_{22}\sigma_2^2 S_2^2}{2} = 0 \quad (15.6)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$V(S_1, S_2, T) = \max(0, S_2 - S_1), \quad 0 \leq V(S_1, S_2, t) \leq S_2, \quad \text{если } S_1, S_2 \geq 0.$$

Формула Марграбе не становится значительно более сложной, если по акции с ценой S_i выплачивается непрерывная дивидендная доходность q_i , $i = 1, 2$. Мы просто заменяем величину S_i всюду, где она появляется, на величину $S_i e^{-q_i(T-t)}$, и получаем выражение

$$V(S_1, S_2, t) = S_2 e^{-q_2(T-t)}\Phi(x) - S_1 e^{-q_1(T-t)}\Phi(x - \sigma\sqrt{T-t}), \quad (15.7)$$

в котором

$$x \equiv \frac{\ln(S_2/S_1) + (q_1 - q_2 + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Упражнение 15.3.4. По опциону колл на **максимум из (цен) двух активов** при окончании его срока действия выплачивается сумма $\max(S_1(T), S_2(T))$. Постройте эквивалентную ему сделку с помощью позиции в одном из активов и опциона обмена.

Упражнение 15.3.5. Рассмотрим опцион колл на **минимум из (цен) двух активов с ценой исполнения X** . Заключительная выплата по нему равна $\max(\min(S_1(T), S_2(T)) - X, 0)$. Покажите, что этот опцион можно про-

дублировать с помощью длинной позиции по двум обычным опционам колл и одной короткой позиции по одному опциону колл на максимум из двух активов с одной и той же ценой исполнения X , заключительная выплата по которому равна $\max(\max(S_1(T), S_2(T)) - X, 0)$.

Упражнение 15.3.6 (теорема Эйлера). Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ однородна степени один по $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Упражнение 15.3.7. 1) Выведите формулу Марграбе, определяя Европейский опцион обмена несколько иначе, т.е. как опцион пут на базовый актив 1 с ценой исполнения, равной будущей стоимости актива 2.

2) Выведите формулу Блэка—Шоулса из формулы Марграбе.

Упражнение 15.3.8. Проверьте правильность выражения для дисперсии σ^2 из формулы Марграбе (15.5).

Упражнение 15.3.9 (паритет пут—колл). Докажите, что $V(S_2, S_1, t) - V(S_1, S_2, t) + S_2 = S_1$.

Упражнение 15.3.10. Выведите уравнение (15.6) из уравнения (15.4).

15.3.6 Опционы на иностранную валюту и активы

Опционы с корреляцией, охватывающие иностранную валюту и активы, впервые были затронуты в п. 11.5. Анализ таких опционов может быть проведен либо на местном рынке, либо начат на иностранном рынке и затем закончен конвертацией в местную валюту [734].

Ниже $S(t)$ обозначает текущий обменный курс, а точнее, задает стоимость одной единицы иностранной валюты в местной валюте. Из п. 11.5.1 мы знаем, что иностранная валюта аналогична акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность, равная безрисковой процентной ставке r_f в иностранной валюте. Следовательно, $S(t)$ описывается процессом геометрического броуновского движения, который в риск-нейтральной экономике удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{S} = (r - r_f) dt + \sigma_s dW_s(t).$$

Об иностранном активе также предполагается, что по нему выплачивается непрерывная дивидендная доходность q_f , а его цена в иностранной валюте удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG_f}{G_f} = (\mu_f - q_f) dt + \sigma_f dW_f(t).$$

Корреляция же между доходностью обменного курса и доходностью иностранного актива пусть равна ρ . Другими словами, пусть ρ является коэффициентом корреляции между dW_s и dW_f .

Опционы на иностранные обычные акции. В соответствии с формулой (9.20) стоимость Европейских опционов на иностранный актив G_f с заключительными выплатами $S(T) \times \max(G_f(T) - X_f, 0)$ и $S(T) \times \max(X_f - G_f(T), 0)$, соответственно, в иностранной валюте может быть

записана в виде

$$C_f = G_f e^{-q_f \tau} \Phi(x) - X_f e^{-r_f \tau} \Phi(x - \sigma_f \sqrt{\tau}),$$

$$P_f = X_f e^{-r_f \tau} \Phi(-x + \sigma_f \sqrt{\tau}) - G_f e^{-q_f \tau} \Phi(-x),$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(G_f/X_f) + (r_f - q_f + \sigma_f^2/2)\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}},$$

а X_f — цена исполнения в иностранной валюте. Естественно, в местной валюте эти стоимости можно записать в виде SC_f и SP_f , соответственно. Называются такие опционы **опционами на иностранные обычные акции** и со стоимостью, выраженной в иностранной валюте.

Упражнение 15.3.11. Формулы для C_f и P_f как бы говорят, что опцион на иностранные обычные акции эквивалентен S местным опционам на акции, по которым выплачивается непрерывная дивидендная доходность q_f , а цена исполнения равна $X_f e^{(r-r_f)\tau}$. Проверьте, что это действительно так.

Упражнение 15.3.12. Динамика стоимости иностранного актива в местной валюте SG_f зависит от корреляции между ценой актива и обменным курсом (см. пример 14.3.5).

1) Почему же коэффициент корреляции ρ отсутствует в указанных выше формулах для стоимости опциона?

2) Объясните эквивалентность утверждений из упр. 15.3.11 и первого пункта в этом упражнении.

Иностранный опцион в местной валюте. Стоимость опциона на иностранные обычные акции в основном задается в иностранной валюте. Однако рассмотрим такое развитие событий: хотя опцион колл на иностранные обычные акции и может позволить своему владельцу быть участником иностранного рынка, но прибыль от этой деятельности может улетучиться, если иностранная валюта обесценится по сравнению с местной валютой. Ну а что в таком случае действительно нужно, так это опцион колл в *местной* валюте с выплатой вида $\max(S(T)G_f(T) - X, 0)$. Называется такой инструмент **иностранным опционом в местной валюте**.

Для иностранных инвесторов этот опцион колл является опционом по обмену X единиц местной валюты (иностранной валюты для них) на один сертификат иностранного актива (местного актива для них) — если же кратко, то опционом обмена. По формуле (15.7) его цена в иностранной валюте равна

$$G_f e^{-q_f \tau} \Phi(x) - \frac{X}{S} e^{-r \tau} \Phi(x - \sigma \sqrt{\tau}),$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(G_f S/X) + (r - q_f + \sigma^2/2)\tau}{\sigma \sqrt{\tau}},$$

а $\sigma^2 \equiv \sigma_s^2 + 2\rho\sigma_s\sigma_f + \sigma_f^2$. И, следовательно, его цена в местной валюте равна $C = SG_f e^{-q_f \tau} \Phi(x) - X e^{-r \tau} \Phi(x - \sigma \sqrt{\tau})$.

Аналогично, цена опциона пут

$$P = X e^{-r \tau} \Phi(-x + \sigma \sqrt{\tau}) - SG_f e^{-q_f \tau} \Phi(-x).$$

Упражнение 15.3.13. Предположим, что цены местной и иностранной облигаций в соответствующих валютах с номиналом единица и погашением в момент T описываются процессами геометрического броуновского движения. И пусть их текущие цены равны B и B_f , соответственно. Определите стоимость форексного опциона на покупку одной единицы иностранной валюты за X единиц местной валюты в момент времени T (этот результат обобщает формулу (11.6), при выводе которой предполагалось, что процентные ставки фиксированы).

Опционы перекрестных валют. Опционом перекрестных валют, напомним, называется опцион, цена исполнения которого задается в валюте, отличной от той, в которой номинирован базовый актив [775]. Опцион на покупку 100 йен по цене исполнения 1,18 Канадских долларов представляет собой пример такого опциона. При этом обычно в расчеты вовлекается третья валюта, доллар США, по причине отсутствия торгуемых на бирже подходящих опционов по двум рассматриваемым валютам (йены и Канадского доллара в приведенном выше примере), нужных для расчета требуемой волатильности. По этой причине используемые ниже обозначения будут немного отличаться от стандартных.

Пусть S_A обозначает цену иностранного актива, а S_C — цену валюты C , в которой выражена цена исполнения X . И пусть обе цены, S_A и S_C заданы, скажем, в долларах США. Тогда, если S — цена иностранного актива, выраженная в валюте C , то у нас возникает равенство, называемое **треугольный арбитраж**: $S = S_A/S_C$. Предположим далее, что обе цены, S_A и S_C , представляют собой процессы геометрического броуновского движения, удовлетворяющие уравнениям $dS_A/S_A = \mu_A dt + \sigma_A dW_A$ и $dS_C/S_C = \mu_C dt + \sigma_C dW_C$, соответственно. Параметры σ_A , σ_C и ρ могут быть использованы от опционов, торгуемых на бирже. И тогда, используя

$$\frac{dS}{S} = (\mu_A - \mu_C - \rho\sigma_A\sigma_C)dt + \sigma_A dW_A - \sigma_C dW_C,$$

где ρ — коэффициент корреляции между dW_A и dW_C . Поэтому волатильность (доходности) dS/S равна $(\sigma_A^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_C + \sigma_C^2)^{1/2}$.

Упражнение 15.3.14. Проверьте, что равенство «треугольный арбитраж» должно иметь место, чтобы исключить арбитражные возможности между тремя валютами.

Упражнение 15.3.15. Покажите, что форексные опционы и иностранные опционы в местной валюте являются частными случаями опционов перекрестных валют.

Упражнение 15.3.16. Рассмотрим портфель, состоящий из одного длинного опциона колл на иностранный актив и X длинных опционов пут на валюту C . При этом цены исполнения в долларах США у опциона колл (X_A) и пут (X_C) таковы, что $X = X_A/X_C$. Докажите, что стоимость такого портфеля больше стоимости опциона колл из перекрестных валют, если все опционы Европейские (у опциона колл из перекрестных валют заключительная выплата в долларах США имеет вид $S_C \times \max(S - X, 0)$).

Квантовый опцион. Рассмотрим опцион колл с заключительной выплатой, которая в местной валюте имеет вид $\hat{S} \times \max(G_f(T) - X_f, 0)$, где $\hat{S}$ — постоянная. Фактически это означает фиксацию обменного курса на уровне $\hat{S}$. К примеру, опцион колл на фьючерс по индексу Nikkei 225, если бы он существовал, подходил бы под эту схему с $\hat{S} = 5$ и G_f , обозначающей цену фьючерса. Опцион с гарантированным обменным курсом называется **квантовым опционом** или просто **квантом**. Процесс $U \equiv \hat{S}G_f$ в риск-нейтральной экономике и местной валюте удовлетворяет уравнению [470, 878]

$$\frac{dU}{U} = (r_f - q_f - \rho\sigma_s\sigma_f)dt + \sigma_f dW. \quad (15.8)$$

Поэтому его можно рассматривать как цену акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность $q \equiv r - r_f + q_f + \rho\sigma_s\sigma_f$. Применим формулу (9.20) и получим, что

$$\begin{aligned} C &= \hat{S}[G_f e^{-q\tau} \Phi(x) - X_f e^{-r\tau} \Phi(x - \sigma_f \sqrt{\tau})], \\ P &= \hat{S}[X_f e^{-r\tau} \Phi(-x + \sigma_f \sqrt{\tau}) - G_f e^{-q\tau} \Phi(-x)], \end{aligned}$$

где

$$x \equiv \frac{\ln(G_f/X_f) + (r - q + \sigma_f^2/2)\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}.$$

Отметим, что указанные стоимости не зависят от обменного курса.

Вообще же говоря, номинальные выплаты по **квантовому производному инструменту** производятся в иностранной валюте, которая затем конвертируется в местную валюту по фиксированному обменному курсу. **Своп с перекрестными ставками**, например, подобен валютному свопу, но за исключением того, что выплаты в иностранной валюте конвертируются в местную по фиксированному обменному курсу. Квантовые производные инструменты образуют быстро растущий сегмент на международных финансовых рынках [17].

Упражнение 15.3.17. Объясните появление уравнения (15.8).

15.3.7 Конвертируемые облигации с правом отзыва

При отзыве конвертируемой облигации (КО) с правом отзыва, у ее владельца есть право конвертировать облигацию (**вынужденная конверсия**), либо погасить ее по цене отзыва. Предположим, что инвестор и фирма преследуют оптимальную стратегию, в которой 1) инвестор максимизирует стоимость КО для каждого момента времени при помощи рычага конверсии, а 2) фирма минимизирует стоимость КО для каждого момента времени, используя отзыв.

Предположим, что рыночная стоимость всех ЦБ фирмы $V(t)$ определяется «внешними силами» и независимо от стратегий отзыва и конверсии, что может быть оправдано **теоремой непричастности Модильяни—Миллера**. Тем самым минимизация стоимости КО будет максимизировать стоимость акционерного капитала. Рыночная стоимость ценных бумаг удовлетворяет уравнению $dV/V = \mu dt + \sigma dW$. Предположим, что

у рассматриваемой фирмы есть лишь два типа облигаций: n экземпляров обычных акций и m КО с отношением конверсии k^*). Причем по акциям могут выплачиваться дивиденды, а по облигациям — проценты по купонам. **Стоимость конверсии** на одну облигацию определяется равенством

$$C(V, t) = zV(t),$$

где $z \equiv k/(n + mk)$. Номинал каждой облигации равен \$ 1000, а T исполняет роль момента погашения.

Пусть далее $W(V, t)$ означает рыночную стоимость одной КО на момент t . Тогда по условию (1) облигация никогда не продается ниже, чем по стоимости конверсии, т. е.

$$W(V, t) \geq C(V, t). \quad (15.9)$$

В действительности облигация никогда не может быть продана по стоимости конверсии, за исключением момента, непосредственно предшествующего выплате дивидендов. Это объясняется тем, что в противном случае ее доходность вплоть до следующей выплаты дивидендов не упадет ниже доходности акций; а на самом деле она будет выше по причине приоритетности прав держателей облигаций. Следовательно, облигация продается по цене выше стоимости конверсии и инвестор не конвертирует ее. Как следствие, соотношение (15.9) в промежутке между выплатами дивидендов выполняется со знаком строгого неравенства и потому конверсию следует рассматривать лишь в моменты выплаты дивидендов или отзыва.

Рассмотрим теперь последствия стратегии отзыва. Если облигация отзывается, то инвестор имеет право либо погасить ее по цене отзыва $P(t)$, либо конвертировать за $C(V, t)$. Стоимость облигации при отзыве поэтому задается выражением

$$V_c(V, t) \equiv \max(P(t), C(V, t)).$$

И есть два случая, которые следует рассмотреть.

1. **Если облигация отзывная** и $C(V, t) > P(t)$. В этом случае облигация будет отозвана немедленно, поскольку в силу высказанного выше облигация продается по цене, не меньшей стоимости конверсии $C(V, t)$, которая и будет стоимостью при отзыве. Поэтому

$$W(V, t) = C(V, t). \quad (15.10)$$

2. **Если облигация отзывная** и $C(V, t) \leq P(t)$. Заметим, что в этом случае цена отзыва равна стоимости при отзыве, величине V_c . И облигацию следует отозвать, если ее стоимость без отзыва равна ее стоимости при отзыве. Это верно потому, что в соответствии с предположением (2) фирма отзовет облигацию, если стоимость без отзыва превысит значение $V_c(V, t)$, и не отзовет в противном случае. Поэтому

$$W(V, t) \leq V_c(V, t) = P(t), \quad (15.11)$$

и облигация будет отозвана, если ее стоимость без отзыва равна цене отзыва.

*) Напоминаем, что отношение или коэффициент конверсии определяет число обычных акций, получаемых при конверсии за одну КО. — Прим. перев.

Наконец, из дифференциального уравнения Блэка—Шоулса вытекает, что

$$\frac{\partial W}{\partial t} + rV \frac{\partial W}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial V^2} = rW.$$

Граничные же условия этого дифференциального уравнения собраны и приведены ниже.

- Они включают в себя прежде всего неравенство (15.9), равенство (15.10) и соотношения (15.11) (последние две зависимости в случае, когда облигация отзывная и при соответствующих им условиях), а также стоимость погашения

$$W(V, T) = \begin{cases} zV(T), & \text{если } zV(T) \geq 1000, \\ 1000, & \text{если } 1000 \times m \leq V(T) \leq 1000/z, \\ V(T)/m, & \text{если } V(T) \leq 1000 \times m. \end{cases}$$

Указанные здесь три условия соответствуют случаям, когда совокупная стоимость фирмы 1) больше полной стоимости конверсии, 2) больше совокупного номинала, но меньше полной стоимости конверсии и 3) меньше совокупного номинала, соответственно.

- $0 \leq mW(V, t) \leq V(t)$, поскольку стоимость облигаций не может превосходить стоимость фирмы.

- $W(0, t) = 0$.

- $W(V, t) \leq B(V, t) + zV(t)$, поскольку стоимость КО ограничена сверху стоимостью портфеля из в остальном таких же облигаций с фиксированной доходностью $B(V, t)$ и акционерного капитала с совокупной стоимостью, равной стоимости конверсии. Величину $B(V, t)$ при постоянных процентных ставках легко вычислить.

- Если облигация неотзывная и величина $V(t)$ достаточно велика, чтобы возможность дефолта оказалась пренебрежимо малой, то она ведет себя подобно опциону на покупку доли z фирмы. Тем самым $\lim_{V \rightarrow \infty} \partial W(V, t) / \partial V = z$.

- При выплате дивидендов $W(V, t^-) = \max(W(V - D, t^+), zV(t))$, где t^- означает момент непосредственно предшествующий событию, а t^+ означает момент сразу за ним. Это условие учитывает случай конверсии непосредственно перед выплатой дивидендов.

- $W(V, t^-) = W(V - mc, t^+) + c$ на момент оплаты купонов в случае, когда облигация неотзывная; здесь c означает величину купона.

- $W(V, t^-) = \min(W(V - mc, t^+) + c, V_c(V, t))$ на момент оплаты купона в случае отзывной облигации.

Указанное дифференциальное уравнение в частных производных следует решать приближенными методами, которые описаны в п. 18.2.1.

Упражнение 15.3.18. Предположим, что КО оказывается непрерывно отзываемой, как только она становится отзывной, и означает это, что она может быть отозвана в любой момент после определенного момента времени t^* . Мотивируйте тот факт, что случай $C(V, t) > P(t)$ следует рассматривать лишь при $t = t^*$, а после этого без цели отзыва (поэтому $W(V, t^-) = \min(W(V - mc, t^+) + c, P(t))$ при любой дате оплаты купона $t > t^*$).

15.4 Оценка стоимости производного инструмента общего вида

Вообще говоря, может случиться, что базовым активом S не торгуют. Скажем, процентная ставка не является торгуемой ценной бумагой, в отличие от акций и облигаций. Пусть далее S описывается процессом Ито $dS/S = \mu dt + \sigma dW$, где μ и σ могут зависеть лишь от S и t . И пусть $f_1(S, t)$ и $f_2(S, t)$ представляют цены двух производных инструментов с динамикой $df_i/f_i = \mu_i dt + \sigma_i dW$, $i = 1, 2$. Отметим, что при их описании используется тот же самый винеровский процесс, что и при описании S .

Портфель, состоящий из $\sigma_2 f_2$ единиц первого производного инструмента и $-\sigma_1 f_1$ единиц второго является мгновенно безрисковым, поскольку

$$\sigma_2 f_2 df_1 - \sigma_1 f_1 df_2 = \sigma_2 f_2 f_1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW) - \sigma_1 f_1 f_2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dW) = \\ = (\sigma_2 f_2 f_1 \mu_1 - \sigma_1 f_1 f_2 \mu_2) dt,$$

и это лишает его волатильности. Следовательно,

$$(\sigma_2 f_2 f_1 \mu_1 - \sigma_1 f_1 f_2 \mu_2) dt = r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2) dt,$$

или $\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2 = r(\sigma_2 - \sigma_1)$. После перегруппировки слагаемых мы заключаем, что

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \equiv \lambda \quad \text{при некотором } \lambda.$$

Итак, для произвольного производного инструмента, чья стоимость зависит лишь от S и t и удовлетворяет уравнению $df/f = \mu dt + \sigma dW$, описывающему процесс Ито, должно выполняться тождество

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \quad \text{или, что то же самое,} \quad \mu = r + \lambda \sigma. \quad (15.12)$$

Мы называем λ **рыночной ценой риска**, которая не зависит от специфики производного инструмента. Равенство (15.12) связывает дополнительный ожидаемый доход с риском. А слагаемое $\lambda \sigma$ характеризует ту степень, в которой требуемый доход определяется зависимостью от S .

Лемму Ито можно использовать для того, чтобы вывести формулы для μ и σ :

$$\mu = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right), \quad \sigma = \sigma S f \frac{\partial f}{\partial S}.$$

Вставим полученные уравнения в равенство (15.12) и получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mu - \lambda \sigma) S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f. \quad (15.13)$$

Присутствие величины μ в этом уравнении показывает, что предпочтения инвестора относительно риска имеют значение, а стоимость производного инструмента может зависеть от степени роста стоимости базового

актива и рыночной цены риска. При оценке стоимости можно предполагать, что $\mu = r$, но только если базовой переменной является цена торгуемой ценной бумаги.

При выполнении некоторых условий, таких, как марковость рассматриваемых процессов, подход к оценке стоимости производных инструментов с помощью решения дифференциальных уравнений в частных производных эквивалентен мартингалному подходу, в котором берется математическое ожидание по риск-нейтральной вероятностной мере [290, 692]. Фундаментальная теорема оценки стоимости активов, теорема 13.2.3, а также и другие результаты из п.13.2.1, продолжают оставаться в силе и в случае непрерывного времени. Это подсказывает следующую схему риск-нейтральной оценки стоимости для уравнения (15.13): нужно дисконтировать математическое ожидание выплаты f по безрисковой процентной ставке и при скорректированном процессе $dS/S = (\mu - \lambda\sigma) dt + \sigma dW$. И, хотя мы по-прежнему используем прежний символ W , в соответствии с договоренностью делать это на протяжении всей книги для удобства, но важно подчеркнуть, что W больше не является первоначальным винеровским процессом. В действительности произошла замена меры и теперь W есть винеровский процесс по отношению к этой новой риск-нейтральной вероятностной мере.

Предположим, что процентная ставка r постоянна. Тогда стоимость произвольной ценной бумаги Европейского типа с выплатой f_T в момент T равна $e^{-r(T-t)} E_t^\pi f_T$ на момент t , где символ E_t^π означает математическое ожидание по вероятностной мере π и при данной информации, накопившейся к моменту времени t . В качестве конкретного примера рассмотрим получение цены фьючерса F . При цене поставки X , стоимость фьючерсного контракта описывается выражением $f = e^{-r(T-t)} E_t^\pi (S_T - X)$. И поскольку F определяется как то X , при котором f обращается в нуль, то выполняются равенства $0 = E_t^\pi (S_T - F) = E_t^\pi S_T - F$, т.е. $F = E_t^\pi [S_T]$. Это обобщает результат, полученный в упр. 13.2.10 для биномиальной модели, на случай непрерывного времени.

Упражнение 15.4.1. Предположим, что цены $S_1, S_2, \dots, S_n$ удовлетворяют уравнениям $dS_i/S_i = \mu_i dt + \sigma_i dW_i$ и дивиденды по соответствующим акциям не выплачиваются. Пусть ρ_{jk} обозначает коэффициент корреляции между dW_j и dW_k . Покажите, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k S_i S_k \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_k} = r f, \quad (15.14)$$

если стоимость производного инструмента f зависит от нескольких переменных состояния $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Упражнение 15.4.2. Опцион, стартующий (через некоторое время) в будущем, напоминает стандартный опцион, за исключением того, что реально он начинает действовать лишь через некоторое время τ^* , причем с ценой исполнения, которая полагается равной текущей цене акции в этот момент (таким образом, опцион стартует при своих). Пусть $C(S)$

обозначает стоимость стартующего в будущем Европейского опциона колл при своих, при данной цене акции S .

1) Покажите, что в модели Блэка—Шоулса $C(S)$ является линейной функцией S .

2) Аргументируйте тот факт, что стоимость опциона стартующего в будущем равна $e^{-r\tau^*}C(E^\pi(S(\tau^*))) = e^{-r\tau^*}C(Se^{(r-q)\tau^*})$, где q — дивидендная доходность.

15.5 Стохастическая волатильность

Формула Блэка—Шоулса все-таки демонстрирует расхождение с практикой. Как и в примере «улыбки», упомянутом в п. 9.4.3, 1) волатильность меняется от месяца к месяцу, при этом 2) она возвратна в среднем в том смысле, что от своих крайних значений переходит со временем к средним, 3) представляется, что она падает, когда цена базового актива растет [346, 823], и 4) опционы вне денег и опционы по активам с низкой волатильностью недооцениваются. Эти факты и заставляют изучать стохастическую волатильность.

Стохастическая волатильность привносит в рассмотрение дополнительную дозу случайности, если эта неопределенность не коррелирует жестко со случайным источником, управляющим ценой акции. В этом случае для получения эквивалентного портфеля требуется использовать еще одну торгуемую ЦБ, наряду с акцией и облигацией. В действительности, если бы волатильность была ценой торгуемой ЦБ, то существовала бы самофинансируемая стратегия, которая бы позволила воспроизвести опцион с помощью акций, облигаций и ЦБ волатильности.

Халл и Уайт рассмотрели следующую модель:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1, \quad \frac{dV}{V} = \mu_v dt + \sigma_v dW_2,$$

где $V \equiv \sigma^2$ является мгновенной дисперсией [471]. Предположим, что μ зависит от S , σ и t , что μ_v зависит от σ и t (но не от S), что dW_1 и dW_2 имеют коэффициент корреляции ρ , а также, что безрисковая ставка r постоянна. Тогда из уравнения (15.14) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)S \frac{\partial f}{\partial S} + (\mu_v - \lambda_v\sigma_v)V \frac{\partial f}{\partial V} + \\ + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma\sigma_v S V \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \sigma_v^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right) = rf. \end{aligned}$$

Поскольку акция является торгуемой ЦБ (а волатильность не является), то предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + (\mu_v - \lambda_v\sigma_v)V \frac{\partial f}{\partial V} + \\ + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma\sigma_v S V \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \sigma_v^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right) = rf. \end{aligned}$$

Если дополнительно предположить еще, что $\rho = 0$ (т. е. что волатильность некоррелирована с ценой акции) и $\lambda_v\sigma_v = 0$ (т. е. систематический риск

у волатильности нулевой), то это уравнение принимает следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \mu_v V \frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \sigma_v^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right) = rf.$$

Для такой модели имеется решение в виде ряда.

Мы предположили, что риск волатильности не оценивается [579]. Если же предполагать противное, то потребуется моделировать премию за риск для процесса дисперсии [440]. В случае же, когда волатильность описывается некоррелированным процессом Орнштейна—Уленбека, существует решение в виде конкретной формулы [823].

Дополнительная литература

Строгий вывод дифференциального уравнения Блэка—Шоулса можно найти в [681]. О дифференциальных уравнениях в частных производных можно почитать в [212, 408, 446, 861, 883], об аппроксимации границы досрочного исполнения — в [531], о выводе формулы Марграбе, основанном на биномиальной модели — в [769], об опционах, связанных с валютой — в [575, 744, 746, 894], об оценке стоимости КО — в [122, 221, 491, 697], о расхождении с практикой результатов, полученных в модели Блэка—Шоулса оценки стоимости опционов — в [424, 470, 615]. При изложении п. 15.3.7 мы следовали [120]. Мартингальная оценка стоимости в случае непрерывного времени опирается на известный результат о замене вероятностной меры, который называется **теорема Гирсанова** [289]. Тот факт, что модели, использующие стохастическую волатильность, могут привести к некоторому улучшению оценки стоимости, был проверен эмпирически в [44]. В тех случаях, когда использование модели Блэка—Шоулса сопровождалось разумными эмпирическими исследованиями, оказывалось, однако, что выигрыш от использования сложных моделей весьма невелик [526]. Интригующим является и тот факт, что формула Блэка—Шоулса продолжает иметь место, пока все биржевые маклеры верят, что цены акций распределены логнормально, даже если эта вера объективно и ошибочна [194].

Примечание

1. Треугольный арбитраж был известен на протяжении веков. См. *Дух законов* Монтескье [676, с. 179].

Существует ли *мгновенный куб*?

Х. Г. Уэллс,

Машина времени

Хеджирующие стратегии*) встречаются на протяжении всей книги. И этого следовало ожидать, поскольку одно из основных направлений использования производных инструментов сводится к управлению риском. Внимание в этой главе фокусируется на хеджировании с использованием производных инструментов, не связанных с процентной ставкой. Производные инструменты на процентной ставке будут рассмотрены в гл. 21.

16.1 Введение

Одной из общих нитей, пронизывающих текст всей книги, является управление рисками. **Управление риском** означает подбор портфелей с заранее определенной подверженностью к тем или иным рискам и поддержание их на этом уровне подверженности в течение некоторого времени. Кстати, решение вопроса о том, кто каким рискам подвержен и от каких рисков его следует защитить, и составляет неотъемлемую часть управления риском. Статистика свидетельствует о том, что фирмы, уделяющие внимание управлению рисками, не только меньше подвержены риску, но и добиваются более высоких результатов [813].

Хедж — это позиция, которая компенсирует риск цены в другой позиции. Хедж уменьшает подверженность риску или даже устраняет ее, если элементы построенного в нем денежного потока окажутся равными по величине, но противоположными по знаку тем суммам, которые подвержены риску. Чтобы хеджирование оказалось возможным, доходность производного инструмента должна коррелировать с доходностью хеджирующей позиции. В действительности, чем более коррелированы их доходности, тем более эффективным окажется хеджирование.

На рынке действуют три типа торговцев или биржевых маклеров. **Хеджеры** подбирают позиции, позволяющие компенсировать рискованные позиции на спот-рынке. **Спекулянты** играют на движении цен и надеются получить прибыль именно таким образом. **Арбитражеры**)** нацеливаются

*) Хеджирующие стратегии используются для уменьшения рисков, связанных с капиталовложениями. Скажем, акционер, которого беспокоит понижение цены его акций, может защитить свои ЦБ (прохеджировать их), покупая опцион пут на них или продавая опцион колл. — Прим. перев.

**) Физические лица или фирмы, занимающиеся арбитражем, т.е. пытающиеся получить прибыль на разнице в стоимости одного и того же товара или одной и той же ценной бумаги на разных рынках. — Прим. перев.

ся на безрисковую прибыль, непрерывно заключая сделки по двум или большему числу рынков, т. е. занимаются деятельностью, которая и называется «арбитраж».

16.2 Хеджирование и фьючерсы

Наиболее простой способ хеджирования использует форвардные контракты. Дело в том, что фьючерсные контракты, по причине ежедневных урегулирований труднее анализировать, чем форвардные контракты. К счастью, форвардные и фьючерсные цены, вообще говоря, близки друг к другу; поэтому в этой книге мы будем считать результаты, полученные для форвардов, имеющими силу и для фьючерсов.

16.2.1 Фьючерсные цены и спот-цены

Есть две причины, которые мешают ценам, существующим на спот-рынке и фьючерсном рынке, слишком сильно отличаться, причем в любой момент времени. Одной из них является механизм поставки, а другой — хеджирование. Хеджирование связывает фьючерсную цену и спот-цену с помощью арбитража. В действительности, фьючерсная цена должна равняться спот-цене плюс нагрузка переноса. Напомним, что нагрузкой переноса называется стоимость физического содержания инвентаризации между настоящим моментом и сроком окончания фьючерсного контракта. На практике, однако, фьючерсная цена необязательно превосходит спот-цену точно на величину нагрузки переноса, поскольку бывает, что инвентаризация отличается тем, что Кальдор (1908—1986) охарактеризовал как доходность удобства, которое определяется наличием товара тогда, когда покупатели в нем нуждаются [468].

16.2.2 Хеджеры, спекулянты и арбитражеры

Компания, которая обязалась продать актив в будущем, может прохеджировать свою позицию занятием короткой фьючерсной позиции. Этот маневр известен под названием **продажный** или **короткий хедж**. Его целью является фиксация продажной цены, или доходности — для ценной бумаги (ЦБ) с фиксированной доходностью. И если цена актива пойдет вниз, то при его продаже компания будет себя чувствовать не очень хорошо, но она получит прибыль от занятия короткой фьючерсной позиции. Если же цена актива пойдет вверх, то получится противоположный эффект. Ясно, что продажный хедж является заменителем более поздней продажи актива на рынке наличных. Компания же, которая обязана купить некоторый актив в будущем, может прохеджировать свою позицию занятием длинной фьючерсной позиции. А этот маневр известен под названием **хедж покупки** или **длинный хедж**. Ясно, что хедж покупки используется тогда, когда кто-то планирует закупить актив за наличные несколько позже. И делается это с целью зафиксировать цену

покупки. Работают же такие стратегии потому, что спот-цены и фьючерсные цены коррелированы.

О человеке, который выигрывает или теряет на разнице между спот-ценой и фьючерсной ценой говорят, что он **спекулирует на базисе**. Одновременная покупка и продажа фьючерсных контрактов по двум различным, но связанным друг с другом активам характеризуется как **спрэд**. Лицо, которое спекулирует на спреде, называется **игроком на спреде** [95, 799]. Хеджер — это тот, у кого занимаемая позиция на спот-рынке компенсируется позицией на фьючерсном рынке. **Короткий хеджер** занимает длинную позицию на спот-рынке и короткую на фьючерсном рынке. **Длинный хеджер** совершает противоположные действия. Те, кто занимает только длинную или только короткую позицию, являются спекулянтами. Спекулянты купят (продадут) фьючерсный контракт только тогда, когда они ожидают повышения цены (соответственно, ее понижения). Для сравнения, хеджеры готовы заплатить премию за то, чтобы «переложить» нежелательный риск на спекулянтов. Последние обеспечивают рынок наличными, давая возможность хеджерам заключать большое число контрактов, не слишком сильно влияя на цены так, чтобы это вам вредило.

Если суммарно хеджеры занимают короткую позицию, то спекулянты занимают длинную, а фьючерсная цена устанавливается ниже ожидаемой спот-цены в будущем. С другой стороны, если в основном хеджеры длинные, то спекулянты оказываются короткими, а фьючерсная цена устанавливается выше ожидаемой фьючерсной спот-цены. Представляется, что есть данные, позволяющие говорить, что короткого хеджирования больше, чем длинного на большинстве рынков и большую часть времени. Если же хеджеры суммарно занимают короткую позицию по фьючерсам, то спекулянты должны занимать длинную. Теоретически как бы установлено, что спекулянты будут суммарно длинными, лишь если ожидается, что фьючерсные цены будут подниматься, прежде чем сравняются со спот-ценой при окончании срока; поэтому спекулянты и «вырывают» у хеджеров премию за риск. Это и есть теория **нормального запаздывания** Кейнса, которая утверждает, что фьючерсная цена недооценивает будущую спот-цену [295, 468, 470].

Упражнение 16.2.1. Если фьючерсная цена равна ожидаемой спот-цене в будущем, то хеджирование может в определенном смысле рассматриваться как «бесплатный обед». Приведите свои аргументы.

16.2.3 Совершенное и несовершенное хеджирование

Рассмотрим инвестора, планирующего продать актив через t лет. Чтобы устранить некоторую неопределенность в цене, этот инвестор продает фьючерсные контракты на тот же актив с поставкой через T лет. По прошествии t лет, инвестор ликвидирует свою фьючерсную позицию и продает актив, как и планировал. Денежный поток этого момента имеет вид

$$S_t - (F_t - F) = F + (S_t - F_t) = F + \text{базис},$$

где S_t — спот-цена момента t , F_t — фьючерсная цена этого момента, а F —

первоначальная фьючерсная цена. Тем самым инвестор заменил неопределенность цены меньшей неопределенностью базиса; и как следствие уменьшил риск. Хедж является **совершенным**, если $t = T$, т.е. когда существует фьючерсный контракт с такой же датой поставки.

Когда стоимость переноса и доходность удобства известны, то денежный поток может быть спрогнозирован с полной уверенностью в соответствии с формулой (12.13). И это положение сохраняется даже в случае несовпадения моментов погашения, т.е. если $t \neq T$, до тех пор, пока

- 1) процентная ставка r известна, а
- 2) стоимость переноса c и доходность удобства y постоянны.

В этом случае $F_t = S_t e^{(r+c-y)(T-t)}$ в силу (12.11). Пусть h — число фьючерсных контрактов, проданных первоначально. Тогда денежный поток момента t после ликвидации фьючерсной позиции и продажи актива может быть представлен в виде

$$S_t - h(F_t - F) = S_t - h[S_t e^{(r+c-y)(T-t)} - F].$$

Выберем $h = e^{-(r+c-y)(T-t)}$, чтобы сделать указанный денежный поток постоянным и равным hF , чтобы устранить всякую неопределенность. Число h представляет собой коэффициент хеджирования. Отметим, что $h = 1$ может и не быть наилучшим вариантом, если $t \neq T$.

Большое число факторов делает хеджирование с помощью фьючерсных контрактов не совсем совершенным. Актив, чью стоимость следует прохеджировать, может не быть идентичен базовому активу фьючерсного контракта; дата заключения сделки с активом может быть неопределенной; в условия хеджа может быть включено требование по прекращению действия фьючерсного контракта до окончания его срока жизни. Эти проблемы порождают базисный риск. Но, как показано выше, базисный риск не существует в ситуациях, в которых спот-цена, связанная с фьючерсной ценой, изменяется предсказуемым образом.

Перекрестный хедж. Хедж, у которого по разным позициям разные сроки окончания, отличающиеся активы или одновременно есть и то и другое, называется **перекрестным хеджем** [746]. Перекрестные хеджи — обычное дело. Скажем, если фирма желает защитить (прохеджировать) себя от невыгодного движения цен по товару, для которого не существует фьючерсных контрактов, то она может обратиться к фьючерсным контрактам по аналогичным товарам, движение цен по которым жестко коррелирует с ценой, которую хотят защитить.

Пример 16.2.1. Мы можем прохеджировать будущую цену покупки 10 000 000 голландских флоринов следующим образом. Предположим, что текущий обменный курс есть \$0,48 США за флорин. По этому курсу цена покупки в долларах равна \$ 4 800 000 США. Регрессионный анализ дневных изменений курса флорина и близких к нему цен фьючерсов по немецкой марке показывает, что оцениваемый наклон линейной регрессии равен 0,95 с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,92$. Ну и поскольку флорин сильно коррелирует с немецкой маркой, то выбирается фьючерс по немецкой марке. Текущий обменный курс здесь есть \$0,55/DEM 1;

поэтому обязательство в 10 000 000 флоринов сводится к $4\,800\,000/0,55 = 8\,727\,273$ немецких марок. Поскольку каждый фьючерсный контракт контролирует 125 000 марок, то мы заключаем $0,95 \times (8\,727\,273/125\,000) \approx 66$ контрактов. $\triangleleft$

Пример 16.2.2. Британская фирма, которой предстоит оплатить за покупки через 3 месяца 2 000 000 немецких марок, хотела бы зафиксировать цену в фунтах. Наряду со стандартным способом, использующим фьючерсные контракты по марке, которые продаются за фунты, фирма может заключить фьючерсные контракты по марке и фунтам, которые продаются за доллары США, следующим образом. Каждый фьючерсный контракт по марке контролирует 125 000 марок, а каждый фьючерсный контракт по фунтам охватывает 62 500 фунтов. Предположим, что дата оплаты совпадает с последним торговым днем фьючерсных контрактов по валюте на СМЕ. В настоящий момент цена 3-месячного фьючерсного контракта по марке равна \$0,7147, а цена фьючерсного контракта по фунту составляет \$1,5734. Фирма покупает $2\,000\,000/125\,000 = 16$ фьючерсных контрактов по марке, фиксируя цену покупки на уровне \$1 429 400. Чтобы затем зафиксировать цену покупки в фунтах по обменному курсу \$1,5734/£1, фирма продает из короткой позиции $1\,429\,400/(1,5734 \times 62\,500) \approx 15$ фьючерсных контрактов по фунту. Конечным результатом является покупная цена $2\,000\,000 \times (0,7147/1,5734) = 908\,478$ фунтов при перекрестном обменном курсе £0,45424/DEM1. $\triangleleft$

Коэффициент хеджирования (дельта). Вообще говоря, фьючерсный контракт может и не суметь отслеживать актив за наличные достаточно хорошо. Пусть ρ обозначает коэффициент корреляции между S_t и F_t , δ_S — стандартное отклонение у S_t и δ_F — стандартное отклонение у F_t . При коротком хедже денежный поток момента t равен $S_t - h(F_t - F)$, в то время как у длинного хеджа его следует записывать в виде $-S_t + h(F_t - F)$. Дисперсия в обоих случаях равна величине $V \equiv \delta_S^2 + h^2 \delta_F^2 - 2h\rho\delta_S\delta_F$. Чтобы минимизировать риск, хеджер ищет значение коэффициента хеджирования h , которое минимизирует значение дисперсии V у денежного потока хеджируемой позиции. Поскольку $\partial V/\partial h = 2h\delta_F^2 - 2\rho\delta_S\delta_F$, то

$$h = \rho \frac{\delta_S}{\delta_F} = \frac{\text{Cov}(S_t, F_t)}{DF_t}, \quad (16.1)$$

и это значение в упр. 6.4.1 было названо бета.

Пример 16.2.3. Предположим, что стандартное отклонение изменения цены бушеля зерна на протяжении 3-месячного периода равно 0,4, а стандартное отклонение изменения цены фьючерса по соевым бобам за 3 месяца равно 0,3. Предположим далее, что коэффициент корреляции между изменением цены зерна за 3 месяца и изменением цены фьючерса на соевые бобы за 3 месяца равен 0,9. Оптимальное значение коэффициента хеджирования равно $0,9 \times (0,4/0,3) = 1,2$. Поскольку объем одного фьючерсного контракта по соевым бобам составляет 5000 бушелей, то компания, намеревающаяся купить 1 000 000 бушелей зерна через 3 месяца, может прохеджировать эту операцию, закупив $1,2 \times (1\,000\,000/5000) = 240$ фьючерсных контрактов по соевым бобам. $\triangleleft$

Отношение хеджирования можно оценить следующим образом. Предположим, что $S_1, S_2, \dots, S_t$ и $F_1, F_2, \dots, F_t$ представляют собой ежедневные цены закрытия, а точнее, спот-цены и цены фьючерсов, соответственно. Положим $\Delta S_i \equiv S_{i+1} - S_i$ и $\Delta F_i \equiv F_{i+1} - F_i$. А далее оцениваем ρ , δ_S и δ_F по формулам (6.2) и (6.18).

Упражнение 16.2.2. Покажите, что если линейная регрессия s по f на основании данных

$$(\Delta S_1, \Delta F_1), (\Delta S_2, \Delta F_1), \dots, (\Delta S_{t-1}, \Delta F_{t-1})$$

описывается выражением $s = \beta_0 + \beta_1 f$, то β_1 представляет собой оценку для коэффициента хеджирования из (16,1).

16.2.4 Хеджирование с помощью фьючерсов на индексы акций

Для хеджирования хорошо диверсифицированного портфеля из акций можно использовать фьючерсы на индексы акций. В соответствии с моделью оценки стоимости финансовых активов (CAPM) связь между доходностью портфеля из акций и доходностью рынка можно описать с помощью параметра β , так и называемого «бета». В приближенной форме эта связь имеет вид

$$\Delta_1 = \alpha + \beta \times \Delta_2,$$

где Δ_1 (Δ_2) представляет изменение в стоимости \$1 в течение периода владения портфелем, если он вложен в портфель (или рыночный индекс, соответственно), и α — некоторая постоянная. Следовательно, изменение в стоимости портфеля за указанный период равно $S \times \alpha + S \times \beta \times \Delta_2$, где S обозначает текущую стоимость портфеля. Изменение в стоимости одного фьючерсного контракта со сроком окончания в конце периода владения приблизительно равно величине $F \times \Delta_2$, где F — текущая стоимость одного фьючерсного контракта. Напомним, что стоимость одного фьючерсного контракта равна цене фьючерса, умноженной на объем фьючерсного контракта. Например, если цена фьючерса на индекс S&P 500 равна 1000, то стоимость одного фьючерсного контракта равна $1000 \times 500 = 500\,000$.

Неопределенная компонента $S \times \beta \times \Delta_2$ из величины, характеризующей изменение стоимости портфеля, приблизительно равна величине $\beta S / F$, умноженной на изменение в стоимости одного фьючерсного контракта, $F \times \Delta_2$. Таким образом, число фьючерсных контрактов, по которым следует занять короткую позицию при хеджировании портфеля, равно $\beta S / F$. Эта стратегия называется **иммунизацией портфеля**. И ту же идею можно использовать для изменения значения бета портфеля. Скажем, чтобы поменять значение бета с β_1 на β_2 , мы «укорачиваем»

$$(\beta_1 - \beta_2) \frac{S}{F} \quad (16.2)$$

контрактов (т.е. занимаем по ним короткую позицию). У полностью прохеджированного (защищенного) портфеля бета равно нулю и этот случай соответствует выбору $\beta_2 = 0$.

Пример 16.2.4. Хеджирование хорошо диверсифицированного портфеля из акций с помощью фьючерса на индекс S&P 500 происходит следующим образом. Предположим, что рассматриваемый портфель стоит \$2 400 000 и имеет бета по отношению к доходности индекса S&P 500, равное 1,25. Таким образом, при любом 1% повышении индекса (или его понижении) ожидаемое повышение (соответственно, понижение) стоимости портфеля составит 1,25%. При текущей цене фьючерса в 1200 короткая позиция занимает по $1,25 \times [2\,400\,000 / (1200 \times 500)] = 5$ фьючерсным контрактам. $\triangleleft$

Упражнение 16.2.3. Повторите рассуждения примера 16.2.4 в предположении, что цель: изменить бета на 2,0.

16.3 Хеджирование и опционы

16.3.1 Дельта-хедж

Дельта (коэффициент хеджирования) производного инструмента определяется по формуле $\Delta \equiv \partial f / \partial S$. Таким образом, $\Delta f \approx \Delta \times \Delta S$ для относительно небольших изменений цены акции, ΔS . Дельта-нейтральный портфель является прохеджированным в том смысле, что он защищен (иммунизирован) от небольших изменений цены акции. Торговая стратегия, которая позволяет портфелю оставаться дельта-нейтральным в динамике, называется **дельта-хедж**.

Поскольку величина дельты изменяется вместе с ценой акции, то в стратегии дельта-хедж следует периодически корректировать значение дельта, чтобы сохранить дельта-нейтралитет производного инструмента. В пределе, когда коррекция портфеля происходит непрерывно, достигается совершенный хедж и стратегия становится самофинансируемой [294]. В этом и состояла суть аргументации Блэка—Шоулса—Мертонна из п. 15.2.1.

Для бездивидендных акций дельта-нейтральный портфель хеджирует N производных инструментов в короткой позиции с помощью $N \times \Delta$ единиц базовой акции плюс B долларов, взятых в долг и так, что

$$-N \times f + N \times \Delta \times S - B = 0.$$

Это равенство называется **условием самофинансирования**, поскольку суммарная стоимость производных инструментов, акций и облигаций равна нулю. При каждой следующей корректировке баланса, когда дельта равна Δ' , покупайте $N \times (\Delta' - \Delta)$ единиц акции, чтобы их стало $N \times \Delta'$ при совокупном займе величины $B' = N \times \Delta' \times S' - N \times f'$, где f' — существующая цена производного инструмента. Дельта-хедж представляет собой дискретный аналог своего предела в случае непрерывного времени и самофинансируемым бывает редко, если и бывает вообще.

Упражнение 16.3.1. 1) Дельта-хедж в условиях биномиальной модели оценки стоимости опциона (БМОО) выливается в совершенную копию (см. гл. 9). Однако в рассматриваемой ситуации осуществить ее невозможно. Почему?

2) Как должна вести себя стоимость производного инструмента по отношению к стоимости базового актива, чтобы совершенная копия была возможна?

Численный пример. Давайте проиллюстрируем процедуру хеджирования для хеджера, который занимает короткую позицию по Европейским опционам колл. Поскольку дельта положительна и возрастает при увеличении цены акции, то хеджер сохраняет длинную позицию по акциям и покупает (продает) акции, если цена акции растет (соответственно, падает), чтобы поддержать дельта-нейтралитет. Копии для опционов колл хороши, если совокупная стоимость торгуемых акций близка к накопленному значению (НЗ) премий по опционам колл на момент окончания срока.

Рассмотрим продавца, который занимает короткую позицию по 10 000 опционов колл. Срок действия этих опционов оканчивается через 4 недели, цена исполнения равна \$50, а текущая стоимость каждого опциона колл составляет величину $f = 1,76791$. Поскольку один опцион относится к 100 сертификатам акции, то $N = 1\,000\,000$. У базовой акции 30 % ежегодная волатильность, а ежегодная безрисковая ставка равна 6 %. Составитель корректирует портфель каждую неделю. Поскольку $\Delta = 0,538560$, то, чтобы сделать портфель дельта-нейтральным, покупаются $N \times \Delta = 538\,560$ акций за сумму в долларах, равную $538\,560 \times 50 = 26\,928\,000$. При этом составитель (портфеля) финансирует покупку, занимая в долг сумму в долларах, равную

$$B = N \times \Delta \times S - N \times f = 26\,928\,000 - 1\,767\,910 = 25\,160\,090.$$

После этого стоимость портфеля становится равной нулю.

За 3 недели до окончания срока действия цена акции поднимается до \$51. А поскольку новая стоимость опциона колл равна $f' = 2,10580$, то стоимость портфеля в долларах до корректировки равна

$$-N \times f' + 538\,560 \times 51 - B e^{0,06/52} = 171\,622. \quad (16.3)$$

Тот факт, что это число ненулевое, лишь подтверждает мнение о том, что дельта-хедж копирует опционы колл несовершенным образом; и эта стратегия не является самофинансируемой, поскольку можно изъять \$ 171 622. Величина же **ошибки слежения** — разницы последовательных значений стоимости портфеля — может быть уменьшена за счет более частых корректировок, скажем, ежедневных вместо еженедельных. В действительности ошибка слежения положительна $\sim 68\%$ времени даже в случае, когда ее ожидаемое значение практически равно нулю. Более того, эта ошибка пропорциональна веge [109, 537]. Кроме того, на практике ошибки слежения перестают уменьшаться, если частота корректировок превышает определенный уровень [45].

При большем значении дельта $\Delta' = 0,640355$, покупатель покупает $N \times (\Delta' - \Delta) = 101\,795$ акций за \$ 5 191 545, увеличивая число акций до $N \times \Delta' = 640\,355$. Совокупная же стоимость равна

$$26\,928\,000 \times e^{0,06/52} + 5\,191\,545 = 32\,150\,634,$$

Число недель до истечения	Цена акции S	Стоимость опциона f	Дельта Δ	Гамма Γ	Изменение дельты $(3)-(3'')$	Количество купленных акций $N \times (5)$	Стоимость акций $(1) \times (6)$	Совокупная стоимость НЗ $(8'') + (7)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
4	50	1,76791	0,538560	0,0957074	—	538 560	26 928 000	26 928 000
3	51	2,10580	0,640355	0,1020470	0,101795	101 795	5 191 545	32 150 634
2	53	3,35087	0,855780	0,0730278	0,215425	215 425	11 417 525	43 605 277
1	52	2,24272	0,839825	0,1128601	−0,015955	−15 955	−829 660	42 825 960
0	54	4,00000	1,000000	0,0000000	0,160175	160 175	8 649 450	51 524 853

Рис. 16.1. Дельта-хедж. Совокупная стоимость представляет стоимость акций, торгуемых для поддержания дельта-нейтралитета. Общее число акций при окончании срока действия равно 1 000 000 (торговля происходит и в этот момент). Числа с двумя штрихами относятся ко входу из предыдущей строки данного столбца.

а величина взятой в долг суммы составляет¹ величину

$$B' = 640\,355 \times 51 - N \times f' = 30\,552\,305.$$

После этого портфель опять становится дельта-нейтральным, с нулевой стоимостью. В таблице на рис. 16.1 приведены численные данные.

В момент окончания срока действия опционов у торговца оказывается 1 000 000 акций, которые обмениваются на \$ 50 000 000, поскольку все опционы колл были в деньгах. Тем самым обязательства торговца сводятся к сумме в долларах, равной

$$51\,524\,853 - 50\,000\,000 = 1\,524\,853,$$

которая представляет стоимость «копирования». Учитывая, что НЗ премии по опционам колл равно

$$1\,767\,910 \times e^{0,06 \times 4/52} = 1\,776\,088,$$

чистая прибыль составляет $1\,776\,088 - 1\,524\,853 = 251\,235$. Вообще же денежная сумма, которую нужно иметь вначале для проведения совершенного хеджирования, при увеличении числа корректировок должна сходиться к премии по опционам колл, равной \$ 1 767 910.

Упражнение 16.3.2. 1) Повторите вычисления таблицы на рис. 16.1, но на этот раз вместо совокупной стоимости определите еженедельные ошибки слежения. Проверьте, что в результате должны получиться следующие числа:

Число недель до истечения	Величина займа (B)	Ошибка слежения
4	25 160 090	—
3	30 552 305	171 622
2	42 005 470	367
1	41 428 180	203 874
0	50 000 000	−125 459

(этот другой взгляд на стратегию как бы показывает насколько хорошо хеджировался опцион колл).

2) Проверьте, что НЗ ошибок слежения на момент истечения в сумме оказывается равным \$ 251 235.

Упражнение 16.3.3. Брокер заявил, что премия по опциону представляет собой арбитражную прибыль, поскольку он мог выписать опцион колл, положить премию к себе в карман, а затем подобрать портфель-копию, чтобы прохеджировать короткий опцион колл. Что он упустил из виду?

Задание по программированию 16.3.4. Реализуйте стратегию дельта-хедж для опционов.

16.3.2 Хеджи, связанные с дельта-гамма и вега

Дельта-хедж основан на использовании приближения первого порядка для изменений цены производного инструмента Δf , обусловленных малыми изменениями цены акции ΔS . Но когда ΔS не является маленьким, то может помочь член второго порядка, гамма $\Gamma \equiv \partial^2 f / \partial S^2$. **Дельта-гамма-хедж** похож на дельта-хедж, за исключением того, что на этот раз добиваются и равенства нулю гамма портфеля или **гамма-нейтралитета**. И чтобы удовлетворить этому дополнительному условию, наряду с самофинансированием и дельта-нейтральностью придется ввести в действие и еще одну ЦБ.

Процедура хеджирования будет проиллюстрирована для прежнего сценария таблицы на рис. 16.1. Вводится в действие хеджирующий опцион колл и его свойства в прежнем сценарии указаны в таблице на рис. 16.2. При цене акции \$ 50 стоимость прежнего опциона колл $f = 1,76791$, дельта $\Delta = 0,538560$ и гамма $\Gamma = 0,0957074$, в то время как у каждого хеджирующего опциона колл стоимость $f_2 = 1,99113$, $\Delta_2 = 0,543095$ и $\Gamma_2 = 0,085503$. Отметим, что гамма акции равна нулю. Чтобы подобрать дельта-гамма-хедж, решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -N \times f + n_1 \times 50 + n_2 \times f_2 - B = 0 & \text{(самофинансируемость),} \\ -N \times \Delta + n_1 + n_2 \times \Delta_2 - 0 = 0 & \text{(дельта-нейтральность),} \\ -N \times \Gamma + 0 + n_2 \times \Gamma_2 - 0 = 0 & \text{(гамма-нейтральность).} \end{cases}$$

И получаем ответ: $n_1 = -69\,351$, $n_2 = 1\,119\,346$ и $B = -3\,006\,695$. В результате мы занимаем короткую позицию по 69 351 сертификатам акций, покупаем 1 119 346 хеджирующих опционов колл и предоставляем кредит на сумму \$ 3 006 695. Стоимость занятия короткой позиции по акциям и покупки опционов колл составит величину $n_1 \times 50 + n_2 \times f_2 = -1\,238\,787$ долларов.

Число недель до истечения	Цена акции S	Стоимость опциона f_2	Дельта Δ_2	Гамма Γ_2
4	50	1,99113	0,543095	0,085503
3	51	2,35342	0,631360	0,089114
2	53	3,57143	0,814526	0,070197
1	52	2,53605	0,769410	0,099665
0	54	4,08225	0,971505	0,029099

Рис. 16.2. Хеджирующий опцион, используемый в дельта-гамма-хедже. Этот опцион точно такой же, как и указанный в таблице на рис. 16.1, но с более поздней датой окончания срока действия (истечения — на одну неделю позже).

Число недель до истечения	Цена акции S	Количество купленных акций $n'_1 - n_1$	Стоимость акций $(1) \times (2)$	Количество купленных опционов $n'_2 - n_2$	Стоимость опционов $(4) \times f_2$	Размер займа B	Совокупная стоимость $N3(7'') + (3) + (5)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
4	50	-69 351	-3 467 550	1 119 346	2 228 763	-3 006 695	-1 238 787
3	51	-13 282	-677 382	25 783	60 678	-3 625 138	-1 856 921
2	53	91 040	4 825 120	-104 802	-374 293	810 155	2 591 762
1	52	-39 858	-2 072 616	92 068	233 489	-1 006 346	755 627
0	54	1 031 451	55 698 354	-1 132 395	-4 622 720	50 000 000	51 832 134

Рис. 16.3. Дельта-гамма-хедж. Совокупная стоимость представляет стоимость торгуемых акций и хеджирующего опциона колл, обеспечивающих дельта-гамма-нейтралитет. В момент истечения число акций равно 1 000 000, в то время как число хеджирующих опционов колл равно нулю.

Через неделю цена акции поднимается до \$ 51. Новые значения стоимости опционов колл равны $f' = 2,10580$ и $f'_2 = 2,35342$ для хеджируемого и хеджирующего опциона колл, соответственно, а стоимость портфеля перед корректировкой становится равной

$$-N \times f' + n_1 \times 51 + n_2 \times f'_2 - Be^{0,06/52} = 1757.$$

Поскольку это число не равно нулю, то дельта-гамма-хедж не является самофинансируемым. Тем не менее, его стоимость существенно меньше, чем \$ 171 622 в рассмотренном ранее случае дельта-хеджа равенства (16.3). На этот раз решаем систему

$$\begin{cases} -N \times f' + n'_1 \times 51 + n'_2 \times f'_2 - B' = 0, \\ -N \times \Delta' + n'_1 + n'_2 \times \Delta'_2 - 0 = 0, \\ -N \times \Gamma' + 0 + n'_2 \times \Gamma'_2 - 0 = 0. \end{cases}$$

Ее решением являются величины $n'_1 = -82\,633$, $n'_2 = 1\,145\,129$, и $B' = -3\,625\,138$. Следовательно, торговец покупает $n'_1 - n_1 = -82\,633 + 69\,351 = -13\,282$ сертификатов акций и $n'_2 - n_2 = 1\,145\,129 - 1\,119\,346 = 25\,783$ хеджирующих опциона колл за сумму в $-13\,282 \times 51 + 25\,783 \times f'_2 = -616\,704$ долларов. Совокупная стоимость покупки оказывается равной

$$-1\,238\,787 \times e^{0,06/52} - 616\,704 = -1\,856\,921.$$

Портфель опять является дельта-нейтральным и гамма-нейтральным с нулевой стоимостью. Остальные шаги представлены в таблице на рис. 16.3.

В момент исполнения торговец имеет 1 000 000 акций, которые он обменивает на опционы колл в деньгах за \$ 50 000 000. Тем самым его обязательства сводятся к сумме

$$51\,832\,134 - 50\,000\,000 = 1\,832\,134.$$

С учетом того, что НЗ премии по опционам колл равно \$ 1 776 088, его чистые потери составят сумму \$ 56 046, которая меньше суммы \$ 251 235 в случае дельта-хеджа.

Если же волатильность меняется, то реализация стратегии дельта-гамма-хеджа может и не приводить к хорошим результатам. Возможным усилением в этом случае будет **дельта-гамма-вега-хедж**, который поддерживает также и **вега-нейтралитет**, что означает равенство нулю веги портфеля. Как и ранее, для достижения этой цели придется ввести в действие еще одну ЦБ. Ну а поскольку такая стратегия ничего нового для понимания сути дела не использует, то ее анализ оставляется читателю. На практике **дельта-вега-хедж**, который может и не сохранять гамма-нейтралитет, приносит лучшие результаты, чем дельта-хедж [44].

Упражнение 16.3.5. Проверьте, что любой дельта-нейтральный и гамма-нейтральный самофинансируемый портфель автоматически является и вэга-нейтральным.

Задание по программированию 16.3.6. Реализуйте дельта-гамма хедж для опционов.

Задание по программированию 16.3.7. Реализуйте дельта-гамма-вега-хедж для опционов.

16.3.3 Статическое хеджирование

Динамические стратегии связаны с огромными операционными издержками. **Статическая стратегия**, которая применяется, лишь если происходят какие-то редкие события, является ответом на указанную проблему. Эта цель была реализована для хеджирования с помощью стандартных опционов Европейских барьерных опционов и опционов, оглядывающихся назад [157, 158, 159, 270].

Упражнение 16.3.8. Объясните, почему занятие короткой позиции по бычьему колл-спреду может практически прохеджировать бинарный опцион статически.

Дополнительная литература

Литература по хеджированию обширна [470, 514, 569, 746]. В книге [809] излагается более широкая точка зрения и рассматриваются финансовые инструменты, отличные от производных инструментов. Приемы и способы математического программирования в управлении риском представлены в [891]. Они играют существенную роль при наличии ограничений в торговле или учете недостатков рынка. За более полной информацией по финансовой технологии и управлению риском обращайтесь к [365, 369, 376, 646, 647].

Примечание

1. По-другому к этому числу можно прийти, используя формулу

$$Be^{0,06/52} + 5\,191\,545 + 171\,622 = 30\,552\,305.$$

ЧАСТЬ IV

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

17 Деревья

18 Численные методы

19 Матричные вычисления

20 Анализ временных рядов

В этой части предпринимается попытка более основательно рассмотреть различные вычислительные приемы, используемые в финансовых расчетах. Так, в главе 17 исследуются биномиальные и триномиальные деревья. И одним из стимулирующих соображений здесь является желание продемонстрировать пользу комбинаторики при построении высокоэффективных алгоритмов. В главе 18 представлены численные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных, моделирование по методу Монте-Карло и квазиметоды Монте-Карло. В главе 19 речь идет о вычислительной линейной алгебре, проблемах метода наименьших квадратов и сплайнах. В качестве приложений в ней рассматриваются факторные модели. Наконец, глава 20 посвящена анализу финансовых временных рядов, а также рассмотрению популярных моделей временных рядов.

Человека я люблю меньше, чем дерево.

Людвиг ван Бетховен (1770—1827)

Эта глава начинается с рассмотрения комбинаторных методов, позволяющих ускорить оценку стоимости Европейских опционов. Вводится также весьма важная, многогранная и гибкая триномиальная модель. Такие деревья считаются более «точными» по сравнению с биномиальными. Затем вводится в действие важный принцип: сравнение алгоритмов должно быть основано на реально затрачиваемом времени. Заканчивается эта глава мультиномиальными деревьями, предназначенными для оценки стоимости многомерных производных инструментов.

17.1 Оценка стоимости барьерных опционов комбинаторными методами

Обратимся еще раз к биномиальному приближению геометрического броуновского движения $S = e^X$, где X есть $(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ -броуновское движение (или, что эквивалентно, процесса $dS/S = \mu dt + \sigma dW$). При этом для упрощения записи вместо текущего значения цены $S(0)$ будем использовать символ S . И рассмотрим далее цену акции в момент $\Delta t \equiv \tau/n$, где τ — время до истечения (срока). Из выражений (13.12) и (13.12') вытекает, что (при $n \rightarrow \infty$)

$$ES(\Delta t) = Se^{\mu\Delta t}, \quad DS(\Delta t) = S^2 e^{2\mu\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) \sim S^2 \sigma^2 \Delta t.$$

В биномиальной модели к моменту времени Δt цена акции возрастает до Su с вероятностью q , или убывает до Sd с вероятностью $1 - q$. Поэтому ожидаемая цена акции в момент Δt равна $qSu + (1 - q)Sd$. И наше первое требование состоит в том, чтобы эта цена сходилась к величине $Se^{\mu\Delta t}$. Дисперсия же цены акции в момент Δt задается выражением $q(Su)^2 + (1 - q)(Sd)^2 - (Se^{\mu\Delta t})^2$. И наше второе требование состоит в том, чтобы она сходилась к величине $S^2 \sigma^2 \Delta t$. При дополнительном предположении, что $ud = 1$, к цели приводит следующий выбор:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad q = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}. \quad (17.1)$$

В риск-нейтральной экономике $\mu = r$, а q сближается с

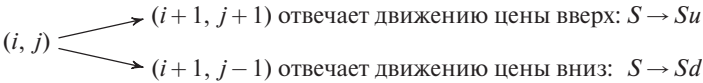
$$p \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$$

в силу (9.17). Всюду ниже полагаем, что $\mu' \equiv r - \sigma^2/2$.

Комбинаторный метод настолько же элементарен, насколько и элегантен. С его помощью часто удается на порядок сократить затрачиваемое время. Основу его составляет расчет числа возможных траекторий, которые ведут от корня дерева к любому заключительному узлу. Впервые мы использовали этот метод в алгоритме линейного времени, предназначенного для оценки стоимости Европейских опционов, и приведенном на рис. 9.9, а теперь используем его для оценки стоимости барьерных опционов. Необходимый инструментарий предоставляет принцип отражения.

17.1.1 Принцип отражения

Представим себе частицу, находящуюся в точке $(0, -a)$ целочисленной решетки плоскости, которая должна попасть в другую ее точку $(n, -b)$. Не теряя в общности, предположим, что $a, b \geq 0$. И частица эта, как показано ниже, из точки (i, j) может двигаться либо в точку $(i + 1, j + 1)$, либо в точку $(i + 1, j - 1)$:



Сколько же траекторий касается оси $x = 0$ (см. рис. 17.1)?

Пусть для траектории, соединяющей точки $(0, -a)$ и $(n, -b)$, и касающейся оси $x = 0$ (здесь и ниже в смысле: касается оси $x = 0$ или пересекает ее) символ J означает первую точку, в которой это происходит. Если часть траектории из $(0, -a)$ в J отразить относительно оси $x = 0$, то возникнет траектория, соединяющая точку $(0, a)$ с точкой $(n, -b)$, которая также касается оси $x = 0$ в точке J первый раз (см. рис. 17.1). Взаимно-однозначное отображение показывает, что число траекторий из $(0, -a)$ в $(n, -b)$, которые касаются оси $x = 0$, равно числу траекторий из $(0, a)$ в $(n, -b)$. Это и есть знаменитый **принцип отражения** Андре́ (1840—1917),

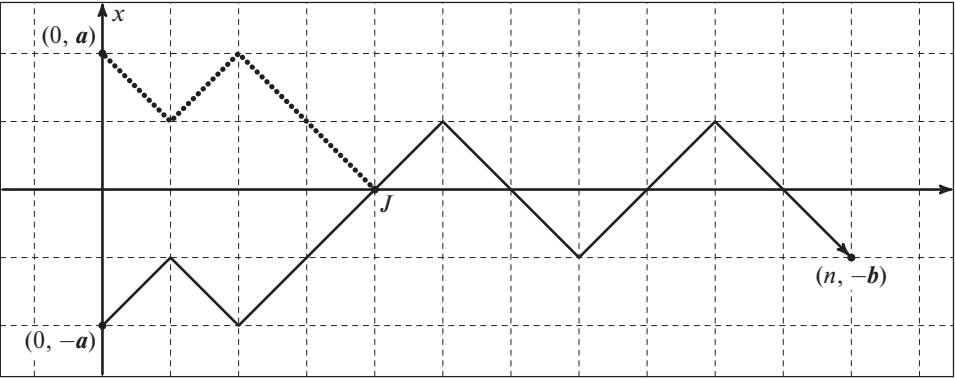


Рис. 17.1. Принцип отражения для биномиального случайного блуждания. Концевые точки двух траекторий равной длины будут находиться на расстоянии $2k$ друг от друга, если суммарное число движений вверх у них будет отличаться на k (см. равенства (17.4)).

опубликованный в 1887 г. [604, 686]. Поскольку у траекторий указанного вида есть $(n + b + a)/2$ движений вниз и $(n - b - a)/2$ движений вверх, то всего таких траекторий

$$\binom{n}{\frac{n+a+b}{2}} \text{ при четных } (n+a+b). \quad (17.2)$$

При этом считается, что $\binom{n}{k} = 0$ при $k < 0$, или $k > n$.

Упражнение 17.1.1. Какова вероятность того, что максимальная цена акции не меньше Su^k ?

17.1.2 Комбинаторные формулы для барьерных опционов

Мы сконцентрируем свое внимание на вниз-и-вход опционах колл с барьером $H < X$ (т.е. начало-опционах колл). И предположим, не теряя в общности, что $H < S$, поскольку в противном случае опцион превращается в стандартный опцион колл. Введем величины:

$$a \equiv \left\lceil \frac{\ln(X/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(X/S)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{n}{2} \right\rceil, \quad (17.3)$$

$$h \equiv \left\lfloor \frac{\ln(H/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\ln(H/S)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (17.3')$$

Обе они, как a , так и h , имеют простой смысл. Прежде всего, целое число h таково, что соответствующая ему заключительная цена акции $\tilde{H} \equiv Su^h d^{n-h}$ является величиной, ближайшей к H снизу, но не превосходящей этот барьер. В биномиальной модели настоящий барьер заменяется на **эффективный (или реальный) барьер $\tilde{H}$** . Аналогично, a является таким числом (шагов цены вверх), что соответствующая ему заключительная цена акции $\tilde{X} \equiv Su^a d^{n-a}$ является ближайшей к цене исполнения X , но большей этой величины. Таким образом, процедура с n шагами будет заканчиваться в деньгах тогда и только тогда, когда суммарное число шагов цены вверх будет не меньше a .

Цена $Su^k d^{n-k}$ находится на расстоянии $2k$ от своего минимального возможного значения Sd^n на вершине биномиального дерева, поскольку

$$Su^k d^{n-k} = Sd^{-k} d^{n-k} = Sd^{n-2k}. \quad (17.4)$$

В соответствии с этим замечанием на рис. 17.2 и представлены относительные расстояния между различными ценами на дереве.

Число траекторий, связывающих начальную цену S с заключительной ценой $Su^j d^{n-j}$, равно $\binom{n}{j}$, причем вероятность каждой из них есть $p^j(1-p)^{n-j}$. Однако число таких траекторий, затрагивающих эффективный барьер $\tilde{H}$, мы можем определить по формуле (17.2), если примем уровень цены S за ось $x=0$ и положим $a = n - 2h$ и $b = 2j - 2h$. В результате получим, что

$$\binom{n}{\frac{n+(n-2h)+(2j-2h)}{2}} = \binom{n}{n-2h+j}$$

Линейный по времени алгоритм с постоянной памятью для оценки стоимости опционов колл вниз-и-вход на бездивидендную акцию:

ввод: S, σ, X, H ($H < X, H < S$), n, τ, r ;
 действительные числа p, u, d, b, D, C ;
 целые j, a, h ;
 $u := e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}$; $d := e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}$;
 $a := \lceil \ln(X/Sd^n) / \ln(u/d) \rceil$; $h := \lfloor \ln(H/Sd^n) / \ln(u/d) \rfloor$;
 $p := (e^{r\tau/n} - d)/(u - d)$; // Риск-нейтральная вероятность
 $b := p^{2h}(1-p)^{n-2h}$; // Рассчитывается величина b_{2h}
 $D := S \times u^{2h} d^{n-2h}$; $C := b \times (D - X)$;
 для ($j = 2h - 1$ вниз до a) {
 $b := b \times p \times (n - 2h + j + 1) / ((1 - p) \times (2h - j))$;
 $D := D \times u/d$;
 $C := C + b \times (D - X)$;
 }
 вывод $C/e^{r\tau}$;

Рис. 17.3. Оптимальный алгоритм для Европейских опционов колл вниз-и-вход по бездивидендным акциям. Переменная b хранит величины $b_j \equiv \binom{n}{n-2h+j} p^j (1-p)^{n-j}$ для $j = 2h, 2h-1, \dots, a$, именно в таком порядке, а переменная C представляет слагаемые из формулы для стоимости опциона (17.6) и $j = 2h, 2h-1, \dots, a$. Заметим, что $b_j = b_{j+1} \frac{(1-p)(n-2h+j+1)}{p(2h-j)}$. Структура алгоритма похожа на структуру алгоритма, приведенного на рис. 9.9.

Пример 17.1.2. По **степенному опциону** в момент истечения выплачивается сумма $\max((S(\tau) - X)^p, 0)$ (иногда $\max(S(\tau)^p - X, 0)$) [894]. Для оценки стоимости степенного опциона вниз-и-вход с помощью формулы (17.6) следует заменить в ней величину $Su^j d^{n-j} - X$ на $(Su^j d^{n-j} - X)^p$ ($(Su^j d^{n-j})^p - X$, соответственно). $\triangleleft$

Упражнение 17.1.2. Выведите формулы, аналогичные формуле (17.6), для оценки стоимости трех других типов барьерных опционов: вниз-и-выход, вверх-и-вход, вверх-и-выход.

Упражнение 17.1.3. Используйте принцип отражения для вывода комбинаторной формулы, оценивающей стоимость Европейских опционов колл, «оглядывающихся» на минимум.

Упражнение 17.1.4. Рассмотрим **взрывающийся колл-спрэд**, выплата по которому совпадает с выплатой по бычьему колл-спрэду, за исключением того, что исполняется он сразу же по достижении ценой акции «спусковой» цены K [377].

1) Напишите комбинаторную формулу для стоимости этого опциона, зависящей от всей траектории.

2) Проверьте, что оценка его стоимости протекает за линейное время.

Упражнение 17.1.5. Выведите комбинаторную формулу для оценки стоимости «переустанавливаемого» опциона колл.

Упражнение 17.1.6. Докажите, что значение стоимости опциона (17.6) сходится к значению (11.4) при $q = 0$.

Упражнение 17.1.7. Выведите формулу для оценки стоимости Европейского степенного опциона с заключительной выплатой $\max(S(\tau)^2 - X, 0)$.

Задание по программированию 17.1.8. Сконструируйте быстрые алгоритмы для определения стоимости Европейских барьерных опционов.

Задание по программированию 17.1.9. Постройте алгоритм с затрачиваемым временем $O(n^3)$ для оценки стоимости Европейских опционов с геометрически усредняемой ценой, используя комбинаторику, позволяющую улучшить ответ в задании по программированию 11.7.6.

Задание по программированию 17.1.10. 1) Постройте алгоритм со временем $O(n^2)$ для получения стоимости Европейских опционов, улучшая ответ к заданию по программированию 11.7.11 (1)).

2) Постарайтесь уменьшить затрачиваемое время до $O(n)$.

17.1.3 Сходимость алгоритмов биномиального дерева

Значение стоимости опциона (17.6) (при увеличении n) изменяется по типу «зуб пилы», что и показано на рис. 17.4. Таким образом, увеличение n необязательно ведет к более точным результатам. Причины нетрудно увидеть. Дело в том, что истинный барьер весьма вероятно не совпадает с эффективным. И то же самое верно для цены исполнения и эффективной цены исполнения. В обоих случаях это приводит к так называемым ошибкам детализации [271]. Но указанная проблема с ценой исполнения менее критична, в чем нас убеждает быстрая сходимость алгоритмов биномиального дерева для стандартных Европейских опционов. А проблемой барьера нельзя пренебрегать, поскольку барьер оказывает свое влияние на протяжении всего процесса изменения цены.

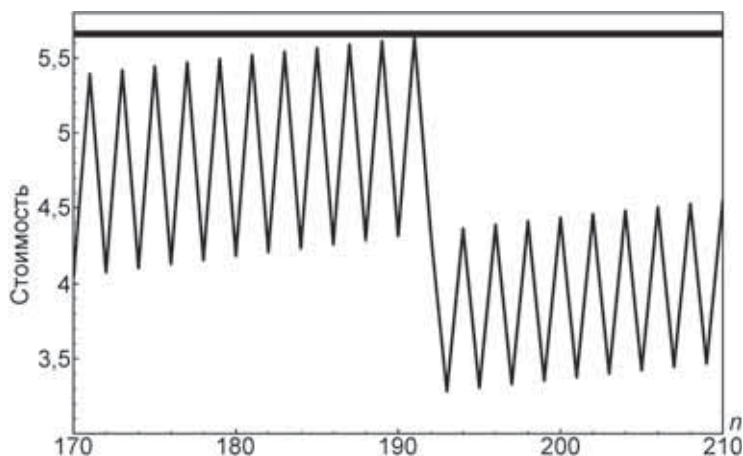


Рис. 17.4. Сходимость в биномиальной модели при определении стоимости опционов колл вниз-и-вход. Здесь представлен более детальный взгляд на ситуацию рис. 11.5. Отметим, что получаемое приближение является очень хорошим (5,63542 против теоретического значения 5,6605) при $n = 191$.

Рис. 17.4 позволяет предположить, что сходимость на самом деле хороша, если мы определенным образом будем выбирать значение n — скажем, на рис. 17.4 это значение равно 191. При таких значениях истинный барьер совпадает или находится непосредственно выше уровня цены акции, т. е. $H \approx Sd^j = Se^{-j\sigma\sqrt{\tau/n}}$ при некотором целом j [111, 196]. Таким образом, предпочтительными значениями n являются

$$n = \left\lfloor \frac{\tau}{[\ln(S/H)/(j\sigma)]^2} \right\rfloor, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Но остается лишь одна незначительная техническая деталь. Мы выбрали в качестве эффективного барьера одно из $n + 1$ возможных значений цены акции в последний момент. Однако эффективный барьер выше Sd^j , отвечает заключительной цене акции, лишь если $n - j$ является четным числом (см. равенства (17.4))¹. Чтобы снять эту неопределенность, мы будем уменьшать значение n на единицу, если необходимо, чтобы сделать четным число $n - j$. Тогда предпочтительными значениями n станут

$$n = \begin{cases} l, & \text{если } l - j \text{ четно,} \\ l - 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad l \equiv \left\lfloor \frac{\tau}{[\ln(S/H)/(j\sigma)]^2} \right\rfloor, \quad (17.7)$$

$j = 1, 2, 3, \dots$ Подводя итоги, заметим, что применять формулу (17.6) следует лишь для указанных здесь значений n . Результат можно увидеть на рис. 17.5.

Теперь, когда стоимость барьерных опционов можно оценивать эффективно, мы можем себе позволить выбирать очень большие значения n . Это имеет глубокие последствия. Например, оценка стоимости представляется поглощающей чрезмерно большое время, когда $S \approx H$, поскольку n , будучи пропорциональным значению $1/\ln^2(S/H)$, велико. И это замечание действительно справедливо в отношении стандартных алгоритмов биномиального дерева с квадратичным временем, таким, как на рис. 11.4.

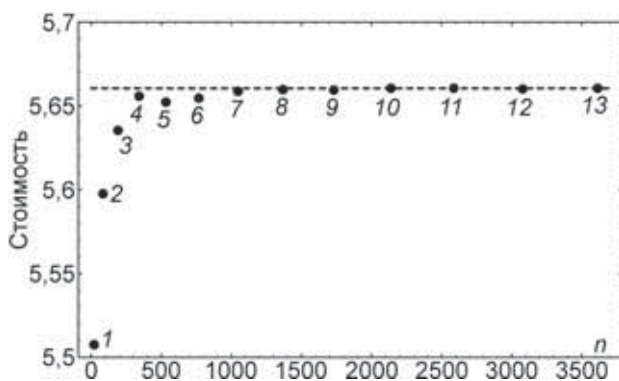


Рис. 17.5. Сходимость биномиальной модели при определении стоимости опционов колл вниз-и-вход при хорошо подобранных значениях n . Стоимость оценивается по формуле (17.6) при $n = 21$ (1), 84 (2), 191 (3), 342 (4), 533 (5), 768 (6), 1047 (7), 1368 (8), 1731 (9), 2138 (10), 2587 (11), 3078 (12) и 3613 (13), где число в скобках означает вариант выбора числа периодов n .

Однако оно перестает быть верным для алгоритмов линейного времени [624].

Упражнение 17.1.11. Как следует эффективно оценивать в биномиальной модели стоимость портфеля из барьерных опционов с одним и тем же базовым активом, но различными барьерами?

Упражнение 17.1.12. Из рис. 11.5 видно, что расчетные значения недооценивают теоретическое. Объясните, почему так происходит?

Упражнение 17.1.13. В формуле (17.6) барьер H заменен на эффективный барьер $\tilde{H}$, который представляет собой одно из $n + 1$ возможных заключительных значений цены акции. Если бы эффективный барьер выбирался как одно из $2n + 1$ возможных значений цен $Su^n, Su^{n-1}, \dots, Su^{-n}$, то какие бы изменения следовало внести в формулы (17.6) и (17.7)?

Задание по программированию 17.1.14. Попробуйте использовать значение $l \equiv \left\lceil \frac{\tau}{[\ln(S/H)/(j\sigma)]^2} \right\rceil$ вместо указанного в формуле (17.7).

17.1.4 Опционы с двойным барьером

У опционов с двойным барьером есть два барьера, L и H , $L < H$. И в зависимости от того, как эти барьеры воздействуют на ценные бумаги (ЦБ), возникают различные барьерные опционы. Мы рассматриваем опционы, которые вступают в действие тогда и только тогда, когда достигается *какой-либо один* из барьеров.

Частица стартует из точки $(0, -a)$ целочисленной решетки и должна попасть в точку $(n, -b)$. Не теряя в общности, предположим, что $a, b \geq 0$. Число траекторий, в которых попадание на линию H , т.е. ось $x = 0$, предшествует попаданию на линию L , т.е. ось $x = -s$, равно

$$\left(\frac{n}{n + a - b + 2s} \right) \quad \text{при четных значениях } (n + a - b). \quad (17.8)$$

В этом выражении мы предполагаем, что $a, b < s$, чтобы сделать эффективными оба барьера.

Предыдущее выражение можно обобщить. Пусть A_i обозначает множество траекторий, которые ударяются о барьеры с последовательностью соударений, *содержащей* набор соударений $\underbrace{H^+ L^+ H^+ \dots}_i$, $i \geq 2$, где L^+

обозначает некоторую последовательность достижений барьера L и H^+ обозначает последовательность достижений барьера H . Аналогично, пусть B_i обозначает множество траекторий, которые ударяются о барьеры с последовательностью соударений *содержащей* набор соударений $\underbrace{L^+ H^+ L^+ \dots}_i$, $i \geq 2$. Например, траектория с последовательностью соударений $LLHLLHH$

принадлежит множествам A_2, A_3, B_2, B_3 и B_4 . Заметим, что множество $A_i \cap B_i$ может не быть пустым. Число траекторий, которые задевают оба барьера, равно

$$N(a, b, s) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (|A_i| + |B_i|). \quad (17.9)$$

Расчет суммы в (17.9) можно остановить на первом i , для которого $|A_i| + |B_i| = 0$.

Найти стоимость опциона колл с двойным барьером теперь совсем легко. Но давайте сначала рассмотрим вырожденные случаи. Если $S \leq L$, то опцион колл с двойным барьером сводится к стандартному опциону колл. А если $S \geq H$, то он сводится к начало-опциону коллу с одним барьером H . Поэтому мы предположим, что впредь $L < S < H$. Но при этом предположении легко проверить, что опцион с двойным барьером сводится к более простым опционам, если не выполняются неравенства $L < X < H$. Поэтому мы предположим, что в дальнейшем $L < X < H$. Введем величины

$$h \equiv \left\lceil \frac{\ln(H/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(H/S)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{n}{2} \right\rceil, \quad l \equiv \left\lfloor \frac{\ln(L/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\ln(L/S)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Сами барьеры заменим на эффективные барьеры $\tilde{H} \equiv Su^h d^{n-h}$ и $\tilde{L} \equiv Su^l d^{n-l}$. Заметим, что в представлении (17.9) рассматриваются только заключительные узлы между $\tilde{L}$ и $\tilde{H}$ (включительно). При этом вклад в стоимость опциона всех этих заключительных узлов равен

$$A \equiv R^{-n} \sum_{j=a}^h N(2h-n, 2h-2j, 2(h-l)) p^j (1-p)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - X), \quad (17.10)$$

где a определено в (17.3). Рис. 17.6 дает представление об относительном положении различных параметров. Что же касается заключительных узлов, лежащих вне указанного диапазона, то они образуют стандартный опцион колл с ценой исполнения $\tilde{H}u^2$. Пусть D означает его стоимость. Тогда стоимость опциона колл с двойным барьером можно представить в виде $A + D$. Сходимость похожа на зубья пилы [179].

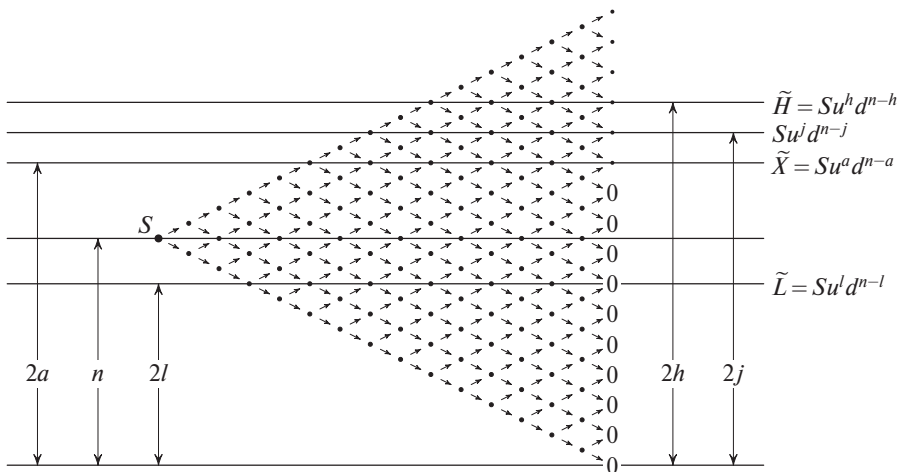


Рис. 17.6. Опцион колл с двойным барьером в биномиальной модели. Реальными барьерами являются линия $\tilde{H}$ и линия $\tilde{L}$, а начинается процесс на линии S .

Упражнение 17.1.15. Докажите формулу (17.8).

Упражнение 17.1.16. Примените принцип отражения несколько раз, чтобы проверить формулы

$$|A_i| = \begin{cases} \left(\frac{n}{n+a+b+(i-1)s} \right) & \text{при нечетных } i, \\ \left(\frac{n}{n+a-b+is} \right) & \text{при четных } i, \end{cases} \quad |B_i| = \begin{cases} \left(\frac{n}{n-a-b+(i+1)s} \right) & \text{при нечетных } i, \\ \left(\frac{n}{n-a+b+is} \right) & \text{при четных } i. \end{cases}$$

Полагаем, что $n+a-b$ четно для величины $|A_i|$ и $n-a+b$ четно для величины $|B_i|$.

Упражнение 17.1.17. Докажите равенство (17.9).

Упражнение 17.1.18. 1) Сформулируйте паритет вход—выход для опционов с двойным барьером.

2) Постройте копию опциона с двойным барьером, используя начало-опционы, нокаут-опционы и опционы с двойным барьером, которые вступают в действие тогда и только тогда, когда достигаются оба барьера.

3) Измените равенство (17.9) так, чтобы с его помощью можно было оценивать стоимость опционов с двойным барьером из (2).

Упражнение 17.1.19. Рассмотрим обобщенный опцион с двумя барьерами, определяемыми функциями f_l и f_h , где $f_l(t) < f_h(t)$ при $t \geq 0$. Преобразуйте его в опцион с двойным барьером и постоянными барьерами, соответствующим образом меняя процесс изменения цен базового актива.

Задание по программированию 17.1.20. Напишите программу алгоритма линейного времени для опционов с двойным барьером.

17.2 Алгоритмы триномиального дерева

А теперь давайте познакомимся с триномиальным приближением к геометрическому броуновскому движению $dS/S = r dt + \sigma dW$ [107]. В нем тремя возможными значениями цен акции в момент Δt будут S , Su и Sd при условии $ud=1$ (см. рис. 17.7). Наложим и условия равенства математических ожиданий и дисперсий, что приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} 1 = p_u + p_m + p_d, \\ SM \equiv [p_u u + p_m + (p_d/u)]S, \\ S^2 V \equiv p_u (Su - SM)^2 + p_m (S - SM)^2 + p_d (Sd - SM)^2, \end{cases}$$

в которой $M \equiv e^{r\Delta t}$ и $V \equiv M^2(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)$ в силу (6.11) Тогда легко проверить, что решениями этой системы являются

$$p_u = \frac{u(V + M^2 - M) - (M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)}, \quad p_d = \frac{u^2(V + M^2 - M) - u^3(M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)}.$$

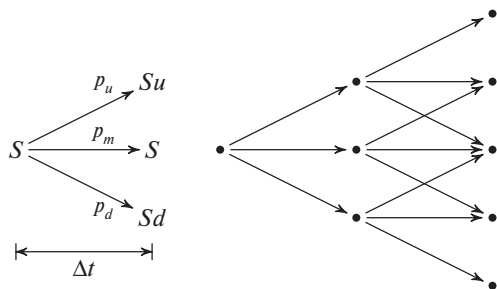


Рис. 17.7. Тринომiальная модель. Из каждого узла идут три ветви.

Но желательно убедиться в том, что эти вероятности действительно лежат между нулем и единицей. Положим для этого $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ со вспомогательным параметром $\lambda \geq 1$, значение которого можно выбирать. В результате получим, что

$$p_u \rightarrow \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{(r + \sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}, \quad p_d \rightarrow \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{(r - 2\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.$$

Естественно выбрать величину λ равной $\sqrt{\pi/2}$ [824].

Упражнение 17.2.1. Проверьте следующие утверждения:

- 1) с. в. $\ln(S(\Delta t)/S)$ имеет среднее $\mu'\Delta t$,
- 2) дисперсия с. в. $\ln(S(\Delta t)/S)$ сходится к $\sigma^2\Delta t$,
- 3) математическое ожидание с. в. $S(\Delta t)$ сходится к $Se^{r\Delta t}$.

Упражнение 17.2.2. В триномiальной модели совершенное копирование опционов с помощью портфеля из акций и облигаций, как в биномiальной модели, уже невозможно. Копирование опциона с помощью h сертификатов акции и B в облигациях предполагает две неизвестные величины h и B , но три ветви требуют трех условий. Приведите пример ситуации, в которой три уравнения с двумя переменными не имеют решения.

Задание по программированию 17.2.3. Вспомните диагональный метод из п. 9.7. Напишите программу, реализующую обратную индукцию на триномiальном дереве с помощью диагонального метода.

17.2.1 Оценка стоимости барьерных опционов

В алгоритмах биномiального дерева возникает определенная ошибка в связи с заменой истинного барьера на не равный ему эффективный барьер. В алгоритме триномiального дерева, предложенном Ритчкеном, эта проблема решается подбором такого λ , при котором траектория точно попадает в барьер [745]. Идея состоит в следующем. Чтобы перейти из S в H цене «требуется проделать»

$$h = \frac{\ln(S/H)}{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

последовательных движений вниз, конечно, если h является целым. Но этого легко добиться соответствующим выбором λ . Точнее говоря, мы находим наименьшее значение $\lambda \geq 1$, при котором h оказывается целым, т. е. полагаем

$$\lambda = \min_{j=1,2,3,\dots} \frac{\ln(S/H)}{j\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

При таком выборе один из слоев триномиального дерева совпадает с барьером. Заметим, что при очень малых значениях n такое λ может и не существовать. При этом можно использовать следующие вероятности:

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu'\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}, \quad p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu'\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.$$

Отметим, что эта конкретная триномиальная модель сводится к биномиальной модели при $\lambda = 1$. Соответствующий ей алгоритм приведен на рис. 17.8. Сходимость алгоритма триномиального дерева охарактеризована на рис. 17.9. Если по акции выплачивается непрерывная дивидендная доходность q , то мы полагаем $\mu' \equiv r - q - \sigma^2/2$.

Упражнение 17.2.4. В п. 10.2.2 было показано, что биномиальные деревья можно расширить в направлении, обратном по времени на два периода, чтобы иметь возможность вычислять дельту и гамму. Покажите, что триномиальные деревья следует расширить в обратном направлении лишь на один период, чтобы вычислять те же параметры хеджирования.

Упражнение 17.2.5. Выведите комбинаторные формулы для Европейских опционов вниз-и-вход, вниз-и-выход, вверх-и-вход и вверх-и-выход.

Алгоритм триномиального дерева для оценки стоимости опционов колл вниз-и-выход на бездивидендную акцию:

ввод: S, σ, X, H ($H < X, H < S$), n, τ, r ;
действительные числа $u, d, p_u, p_m, p_d, \lambda, \Delta t, C[0 \dots 2n]$;
целые i, j, h ;
 $\Delta t := \tau/n$;
 $h := \lfloor \ln(S/H)/(\sigma\sqrt{\Delta t}) \rfloor$;
если $[h < 1 \text{ или } h \geq n]$ вывод НЕУДАЧА;
 $\lambda := \ln(S/H)/(\sigma\sqrt{\Delta t})$;
 $p_u := 1/(2\lambda^2) + (r - \sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}/(2\lambda\sigma)$;
 $p_d := 1/(2\lambda^2) - (r - \sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}/(2\lambda\sigma)$;
 $p_m := 1 - p_u - p_d$;
 $u := e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$;
для $(i = 0 \text{ до } 2n) \{ C[i] := \max(0, Su^{n-i} - X) \}$;
 $C[n+h] := 0$; // Достижение
для $(j = n-1 \text{ вниз до } 0) \{$
 для $(i = 0 \text{ до } 2j) \{ C[i] := p_u C[i] + p_m C[i+1] + p_d C[i+2] \}$;
 если $[j+h \leq 2j]$ $C[j+h] := 0$; // Достижение.
}
вывод $C[0]/e^{r\tau}$;

Рис. 17.8. Алгоритм триномиального дерева для оценки стоимости опционов колл вниз-и-выход на бездивидендную акцию. Барьер $H = Su^{-h}$ соответствует $C[h+j]$ в моменты времени $j = n, n-1, \dots, h$. Нетрудно показать, что h должно быть не меньше $\sigma^2\tau/\ln^2(S/H)$, чтобы неравенство $\lambda \geq 1$ имело место. Этот алгоритм следует сравнить с алгоритмами на рис. 11.4 и 33.2.

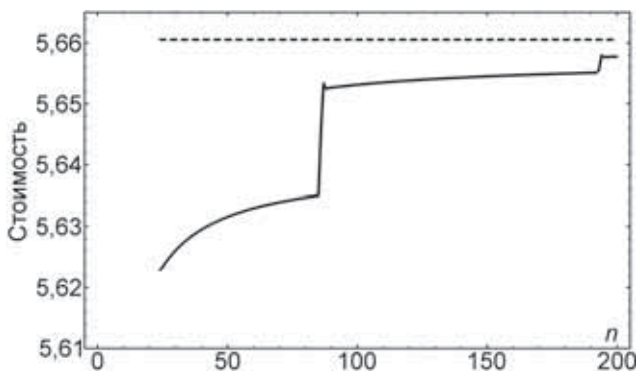


Рис. 17.9. Сходимость триномиальной модели при определении стоимости опционов колл вниз-и-вход. Стоимость такого опциона колл рассчитана по алгоритму триномиального дерева и представлена как функция числа периодов. Использованы параметры рис. 11.5. Теоретическое значение, равное 5,6605, приведено для сравнения.

Задание по программированию 17.2.6. Реализуйте алгоритмы триномиального дерева для барьерных опционов. Введите скидки для опционов типа «нокаут».

17.2.2 О сравнении алгоритмов

Алгоритмы часто сравниваются по тому значению n , при котором они сходятся хорошо, и предпочтение отдается тому, у которого это значение меньше. Но это является заблуждением, поскольку тогда можно было бы говорить, что жирафы быстрее гепарда просто потому, что для преодоления определенной дистанции им требуется сделать меньше шагов, и забывая о том, что быстрота движений также имеет значение. Поэтому подобно любой гонке, производительность алгоритма должна оцениваться по затрачиваемому при его использовании времени [717]. А в качестве конкретного примера возьмите рис. 11.5 и 17.9, на которых показано, что в триномиальной модели сходимость можно связать с меньшим значением n , чем в биномиальной. И именно поэтому некоторые говорят, что сходимость в триномиальной модели быстрее сходимости в биномиальной. Однако алгоритм биномиального дерева и линейного времени для Европейских барьерных опционов имеет более высокую эффективность по сравнению со своим триномиальным «коллегой» [610, 624].

17.3 Оценка стоимости многокомпонентных условных требований

Такие **многокомпонентные производные инструменты**, как опционы с корреляцией, являются условными требованиями, чья стоимость зависит от двух и более базовых активов. Рассмотрим **опцион-корзину** на m активов. Заключительная выплата у корзины-колл записывается

в виде $\max \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau) - X, 0 \right)$, а у корзины-пути имеет следующий вид $\max \left(X - \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau), 0 \right)$, где α_i обозначает долю актива i в корзине [663].

Опционы-корзины по существу представляют собой опционы на портфель из акций или опционы на индекс со взвешиванием относительно стоимости или цены. В качестве другого примера рассмотрим **опцион на большую стоимость из двух рисковых активов и актива из наличных**. Его заключительная выплата имеет вид $\max(S_1(\tau), S_2(\tau), X)$, что гарантирует денежную сумму в размере X , а также возможность получить лучший из двух активов, скажем, вклад в акции или облигации [833]. Поскольку заключительная выплата может быть представлена в виде $X + \max(\max(S_1(\tau), S_2(\tau)) - X, 0)$, то стоимость опциона равна величине $Xe^{-r\tau} + C$, где C — цена опциона колл на максимум из двух активов с ценой исполнения X . В этой части книги представлены биномиальные и триномиальные модели для оценки стоимости многокомпонентных производных инструментов со многими базовыми активами [107, 110]. А целью будет построение многомерного дискретного распределения с заданными значениями среднего, дисперсии или ковариации.

17.3.1 Построение триномиальной модели с корреляцией

Предположим, что цены двух рисковых активов S_1 и S_2 в риск-нейтральной экономике удовлетворяют уравнениям $dS_i/S_i = r dt + \sigma_i dW_i$, $i = 1, 2$. Введем величины $M_i \equiv e^{r\Delta t}$ и $V_i \equiv M_i^2(e^{\sigma_i^2 \Delta t} - 1)$, с помощью которых через $S_i M_i$ можно обозначить среднее, а через $S_i^2 V_i$ дисперсию с.в. S_i через промежуток времени Δt спустя. Произведение же с.в. $S_1 S_2$ в момент Δt имеет логнормальное распределение со средним $S_1 S_2 M_1 M_2 e^{\rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}$, где ρ — коэффициент корреляции между dW_1 и dW_2 . Приступим теперь к определению первого и второго моментов дискретных распределений, аппроксимирующих их непрерывные аналоги. Через промежуток времени Δt после начала имеются пять различных исходов. Соответствующее пятиточечное распределение вероятностей цен (двух активов) имеет следующий вид (как обычно, мы предполагаем, что $u_i d_i = 1$):

Вероятность	Возможные цены	
	актива 1	актива 2
p_1	$S_1 u_1$	$S_2 u_2$
p_2	$S_1 u_1$	$S_2 d_2$
p_3	$S_1 d_1$	$S_2 d_2$
p_4	$S_1 d_1$	$S_2 u_2$
p_5	S_1	S_2

Вероятности в сумме должны быть равны единице, а средние должны совпадать, что дает

$$\begin{cases} 1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \\ S_1 M_1 = (p_1 + p_2) S_1 u_1 + p_5 S_1 + (p_3 + p_4) S_1 d_1, \\ S_2 M_2 = (p_1 + p_4) S_2 u_2 + p_5 S_2 + (p_2 + p_3) S_2 d_2. \end{cases}$$

В следующих равенствах приравниваются дисперсии и ковариации:

$$\begin{cases} S_1^2 V_1 = (p_1 + p_2)[(S_1 u_1)^2 - (S_1 M_1)^2] + p_5[S_1^2 - (S_1 M_1)^2] + \\ \quad + (p_3 + p_4)[(S_1 d_1)^2 - (S_1 M_1)^2], \\ S_2^2 V_2 = (p_1 + p_4)[(S_2 u_2)^2 - (S_2 M_2)^2] + p_5[S_2^2 - (S_2 M_2)^2] + \\ \quad + (p_2 + p_3)[(S_2 d_2)^2 - (S_2 M_2)^2], \\ S_1 S_2 R = (p_1 u_1 u_2 + p_2 u_1 d_2 + p_3 d_1 d_2 + p_4 d_1 u_2 + p_5) S_1 S_2, \end{cases}$$

здесь $R \equiv M_1 M_2 e^{\rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}$. Решениями этой системы уравнений являются

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{u_1 u_2 (R - 1) - f_1 (u_1^2 - 1) - f_2 (u_2^2 - 1) + (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)}, \\ p_2 &= \frac{-u_1 u_2 (R - 1) + f_1 (u_1^2 - 1) u_2^2 + f_2 (u_2^2 - 1) - (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)}, \\ p_3 &= \frac{u_1 u_2 (R - 1) - f_1 (u_1^2 - 1) u_2^2 + g_2 (u_2^2 - 1) u_1^2 + (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - u_2^2)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)}, \\ p_4 &= \frac{-u_1 u_2 (R - 1) + f_1 (u_1^2 - 1) + f_2 (u_2^2 - 1) u_1^2 - (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)}, \end{aligned}$$

в записи которых мы полагаем, что

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 + p_2 = \frac{u_1 (V_1 + M_1^2 - M_1) - (M_1 - 1)}{(u_1 - 1)(u_1^2 - 1)}, \\ f_2 &= p_1 + p_4 = \frac{u_2 (V_2 + M_2^2 - M_2) - (M_2 - 1)}{(u_2 - 1)(u_2^2 - 1)}, \\ g_1 &= p_3 + p_4 = \frac{u_1^2 (V_1 + M_1^2 - M_1) - u_1^3 (M_1 - 1)}{(u_1 - 1)(u_1^2 - 1)}, \\ g_2 &= p_2 + p_3 = \frac{u_2^2 (V_2 + M_2^2 - M_2) - u_2^3 (M_2 - 1)}{(u_2 - 1)(u_2^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, то мы можем найти u_2 при данном $u_1 = e^{\lambda \sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$ и соответствующем $\lambda > 0$.

Как только дерево построено, стоимость многокомпонентного производного инструмента можно оценить с помощью обратной индукции. Для этого, как и обычно, математическое ожидание заключительной выплаты следует дисконтировать по безрисковой ставке.

Упражнение 17.3.1. Покажите, что имеется $1 + 2n(n + 1)$ возможных пар значений цен активов после n периодов.

17.3.2 Биномиальная альтернатива

В биномиальной модели для m активов, цена i -го актива S_i за один период может либо пойти вверх до $S_i u_i$, либо вниз до $S_i d_i$. Таким образом, в результате одного шага возможны 2^m различных состояний

(этот факт иллюстрирует **проклятие размерности**, поскольку сложность расчетов возрастает экспоненциально относительно размерности m). Мы полагаем, что $u_i = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t}}$ и $u_i d_i = 1$. Поскольку «работать» с логарифмом цены $\ln S_i$ обычно проще, мы полагаем $R_i \equiv \ln(S_i(\Delta t)/S_i)$. Из п. 14.4.3 мы знаем, что $R_i \sim N(\mu'_i \Delta t, \sigma_i^2 \Delta t)$, где $\mu'_i \equiv r - \sigma_i^2/2$.

Разберемся сначала со случаем $m=2$. Поскольку (R_1, R_2) имеет двумерное распределение, то его производящая функция есть

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{t_1 R_1 + t_2 R_2} &= \exp \left[(t_1 \mu'_1 + t_2 \mu'_2) \Delta t + (t_1^2 \sigma_1^2 + t_2^2 \sigma_2^2 + 2 t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho) \frac{\Delta t}{2} \right] \approx \\ &\approx 1 + (t_1 \mu'_1 + t_2 \mu'_2) \Delta t + (t_1^2 \sigma_1^2 + t_2^2 \sigma_2^2 + 2 t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho) \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned}$$

Введем вероятности для движений цен в следующей таблице:

Вероятность	Движение цены	
	актива 1	актива 2
p_1	вверх	вверх
p_2	вверх	вниз
p_3	вниз	вверх
p_4	вниз	вниз

В биномиальной же модели производящая функция случайного вектора (R_1, R_2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{t_1 R_1 + t_2 R_2} &= p_1 e^{(t_1 \sigma_1 + t_2 \sigma_2) \sqrt{\Delta t}} + p_2 e^{(t_1 \sigma_1 - t_2 \sigma_2) \sqrt{\Delta t}} + p_3 e^{(-t_1 \sigma_1 + t_2 \sigma_2) \sqrt{\Delta t}} + p_4 e^{(-t_1 \sigma_1 - t_2 \sigma_2) \sqrt{\Delta t}} \approx \\ &\approx (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + t_1 \sigma_1 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sqrt{\Delta t} + t_2 \sigma_2 (p_1 - p_2 + p_3 - p_4) \sqrt{\Delta t} + \\ &\quad + [t_1^2 \sigma_1^2 + t_2^2 \sigma_2^2 + 2 t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 (p_1 - p_2 - p_3 + p_4)] \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned}$$

Сравнивая предыдущие два уравнения, получаем, что

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} \left[1 + \rho + \sqrt{\Delta t} \left(\frac{\mu'_1}{\sigma_1} + \frac{\mu'_2}{\sigma_2} \right) \right], & p_2 &= \frac{1}{4} \left[1 - \rho + \sqrt{\Delta t} \left(\frac{\mu'_1}{\sigma_1} - \frac{\mu'_2}{\sigma_2} \right) \right], \\ p_3 &= \frac{1}{4} \left[1 - \rho + \sqrt{\Delta t} \left(-\frac{\mu'_1}{\sigma_1} + \frac{\mu'_2}{\sigma_2} \right) \right], & p_4 &= \frac{1}{4} \left[1 + \rho + \sqrt{\Delta t} \left(-\frac{\mu'_1}{\sigma_1} - \frac{\mu'_2}{\sigma_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим сходство найденных формул с одномерным вариантом (9.17).

Для общего же случая приведем лишь конечный результат, поскольку методология остается прежней. Пусть $\delta_i(j) = 1$, если S_i в состоянии j делает движение вверх и -1 в противном случае. Пусть $\delta_{ik}(j) = 1$, если S_i и S_k в состоянии j делают движение в одном и том же направлении и -1 в противном случае. Тогда вероятность того, что состояние j достигается, равна

$$p_j = \frac{1}{2^m} \sum_{i, k=1; i < k}^m \delta_{ik}(j) \rho_{ik} + \frac{1}{2^m} \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m \delta_i(j) \frac{\mu'_i}{\sigma_i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^m,$$

где ρ_{ik} обозначает коэффициент корреляции между dW_i и dW_k .

Упражнение 17.3.2. Легко проверить, что $\rho = 2(p_1 + p_4) - 1$. Покажите, что это тождество выполняется для произвольного биномиального случайного блуждания с корреляцией, определяемого равенствами $R_1(i+1) - R_1(i) = \mu_1 \pm \sigma_1$ и $R_2(i+1) - R_2(i) = \mu_2 \pm \sigma_2$, где ρ означает коэффициент корреляции между R_1 и R_2 , а « $\pm$ » означает «+» или «-», причем каждое с вероятностью $1/2$.

Упражнение 17.3.3. Сколько узлов будет у триномиального дерева после n периодов при m активах?

Упражнение 17.3.4. 1) Напишите комбинаторную формулу для стоимости Европейского опциона колл с выплатой $\max(S_1 S_2 - X, 0)$.

2) Как быстро можно оценивать эту стоимость?

Упражнение 17.3.5 (оптимальный коэффициент хеджирования). Найдите оптимальное число фьючерсов, по которым следует занять короткую позицию, при котором минимизируется дисперсия хеджирования длинной акции в случае, когда два актива не полностью коррелированы. Предположите, что рассматривается промежуток времени Δt .

Задание по программированию 17.3.6. Примените биномиальную модель к опциону на большую стоимость из двух рисковых активов и актива из наличных.

Дополнительная литература

Особое внимание комбинаторным методам уделяется в [342, 838]. Основные идеи по комбинаторике целочисленных решеток можно найти в [396, 675, 686]. Более подробный анализ БМОО представлен в [434, 696, 835]. Альтернативным подходом для биномиальной оценки стоимости барьерных опционов при желании улучшить сходимость является интерполяция [271]. Еще одна идея, позволяющая бороться с трудностями при оценке стоимости барьерных опционов различного типа, сводится к использованию триномиального дерева с изменяющимися плотностями [9]. Многие исследования по барьерным опционам обсуждаются в [131, 158, 271, 370, 443, 444, 740, 752, 824, 841, 874]. Численные решения по опционам с двойным барьером приведены в [68, 380, 423, 756]. Триномиальная модель принадлежит Паркинсону [713]. Представленные здесь варианты триномиальной модели улучшены в [202]. За точными и приближенными формулами стоимости для опционов на максимум и минимум из двух активов можно обращаться к [423, 519] и [114], соответственно. Дальнейшую информацию по многомерным производным инструментам можно найти в [450, 451, 452, 539, 628, 876].

Примечание

1. Мы могли бы пойти на более тонкий выбор эффективного барьера в форме Sd^j ($-n \leq j \leq n$) по аналогии с алгоритмом на рис. 11.4 (см. упр. 17.1.13). Но это не было сделано в связи с желанием получить выражение для оценки стоимости опциона, похожее на биномиальную формулу (9.10).

Идее последовательного приближения поклоняются все области знания.
Бертран Расселл

Стохастические дифференциальные уравнения тесно связаны с эллиптическими и параболическими дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка [572]. Наряду с алгоритмами биномиального дерева, уже предложенными вниманию читателя, существуют и еще два очень известных подхода, а именно численные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных и моделирование по методу Монте-Карло. Оба они излагаются в настоящей главе. Одновременно освещаются и способы уменьшения дисперсии при моделировании по методу Монте-Карло. Детерминированная версия этого моделирования, называемая **квазиметодом Монте-Карло**, заменяет вероятностные оценки для ошибки на детерминированные. Ей также уделяется некоторое внимание.

18.1 Конечно-разностные методы

В методе **конечных разностей** на область определения рассматриваемой функции «набрасывается» решетка из точек и затем в каждой из них значение функции оценивается; см. рис. 18.1, который служит иллюстрацией к сказанному. Метод позволяет решать уравнение численно, заменяя его на уравнение в разностях, которые приближают значения производных.

Рассмотрим в качестве примера уравнение Пуассона $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\rho(x, y)$. Заменяя в нем вторые производные конечными разностями с помощью центральных разностей и вводя равномерную решетку с расстояниями между точками, равными Δx по оси x и Δy по оси y , можем записать исходное уравнение в следующей конечно-разностной форме

$$\frac{\theta(x_{i+1}, y_j) - 2\theta(x_i, y_j) + \theta(x_{i-1}, y_j))}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta(x_i, y_{j+1}) - 2\theta(x_i, y_j) + \theta(x_i, y_{j-1}))}{(\Delta y)^2} = -\rho(x_i, y_j),$$

где $\Delta x \equiv x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y \equiv y_j - y_{j-1}$ при $i, j = 1, 2, \dots$. Если же расстояния между точками решетки одинаковы по обеим осям, так что $\Delta x = \Delta y = h$, то наше дифференциальное уравнение записывается в виде

$$\theta(x_{i+1}, y_j) + \theta(x_{i-1}, y_j) + \theta(x_i, y_{j+1}) + \theta(x_i, y_{j-1}) - 4\theta(x_i, y_j) = -h^2 \rho(x_i, y_j).$$

При данных граничных значениях функции $\theta(x, y)$ на прямых $x = \pm L$ и $y = \pm L$, мы можем найти ее значения при всех x_i и y_j внутри квад-

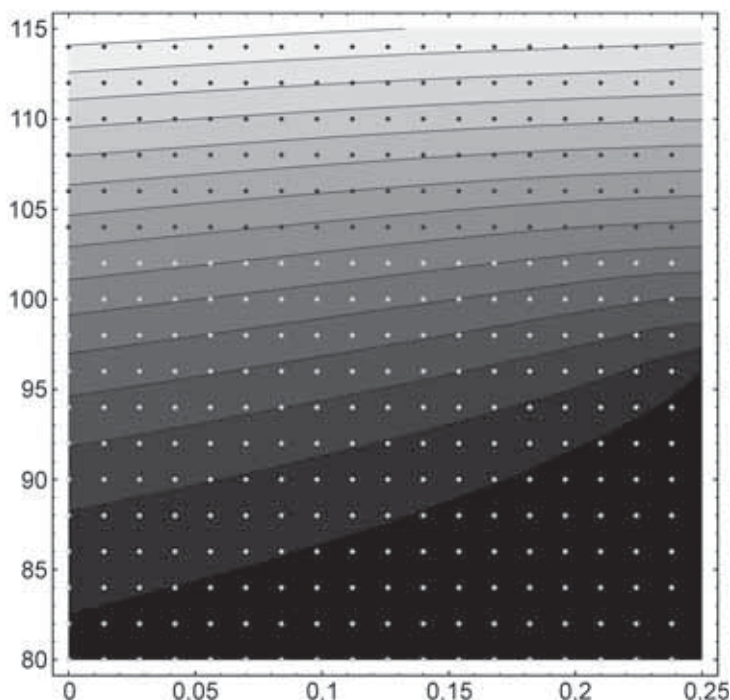


Рис. 18.1. Конечно-разностный метод. Здесь представлена решетка на прямоугольнике $[0, 0.25] \times [80, 115]$. Точное решение дифференциального уравнения Блэка—Шоулса для стоимости Европейского опциона колл проиллюстрировано здесь с помощью более темного серого цвета, означающего меньшую стоимость. Цена исполнения равна \$95, момент окончания срока действия есть $x = 0.25$ (в годах), а ось x означает время. Метод конечных разностей позволяет найти значения стоимости на дискретной решетке точек, которые совпадают с теоретическими значениями или приближают их.

рата $[\pm L, \pm L]$. В дальнейшем символ $\theta_{i,j}$ обозначает конечно-разностное приближение к точному значению $\theta(x_i, y_j)$.

18.1.1 Явные методы

Рассмотрим теперь другой пример, а именно уравнение диффузии $D(\partial^2 \theta / \partial x^2) - (\partial \theta / \partial t) = 0$. И будем опять использовать решетку с равномерно разбросанными точками (x_i, t_j) , находящимися друг от друга на расстоянии Δx и Δt , где $\Delta x \equiv x_{i+1} - x_i$ и $\Delta t \equiv t_{j+1} - t_j$. Будем также использовать центральную разность для второй производной и упреждающую разность для первой частной производной по времени, т. е. использовать представления

$$\left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \frac{\theta(x, t_{j+1}) - \theta(x, t_j)}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (18.1)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{\theta(x_{i+1}, t) - 2\theta(x_i, t) + \theta(x_{i-1}, t))}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (18.2)$$

Чтобы записать наше уравнение с помощью выражений (18.1) и (18.2) в точке (x_i, t_j) , нам нужно решить, каким выбрать параметры x в первом уравнении и t во втором. Поскольку в равенстве (18.2) использовалась центральная разность относительно x_i , мы можем и в равенстве (18.1) положить x равным x_i . Но выбрать параметр t в уравнении (18.1) можно двумя способами. В первом из них мы полагаем $t = t_j$ и получаем следующее конечно-разностное уравнение:

$$\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta t} = D \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (18.3)$$

При записи этого уравнения использованы следующие четыре точки решетки: $\theta_{i,j+1}$, $\theta_{i,j}$, $\theta_{i+1,j}$ и $\theta_{i-1,j}$. Следовательно, значение $\theta_{i,j+1}$ мы сможем рассчитать с помощью трех других значений, $\theta_{i,j}$, $\theta_{i+1,j}$, $\theta_{i-1,j}$, относящихся к предшествующему моменту времени t_j (см. рис. 18.2 (а)). Поэтому, начиная с исходного условия при t_0 , т.е. равенства $\theta_{i,0} = \theta(x_i, t_0)$, $i = 1, 2, \dots$, мы сначала вычисляем значения $\theta_{i,1}$, $i = 1, 2, \dots$, затем $\theta_{i,2}$, $i = 1, 2, \dots$, и т.д. Этот подход и называется **явный метод** [883].

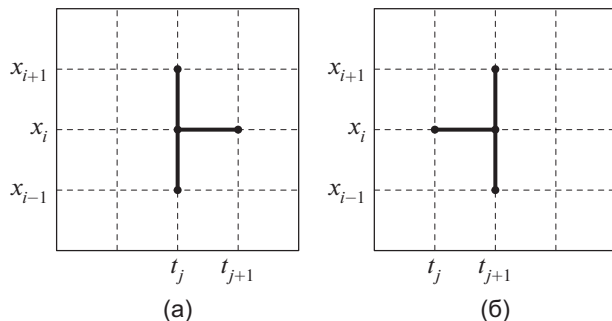
Явный метод оказывается численно неустойчивым, если не выполняется неравенство $\Delta t \leq (\Delta x)^2 / (2D)$. Численный метод называется **неустойчивым**, если получаемое с его помощью решение слишком чувствительно к изменению начальных условий [391]. А выполнение условия устойчивости может привести к увеличению затрачиваемого времени или усилению требований к памяти. Например, удвоение величины $(\Delta x)^{-1}$ приведет к увеличению в четыре раза величины $(\Delta t)^{-1}$, что в свою очередь приведет к увеличению затрачиваемого времени примерно в восемь раз. Но от этой малопривлекательной черты можно «освободиться», используя **неявный метод**, который и будет представлен чуть позже.

Между явным методом и триномиальной моделью существует интегральная связь. Запишем равенство (18.3) несколько иначе:

$$\theta_{i,j+1} = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta_{i+1,j} + \left[1 - \frac{2D\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] \theta_{i,j} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta_{i-1,j}.$$

Если условие устойчивости выполняется, то все три коэффициента при $\theta_{i+1,j}$, $\theta_{i,j}$ и $\theta_{i-1,j}$ лежат между нулем и единицей, а в сумме равны единице. Поэтому их можно интерпретировать как вероятности. И, сле-

Рис. 18.2. Явные и неявные методы. Используемые точки решетки для (а) явного и (б) неявного конечно-разностных методов при решении дифференциального уравнения в частных производных первого порядка по t и второго по x .



довательно, уравнение в конечных разностях можно сравнить с обратной индукцией на триномияльных деревьях [473, 575].

Упражнение 18.1.1. Запишите конечно-разностную версию уравнения Пуассона в матричной форме.

18.1.2 Неявные методы

Если в равенстве (18.2) положить $t = t_{j+1}$ (вместо $t = t_j$), то конечно-разностное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta t} = D \frac{\theta_{i+1,j+1} - 2\theta_{i,j+1} + \theta_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (18.4)$$

Используемыми при записи уравнения (18.4) точками решетки являются $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,j+1}$, $\theta_{i+1,j+1}$ и $\theta_{i-1,j+1}$. Этот метод является неявным, поскольку значение любого из трех элементов в точке t_{j+1} нельзя вычислить, если два других не будут известны (см. рис. 18.2 (б)). Его также называют **полностью неявной обратнo-разностной схемой**. Уравнение (18.4) можно переписать и в виде

$$\theta_{i-1,j+1} - (2 + \gamma)\theta_{i,j+1} + \theta_{i+1,j+1} = -\gamma\theta_{i,j},$$

где $\gamma \equiv (\Delta x)^2 / (D\Delta t)$. Это уравнение безусловно устойчивое [28, 464]. Предположим, что граничные условия заданы при $x = x_0$ и $x = x_{N+1}$. Тогда, после того, как значения $\theta_{i,j}$ будут найдены при $i = 1, 2, \dots, N$, значения $\theta_{i,j+1}$ в момент t_{j+1} могут быть получены как решение следующей трехдиагональной системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & 1 & a & 1 & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,j+1} \\ \theta_{2,j+1} \\ \theta_{3,j+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-1,j+1} \\ \theta_{N,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\theta_{1,j} - \theta_{0,j+1} \\ -\gamma\theta_{2,j} \\ -\gamma\theta_{3,j} \\ \vdots \\ -\gamma\theta_{N-1,j} \\ -\gamma\theta_{N,j} - \theta_{N+1,j+1} \end{pmatrix},$$

где $a \equiv -2 - \gamma$. Трехдиагональные системы можно решить за время $O(N)$ и память им нужна такого же объема $O(N)$ [35]. Указанная матрица невырождена, если $\gamma \geq 0$. Напомним, что квадратная матрица называется **невырожденной**, если у нее есть обратная матрица.

Усреднение явного метода (18.3) и неявного (18.4) приводит к выражению

$$\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[D \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + D \frac{\theta_{i+1,j+1} - 2\theta_{i,j+1} + \theta_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2} \right].$$

Переставляя в нем слагаемые, получаем уравнение, называемое **методом Кранка—Никольсона**:

$$\gamma\theta_{i,j+1} - \frac{\theta_{i+1,j+1} - 2\theta_{i,j+1} + \theta_{i-1,j+1}}{2} = \gamma\theta_{i,j} + \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{2}.$$

Этот метод является безусловно устойчивым неявным методом с прекрасной скоростью сходимости [810].

18.1.3 Численное решение дифференциального уравнения Блэка—Шоулса

Мы сконцентрируем свое внимание на Американских опционах пут; однако, подобная методика может быть использована и для любого производного инструмента, чья стоимость удовлетворяет дифференциальному уравнению Блэка—Шоулса, причем потребуются изменить лишь начальные и граничные условия.

Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса для Американских опционов пут имеет следующий вид

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial P}{\partial S} - rP + \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

в котором $P(S, T) = \max(X - S, 0)$ и $P(S, t) = \max(\bar{P}(S, t), X - S)$ при $t < T$. $\bar{P}$ обозначает стоимость опциона в момент времени t , если опцион не исполняется в следующее мгновение. После замены переменной $V \equiv \ln S$ обозначим стоимость опциона через $U(V, t) \equiv P(e^V, t)$, при этом

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial U}{\partial V}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} - \frac{1}{S^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial V}.$$

В результате дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса переходит в уравнение

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial V} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

причем выполняются следующие ограничения: $U(V, T) = \max(X - e^V, 0)$ и $U(V, t) = \max(\bar{U}(V, t), X - e^V)$, $t < T$. Вдоль оси V целочисленная решетка будет простирается от значения $V_{\min}$ до $V_{\min} + N \times \Delta V$ при ΔV , не совпадающим с некоторым, достаточно малым $V_{\min}$; поэтому требуется задавать граничные условия на нижней ($V = V_{\min}$) и верхней ($V = V_{\min} + N \times \Delta V$) границах. Наконец, как и обычно, S_0 означает текущую цену акции.

Явная схема. Явная схема для дифференциального уравнения Блэка—Шоулса имеет следующий вид

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta V)^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta V} - rU_{i,j} + \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta t} = 0;$$

в ней $1 \leq i \leq N - 1$. Отметим, что вычисления проводятся в направлении, обратном по времени. Имеется $N - 1$ разностное уравнение. Сгруппируем слагаемые и запишем их в виде

$$U_{i,j-1} = aU_{i-1,j} + bU_{i,j} + cU_{i+1,j},$$

в котором

$$a \equiv \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta V} \right)^2 - \frac{r - q - \sigma^2/2}{\Delta V} \right] \frac{\Delta t}{2}, \quad b \equiv 1 - r\Delta t - \left(\frac{\sigma}{\Delta V} \right)^2 \Delta t, \\ c \equiv \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta V} \right)^2 + \frac{r - q - \sigma^2/2}{\Delta V} \right] \frac{\Delta t}{2}.$$

Каждое из этих $N - 1$ уравнений выражает стоимость опциона в момент времени, соответствующий шагу $j - 1$, через стоимость, относящуюся

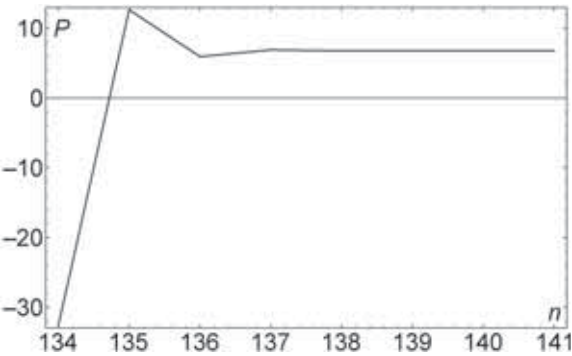


Рис. 18.3. Сходимость явного метода. Здесь $\Delta V=0,031073$ и $\Delta t=\frac{5}{6n}$. При $n \geq 137$ численное решение сходится к теоретическому значению стоимости P Европейского опциона пут 6,777986.

к шагу j . Для Американских опционов пут при выборе нижней границы для функции U мы предположим, что ее первая производная в точках решетки $(0, j)$ при всех j равна $-e^{V_{\min}}$. По существу это приводит к тому, что стоимость опциона пут $X-S=X-e^V$, и потому $U_{0,j-1}=U_{1,j-1}+(e^{V_{\min}+\Delta V}-e^{V_{\min}})$. При выборе верхней границы мы полагаем $U_{N,j-1}=0$. Тем самым стоимость опциона пут в любой точке решетки на временном шаге $j-1$ оказывается явной функцией ее значений на шаге j . Наконец, $U_{i,j}$ полагается равной большому числу из вышеуказанных значений и величины $X-e^{V_{\min}+i \times \Delta V}$, возникающей из соображений досрочного исполнения. Повторяя этот процесс по мере продвижения в направлении обратном по времени, мы в конце концов и придем к решению в момент ноль, $U_{k,0}$, где k является таким целым, при котором величина $V_{\min}+k \times \Delta V$ оказывается ближайшей к $\ln S_0$. Как вытекает из условия устойчивости, при данном ΔV значение Δt должно быть достаточно малым для того, чтобы метод сходился (см. рис. 18.3). Формально для этого нужно, чтобы $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

По явному методу требуется вычислять значения (искомой функции) во всех точках решетки прямоугольника. На практике же в момент времени ноль нам нужно лишь одно единственное значение, в точке $(0, k)$,

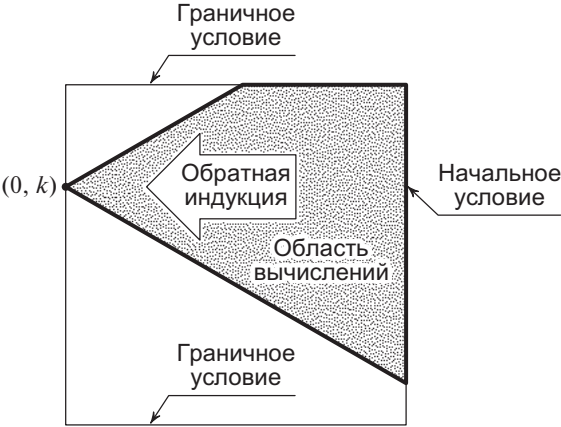


Рис. 18.4. Реализация явного метода. Вычисление искомых значений следует проводить лишь для точек решетки в урезанном треугольнике внутри прямоугольника.

которое отвечает текущей цене акции. Ну а точки решетки, которые могут оказать влияние на искомое значение, образуют в прямоугольнике треугольное подмножество. Причем этот треугольник можно еще и «обрезать двумя граничными условиями» (см. рис. 18.4). Поэтому в результате нужно вычислять значения лишь в точках решетки, лежащих внутри урезанного треугольника.

Упражнение 18.1.2. Каковы заключительные условия?

Упражнение 18.1.3. Повторите все шаги для Американских опционов колл.

Упражнение 18.1.4. Выведите условия устойчивости при использовании явного метода для решения дифференциального уравнения Блэка—Шоулса. Для простоты считайте, что $q=0$.

Задание по программированию 18.1.5. Напишите программу по явному методу для Американских опционов пут.

Неявная схема. На этот раз дифференциальное уравнение в частных производных превращается в следующую систему из $N-1$ разностных уравнений:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta V)^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta V} - rU_{i,j} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} = 0, \\ 1 \leq i \leq N-1.$$

Если сгруппировать слагаемые, то придем к соотношению

$$aU_{i-1,j} + bU_{i,j} + cU_{i+1,j} = U_{i,j+1},$$

в котором

$$a \equiv \left[-\left(\frac{\sigma}{\Delta V}\right)^2 + \frac{r - q - \sigma^2/2}{\Delta V} \right] \frac{\Delta t}{2}, \quad b \equiv 1 + r\Delta t + \left(\frac{\sigma}{\Delta V}\right)^2 \Delta t, \\ c \equiv -\left[\left(\frac{\sigma}{\Delta V}\right)^2 + \frac{r - q - \sigma^2/2}{\Delta V} \right] \frac{\Delta t}{2}.$$

Эту систему уравнений можно записать и в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b^* & c & & & 0 \\ a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a & b & c \\ & & & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ \vdots \\ U_{N-2,j} \\ U_{N-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,j+1} - K \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{N-2,j+1} \\ U_{N-1,j+1} \end{pmatrix},$$

где $b^* \equiv a + b$ и $K \equiv a(e^{V_{\min} + \Delta V} - e^{V_{\min}})$. Значения $U_{1,j}$, $U_{2,j}$, ..., $U_{N-1,j}$ можно получить, обращая трехдиагональную матрицу. Как и ранее, при каждом шаге по времени и до того, как переходить к следующему шагу, мы должны сравнить полученное значение стоимости опциона с его внутренней стоимостью и поменять его на нее, если она больше.

Задание по программированию 18.1.6. Напишите программу по неявному методу для Американских опционов пут.

18.2 Моделирование по методу Монте-Карло

Моделирование по методу Монте-Карло является выборочной схемой. Во многих важных приложениях, как из области финансов, так и вне их, моделирование по методу Монте-Карло представляет собой один из нескольких доступных инструментов. Оно оказалось также одним из важнейших элементов при изучении эконометрики [550]. Когда поведение случайного процесса во времени нелегко описать аналитически, моделирование по методу Монте-Карло вполне может оказаться единственным подходом, который обязательно приводит к успеху [386].

Предположим, что совместное распределение с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ известно и требуется найти величину $\theta \equiv \text{Eg}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ при некоторой функции g . Тогда мы производим независимую выборку

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq N,$$

из данного распределения вектора $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и полагаем

$$y_i \equiv g(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}).$$

Можно считать, что полученные величины y_i являются значениями независимых и одинаково распределенных с.в. $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, причем все величины Y_i распределены как с.в. $Y \equiv g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Поскольку же среднее $\bar{Y}$ этих N случайных величин удовлетворяет равенству $\text{E}\bar{Y} = \theta$, то его можно использовать в качестве оценки для θ . В действительности, **усиленный закон больших чисел** утверждает, что последовательность этих средних при $N \rightarrow \infty$ сходится к θ почти наверное [699]. Число же **копий** (или *независимых испытаний*) N называется **объемом выборки**.

Пример 18.2.1. Чтобы оценить значение определенного интеграла $\int_a^b g(x) dx$, рассмотрим с.в. $Y \equiv (b-a)g(X)$, считая с.в. X равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$. Отметим, что $P\{X \leq x\} = \frac{x-a}{b-a}$ при всех $a \leq x \leq b$. Поскольку

$$\text{E}Y = (b-a) \text{E}g(X) = (b-a) \int_a^b \frac{g(x)}{b-a} dx = \int_a^b g(x) dx,$$

то для оценки интеграла можно использовать любую несмещенную оценку для $\text{E}Y$. ◁

Оценка по методу Монте-Карло и истинное значение могут отличаться по двум причинам: рассеянием выборочных значений и дискретностью выборочных траекторий. Первое можно контролировать с помощью числа копий, в чем мы убедимся в следующем параграфе, а на второе можно воздействовать с помощью числа наблюдений вдоль выборочной траектории [147].

Статистическая ошибка выборочного среднего $\bar{Y}$ при оценке $\text{E}Y$ изменяется как $1/\sqrt{N}$, поскольку $D\bar{Y} = DY/N$. В действительности же эта скорость сходимости асимптотически оптимальна в силу **теоремы Берри—Эссеена** [413]. Как следствие, дисперсию оценки $\bar{Y}$ можно уменьшить

в N раз за счет в N раз большей работы [721]. Это свойство удивительно, поскольку тот же порядок сходимости имеет место независимо от размерности n . В противовес этому у классических схем численного интегрирования оценка ошибки имеет порядок $O(N^{-c/n})$ при некоторой постоянной $c > 0$. Таким образом, требуемое число шагов для достижения заданного уровня точности растет экспоненциально по n . Это и есть проклятие размерности. Метод же Монте-Карло, например, оказывается заметно более эффективным, чем другие процедуры, для ценных бумаг (ЦБ), зависящих от нескольких активов, так сказать для многокомпонентных производных инструментов [530].

Статистическая эффективность моделирования по методу Монте-Карло может измеряться дисперсией значения на выходе. Если эту дисперсию можно уменьшить не меняя ожидаемое значение, то понадобится меньше копий. Методы, которые улучшают эффективность в этом смысле, называют **техническими приемами уменьшения дисперсии**. Подобные технические приемы, представленные в п. 18.2.3, становятся практически полезными, если увеличение затрат перевешивается выгодами, связанными с уменьшением объема выборки.

18.2.1 Оценка стоимости опционов по методу Монте-Карло

Для оценки стоимости Европейских опционов на акции с дивидендами можно действовать следующим образом. В силу (14.17) цены акций $S_1, S_2, S_3, \dots$ в моменты времени $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ можно получать с помощью рекуррентного соотношения

$$S_{i+1} = S_i e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi}, \quad \xi \sim N(0, 1),$$

если $dS/S = \mu dt + \sigma dW$. Цены же на бездивидендные акции в риск-нейтральной экономике можно генерировать, полагая $\mu = r$. На рис. 18.5 приведен алгоритм оценки стоимости для арифметически усредненных опционов колл.

Стандартное отклонение выборки схемы оценки на рис. 18.5 пропорционально $1/\sqrt{m}$, где m — число копий. Чтобы сузить доверительный интервал в f раз, нужно произвести в f^2 раз больше копий. И хотя мы не знаем, насколько малым следует выбрать $\Delta t \equiv \tau/n$, чтобы получить приемлемое приближение, оценить величину m нетрудно. Поскольку оценка получается как простое усреднение всех копий и центральная предельная теорема утверждает, что ошибка оценки распределена как $N(0, s^2/m)$, где s^2 означает дисперсию каждой копии. Поэтому для определения искомого значения m можно использовать размер доверительного интервала.

Дискретность выборочной траектории и расхождение в ценах необязательно означают, что метод Монте-Карло приводит к худшим результатам, чем при использовании точных решений. Окончательный вывод сильно зависит от оцениваемой ЦБ. И в действительности, к примеру, поскольку цены не меняются непрерывно, то более подходящей может оказаться именно модель с дискретным временем.

Метод Монте-Карло для оценки стоимости усредненных опционов колл на бездивидендную акцию:

ввод: $S, X, n, r, \sigma, \tau, m$;
 действительные числа P, C, M ;
 действительные числа $\xi(\cdot)$; // $\xi(\cdot) \sim N(0, 1)$
 целые числа i, j ;
 $C := 0$; // Накопленная заключительная стоимость опциона.
 для $(i = 1 \text{ до } m) \{$ // Сделайте m копий
 $P := S; M := S$;
 для $(j = 1 \text{ до } n) \{$
 $P := P \times e^{(r - \sigma^2/2)(\tau/n) + \sigma\sqrt{\tau/n} \xi(0)}$;
 $M := M + P$;
 $\}$
 $C := C + \max(M/(n+1) - X, 0)$;
 $\}$
 вывод $Ce^{-r\tau}/m$;

Рис. 18.5. Метод Монте-Карло для опционов колл с усредненной ценой акции. В нем m — число копий, а n — число периодов.

Моделирование по методу Монте-Карло — это общая методология. И ее можно использовать в сущности для оценки стоимости любой производной ЦБ Европейского типа [147]. Стандартное же моделирование по методу Монте-Карло, однако, для Американских опционов не годится по причине досрочного исполнения: трудно по одной единственной траектории определить точку досрочного исполнения. В то же время Тилли заинтриговал всех тем, что показал: метод Монте-Карло можно приспособить к оценке стоимости Американских опционов [842]; оценка, однако, оказывается смещенной [108].

Упражнение 18.2.1. Как следует оценивать стоимость Европейских барьерных опционов по методу Монте-Карло?

Упражнение 18.2.2. Рассмотрим метод Монте-Карло для оценки стоимости Американского опциона колл, в котором сначала для каждой смоделированной траектории находят максимальное значение дисконтированной внутренней стоимости и затем все эти полученные значения усредняют: $E\left(\max_{i=0,1,\dots,n} e^{-ri\Delta t} \max(S_i - X, 0)\right)$. Покажите, что этот подход приводит к сильно смещенной оценке.

Задание по программированию 18.2.3. Реализуйте метод Монте-Карло для арифметически усредненных опционов колл и пут.

18.2.2 Процессы Ито

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t$. Хотя определить точное решение для этого уравнения часто довольно трудно, но смоделировать сам процесс на компьютере можно относительно легко [585]. Напомним, что по методу Эйлера следует выбрать малое Δt и затем аппроксимировать процесс Ито с помощью рекуррентного соотношения

$$\hat{X}(t_{n+1}) = \hat{X}(t_n) + a(\hat{X}(t_n))\Delta t + b(\hat{X}(t_n))\sqrt{\Delta t}\xi,$$

Рис. 18.6. Моделирование процесса Ито по методу Монте-Карло. Процесс Ито записывается в виде $dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t$. Реализация алгоритма генерирует приближенную выборочную траекторию процесса.

Моделирование процесса Ито по методу Монте-Карло:

ввод: $x_0, T, \Delta t$;
действительные числа $X[0..\lceil T/\Delta t \rceil]$;
действительные числа $\xi(\cdot)$; // $\xi(\cdot) \sim N(0, 1)$
целые i ;
 $X[0] := x_0$; // Начальное состояние
для $(i = 1 \text{ до } \lceil T/\Delta t \rceil) \{$
 $X[i] := X[i-1] + a(X[i-1])\Delta t + b(X[i-1])\sqrt{\Delta t} \xi(\cdot)$;
}
вывод $X[\cdot]$;

в котором $\xi \sim N(0, 1)$. Этот алгоритм приведен на рис. 18.6. Такое моделирование оказывается точным при любом Δt , если не только снос a , но и диффузия b постоянны, как в броуновском движении, поскольку сумма независимых нормальных с.в. нормально распределена.

Упражнение 18.2.4. Метод Монте-Карло для процесса Ито (см. рис. 18.6) теоретически может и не быть наилучшим вариантом. Рассмотрим геометрическое броуновское движение $dX/X = \mu dt + \sigma dW$. И предположим, что у вас есть доступ к совершенному датчику случайных чисел, который производит выборку из нормального распределения. Найдите более хороший с теоретической точки зрения алгоритм для получения выборочной траектории процесса X .

Задание по программированию 18.2.5. Смоделируйте процесс, удовлетворяющий уравнению $dX_t = (0,06 - X_t) dt + 0,3 dW_t$, используя значение $\Delta t \equiv 0,01$. Объясните его динамику.

Дискретная аппроксимация процесса Ито с помощью броуновского моста. Наряду с методом Эйлера и связанными с ним приближенными методами из п. 14.2.1 еще один вариант приближения процесса Ито дает броуновский мост. Пусть интервал времени $[0, T]$ разбит на части точками $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$. Вместо того, чтобы получать дискретную реализацию винеровского процесса с помощью соотношения

$$W(t_n) = W(t_{n-1}) + \sqrt{t_n - t_{n-1}} \xi, \quad \xi \sim N(0, 1),$$

по новому методу следует воспользоваться равенством

$$W(t_n) = \frac{t_{n+1} - t_n}{t_{n+1} - t_{n-1}} W(t_{n-1}) + \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}} W(t_{n+1}) + \sqrt{\frac{(t_{n+1} - t_n)(t_n - t_{n-1})}{t_{n+1} - t_{n-1}}} \xi,$$

при данном прошлом значении $W(t_{n-1})$ и будущем значении $W(t_{n+1})$. Вообще говоря, метод позволяет определить выборочную траекторию $W(i(T/2^m))$, $i = 0, 1, \dots, 2^m$, соответствующую интервалу $[0, T]$ следующим образом. Прежде всего, полагаем $W(0) = 0$ и $W(T) = \sqrt{T} \xi$. Затем определяем значение в средней точке $W(T/2)$, используя вышеуказанное соотношение. После этого находим значения в средних точках интервалов $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$, т.е. значения $W(T/4)$ и $W(3T/4)$, соответственно.

И проведем далее еще $m - 2$ итераций. Эта схема увеличивает точность квазимоделирования по методу Монте-Карло, с которой мы вскоре познакомим читателя, уменьшая его реальную размерность [6, 142, 679, 876].

Задание по программированию 18.2.6. Реализуйте подход с броуновским мостом для получения выборочной траектории процесса геометрического броуновского движения.

18.2.3 Технические приемы по уменьшению дисперсии

Успешное использование схем по уменьшению дисперсии самым существенным образом зависит от рассматриваемой проблемы. Поскольку заранее обычно невозможно представить, насколько большого уменьшения дисперсии можно добиться, если вообще возможно, то следует провести предварительный прогон схемы для сравнения ее результатов с полученными при использовании стандартного моделирования по методу Монте-Карло.

Противоположно направленные переменные. Предположим, что нам нужно оценить величину $Eg(X_1, X_2, \dots, X_n)$, при некоторых независимых с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$. И пусть с.в. Y_1 и Y_2 распределены так же, как и $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Тогда

$$D\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = \frac{DY_1}{2} + \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{2}.$$

Заметим, что $DY_1/2$ является дисперсией (ошибки) в методе Монте-Карло с двумя (независимыми) элементами выборки. Ну а дисперсия $D((Y_1 + Y_2)/2)$ меньше, чем $DY_1/2$, если Y_1 и Y_2 отрицательно коррелированы, а не являются независимыми.

Техника **противоположно направленных переменных** опирается на сделанное выше замечание. Прежде всего величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ моделируются с помощью **техники обратного преобразования**. Это означает, что с.в. X_i порождается с.в. $F_i^{-1}(U_i)$, где U_i равномерно распределена на отрезке $(0, 1)$, а F_i — функция распределения с.в. X_i . Положим

$$Y_1 \equiv g(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n)).$$

Поскольку с.в. $1 - U$ также равномерно распределена на $(0, 1)$, то

$$Y_2 \equiv g(F_1^{-1}(1 - U_1), \dots, F_n^{-1}(1 - U_n))$$

имеет то же распределение, что и Y_1 . При этом, если g монотонная функция, то Y_1 и Y_2 и в самом деле отрицательно коррелированы и оценка с противоположно направленными переменными

$$\frac{g(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n)) + g(F_1^{-1}(1 - U_1), \dots, F_n^{-1}(1 - U_n))}{2},$$

имеет меньшую дисперсию, чем в методе Монте-Карло с двумя элементами выборки [764]. Но уменьшается также и время, затрачиваемое на вычисления, поскольку вместо $2n$ случайных чисел понадобится генерировать лишь n , так как каждое из них будет использовано дважды.

Вообще же, для каждой моделируемой выборочной траектории X мы получаем вторую, используя те же случайные числа, на которых была основана первая траектория, и тем самым приходим ко второй выборочной траектории Y . Затем получаем две оценки, одна из которых основана на X , а другая на Y . И если в совокупности будет сгенерировано N независимых выборочных траекторий, то оценка, основанная на противоположно направленных переменных, фактически будет усреднением $2N$ оценок.

Пример 18.2.2. Рассмотрим процесс Ито $dX = a_t dt + b_t \sqrt{dt} \xi$. И пусть g — функция n элементов выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ из выборочной траектории. Нас интересует величина $Eg(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Предположим, что один прогон моделирования приводит к реализациям $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нормально распределенной с.в. ξ из слагаемого, характеризующего колебания процесса, и эти n с.в. порождают выборку $x_1, x_2, \dots, x_n$. Оценкой тогда является величина $g(x)$, где $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Затем, вместо того, чтобы получать еще n элементов выборки из распределения ξ для второй оценки, по методу с противоположно направленными переменными рассчитывают величину $g(x')$ по выборочной траектории $x' \equiv (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, сгенерированной величинами $-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n$ и в качестве оценки берут величину $[g(x) + g(x')]/2$. На рис. 18.7 метод с противоположно направленными переменными реализован для усредненных опционов. $\triangleleft$

Упражнение 18.2.7. Мотивируйте справедливость и сформулируйте обобщение подхода из примера 18.2.2.

Задание по программированию 18.2.8. Реализуйте метод с противоположно направленными переменными для арифметически усредненных

Метод с противоположно направленными переменными для оценки стоимости усредненных опционов колл на бездивидендную акцию:

ввод: $S, X, n, r, \sigma, \tau, m$;
действительные числа P_1, P_2, C, M_1, M_2, a ;
действительные числа $\xi(); // \xi() \sim N(0, 1)$
целые числа i, j ;
 $C := 0$;
для $(i = 1 \text{ до } m) \{$
 $P_1 := S; P_2 := S; M_1 := S; M_2 := S$;
 для $(j = 1 \text{ до } n) \{$
 $a := \xi()$;
 $P_1 := P_1 e^{(r - \sigma^2/2)(\tau/n) + \sigma\sqrt{\tau/n} a}$;
 $P_2 := P_2 e^{(r - \sigma^2/2)(\tau/n) - \sigma\sqrt{\tau/n} a}$;
 $M_1 := M_1 + P_1; M_2 := M_2 + P_2$;
 }
 $C := C + \max(M_1/(n+1) - X, 0)$;
 $C := C + \max(M_2/(n+1) - X, 0)$;
}
вывод $Ce^{-rt}/(2m)$;

Рис. 18.7. Метод с противоположно направленными переменными для усредненных опционов колл. В нем P_1 сохраняет след от первой выборочной траектории, P_2 сохраняет след от второй выборочной траектории, m — число копий, а n — число периодов.

опционов колл и пут. Сравните его с методом Монте-Карло в задании по программированию 18.2.3.

Использование условного математического ожидания. Пусть X — случайная величина, математическое ожидание μ которой нужно оценить. И есть другая с.в. Z , для которой можно быстро и точно вычислить условное математическое ожидание $E(X|Z=z)$. А по телескопическому свойству условных математических ожиданий $EX = E(E(X|Z))$. Поэтому с.в. $E(X|Z)$ также является несмещенной оценкой для μ . Ну а поскольку $D(E(X|Z)) \leq DX$, то дисперсия с.в. $E(X|Z)$ и в самом деле не больше*) дисперсии X [764]. А вычислительная процедура начинается с получения реализации z с.в. Z , и уже затем сводится к расчету в качестве нашей оценки величины $E(X|Z=z)$. Причем для расчета $E(X|Z=z)$ не нужно прибегать к моделированию. Для уменьшения дисперсии процедуру можно повторить несколько раз.

Задание по программированию 18.2.9. Используйте условное математическое ожидание для оценки стоимости Европейских опционов, когда волатильность цены акции является стохастической. Цена акции и ее волатильность могут быть коррелированы.

Контрольные переменные. Идея контрольных переменных состоит в том, чтобы использовать аналитическое (точное) решение подобной, но более простой задачи для улучшения решения исходной проблемы. Предположим, что мы хотим оценить EX и существует с.в. Y с известным средним $\mu \equiv EY$. Тогда с.в. $W \equiv X + \beta(Y - \mu)$ может служить в качестве «контролируемой» оценки для EX при любой постоянной β , которая устанавливает масштаб отклонения $Y - \mu$ и позволяет корректировать величину X . Однако, при любом выборе β с.в. W остается несмещенной оценкой для EX . Поскольку

$$DW = DX + \beta^2 DY + 2\beta \text{Cov}(X, Y), \quad (18.5)$$

то с.в. W менее изменчива, чем X тогда и только тогда, когда

$$\beta^2 DY + 2\beta \text{Cov}(X, Y) < 0. \quad (18.6)$$

Таким образом, успех этой схемы действий зависит как от величины β , так и от выбора с.в. Y . К примеру, стоимость арифметически усредненных опционов можно будет оценить с ее помощью, если в качестве Y выбрать стоимость в остальном такого же, но геометрически усредненного опциона, и положить $\beta = -1$ [548]. Этот подход оказался значительно более эффективным, чем метод использования противоположно направленных переменных (см. таблицу на рис. 18.8) [108].

*) Для выполнения строгого неравенства $D(E(X|Z)) < DX$, т.е. для того, чтобы воспользоваться рекомендацией данного раздела, необходимо и достаточно, чтобы $P\{|X - E(X|Z)| > 0\} > 0$. В частности, это будет так, если Z — полная достаточная статистика, а X не является функцией с.в. Z . — Прим. ред.

Рис. 18.8. Способы уменьшения дисперсии для усредненных опционов пут. Стоимость арифметически усредненных опционов пут оценивалась с помощью противоположно направленных и контрольных переменных ($\beta = -1$). Для каждого набора данных использовались следующие параметры: $S = 50$, $\sigma = 0,2$, $r = 0,05$, $\tau = 1/3$, $X = 50$, $n = 50$ и $m = 10\,000$. В скобках указаны выборочные стандартные отклонения расчетных значений.

Противоположно направленные переменные		Контрольные переменные	
1,11039	1,11452	1,11815	1,11864
1,10952	1,10892	1,11788	1,11853
1,10476	1,10574	1,11856	1,11789
1,13225	1,10509	1,11852	1,11868
(0,009032505)		(0,000331789)	

Правая часть уравнения (18.5) достигает минимального значения при $\beta = \beta^* \equiv -\text{Cov}(X, Y)/DY$; напоминаем, что именно эта величина была названа «бета» ранее, в упр. 6.4.1. При таком выборе β

$$DW = DX - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{DY} = (1 - \rho_{X,Y}^2)DX,$$

где $\rho_{X,Y}$ — коэффициент корреляции между X и Y . Чем более величины X и Y коррелированы между собой (т. е. чем больше коэффициент корреляции между ними), тем большим оказывается уменьшение дисперсии. Например, если эта корреляция почти полная (полная, когда $\rho_{X,Y} = \pm 1$), то мы сможем контролировать X практически безошибочно, избавляясь почти от всей дисперсии. К сожалению, как правило ни DY , ни $\text{Cov}(X, Y)$ не являются известными. Поэтому обычно мы не имеем возможности получить максимальное уменьшение дисперсии. И потому на практике один подход сводится к тому, что указанные значения сначала пытаются угадать, а затем надеются, что полученная величина W действительно будет иметь меньшую дисперсию, чем X . Другая возможность сводится к использованию смоделированных данных для оценки наших значений.

Заметим, что у $-\beta^*$ тот же знак, что и у коэффициента корреляции между X и Y . Поэтому, если X и Y положительно коррелированы, то $\beta^* < 0$; в этом случае значение X корректируется в сторону уменьшения, когда $Y > \mu$ и в сторону увеличения в противном случае. Естественно, обратное утверждение имеет место, если X и Y отрицательно коррелированы и, следовательно, $\beta^* > 0$.

Упражнение 18.2.10. Выберем $\beta = \pm 1$. Успех схемы тогда будет зависеть лишь от выбора с. в. Y . Дайте условия, при которых дисперсия уменьшается.

Упражнение 18.2.11. Почему использование независимых случайных чисел при генерации X и Y является ошибкой?

Задание по программированию 18.2.12. Реализуйте метод контрольных переменных для арифметически усредненных опционов колл и пут.

Другие схемы. Упомянем кратко еще о двух схемах, заканчивая этот пункт. В **расслоенной выборке**, область определения моделируемой с. в. разбивается на конечное число отделенных друг от друга частей и стандартное моделирование по методу Монте-Карло проводится в каждой из

частей. И если вариация внутри частей меньше, чем между ними, то выборочная дисперсия оценки будет уменьшена. При **выборке с учетом важности реализации** отбор реализаций чаще осуществляется в тех под областях, где усматривается большая изменчивость моделируемой с. в.

Упражнение 18.2.13. Предположим, что вы ведете поиск во множестве A произвольного элемента множества $B \subseteq A$. В подходе Монте-Карло случайным образом выбираются N элементов из множества A , и проверяется, принадлежит ли какой-нибудь элемент из них множеству B . В альтернативном подходе множество A разбивается на m непересекающихся частей $A_1, A_2, \dots, A_m$ равной величины, в каждой из них случайным образом выбирается N/m элементов и затем проверяется, есть ли попадание в цель (т.е. обнаружен ли хотя бы один элемент из множества B). Докажите, что во втором подходе вероятность неудачи не может быть выше, чем в подходе Монте-Карло.

18.3 Квазиметоды Монте-Карло

В основном методе Монте-Карло оценивается интегрирование по точкам, выбранным случайным образом. Но в таком подходе есть несколько слабых мест. Начнем с того, что оценка ошибки является вероятностной и не дает конкретную гарантию какой-то точности. Более того, на порядке $1/\sqrt{N}$ вероятностной оценки точности не сказываются дополнительные свойства регулярности интегрируемой функции. Другой существенный момент, с которым связаны определенные сложности, проистекает из требования, в соответствии с которым точки должны быть независимыми случайными реализациями. Но случайные выборки расточительны по причине «грозедания» (т.е. концентрации отдельных элементов выборки в определенных местах; см. рис. 18.9). Тем самым моделированию по методу Монте-Карло при малых объемах выборки нельзя доверять. Но еще хуже то, что реальные случайные числа на цифровых компьютерах не существуют; и в действительности вместо них используются **псевдослучайные числа**, генерируемые с помощью полностью **детерминированных** приемов. Моделирование по методу Монте-Карло проявляет высокую чувствительность к начальным данным генератора псевдослучайных чисел. Так, к **последовательностям с низким уровнем несходства**, известным также под названием **квазислучайных последовательностей**¹, как раз и относятся вышеуказанные предостережения.

Предложенные в 1950-х гг., квазиметоды Монте-Карло ничего не оставляют случаю [699]. В действительности их можно рассматривать как детерминированную версию метода Монте-Карло в том смысле, что случайная выборка заменяется детерминированными квазислучайными точками. И если для получения результата оказывается достаточным меньшее число реализаций, то эффективность достигнута. Поэтому главной целью является выбор таких детерминированных точек, для которых детерминированная оценка для ошибки будет меньше, чем вероятностная оценка для нее в методе Монте-Карло.

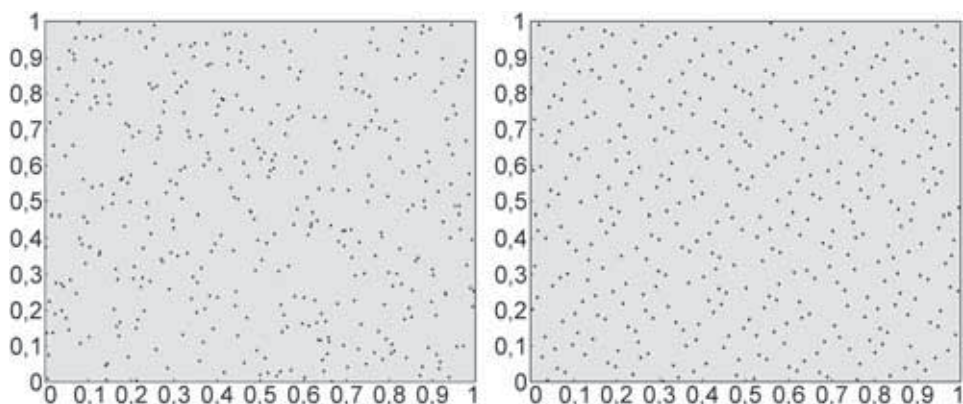


Рис. 18.9. Сравняются случайные точки (слева) и точки Холтона (справа). Точки принадлежат прямоугольнику $[0, 1] \times [0, 1]$ [868]. Обратите внимание на «гроздевание» точек слева.

Но и квазиметоды Монте-Карло не свободны от ограничений. Их теория годится для решения проблем интегрирования, но применять ее непосредственно к моделированию нельзя, поскольку между точками квазислучайной последовательности есть корреляция. Во многих случаях эта проблема может быть преодолена, если искомый результат удастся записать в виде интеграла. Однако сам интеграл часто имеет высокую размерность (например, равную 360 для 30-летней аренды под залог); и в действительности улучшенная точность обычно теряется в задачах с высокой размерностью или тогда, когда подинтегральная функция недостаточно гладкая. Кроме того, для эмпирической оценки точности в этих случаях нет теоретической базы, какую дает центральная предельная теорема в методе Монте-Карло [142].

Хотя имеющиеся результаты и неодинаковы, но применение таких методов в финансах представляется многообещающим [108, 147]. Так, к примеру, в [711] говорится об увеличении скорости расчетов в 1000 раз по сравнению с методом Монте-Карло. Успех же квазиметода Монте-Карло по сравнению с традиционными приемами уменьшения дисперсии зависит от рассматриваемой проблемы [715, 716]. Например, при оценке стоимости облигаций метод противоположно направленных переменных по сравнению с квазиметодом Монте-Карло приводит к более хорошим результатам [679, 868].

18.3.1 Последовательность Холтона

Любое целое $k \geq 1$ можно единственным образом представить в виде

$$k = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \dots + a_r m^r,$$

в котором $a_i \in [0, m-1]$ — целые числа и целое r выбрано так, что $m^r \leq k < m^{r+1}$, $m \geq 2$. Существенно обратная функция по основанию m опре-

деляется равенством

$$\varphi_m(k) \equiv a_0 m^{-1} + a_1 m^{-2} + a_2 m^{-3} + \dots + a_r m^{-(r+1)}.$$

Другими словами, любое рациональное число из интервала $[0, 1)$ генерируется с помощью отображения числа k по основанию m относительно десятичной точки (т.е. относительно единицы). Например, поскольку $6 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2$, то

$$\varphi_2(6) = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

А d -мерные **точки Холтона** определяются выражением

$$z_k \equiv (\varphi_{p_1}(k), \varphi_{p_2}(k), \dots, \varphi_{p_d}(k)), \quad k \geq 1,$$

в котором символы $p_1, p_2, \dots, p_d$ представляют собой первые d простых чисел.

Возьмем $m = 2$ и $d = 1$. Тогда последовательность Холтона в двоичной системе записывается в виде

$$(0,1, 0,01, 0,11, 0,001, 0,101, 0,011, 0,111, \\ 0,0001, 0,1001, 0,0101, 0,1101, 0,0011, 0,1011, 0,0111, 0,1111, \dots),$$

что соответствует последовательности

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16}, \frac{13}{16}, \frac{3}{16}, \frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{15}{16}, \dots \right).$$

Хотя это и не связано с численным интегрированием, но вышеуказанная последовательность не выглядит полезной для моделирования определенного типа. Запишем эти числа в десятичной системе, в виде 0,5, 0,25, 0,75, 0,125, 0,625, 0,375, 0,875, ... Если бы мы использовали их при моделировании симметричного случайного блуждания, то оно бы колебалось постоянно от движений вправо к движениям влево, поскольку в конечном счете последовательность состоит из пар монотонно возрастающих чисел: $0,5, 0,25 < 0,75, 0,125 < 0,625, 0,375 < 0,875, \dots$ Причем это свойство сохраняется и в общем случае, поскольку общая последовательность Холтона в конце концов состоит из подпоследовательностей монотонно возрастающих чисел длины m . По этим причинам может потребоваться **«взболтанная» последовательность Холтона**, которая меняет местами коэффициенты a_i в представлении для $\varphi_m(k)$. Многие варианты моделирования по квазиметоду Монте-Карло не могут обходиться без подобных манипуляций [868]. Как правило, первые 10 из 200 точек Холтона отбрасываются [368].

Упражнение 18.3.1. Рассчитайте первые 10 одномерных точек Холтона по основанию 3.

Задание по программированию 18.3.2. Постройте двумерную последовательность Холтона, примените ее к вычислению интеграла $\int_0^1 x^2 dx$ и сравните результат с полученным при интегрировании по методу Монте-Карло.

18.3.2 Последовательность Соболя

Предположим сначала, что $d = 1$. Одномерная последовательность Соболя длины N образуется из $\omega \equiv \lceil \log_2 N \rceil$ чисел, определяющих направление, $0 < v_1, v_2, \dots, v_\omega < 1$, с помощью операции порязрядного сложения по модулю два в двоичной системе $\oplus^2$. Каждая точка последовательности имеет вид

$$b_1 v_1 \oplus b_2 v_2 \oplus \dots \oplus b_\omega v_\omega,$$

где b_i — это ноль или единица. Таким образом, каждая точка есть результат применения операции порязрядного сложения к подмножеству чисел направлений v_i , коэффициенты b_i при которых равны единице. Последовательность же $(b_1, b_2, \dots, b_\omega)$ может представлять запись какого-либо из чисел $1, 2, \dots, N$, в двоичной форме или в **коде Грэя** [727].

Последовательность чисел направления генерируется с помощью простых полиномов с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}_2$ (т.е. равными 0 или 1, а все операции над ними проводятся по модулю 2). **Простыми же полиномами**, грубо говоря, являются полиномы, которые не могут быть представлены в виде произведения полиномов. Рассмотрим простой полином $P(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$ степени n . Тогда числа направлений получаются по следующей рекуррентной формуле

$$v_i = a_1 v_{i-1} \oplus a_2 v_{i-2} \oplus \dots \oplus a_{n-1} v_{i-n+1} \oplus v_{i-n} \oplus (v_{i-n}/2^n), \quad i > n.$$

Для того, чтобы ввести ее в действие, нам нужно выбрать $v_1, v_2, \dots, v_n$. Мы делаем это, полагая $v_i = m_i/2^i$ при n произвольных нечетных целых $0 < m_i < 2^i$ ($1 \leq i \leq n$). Наконец, сама последовательность Соболя $z_0, z_2, \dots, z_{N-1}$ получается также рекуррентно, по формуле

$$z_0 = 0, \quad z_{k+1} = z_k \oplus v_c,$$

в которой c означает позицию самого крайнего нуля справа в двоичном представлении числа k .

Пример 18.3.1. Рассмотрим простой полином $x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$. При $i > 7$ уравнение для чисел направлений имеет вид

$$\begin{aligned} v_i &= 0 \cdot v_{i-1} \oplus 1 \cdot v_{i-2} \oplus 1 \cdot v_{i-3} \oplus 0 \cdot v_{i-4} \oplus 1 \cdot v_{i-5} \oplus v_{i-6} \oplus (v_{i-6}/2^6) = \\ &= v_{i-2} \oplus v_{i-3} \oplus v_{i-5} \oplus v_{i-6} \oplus (v_{i-6}/2^6). \end{aligned}$$

При данных числах направлений последовательность Соболя можно легко сгенерировать. Например, $z_{26} = z_{25} \oplus v_2$, поскольку $25 = 11001$ (в двоичной записи), и самый правый 0 в этой записи находится в позиции 2 справа. $\triangleleft$

Обобщение на более высокую размерность очень простое. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_d$ простые полиномы. Обозначим через z_k^i последовательность одномерных точек Соболя, порождаемых с помощью P_i . Тогда последовательность d -мерных точек Соболя определяется тождеством

$$z_k \equiv (z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^d), \quad k = 0, 1, \dots$$

Задание по программированию 18.3.3. Реализуйте последовательность Соболя.

18.3.3 Последовательность Фора

Одномерная последовательность Фора квазислучайных чисел совпадает с одномерной последовательностью Холтона. Чтобы сгенерировать d -мерную последовательность Фора, будем действовать следующим образом. Пусть $p \geq 2$ — наименьшее простое целое число, большее или равное d . Последовательность Фора использует одно и то же основание p при любой размерности. Обозначим k -ю точку последовательности через $z_k \equiv (c_1, c_2, \dots, c_d)$. Ее первая компонента c_1 просто представляет одномерную последовательность Холтона $\varphi_p(1), \varphi_p(2), \dots$. Ну а далее действуем по индукции, полагая, что если

$$c_{m-1} = a_0 p^{-1} + a_1 p^{-2} + \dots + a_r p^{-(r+1)},$$

то

$$c_m = b_0 p^{-1} + b_1 p^{-2} + \dots + b_r p^{-(r+1)},$$

где

$$b_j \equiv \sum_{i \geq j}^r \binom{i}{j} a_i \pmod{p}.$$

Заметим, что запись $x \pmod{p}$ обозначает остаток от деления x на p . Например, $24 \pmod{7} = 3$. Полагаем также, что $\binom{i}{0} = 1$. На практике бывает, что последовательность начинается не с номера $k = 1$, а с $k = p^4$.

Пример 18.3.2. Возьмем $d = 3$ и $p = 3$. Поскольку первая компонента c_1 является просто одномерной последовательностью Холтона, то она имеет следующий вид

$$(0, 1, 0, 2, 0, 01, 0, 11, 0, 21, 0, 02, 0, 12, 0, 22, 0, 001, \dots) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \dots \right).$$

Вторая компонента c_2 есть

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{16}{27}, \dots \right).$$

Возьмем ее четвертый элемент, $7/9$, который является элементом c_2 в z_4 , в качестве примера. Поскольку соответствующее число в первой компоненте есть $0,11$, то у нас $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, и $r = 1$. Таким образом, искомое число получаем, вычисляя последовательно

$$b_0 = \binom{0}{0} a_0 + \binom{1}{0} a_1 = 1 + 1 = 2 \pmod{3},$$

$$b_1 = \binom{1}{1} a_1 = 1 \pmod{3},$$

$$c_2 = b_0 3^{-1} + b_1 3^{-2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Последовательность, определяющая третью компоненту, имеет вид

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{13}{27}, \dots\right)$. И, следовательно, искомая комбинированная трехмерная последовательность **Фора** начинается так:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right), \quad \dots \quad \triangleleft$$

Упражнение 18.3.4. Проверьте правильность третьей компоненты в примере 18.3.2.

Задание по программированию 18.3.5. Реализуйте на компьютере последовательность **Фора**. Обратите внимание на то, чтобы величины $\binom{i}{j} \bmod p$ вычислялись эффективно.

Задание по программированию 18.3.6. Оцените стоимость Европейских опционов с помощью квазислучайных последовательностей. Сама схема вычислений идентична методу Монте-Карло, за исключением того, что теперь случайные числа заменяются на псевдослучайные числа с n -мерными последовательностями в задачах с n периодами времени.

Дополнительная литература

Изложение п.18.1.3 дается по [229]. Материал по конечно-разностным методам для решения дифференциального уравнения Блэка—Шоулса в случае многокомпонентных производных инструментов можно найти в [215]. Больше информации по решению дифференциальных уравнений в частных производных имеется в [15, 381, 391, 810, 883], по алгоритмам на параллельных компьютерах — в [706, 707], и по программам пакета *Математика* — в [861]. Неявный метод, явный метод и стандартный алгоритм биномиального дерева сравниваются в [229, 383, 472, 897].

Термин «моделирование по методу Монте-Карло» («Monte Carlo simulation») был придуман Джоном фон Нейманном (1903—1957) и Станиславом Уламом (1909—1984), когда они работали над Манхэттоновским проектом [570]. Первая статья по этой проблематике была написана Метрополисом и Уламом в 1949 г. [699]. Полный анализ моделирования по методу Монте-Карло можно найти в [353, 773]. По вопросам, связанным с генераторами псевдослучайных чисел обращайтесь к [560, 584, 621, 721, 727]. Если говорить о проблематике оценки стоимости опционов по методу Монте-Карло, то с быстрой оценкой стоимости производных инструментов, зависящих от траектории, по методу Монте-Карло можно познакомиться по [313], с оценкой стоимости Американских опционов по методу Монте-Карло — по [53, 108, 129, 130, 160, 730], с подходом контрольных переменных — по [106, 472], с трактовкой стохастической волатильности — по [214, 520, 579, 876], с оценкой стоимости усредненных опционов с помощью перехода к условным ожиданиям — по [241]. О сравнении численного интегрирования, аналитических приближенных методов и метода контрольных переменных при оценке стоимости усредненных опционов говорится в [366], а общий анализ моделирования по методу Монте-Карло при расчете чувствительностей приведен в [20, 108, 128].

Обзоры по оценке стоимости опционов с использованием моделирования по методу Монте-Карло, по квазиметодам Монте-Карло и методам, уменьшающим дисперсию, имеются в [6, 108]. Материал п. 18.2.3 взят из [147, 584, 727, 764]. Одно соображение по ускорению моделирования по методу Монте-Карло состоит в ограничении выборочного пространства до конечного и затем проведения выборки большого объема [509]. При оценке таких параметров чувствительности, как дельта, с помощью выражений $E(P(S + \varepsilon) - P(S - \varepsilon))/(2\varepsilon)$, величины $P(S + \varepsilon)$ и $P(S - \varepsilon)$ для уменьшения дисперсии следует получать с помощью *общих* случайных чисел.

С различными случаями использования квазиметодов Монте-Карло можно познакомиться по [142, 197, 530, 532, 711, 715, 716], с построением различных квазислучайных последовательностей — по [368, 530, 711, 715, 716, 876], а с их математическим обоснованием — по [108, 337, 699]. Из других интересных подходов упомянем такие навеянные биологией подходы, как **искусственные нейросети** [486, 612, 887] и **генетические алгоритмы**.

Примечания

1. Этот термин, строго говоря, вводит в заблуждение, поскольку в таких последовательностях ничего случайного нет.

2. Операция $\oplus$ поразрядного сложения по модулю 2 в двоичной системе связывает два двоичных символа. А на выходе выдает 1, если символы различны, и 0, если одинаковы. Если же эта операция применяется к двум потокам двоичных символов одинаковой длины, то она действует на все пары символов, находящихся в одной и той же позиции. Например, $10110 \oplus 01100 = 11010$.

Направлять философские построения против физики опрометчиво; философы, которые так поступали, всегда заканчивали плохо.

Бертран Расселл

Матричные вычисления охватывают большой круг проблем в области численных и статистических методов. В настоящей книге затрагиваются два основных направления из них — это **многомерный статистический анализ** и **сглаживание кривых с помощью сплайнов**. Оба этих направления характеризуются многочисленными применениями в статистических выводах. В качестве одного из таких интересных приложений мы представим здесь **факторный анализ**.

19.1 Основные определения и результаты

Пусть $A \equiv (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, или просто $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обозначает матрицу размерности $m \times n$. Ее также можно представить в виде $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, набора векторов $a_i \in \mathbb{R}^m$. Векторы всегда будут столбцами, если не оговаривается противное. Такая матрица является **квадратной матрицей**, если $m = n$. **Рангом** матрицы называется максимальное число ее линейно независимых столбцов. Матрица размерности $m \times n$ имеет **неполный ранг**, если ее ранг меньше $\min(m, n)$; в противном случае у нее **полный ранг**. Далее, такая матрица имеет **полный столбцовый ранг**, если ее ранг равен n : это означает, что все ее столбцы линейно независимы. Квадратная матрица A называется **симметричной**, если $A^T = A$. Действительная матрица $A \equiv (a_{ij})_{i,j}$ размерности $n \times n$ называется матрицей с **доминирующей диагональю**, если $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ при всех $1 \leq i \leq n$. Такие матрицы невырождены

[224]. **Ведущей основной подматрицей** матрицы размерности $n \times n$ называется матрица, составленная из первых k строк и первых k столбцов при некотором $1 \leq k \leq n^*$). Символ $\|x\| \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ означает длину вектора $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Он же называется **евклидовой нормой** этого вектора. **Диагональная матрица** $D \equiv (d_{ij})_{i,j}$ размерности $m \times n$ может обозначаться и символом $\text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_q)$, в котором $q \equiv \min(m, n)$, а $D_i = d_{ii}$ при $1 \leq i \leq q$ (см. рис. 19.1). **Единичная матрица** — это квадратная матрица $I \equiv \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Множество векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ называется **ортогональным**, если все его векторы ненулевые и их скалярные произведения $x_i^T x_j$ равны нулю при всех $i \neq j$. Оно называется **ортонормированным множеством**,

*) У нас говорят «минор k -го порядка в левом верхнем углу». — Прим. перев.

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 19.1. Диагональные матрицы. Три основных типа диагональных матриц размерности $m \times n$, соответствующие (слева направо) вариантам $m < n$, $m = n$ и $m > n$.

если

$$x_i^\top x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Действительная квадратная матрица Q называется **ортогональной**¹, если $Q^\top Q = I$. Для таких матриц $Q^{-1} = Q^\top$ и $QQ^\top = I$. Действительная симметричная матрица A является **положительно определенной (неотрицательно определенной)**, если $x^\top Ax = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j > 0$ ($x^\top Ax \geq 0$, соответственно) при любом ненулевом векторе x . Известно, что матрица A является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда существует такая матрица W , что $A = W^\top W$; при этом A положительно определена тогда и только тогда, когда матрица W имеет полный столбцовый ранг.

19.1.1 Метод Гаусса исключения неизвестных

Метод Гаусса исключения неизвестных является стандартным методом решения системы линейных уравнений $Ax = b$, в которой матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Он принадлежит Гауссу и появился в 1809 г. [825]. После проведения $O(n^3)$ операций эта система преобразуется в эквивалентную систему $A'x = b'$, в которой A' является верхней треугольной матрицей

Рис. 19.2. Алгоритм Гаусса исключения неизвестных. Этот алгоритм позволяет найти решение x системы уравнений $Ax = b$. Предполагается, что все диагональные элементы $A[k][k]$ ненулевые. Это будет так, если все ведущие и основные подматрицы матрицы A невырождены.

Алгоритм Гаусса исключения неизвестных:

```
ввод:  $A[1..n][1..n]$ ,  $b[1..n]$ ;
действительные числа  $x[1..n]$ ;
целые  $i, j, k$ ;
// Прямое сокращение
для ( $k = 1$  до  $n - 1$ ) {
  для ( $i = k + 1$  до  $n$ ) {
     $c := A[i][k]/A[k][k]$ ;
    для ( $j = k + 1$  до  $n$ ) {  $A[i][j] := A[i][j] - c \times A[k][j]$ ; }
     $b[i] := b[i] - c \times b[k]$ ;
  }
}
// Обратная замена
для ( $k = n$  вниз до  $1$ ) {
   $x[k] := \left( b[k] - \sum_{j=k+1}^n A[k][j] \times x[j] \right) / A[k][k]$ ;
}
вывод  $x[ ]$ ;
```

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Рис. 19.3. Ленточная тридиагональная матрица.

размерности $n \times n$. Это фаза **прямого сокращения**. Обратная замена применяется для вычисления искомого значения x еще за $O(n^2)$ операций. Таким образом, совокупно затрачиваемое время является кубическим. См. рис. 19.2, на котором приведен этот алгоритм.

Эффективность поиска решения системы часто можно улучшить, если матрица A устроена каким-то особым образом. Мы рассмотрим случай, когда матрица A — **ленточная (похожа на ленту или полосу)**, т.е. все ее ненулевые элементы расположены вблизи диагонали матрицы. Мы говорим, что у $A = (a_{ij})_{i,j}$ **ширина верхней полосы** равна u , если $a_{ij} = 0$ при $j - i > u$ и **ширина нижней полосы** равна l , если $a_{ij} = 0$ при $i - j > l$. У тридиагональной матрицы, к примеру, ширина верхней и нижней полос равна единице (см. рис. 19.3). Для ленточных матриц метод Гаусса исключения неизвестных легко модифицировать так, чтобы затрачиваемое в нем время составляло величину $O(nul)$, исключив из рассмотрения нулевые элементы. А эта оценка существенно меньше, чем n^3 , если u или l малы.

Метод Гаусса исключения неизвестных можно использовать для того, чтобы произвольную квадратную матрицу с невырожденными ведущими и основными подматрицами представить в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U : $A = LU$. Такое

Алгоритм разложения Холецкого:

ввод: $A[1 \dots n][1 \dots n]$;

действительные числа $L[1 \dots n][1 \dots n]$;

целые i, j, k ;

для ($j = 1$ до n) {

$$L[j][j] := \left(A[j][j] - \sum_{k=1}^{j-1} L[j][k]^2 \right)^{1/2};$$

для ($i = j + 1$ до n) {

$$L[i][j] := L[j][j]^{-1} \times \left(A[i][j] - \sum_{k=1}^{j-1} L[i][k] \times L[j][k] \right);$$

$$L[j][i] := 0;$$

}

}

вывод $L[\parallel]$;

Рис. 19.4. Разложение Холецкого. Алгоритм позволяет найти представление $A = LL^T$ для положительно определенной матрицы A .

представление так и называется: **LU-разложение**. Получить такое разложение можно для положительно определенных матриц и матриц с доминирующей диагональю. Положительно определенные матрицы можно представить и в виде произведения $A = LL^T$, которое называется **разложением Холецкого**. На рис. 19.4 представлен алгоритм получения такого разложения за кубическое время.

19.1.2 Собственные значения и собственные векторы

Собственным значением квадратной матрицы A называется такое комплексное число λ , что равенство $Ax = \lambda x$ имеет место при некотором ненулевом векторе x , называемом **собственным вектором**. Например, поскольку для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,707107 \\ 0,707107 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0,707107 \\ 0,707107 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,707107 \\ -0,707107 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,707107 \\ -0,707107 \end{pmatrix},$$

то двумя собственными значениями матрицы A являются числа 3 и -1 , а векторы $(0,707107, 0,707107)^T$ и $(0,707107, -0,707107)^T$ оказываются соответствующими им собственными векторами. Собственными значениями вещественных симметричных матриц являются действительные числа; в частности, **теорема разложения Шура** (называемая также **теоремой об основных осях** или **спектральной теоремой**) утверждает, что существует такая действительная ортогональная матрица Q , что $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Отметим, что i -м столбцом матрицы Q является собственный вектор, соответствующий (собственному значению) λ_i , и все собственные векторы образуют ортонормальное множество. Более того, собственные значения положительно определенной матрицы положительны.

Главные компоненты. Пусть $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — случайный вектор с ковариационной матрицей

$$C \equiv (\text{Cov}(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \neq \mathbf{0},$$

причем $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ означает нулевой вектор. Ковариационные матрицы являются положительно определенными при условии, что все их собственные числа положительны, что мы и будем предполагать в дальнейшем [343]. Следовательно, пусть отныне все собственные значения матрицы C действительны и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$.

Далее мы хотим узнать, какой нормированной линейной комбинации компонент x_i соответствует максимальная дисперсия, объясняя, таким образом, большую часть совокупной изменчивости всей системы. Математически же мы ищем такой нормированный вектор $\mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ (т.е. $\|\mathbf{b}\| = 1$), который максимизирует величину

$$D\mathbf{b}^T \mathbf{x} \equiv E(\mathbf{b}^T \mathbf{x})^2 = E(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)^2.$$

Ответ оказывается простым: максимальная дисперсия совпадает с наи-

большим собственным значением λ_1 матрицы C , а соответствующий ему собственный вектор u_1 как раз и является искомым вектором b нашей задачи. Затем естественно возникает следующий вопрос: какой из нормированных линейных комбинаций компонент x_j , некоррелированных со с.в. $u_1^\top x$, соответствует максимальная дисперсия? Ответ аналогичен: максимальной дисперсией является λ_2 , а соответствующий этому значению собственный вектор u_2 определяет искомую линейную комбинацию $u_2^\top x$. И этот процесс может быть продолжен в течение всех n шагов, приводя на j -м шаге к нормированной линейной комбинации, некоррелированной со всеми предыдущими $j-1$ комбинациями, которая приводит к максимальной дисперсии λ_j [23].

Доказательство проходит следующим образом. По теореме разложения Шура действительная ортогональная матрица B , у которой столбцами являются нормированные собственные векторы, удовлетворяет соотношению

$$\Sigma \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = B^\top C B, \quad (19.1)$$

с $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. А у вектора **главных компонент** с.в. x ,

$$P \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top = B^\top x, \quad (19.2)$$

ковариационная матрица имеет вид

$$E(P P^\top) = E(B^\top x x^\top B) = B^\top C B = \Sigma.$$

Каждая главная компонента p_j представляет собой нормированную линейную комбинацию переменных x_i и отвечает j -й комбинации, упомянутой выше (см. упр. 19.1.2). Это тождество подтверждает и то, что любые две компоненты вектора P некоррелированы, а дисперсия его компоненты p_j равна λ_j .

Главные компоненты можно использовать для поиска линейных комбинаций с большими дисперсиями. А именно, величины p_j из (19.2) можно рассматривать как новые некоррелированные с.в. и те переменные p_j , которым соответствуют маленькие собственные значения λ_j , можно отбросить. Оставшихся переменных может быть значительно меньше, чем исходных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Упражнение 19.1.1. Пусть $C \equiv (c_{ij})$ обозначает ковариационную матрицу вектора $x \equiv [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$. Покажите, что C и матрица корреляции P вектора x связаны соотношением $C = \Sigma P \Sigma$, в котором $\Sigma \equiv \text{diag}(\sqrt{c_{11}}, \sqrt{c_{22}}, \dots, \sqrt{c_{nn}})$ (поэтому C положительно определена тогда и только тогда, когда такой же является и матрица P).

Упражнение 19.1.2. Докажите, что j -я главная компонента p_j имеет максимальную дисперсию среди всех нормированных линейных комбинаций компонент x_i , которые некоррелированы со с.в. $p_1, p_2, \dots, p_{j-1}$.

Моделирование многомерного нормального распределения. Пусть $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ — случайный вектор с положительно определенной матрицей ковариации C . Предположим, как и ранее, что $E x = 0$. Тогда выборку из распределения этого вектора можно получать по формуле $P y$,

если равенство $C = PP^T$ представляет собой разложение Холецкого для матрицы C , а $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ — вектор с единичной матрицей ковариации. И верно это потому, что $\text{Cov}(Py) = P \text{Cov } y P^T = PP^T = C$ (см. упр. 6.1.3).

Предположим, что мы хотим получить выборку из многомерного нормального распределения с матрицей ковариации $C = PP^T$. Тогда, если взять вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, состоящий из независимых стандартно нормально распределенных величин, то с.в. Py^T будет иметь нужное распределение. Получение выборки из многомерного нормального распределения является одним из ключевых моментов при оценке стоимости многокомпонентных производных инструментов по методу Монте-Карло.

Упражнение 19.1.3. Проверьте корректность процедуры, позволяющей генерировать двумерное нормальное распределение из п. 6.1.2.

Упражнение 19.1.4. Докажите, что $WX \sim N(W\mu, WCV^T)$, если $X \sim N(\mu, C)$.

19.1.3 Сингулярное разложение матриц

Следующая теорема играет основную роль в **сингулярном разложении матриц (СРМ)**.

Теорема 19.1.1. Для вещественной матрицы A размерности $m \times n$ имеет место представление

$$\Sigma \equiv U^T A V = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

в котором $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются некоторыми ортогональными матрицами, $p \equiv \min(m, n)$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. В действительности, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$, если r — ранг матрицы A . Величины σ_i называются **сингулярными числами** матрицы A .

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} -0,282970 & 0,867906 \\ -0,538373 & 0,208536 \\ -0,793777 & -0,450834 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7,654435 & 0 \\ 0 & 0,640018 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} -0,211005 & -0,977485 \\ 0,977485 & -0,211005 \end{pmatrix}. \quad (19.3)$$

Поскольку U и V ортогональны, то двумя сингулярными значениями являются 7,654435 и 0,640018 (третий столбец U и третья строка Σ — нулевые векторы; потому их нет в записи).

Сингулярное разложение матриц можно рассчитать за кубическое время при наличии квадратичной памяти в терминах m и n [392, 586]. Оно представлено в любой приличной библиотеке по математическому программному обеспечению. Из теоремы 19.1.1 вытекает, что

$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^T. \quad (19.4)$$

Упражнение 19.1.5. 1) Докажите равенство (19.4).

2) Покажите, что A и A^T имеют одни и те же сингулярные числа.

19.2 Проблема метода наименьших квадратов

Проблему метода наименьших квадратов (МНК) можно записать в виде

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq n.$$

Проблема МНК в статистике называется **регрессионным анализом** и эквивалентна минимизации среднеквадратичной ошибки. Часто формулируемая с помощью системы уравнений $Ax = b$, проблема МНК оказывается **переопределенной**, если уравнений в этом соотношении оказывается больше, чем неизвестных ($m > n$).

Пример 19.2.1. В полиномиальной регрессии для подгонки данных $\{(x_1, b_1), (x_2, b_2), \dots, (x_m, b_m)\}$ используется многочлен $\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n$. Это приводит к проблеме МНК вида $Ax = b$, в которой

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad x \equiv \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad b \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (19.5)$$

Простая линейная регрессия отвечает случаю $n = 1$. ◁

Проблему МНК можно решить с помощью геометрических соображений. Поскольку Ax является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами $x_1, x_2, \dots, x_n$, то в проблеме МНК идет поиск минимального расстояния между b и пространством, «натянутым» на столбцы матрицы A . И решение x_{LS} должно представлять точку Ax_{LS} , которая находится от точки b на расстоянии, не большем, чем любая другая точка этого пространства. Следовательно, вектор ошибки $Ax_{LS} - b$ должен быть перпендикулярен к этому пространству, т.е.

$$(Ay)^T (Ax_{LS} - b) = y^T (A^T Ax_{LS} - A^T b) = 0$$

при всех y . И мы делаем заключение, что любое решение x должно удовлетворять **нормальному уравнению**

$$A^T Ax = A^T b. \quad (19.6)$$

Упражнение 19.2.1. Каково нормальное уравнение в случае линейной регрессии (6.13)?

Упражнение 19.2.2. 1) Сформулируйте задачу множественной регрессии как проблему МНК.

2) Выпишите нормальное уравнение.

Упражнение 19.2.3. Положим $R(x) \equiv \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$. Покажите, что **градиент** этой функции

$$\nabla R(x) \equiv \left(\frac{\partial R(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial R(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial R(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

равен $A^T (Ax - b)$, где $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (поэтому нормальное уравнение можно записать в виде $\nabla R(x) = 0$).

Упражнение 19.2.4. Определим **ширину полосы** ленточной матрицы A числом $l + u + 1$, где l — ширина нижней полосы, а u — верхней. Докажите, что ширина полосы у матрицы $A^T A$ не больше $\omega - 1$, если ширина полосы у A равна ω .

Замечание 19.2.2. Результат из упр. 19.2.4 имеет место и при более общем определении ленточной матрицы. В этом определении матрица является ленточной с шириной полосы ω , если ненулевые элементы каждой строки лежат внутри полосы, имеющей ширину ω [75]. Этот результат может избавить от некоторых трудностей вычислительного характера.

◁

19.2.1 Случай полного ранга

Проблема МНК называется **проблемой МНК с полным рангом**, если у матрицы A полный столбцовый ранг. Поскольку в этом случае матрица $A^T A$ невырождена, то существует единственное решение нормального уравнения $x_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b$, которое называется **оценкой наименьших квадратов (ОНК)**. Но матрица $A^T A$ положительно определена, и потому нормальное уравнение можно решить с помощью разложения Холецкого. Однако применять этот подход обычно не рекомендуется, поскольку устойчивость численных решений в нем хуже, чем у альтернативного подхода на основе сингулярного разложения матриц (СРМ) (см. теорему 19.2.3 ниже) [35, 586, 870].

Предположим, что x и b связывает следующая линейная регрессионная модель:

$$b = Ax + \varepsilon, \quad (19.7)$$

в которой ε — случайный вектор с нулевым средним и конечной ковариационной матрицей. Теорема Гаусса—Маркова утверждает, что если компоненты вектора ε некоррелированы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 (поэтому ковариационная матрица у ε есть $\sigma^2 I$), то ОНК x_{LS} является несмещенной и имеет наименьшую ковариационную матрицу*) среди всех несмещенных *линейных* оценок [802]. В этих предположениях

$$\text{Cov } x_{LS} = \sigma^2 (A^T A)^{-1}. \quad (19.8)$$

Поэтому матрица $(A^T A)^{-1}$ в соответствующем масштабе является несмещенной оценкой для матрицы ковариации вектора x_{LS} **). Если же вектор ε нормально распределен, то у вектора x_{LS} наименьшая ковариационная матрица среди всех несмещенных оценок, как линейных, так и других [422].

Упражнение 19.2.5. Покажите, что выборочная ошибка ОНК $Ax_{LS} - b$ ортогональна к столбцам матрицы A .

*) Для ковариационных матриц C_1 и C_2 одинакового размера неравенство $C_1 > C_2$ означает положительную определенность матрицы $C_1 - C_2$. При таком понимании неравенства $C_1 > C_2$ имеет место и неравенство для определителей $\det C_1 > \det C_2$. — Прим. ред.

**) Полезно иметь в виду, что $\hat{\sigma}^2 = \|B - Ax_{LS}\|^2 / (n - m)$ является несмещенной оценкой для σ^2 , а значит $\hat{\sigma}^2 (A^T A)^{-1}$ — несмещенная оценка для $\text{Cov } x_{LS}$. — Прим. ред.

Упражнение 19.2.6. Предположим, что в линейной регрессионной модели (19.7) ковариационная матрица вектора ε равна $\sigma^2 C$ при некоторой положительно определенной матрице C . Как следует решать проблему МНК $Ax = b$ с использованием теоремы Гаусса—Маркова?

Упражнение 19.2.7. Проверьте справедливость равенства (19.8) (см. прим. ред. **) на с. 350).

19.2.2 Случай неполного ранга

Если матрица A неполного ранга, то нормальное уравнение имеет бесконечное число решений. В этом случае нас интересуют векторы x минимальной длины и такие, которые минимизируют величину $\|Ax - b\|$. Такой x является единственным, поскольку множество $\{x \in \mathbb{R}^m: \|Ax - b\| \text{ минимально} \}$ является выпуклым. Связь между СРМ и общей ОНК, когда ранг у матрицы A неполон, устанавливается в следующей теореме.

Теорема 19.2.3 Пусть $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ таковы, что $U^T A V$ есть сингулярное разложение для матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и r — ее ранг. Тогда ОНК имеет вид

$$x_{\text{LS}} = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i,$$

$$a \quad \|Ax_{\text{LS}} - b\|^2 = \sum_{i=r+1}^m (u_i^T b)^2.$$

Пусть $A = U \Sigma V^T$, где $\Sigma \equiv \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, есть сингулярное разложение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Определим величину

$$\Sigma^+ \equiv \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Тогда $x_{\text{LS}} = V \Sigma^+ U^T b$. Матрица

$$A^+ \equiv V \Sigma^+ U^T \tag{19.9}$$

называется **псевдообратной***) для матрицы A . Заметим, что величина $\|Ax_{\text{LS}} - b\| = \|(I - AA^+)b\|$, а Σ^+ есть псевдообратная матрица для Σ . Например, нетрудно численно проверить, что псевдообратной матрицей для A из (19.3) является матрица

$$\begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 19.2.8. Докажите, что если у матрицы A из теоремы 19.2.3 полный столбцовый ранг, то $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ (отсюда, в частности, вытекает, что $A^+ = A^{-1}$, если матрица A является квадратной).

*) Матрица A^+ является псевдообратной для A , если для любого вектора b из подпространства, порожденного вектор-столбцами матрицы A , вектор $A^+ b$ является решением уравнения $Ax = b$. Далее, необходимым и достаточным условием псевдообратности матрицы A^+ является равенство матриц $AA^+A = A$. — Прим. ред.

Упражнение 19.2.9. Докажите, что псевдообратная для псевдообратной матрицы есть сама исходная матрица, т. е. $(A^+)^+ = A$.

Упражнение 19.2.10 (неопределенные линейные уравнения). Предположим, как и прежде, что $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$, но $m \leq n$. Предположим далее, что m — ранг матрицы A . И пусть $U\Sigma V^\top$ есть сингулярное разложение для A . Покажите, что все решения системы $Ax = b$ имеют вид

$$\hat{x} = V\Sigma^+ U^\top b + V \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \Big\} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} = A^+ b + V_2 y \quad (19.10)$$

при произвольном $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, где $V \equiv \left(\underbrace{V_1}_m, \underbrace{V_2}_{n-m} \right) \Big\} n$.

19.2.3 Метод взвешенных наименьших квадратов

Проблемой нахождения взвешенных ОНК называют задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|WAx - Wb\|, \quad (19.11)$$

в которой $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — невырожденная матрица. Ясно, что все вышеупомянутые результаты в проблеме МНК остаются в силе после замены матрицы A на WA и вектора b на Wb . В частности, решение x удовлетворяет **взвешенному нормальному уравнению**:

$$(WA)^\top WAx = (WA)^\top Wb.$$

С помощью $H \equiv W^\top W$ (т. е. обязательно положительно определенной матрицы) вышеуказанное уравнение можно записать в виде

$$A^\top HAx = A^\top Hb. \quad (19.12)$$

В частности, если у матрицы A полный столбцовый ранг, то единственное решение x имеет следующий вид:

$$(A^\top HA)^{-1} A^\top Hb. \quad (19.13)$$

В классическом регрессионном анализе предполагается, что вектор $Ax - b$ имеет нулевое среднее и заданную ковариационную матрицу C . Регрессионная модель, таким образом, сводится к системе уравнений $b = Ax + \varepsilon$, в которой у случайного вектора ε нулевое среднее и $\text{Cov } \varepsilon = C$. В этом случае оптимальное решение x удовлетворяет соотношению

$$A^\top C^{-1} Ax = A^\top C^{-1} b \quad (19.14)$$

(H^{-1} из равенства (19.12), таким образом, играет роль ковариационной матрицы). Если у A полный столбцовый ранг, то единственное оптимальное решение $(A^\top C^{-1} A)^{-1} A^\top C^{-1} b$ называется **обобщенной оценкой наименьших квадратов (ООНК)**, и является несмещенным с ковариационной матрицей $(A^\top C^{-1} A)^{-1}$.

Упражнение 19.2.11. Докажите равенство (19.14) (указание: см. упр. 19.2.6).

19.2.4 Проблема наименьших квадратов с дополнительными ограничениями

Проблема НК с ограничениями — это задача нахождения ОНК на собственном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$. Но нас в основном интересуют задачи с линейными ограничениями*) в виде равенств:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, Bx=d} \|Ax - b\|, \quad B \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad d \in \mathbb{R}^p.$$

Предположим, что ранг матрицы B равен p . Если решение этой задачи не является единственным, то мы ищем единственное решение x минимальной длины. Ну а единственным решение будет тогда и только тогда, когда расширенная блочная матрица

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$$

размерности $(m+p) \times n$ имеет ранг n , где $n \leq m$ [586]. Алгоритмы для решения таких задач обычно придерживаются идеи преобразования условной задачи в безусловную проблему НК, а затем выражения искомого x через найденное решение безусловной задачи.

Упражнение 19.2.12. Постройте алгоритм для решения проблемы НК с ограничениями, используя сингулярное представление матрицы A .

Упражнение 19.2.13 (алгоритм Лоусона—Хансона). Известно, что любую матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ можно представить в виде произведения двух матриц $A = Q^T R$, из которых матрица $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ является ортогональной, а $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — верхней треугольной, т. е. имеет нули ниже главной диагонали. И равенство это называется **QR-разложением**. Решите проблему НК с линейными ограничениями, используя QR-разложение вместо сингулярного представления матрицы A .

19.2.5 Факторный анализ

В факторном анализе предполагается, что множество различных воздействий на рассматриваемую систему, которые привлекают наше внимание, а ниже ими будут изменения процентной ставки, может быть охарактеризовано несколькими переменными, называемыми **факторами** [91, 390, 804]. О факторах говорят, что они объясняют изменения процентной ставки, а количественные соотношения между изменениями процентной ставки и факторами называются **факторными нагрузками**.

Основы теории факторного анализа. В моменты времени t , $t = 1, 2, \dots, T$, проводятся наблюдения за p -мерным вектором y_t , например, за вектором процентных ставок разных сроков погашения. При этом в ортогональной факторной модели предполагается, что эти наблюдения линейно связаны с m базовыми, но ненаблюдаемыми факторами f_t следующим образом:

$$y_t - \mu = \underset{p \times 1}{L} \times \underset{p \times m}{f_t} + \underset{m \times 1}{\varepsilon_t}, \quad \underset{p \times 1}{} \quad (19.15)$$

*) Эта задача известна и под названием «проблема линейных гипотез». — Прим. ред.

где $m < p$, $E y_t = \mu$, $E f_t = E \varepsilon_t = \mathbf{0}$, $\text{Cov } f_t = E(f_t f_t^\top) = I$, а

$$\Psi \equiv \text{Cov } \varepsilon_t = \text{diag}(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Более того, считается, что f_t и ε_t независимы. В уравнении (19.15) L — матрица факторных нагрузок, ε_t является вектором **остаточных специфических факторов**, а Ψ представляет **ковариационную матрицу** вектора ε_t . У каждого фактора нулевое среднее и единичное стандартное отклонение и все факторы некоррелированы между собой. Отметим, что L , f_t и ε_t неизвестны, а модель линейна по факторам.

Из равенства (19.15) вытекает, что

$$C \equiv E[(y_t - \mu)(y_t - \mu)^\top] = LL^\top + \Psi,$$

и в этом равенстве нет ни f_t , ни ε_t . А это позволяет рассчитать L и Ψ следующим образом. Начиная с полученной на основании наблюдений оценки ковариационной матрицы $C \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Далее, используя теорему о разложении Шура, представляем ее в виде $C = B \times \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \times B^\top$ где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Пусть матрица L состоит из первых m столбцов матрицы $B \times \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, а Ψ получается из матрицы $C - LL^\top$ обнулением всех ее элементов вне главной диагонали. Конечно, если некоторые из внедиагональных элементов остаточной матрицы $C - LL^\top$ являются «большими», то можно ввести дополнительные факторы, что приведет к увеличению m^2 .

Решение L вышеуказанной системы не является единственным, если $m > 1$, поскольку при любой ортогональной матрице A матрица $\tilde{L} \equiv LA$ также является ее решением:

$$\tilde{L}\tilde{L}^\top + \Psi = LAA^\top L^\top + \Psi = LL^\top + \Psi = C.$$

Если же L заменить на $\tilde{L}$, то новыми факторами будут $\tilde{f}_t \equiv A^\top f_t$, поскольку

$$\tilde{L}\tilde{f}_t = LAA^\top f_t = Lf_t.$$

Ортогональное преобразование нагрузок по факторам L , однако, не оказывает влияния на Ψ и диагональные элементы матрицы $LL^\top$. Это подсказывает нам разыскивать такую матрицу A , которая придаст нагрузкам по факторам $\tilde{L}$ интуитивно понятную экономическую интерпретацию. Например, мы можем пожелать иметь такие нагрузки, которые позволяют изменениям ставок по всем срокам погашения иметь примерно равную нагрузку по первому фактору, что будет означать параллельный сдвиг. Для этой цели в случае трех факторов ($m = 3$) каждая из следующих ортогональных матриц, называемых **преобразованиями Гивенса**, производит поворот на угол θ_i , $i = 1, 2, 3$, оставляя одно из направлений фиксированным:

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица $A \equiv A_1 A_2 A_3$ является ортогональной матрицей с па-

параметрами θ_1 , θ_2 и θ_3 . И остается найти θ_1 , θ_2 , $\theta_3 \in [-\pi, \pi]$, которые минимизируют дисперсию первого столбца у матрицы $\tilde{L}$.

Не все положительно определенные матрицы можно представить в виде $C = (C_{ij}) = LL^T + \Psi$ при данном $m < p$. Причем даже те, которые можно записать в таком виде, могут привести к статистически бессмысленным числам, как например, отрицательным Ψ_i . Поскольку $\text{Cov}(y_i, f_i) = (L_{ij})$ (см. упр. 19.2.15), то матрица $(L_{ij}C_{ij}^{-1/2})_{i,j}$ представляет матрицу корреляции y_i и f_i , но при этом нет гарантии, что числа $L_{ij}C_{ij}^{-1/2}$ будут принадлежать интервалу $[-1, 1]$. И это лишь некоторые из проблем, связанных с факторным анализом.

Упражнение 19.2.14. Покажите, что, как только удастся получить подходящие оценки для нагрузок по факторам, то сами факторы можно будет оценить с помощью равенства $f_i^T = (L^T \Psi^{-1} L)^{-1} L^T \Psi^{-1} (y_i - \mu)$.

Упражнение 19.2.15. Докажите, что $\text{Cov}(y_i, f_i) = L$.

Факторы, влияющие на движения процентных ставок. Поскольку кривая спот-ставок Казначейства США больше меняется при малых сроках погашения, чем при больших, то при коротких сроках обычно используется больше данных. Например, можно использовать 11 ставок, относящихся к периодам в 3 месяца, 6 месяцев, 1 год, 2 года, 3 года, 5 лет, 7 лет, 10 лет, 15 лет, 20 лет и 30 лет (всего $p = 11$). Исследования показали, что 3 фактора могут объяснить более, чем 90 % колебаний в изменениях процентных ставок (поэтому $m = 3$) [607]. И эти три фактора можно интерпретировать как **уровень, наклон и кривизна**. Первый фактор оказывает примерно одинаковое влияние на все сроки погашения в том смысле, что его изменение приводит к грубо параллельным движениям процентных ставок всех сроков. Второй фактор воздействует на наклон временной структуры, но не на средний уровень процентных ставок. Он приводит к движениям временной структуры в областях долгосрочных и краткосрочных ставок, причем в противоположных направлениях, подвергая кривую на промежуточных сроках относительно небольшим изгибам, если так можно выразиться. Что же касается третьего фактора, то его нагрузки при кратких сроках нулевые или отрицательные, при промежуточных положительны и затем при долгосрочных погашениях они становятся отрицательными. Таким образом, положительное изменение этого фактора приводит к увеличению промежуточных ставок и уменьшению долгосрочных и даже краткосрочных, изменяя кривизну временной структуры [91, 390, 804]. Однако факторный анализ процентных ставок не лишен и собственных проблем [591].

Упражнение 19.2.16. Как бы вы определили понятия **дюрация наклона** (slope duration) и **дюрация кривизны** (curvature duration)?

19.3 Сглаживание данных с помощью сплайнов

Целью «подбора подходящей кривой» является желание аппроксимировать имеющиеся данные «гладкой» кривой. Линейная регрессия или такие ее обобщения, как полиномиальная регрессия, не очень-то

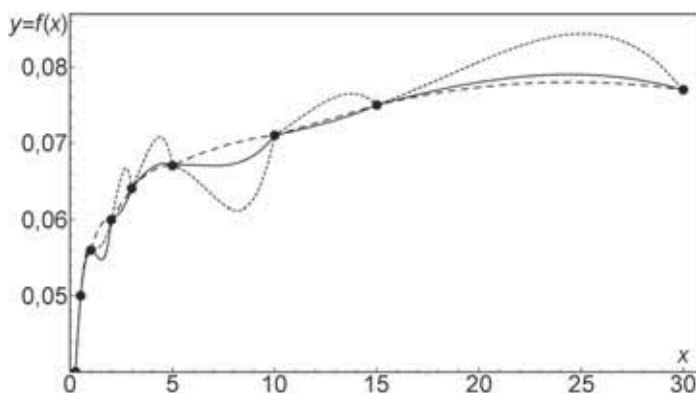


Рис. 19.5. Сплайны различной степени. Здесь изображены сплайны второй, третьей и четвертой степеней. Более высокая степень ведет к большим колебаниям.

хороши, поскольку они «пытаются» описать одним многочленом все имеющиеся данные. Подход со сплайнами иной. В нем вся область определения данных делится на несколько подынтервалов и в каждом из них используются разные полиномы.

Предположим, что для описания данных, состоящих из $n + 1$ точек

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

с $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ мы хотим подобрать такую кривую $f(x)$, которая проходит через все точки данных, т. е. соответствует каждой **точке разбиения** (или **узлу**) x_i . Разделим интервал $[x_0, x_n]$ на n подынтервалов: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Если в каждом подынтервале используются полиномы степени ноль, то кривой будет ступенчатая функция. Ее основным недостатком будут разрывы кривой в точках разбиения. Если же вместо этого использовать полиномы первой или второй степени, то проблема отсутствия непрерывности остается — на этот раз она будет относиться, соответственно, к первой и второй производной данной кривой. И такие кривые, следовательно, недостаточно «гладкие». Если же мы потребуем, чтобы в каждом подынтервале кривая была полиномом третьей степени и чтобы ее первая и вторая производные были непрерывны во всем интервале $[x_0, x_n]$, то в результате получим кубический сплайн. Иллюстрация к сказанному приведена на рис. 19.5.

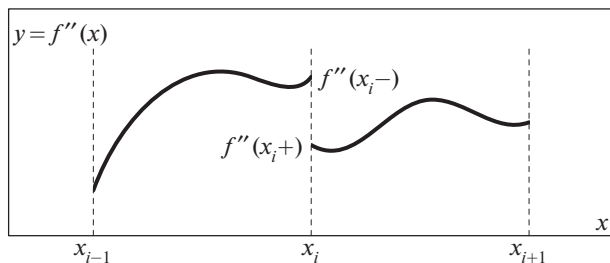
19.3.1 Кубические сплайны

Учитывая непрерывность функций $f(x)$ и $f'(x)$ найдем, что сплайн $f(x)$ в интервале $x \in [x_{i-1}, x_i]$ можно записать в виде

$$f(x) = f'_{i-1} \frac{(x-x)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2} - f'_i \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x)}{h_i^2} + \\ + y_{i-1} \frac{(x-x)^2[2(x-x_{i-1})+h_i]}{h_i^3} + y_i \frac{(x-x_{i-1})^2[2(x-x)+h_i]}{h_i^3},$$

где $h_i \equiv x_i - x_{i-1}$ при $n + 1$ неизвестных значениях $f'_i \equiv f'(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$,

Рис. 19.6. Построение сплайнов.



которые предстоит определить. Далее,

$$f''(x_i-) = \frac{2}{h_i}(f'_{i-1} + 2f'_i) - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}, \quad (19.16)$$

$$f''(x_i+) = -\frac{2}{h_{i+1}}(2f'_i + f'_{i+1}) + 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}. \quad (19.16')$$

Если же непрерывна и вторая производная сплайна в каждой точке разбиения, т.е. $f''(x_i-) = f''(x_i+)$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, то получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{h_i}f'_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)f'_i + \frac{1}{h_{i+1}}f'_{i+1} = 3\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} + 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}, \quad (19.17)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ (см. рис. 19.6). Уравнения образуют тридиагональную систему с доминирующей диагональю, которую можно решить за линейное время с помощью устойчивых численных процедур.

Но нам потребуется еще $n+1 - (n-1) = 2$ дополнительных условия на величины $f'_0, f'_1, \dots, f'_n$, чтобы решить указанные уравнения. Обычно выбирают условия, которые уточняют значения 1) $f''(x_0)$ и $f''(x_n)$ или 2) $f'(x_0)$ и $f'(x_n)$. Например, если положим $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$, то придем к так называемым **естественным сплайнам**. С помощью уравнения (19.16) эти два условия позволят исключить переменные f'_0 и f'_n из уравнения (19.17), поскольку f'_0 можно заменить линейной функцией от f'_1 , а f'_n — линейной функцией от f'_{n-1} . Выбор же 2) фиксирует наклон на концах, тем самым немедленно исключая из рассмотрения переменные f'_0 и f'_n . Но существуют и другие возможности [381]. Естественные сплайны оказываются наиболее «гладкими» среди всех интерполирующих функций [391].

Сплайны с **равномерным разбиением** — это сплайны с равноотстоящими друг от друга точками разбиений, т.е. при $h_i \equiv x_i - x_{i-1} = h$. В этом случае уравнение (19.17) упрощается:

$$f'_{i-1} + 4f'_i + f'_{i+1} = 3\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Упражнение 19.3.1. Проверьте справедливость уравнения (19.16).

Упражнение 19.3.2. Запишите тридиагональную систему для естественного сплайна.

Альтернативная формулировка. Условие непрерывности функций $f(x)$ и $f''(x)$ приводит к равенствам

$$f(x) = y_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i^2}{6} f''_{i-1} \left[\frac{x_i - x}{h_i} - \left(\frac{x_i - x}{h_i} \right)^3 \right] - \\ - \frac{h_i^2}{6} f''_i \left[\frac{x - x_{i-1}}{h_i} - \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right)^3 \right], \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

в которых потребуется определить $n+1$ значение $f''_i \equiv f''(x_i)$. Вытекающая из вышеуказанных требований непрерывность $f''(x)$ в каждой внутренней точке разбиения приводит к другим равенствам:

$$h_i f''_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) f''_i + h_{i+1} f''_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right), \quad (19.18)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$. Эти линейные уравнения образуют тридиагональную систему с доминирующей диагональю. Как и в случае с уравнением (19.17), нужны еще два условия, чтобы решить ее. Этот подход удобен для естественных сплайнов, поскольку в этом случае $f''_0 = f''_n = 0$ [417].

Пример 19.3.1. Возьмем данные $\{(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 5), (4, 4)\}$. Тогда у нас $n=4$, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$, $x_i = i$ ($1 \leq i \leq 4$), $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 5$, $y_4 = 4$. Сплайнами являются полиномы

$$p_i(x) \equiv y_{i-1}(x_i - x) + y_i(x - x_{i-1}) - \\ - \frac{1}{6} f''_{i-1} [(x_i - x) - (x_i - x)^3] - \frac{1}{6} f''_i [(x - x_{i-1}) - (x - x_{i-1})^3]$$

на интервалах $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Чтобы сопоставить данным естественный сплайн, решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Ее решения: $f''_1 = -7,5$, $f''_2 = 12$ и $f''_3 = -10,5$. В конце концов мы получаем сплайн, добавляя условия $f''_0 = f''_4 = 0$. Его четыре кубических полинома имеют следующий вид

$$p_1(x) = 2x + \frac{7,5}{6}(x - x^3), \\ p_2(x) = 2(2 - x) + (x - 1) + \frac{7,5}{6}[(2 - x) - (2 - x)^3] - \frac{12}{6}[(x - 1) - (x - 1)^3], \\ p_3(x) = (3 - x) + 5(x - 2) - \frac{12}{6}[(3 - x) - (3 - x)^3] + \frac{10,5}{6}[(x - 2) - (x - 2)^3], \\ p_4(x) = 5(4 - x) + 4(x - 3) + \frac{10,5}{6}[(4 - x) - (4 - x)^3].$$

Представляет этот сплайн сплошная линия на рис.19.7. На нем также показано, что если значение $y_2 = 1$ незначительно поменять (на 1,3), то изменится и весь сплайн — перейдет в пунктирную линию. $\triangleleft$

Упражнение 19.3.3. Проверьте справедливость уравнения (19.18).

Упражнение 19.3.4. Постройте сплайн из примера 19.3.1 для $y_2 = 1,3$.

19.3.2 Кубические сплайны и проблема наименьших квадратов с ограничениями

В тех случаях, когда данных имеется больше, чем точек разбиения, то мы ищем сплайн, который минимизирует расстояние от данных. Пусть кубический полином на интервале $[x_{i-1}, x_i]$ записывается в виде

$$p_i(x) \equiv a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку кубические сплайны по определению дважды непрерывно дифференцируемы, то

$$p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i), \quad p'_i(x_i) = p'_{i+1}(x_i), \quad p''_i(x_i) = p''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $x_0, x_1, \dots, x_n$ являются точками разбиения. Из предыдущих уравнений вытекает, что

$$\begin{cases} a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 + d_i x_i^3 = a_{i+1} + b_{i+1} x_i + c_{i+1} x_i^2 + d_{i+1} x_i^3, \\ b_i + 2c_i x_i + 3d_i x_i^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1} x_i + 3d_{i+1} x_i^2, \\ 2c_i + 6d_i x_i = 2c_{i+1} + 6d_{i+1} x_i. \end{cases}$$

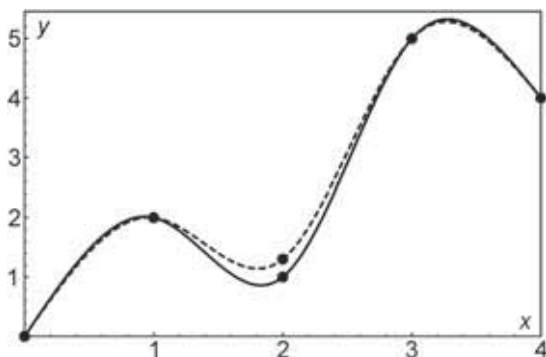
Пусть $x \equiv (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n)^\top \in \mathbb{R}^{4n}$. Тогда эти уравнения можно записать в виде $Bx = d$ при некоторой матрице $B \in \mathbb{R}^{3(n-1) \times 4n}$ и векторе $d \in \mathbb{R}^{3(n-1)}$. Предположим, что ранг у матрицы B равен $3(n-1)$. И рассмотрим множество данных $\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \dots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)\}$. Предположим, что $\tilde{x}_j$ принадлежит интервалу $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда в формулировке МНК нужно положить

$$p_i(\tilde{x}_j) \equiv a_i + b_i \tilde{x}_j + c_i \tilde{x}_j^2 + d_i \tilde{x}_j^3 = \tilde{y}_j.$$

Эти m уравнений можно записать в виде $Ax = b$ при некоторых матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times 4n}$ и векторе $b \in \mathbb{R}^m$. Таким образом, у нас возникает проблема наименьших квадратов с ограничениями $\min_{x \in \mathbb{R}^{4n}, Bx=d} \|Ax - b\|$. Заметим, что матрица A является ленточной (см. замечание 19.2.2).

Упражнение 19.3.5. Запишите матрицы A , B , b , и d .

Рис. 19.7. Описание данных с помощью кубических сплайнов. Если поменяется всего лишь одна точка данных, то изменение коснется всего сплайна (его представит пунктирная кривая). Детали см. в примере 19.3.1.



19.3.3 В-сплайны и проблема наименьших квадратов

Произвольный **В-сплайн (базисная функция сплайна)** B_i представляет собой фиксированный кубический сплайн, задаваемый по пяти точкам разбиения $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+4}$. Он принимает нулевые значения вне интервала $[x_i, x_{i+4}]$. Любой кубический сплайн с точками разбиения $x_0, x_1, \dots, x_n$ можно задать равенством

$$s(t) \equiv \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(x), \quad x_0 \leq x \leq x_n,$$

в котором α_i определены единственным образом (см. [35], где приведены выражения для $B_i(x)$, а также [391], где рассматривается более простой случай равномерного разбиения). Пусть данные представляет набор $\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \dots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)\}$. Тогда разыскивается такой вектор $\alpha \equiv (\alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_{n-1})^\top$, который минимизирует величину

$$\sum_{j=1}^m (s(\tilde{x}_j) - \tilde{y}_j)^2 = \|A\alpha - \tilde{y}\|^2 \quad (19.19)$$

при некоторой матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+3)}$ и $\tilde{y} \equiv [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m]^\top$. Поскольку ненулевые значения в интервале $x \in [x_{i-1}, x_i]$ принимают лишь сплайны $B_{i-3}, B_{i-2}, B_{i-1}$ и B_i , то матрица A является ленточной с шириной полосы, равной 4. Подход с В-сплайнами, в отличие от подхода с обычными кубическими сплайнами, при решении той же проблемы не приводит к проблеме НК с ограничениями.

Упражнение 19.3.6. Запишите матрицу A из равенства (19.19).

Дополнительная литература

Литература по матричным вычислениям весьма обширна [391, 392, 417, 447, 465, 701, 830, 870]. В [825] можно прочесть об истории возникновения сингулярного разложения матриц, а в [392, 465] — о его применениях. Обстоятельный рассказ о проблеме наименьших квадратов можно найти в [75, 586], а статистические свойства оценок наименьших квадратов описаны в [422]. В монографии [523] хорошо изложен факторный анализ. О приемах сглаживания можно прочесть в [417]. Сплайны в изложенном здесь виде принадлежат Шонбергу (1903—1990) и появились в 1940-х гг. [35, 447, 863].

Примечания

1. Этот термин основательно закрепился, хотя «ортонормальный», возможно, является и более подходящим словом.

2. Альтернатива состоит в предположении, что ошибки имеют многомерное нормальное распределение, а затем параметры модели оцениваются по методу максимального правдоподобия [523, 632].

Историк — это пророк в прошлое.

Фридрих фон Шлегль (1772—1829)

Последовательность наблюдений, каждое из которых индексируется по времени, называется **временным рядом**. Анализ временных рядов представляет собой искусство выделения наиболее правдоподобных случайных моделей, которые могли бы воспроизвести полученные ряды наблюдений. Цель же состоит в том, чтобы понять взаимоотношения переменных для того, чтобы сделать более качественным прогноз или принятие решений. Одно из наиболее важных приложений анализа временных рядов в финансовой эконометрике состоит в изучении того, как реально волатильность меняется со временем, поскольку требуемая доходность финансовых активов соизмеряется с уровнем их волатильности.

20.1 Введение

Временной ряд из цен называется финансовым временным рядом: цены же могут относиться к акциям, облигациям, валюте, фьючерсам, предметам потребления и к бесконечно большому количеству других наименований. Еще одну группу временных рядов финансового типа составляют скорость предоплаты ЦБЗ (Ценных Бумаг на основе Зкладных — MBS = Mortgage Backed Securities) и многие другие экономические индикаторы.

Подходящую модель для конкретного временного ряда можно выбрать на основании изучения данных или исходя из какой-то экономической теории. В большей части моделей уточняется случайный процесс. Выбираемые модели должны быть совместимыми с прошлыми данными и приспособленными к проверке ошибки соответствия. Кроме того, они должны быть простыми и содержащими как можно меньше параметров. Параметры же модели следует оценивать по реализации временного ряда. Однако, поскольку наблюдаемый ряд есть просто выборочная траектория предложенного случайного процесса, то это возможно лишь если процесс обладает свойством **эргодичности**. Грубо говоря, эргодичность означает, что выборочные моменты сходятся к теоретическим моментам при увеличении длины выборочной траектории.

Проиллюстрируем основные шаги на примере оценки по методу максимального правдоподобия (МП) волатильности цены акции. Предположим, что после изучения временного ряда из цен $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$, относящимся к моментам времени, отличающимся друг от друга на Δt ,

было предложено считать, что они описываются процессом геометрического броуновского движения

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW. \quad (20.1)$$

Преобразуем данные, чтобы упростить анализ. Поскольку процесс (грубого) дохода $r \equiv \ln S$ удовлетворяет уравнению $dr = \alpha dt + \sigma dW$ с $\alpha \equiv \mu - \sigma^2/2$, то сначала мы преобразуем имеющийся ряд с помощью логарифма, а затем рассмотрим разности полученных элементов:

$$R_i \equiv \ln S_{i+1} - \ln S_i = \ln(S_{i+1}/S_i).$$

Ясно, что тогда величины $R_1, R_2, \dots, R_n$ окажутся независимыми, одинаково распределенными нормальными с. в. с распределением $N(\alpha\Delta t, \sigma^2\Delta t)$. Логарифмическая функция правдоподобия в этом случае равна

$$-\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=1}^n (R_i - \alpha\Delta t)^2.$$

Продифференцируем ее по α и σ^2 , чтобы получить ОМП:

$$\hat{\alpha} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n\Delta t} = \frac{\ln(S_{n+1}/S_1)}{n\Delta t}, \quad (20.2)$$

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \hat{\alpha}\Delta t)^2}{n\Delta t}. \quad (20.3)$$

Заметим, что ставка доходности простых процентов $(S_{i+1} - S_i)/S_i$ периода и ставка доходности непрерывного начисления $\ln(S_{i+1}/S_i)$ за период должны привести к одинаковым заключениям, поскольку

$$\ln(S_{i+1}/S_i) = \ln(1 + (S_{i+1} - S_i)/S_i) \approx (S_{i+1} - S_i)/S_i.$$

Пример 20.1.1. Рассмотрим временной ряд, порождаемый формулой

$$S_{i+1} = S_i \times \exp[(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi], \quad \xi \sim N(0, 1),$$

считая $S_1 = 1,0$, $\Delta t = 0,01$, $\mu = 0,15$ и $\sigma = 0,30$. Заметим, что $\alpha = \mu - \sigma^2/2 = 0,105$. Для выборочного временного ряда из рис. 20.1 с $n = 5999$, оценки МП для параметров α и σ^2 равны: $\hat{\alpha} = 0,118348$ и $\hat{\sigma}^2 = (0,299906)^2$. Поскольку дисперсия $\hat{\sigma}^2$ асимптотически эквивалентна величине $2\sigma^4/n$, то рост параметра n определенно помогает. Однако, поскольку дисперсия оценки α (а, следовательно, и μ) асимптотически равна $\sigma^2/(n\Delta t)$, то увеличение n за счет более частого сбора данных на том же самом временном интервале не уменьшает дисперсию, так как длина выборочного периода $n\Delta t$ остается неизменной [147, 611]. Но дисперсию можно уменьшить за счет организации выборки на выборочном периоде большей длины. Например, при $\Delta t = 2$ и $n = 999$ (соответствующий временной ряд не показан), $\hat{\alpha}$ оказывается равным 0,108039, т.е. получается существенное улучшение по сравнению с предыдущей оценкой даже несмотря на то, что данные с процесса снимались *менее* часто (при большем Δt). $\triangleleft$

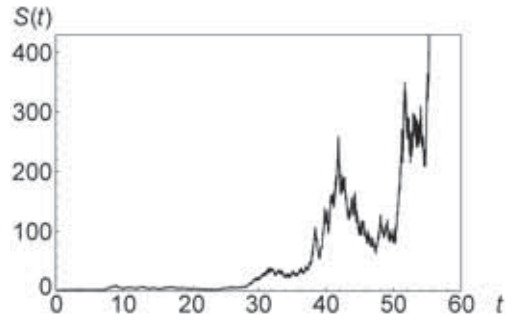


Рис. 20.1. Смоделированный временной ряд. Процесс описывается уравнением $dS = 0,15 \times S dt + 0,3 \times S dW$ и начинается из точки $S(0) = 1$.

В качестве еще одной иллюстрации рассмотрим модель Огдена для краткосрочной ставки r ,

$$dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma r dW, \quad (20.4)$$

в которой параметрами являются $\beta > 0$, μ и σ [702]. Поскольку при данном r_1 имеет место приближенное соотношение

$$\Delta r - \beta(\mu - r)\Delta t \sim N(0, \sigma^2 r^2 \Delta t),$$

то полученная по результатам n наблюдений $\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_n$ функция правдоподобия имеет вид

$$\prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2 r_i^2 \Delta t)^{-1/2} \exp \left[-\frac{[\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t]^2}{2\sigma^2 r_i^2 \Delta t} \right],$$

если положить $\Delta r_i \equiv r_{i+1} - r_i$. Логарифмическую функцию правдоподобия, после удаления постоянных слагаемых и упрощения можно записать в виде

$$-n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^n [\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t]^2 r_i^{-2}.$$

Дифференцируя ее по β , μ и σ и приравнявая эти производные нулю, придем к следующим трем уравнениям относительно трех неизвестных:

$$0 = \sum_i [\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t](\mu - r_i)r_i^{-2}, \quad (20.5)$$

$$0 = \sum_i [\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t]r_i^{-2}, \quad (20.6)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_i [\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t]^2 r_i^{-2}. \quad (20.7)$$

Соответствующие оценки МП нетрудно получить (см. упр. 20.1.3).

Пример 20.1.2. Рассмотрим временной ряд, порожденный рекуррентным соотношением $r_{i+1} = r_i + \beta(\mu - r_i)\Delta t + \sigma r_i \sqrt{\Delta t} \xi$, в котором $\xi \sim N(0, 1)$, $r_1 = 0,08$, $\Delta t = 0,1$, $\beta = 1,85$, $\sigma = 0,30$, $\mu = 0,08$ и $n = 999$. Для временного ряда на рис. 20.2 оценки МП оказываются равными $\hat{\mu} = 0,0799202$, $\hat{\beta} = 1,86253$ и $\hat{\sigma} = 0,300989$. $\triangleleft$

Упражнение 20.1.1. Найдите ОМП для параметров μ и σ^2 , исходя из прироста доходности типа простых процентов $\Delta S_i / S_i$, $\Delta S_i \equiv S_{i+1} - S_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

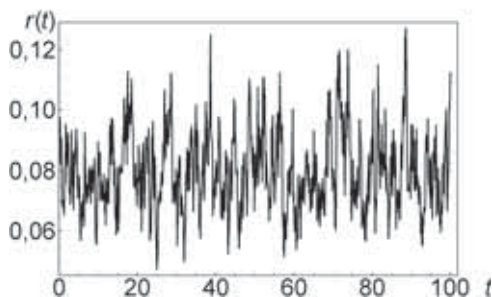


Рис. 20.2. Временной ряд, смоделированный по модели Огдена. Рассматривается процесс $dr = 1,85(0,08 - r)dt + 0,3r dW$, начинающийся в точке $r(0) = 0,08$.

Упражнение 20.1.2. Предположим, что цены акции описываются уравнением (20.1). Простая доходность (прирост доходности типа простых процентов) определяется выражением $[S(t) - S(0)]/S(0)$. Предположим также, что волатильность акции совпадает с волатильностью простой доходности, σ_s , а не с волатильностью мгновенной доходности σ . Выразите σ через σ_s , длительность операции t и ожидаемую простую доходность μ_s на момент окончания t .

Упражнение 20.1.3. Выведите формулы для β и μ .

Упражнение 20.1.4. Используйте уравнение, которому удовлетворяет $\ln r$, чтобы получить ОМП для параметров модели Огдена.

Упражнение 20.1.5. Процесс с постоянной и упругой дисперсией (ПУД) удовлетворяет уравнению $dS/S = \mu dt + \lambda S^\theta dW$ при некотором $\lambda > 0$. Найдите ОМП для параметра $\lambda > 0$ при $\mu = 0$.

Задание по программированию 20.1.6. Напишите программу по алгоритму, представленному на рис. 18.5, для моделирования цен акций. Затем используйте ОМП для улучшения качества подгонки.

20.1.1 Основные определения и модели

Хотя краткости ради рассматриваемые в этой главе процессы дискретны, но для большей части моделей их непрерывные аналоги приведены в гл. 13. Чтобы упростить изложение будем действовать по ситуации и не вводить обозначения, которые позволят провести разницу между с.в. и их реализациями.

Рассмотрим дискретный случайный процесс $X_1, X_2, \dots, X_n$. **Автоковариация** с.в. X_t с запаздыванием (лагом) τ определяется как $\text{Cov}(X_t, X_{t-\tau})$, а значение **автокорреляции** с.в. X_t с лагом τ определяется величиной $\text{Cov}(X_t, X_{t-\tau})/\sqrt{\text{D}X_t \times \text{D}X_{t-\tau}}$, которая с очевидностью лежит между -1 и 1 . Вообще говоря, автоковариация и автокорреляция зависят как от времени t , так и от лага τ . Процесс является стационарным, если его среднее μ не зависит от времени, а автоковариации зависят только от лага. В частности, дисперсия постоянна. Поскольку стационарные процессы легче исследовать, то всякий раз, когда это возможно, к рядам следует применять преобразования, обеспечивающие стационарность. Процесс называется **строго стационарным**, если совокупности с.в. $\{X_s, X_{s+1}, \dots, X_{s+\tau-1}\}$ и $\{X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+\tau-1}\}$ имеют одно и то же распределение при любых s, t и $\tau > 0$. Отсюда следует, что все X_t одинаково распределены. Стро-

го стационарный процесс автоматически стационарен. Произвольный процесс называется **(последовательно) некоррелированным**, если все его автоковариации с ненулевым лагом равны нулю; в противном случае он называется **коррелированным**.

Стационарный некоррелированный процесс называется **белым шумом**. Строго стационарный процесс $\{X_t\}$, для которого все с. в. X_t независимы, называется **строго белым шумом**. Стационарный процесс называется **гауссовским**, если совместное распределение величин $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k}$ имеет многомерное нормальное распределение при любом возможном значении целого k . Гауссовский процесс обязательно строго стационарен; в частности, гауссовский белый шум является строго белым шумом.

Обозначим автоковариацию случайного процесса с лагом τ через λ_τ . Автоковариация λ_0 тогда оказывается дисперсией любой с. в. X_t . Автокорреляция произвольного стационарного процесса с лагом τ обозначается через $\rho_\tau \equiv \lambda_\tau / \lambda_0$ *).

Упражнение 20.1.7. Докажите, что для стационарных процессов $\lambda_\tau = \lambda_{-\tau}$.

Упражнение 20.1.8. Покажите, что для стационарного процесса с известным средним оптимальным в средне квадратичном смысле прогнозом является среднее μ .

Упражнение 20.1.9. Рассмотрим стационарный процесс $\{X_t\}$, у которого известны среднее и все автоковариации. Найдите выражение для линейного прогноза $a_0 + a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \dots + a_r X_1$ с. в. X_{t+1} , оптимального в среднеквадратичном смысле (указание: см. упр. 6.4.1).

Упражнение 20.1.10. Покажите, что если изменения цены некоррелированы, то дисперсия цены со временем должна возрастать.

Упражнение 20.1.11. Покажите, что если процесс $\{X_t\}$ является строго белым шумом, то таким же свойством обладают и процессы $\{|X_t|\}$ и $\{|X_t^2|\}$.

20.1.2 Гипотеза эффективного рынка

Гипотеза случайного блуждания утверждает, что изменения цены случайны и потому цены ведут себя непредсказуемо. Например, в своей диссертации 1900 г. Башелье предполагал, что изменения цены независимы и одинаково нормально распределены. В более современной постановке постулируется, что процесс (грубого) дохода имеет постоянное среднее и является некоррелированным. Одним из следствий этой гипотезы будет вывод, что ожидаемую доходность нельзя улучшить, используя данные о прошлых ценах.

Гипотеза случайного блуждания — это чисто статистическое утверждение. К концу 1960-х гг., однако, эта гипотеза не могла больше противостоять лавинообразно растущему количеству экспериментальных данных, свидетельствующих против нее. И в это время в работе Фама

*) Автоковариацию λ_τ называют также ковариационной функцией параметра τ , а соответствующую автокорреляцию ρ_τ — корреляционной функцией (стационарной в широком смысле). — Прим. перев.

и других внимание исследователей было переключено с временных рядов по грубым доходам на временные ряды по доходам, связанным с расходами и рисками: ведь дополнительные доходы должны отражать операционные издержки, риски, а также информацию, доступную составителю торговой стратегии. Впоследствии дебаты вокруг эффективных рынков перестали быть делом чистой статистики и «зашли» в область экономики [666].

Экономическая теория, призванная объяснять случайность цен ценных бумаг (ЦБ), называется **гипотезой эффективного рынка**. Эта гипотеза предлагает смотреть на рынок как на большой преобразователь информации, а цены должны отражать имеющуюся информацию немедленно. Рынок является эффективным по отношению к конкретному множеству информации, если при использовании этого множества в выборе торговых решений получить в нем неестественно большую прибыль невозможно [799]. Если информационное множество исходит из прошлых цен ЦБ, то у нас слабая форма эффективности рынка; если же информационное множество отражает всю *публично доступную* информацию, то мы имеем **умеренную** форму эффективности рынка; наконец, если информационное множество отражает всю общественную и *частную* информацию, то у нас **сильная** форма. Эта терминология принадлежит Роберту и возникла в 1967 г. [147]. Экспериментальные данные подтверждают, что большая часть рынков США эффективны по крайней мере в слабой форме [767].

Упражнение 20.1.12. Почему для того, чтобы доходности были непредсказуемы важно, чтобы автокорреляции были почти нулевые?

20.1.3 Три классические модели

Пусть на протяжении этого пункта ε_t обозначает процесс белого шума с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2 . Первая модель называется **авторегрессионным (AR) процессом** и в простейшем варианте (т.е. при порядке 1) определяется уравнением

$$X_t - b = a(X_{t-1} - b) + \varepsilon_t.$$

Этот процесс является стационарным, если $|a| < 1$, и в этом случае $EX_t = b$, $\lambda_0 = \sigma^2/(1 - a^2)$ и $\lambda_\tau = a^\tau \lambda_0$. Автокорреляции убывают экспоненциально до нуля, поскольку $\lambda_\tau/\lambda_0 = a^\tau$. Общий же авторегрессионный процесс $AR(p)$ порядка p удовлетворяет уравнению

$$X_t - b = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p a_i(X_{t-i} - b).$$

Следующая модель называется **процессом скользящего среднего (MA)** и ее уравнение записывается в виде

$$X_t - b = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}.$$

Среднее у этого процесса равно b , а дисперсия $\lambda_0 = (1 + c^2)\sigma^2$. Автоковариация λ_τ равна 0, если $\tau > 1$ и $c\sigma^2$, если $\tau = 1$. Процесс, очевидно, стациона-

нарный. Заметим, что его автокорреляционная функция равна нулю вне точки $\tau = 1$. Общий же процесс $MA(q)$ порядка q определяется равенством

$$X_t - b = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q c_j \varepsilon_{t-j}.$$

Нетрудно показать, что наблюдения, находящиеся на расстоянии больше, чем q периодов, некоррелированы. С другой стороны, если процесс $MA(1)$ записать в виде последовательности соотношений $X_{t-i} - b = \varepsilon_{t-i} + c\varepsilon_{t-i-1}$, $i \geq 0$, и потом их все сложить, то понятно, что при $|c| < 1$ придем к равенству

$$X_t - b = - \sum_{i=1}^{m-1} (-c)^i (X_{t-i} - b) + \varepsilon_t + c^m \varepsilon_{t-m} = - \sum_{i=1}^{\infty} (-c)^i (X_{t-i} - b) + \varepsilon_t.$$

А воспринимать это равенство можно как процесс $AR(\infty)$, в котором эффект прошлых наблюдений уменьшается «с возрастом». Процесс MA называется **обратимым**, если его можно представить как процесс $AR(\infty)$.

Третья модель, называемая **процессом авторегрессии и скользящего среднего** (или процессом **ARMA**), является комбинацией моделей $AR(1)$ и $MA(1)$; таким образом, она описывается уравнением

$$X_t - b = a(X_{t-1} - b) + \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}.$$

Предположим, что $|a| < 1$ чтобы процесс $ARMA$ был стационарным. Тогда его среднее равно b и

$$\lambda_0 = \sigma^2 \frac{1+2ac+c^2}{1-a^2}, \quad \lambda_1 = \sigma^2 \frac{(1+ac)(a+c)}{1-a^2}, \quad \lambda_\tau = a\lambda_{\tau-1} \text{ при } \tau \geq 2.$$

Более общий процесс $ARMA(p, q)$ порядка (p, q) является комбинацией процессов $AR(p)$ и $MA(q)$:

$$X_t - b = \sum_{i=1}^p a_i (X_{t-i} - b) + \sum_{j=0}^q c_j \varepsilon_{t-j},$$

где $c_0 = 1$, $a_p \neq 0$ и $c_q \neq 0$.

Запись стационарного процесса $AR(1)$ в виде последовательности соотношений (аналогичная записи процесса $MA(1)$) при $|a| < 1$ приводит к выражению

$$X_t - b = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j},$$

т. е. к представлению для процесса $MA(\infty)$. А это представление является частным случаем **разложения Вольда**, которое утверждает, что любой стационарный процесс $\{X_t\}$ при удалении линейной детерминированной компоненты может быть представлен в виде процесса $MA(\infty)$:

$$X_t - b = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad (20.8)$$

в котором $c_0 = 1$ и $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 < \infty$. Стационарные процессы AR и $ARMA$, оба, допускают такое представление.

У стационарных процессов приятные асимптотические свойства. Предположим, что стационарный процесс $\{X_t\}$ можно записать в виде (20.8), где $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$ и ε_t — независимые, одинаково распределенные с.в. с нулевым средним и $E\varepsilon_t^2 < \infty$. Центральная предельная теорема утверждает, что в этом случае выборочное среднее асимптотически нормально в том смысле, что

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - b \right) \rightarrow N \left(0, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что из неравенства $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$ вытекает неравенство $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 < \infty$, но не наоборот, и это гарантирует эргодичность процесса $MA(\infty)$ [415].

Упражнение 20.1.13. Пусть $\{X_t\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных с.в. с нулевым средним и единичной дисперсией. Докажите, что процесс $\left\{ Y_t \equiv \sum_{k=0}^l a_k X_{t-k} \right\}$ с постоянными a_k является стационарным.

Упражнение 20.1.14. Пусть имеет место разложение Вольда (20.8). Покажите, что тогда λ_τ , т.е. автоковариация с лагом τ равна $\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+\tau}$.

Условное оценивание гауссовских процессов AR. Для гауссовских AR процессов оценивание по методу максимального правдоподобия сводится к методу наименьших квадратов. Запишем уравнение для процесса $AR(p)$ в следующем виде:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i (X_{t-i} - c) + \varepsilon_t,$$

где ε_t — гауссовский белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2 . В этом случае по результатам наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_n$ следует оценивать параметры $a_1, a_2, \dots, a_p, c$ и σ^2 . Легко видеть, что при условии первых p наблюдений логарифмическая функция правдоподобия может быть записана в виде

$$-\frac{n-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-p}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n \left(X_t - c - \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} \right)^2.$$

Значения $a_1, a_2, \dots, a_p$ и c , которые максимизируют это выражение, должны минимизировать функцию

$$\sum_{t=p+1}^n \left(X_t - c - \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} \right)^2, \quad (20.9)$$

т.е. являются решением проблемы наименьших квадратов (см. упр. 20.1.15). Эта методология называется **условной оценкой по методу максимального правдоподобия**. Получаемая оценка будет состоятельной при любом

стационарном и эргодическом процессе AR, даже если он и не будет гауссовским. Оценкой для σ^2 будет выражение

$$\frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \left(X_t - \hat{c} - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i X_{t-i} \right)^2,$$

которое легко получить дифференцированием логарифмической функции правдоподобия по σ^2 .

Упражнение 20.1.15. Запишите эквивалентную проблему наименьших квадратов для функции (20.9).

20.2 Модели условной дисперсии для волатильности цены

Хотя у стационарной модели постоянная дисперсия, но ее *условная* дисперсия может изменяться. Возьмем, к примеру, стационарный авторегрессионный процесс $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$. Его условная дисперсия,

$$D(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots),$$

равна σ^2 , что меньше *безусловной* дисперсии $DX_t = \sigma^2/(1-a^2)$. Отметим, что условная дисперсия независима от прошлой информации, и это свойство сохраняется для процессов ARMA общего вида. Таким образом, прошлая информация не влияет на дисперсию прогноза. Чтобы устранить этот недостаток, рассмотрим модель для дохода X_t вида

$$X_t - \mu = V_t U_t,$$

в котором условная дисперсия меняется. При этом предполагается, что

- 1) с.в. U_t имеют нулевое среднее и единичную дисперсию при всех t ,
- 2) $EX_t = \mu$ при всех t и
- 3) $D(X_t | V_t = v_t) = v_t^2$. Процесс $\{V_t^2\}$, таким образом, моделирует условную дисперсию.

Предположим, что совокупности с.в. $\{U_t\}$ и $\{V_t\}$ независимы друг от друга, а, точнее говоря, совокупности $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ и $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ независимы при любом n . Тогда с.в. $\{X_t\}$ некоррелированы, поскольку

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = E(V_t U_t V_{t+\tau} U_{t+\tau}) = E(V_t U_t V_{t+\tau}) E U_{t+\tau} = 0 \quad (20.10)$$

при $\tau > 0$. Более того, если процесс $\{V_t\}$ стационарен, то у $\{X_t\}$ постоянная дисперсия, так как

$$E(X_t - \mu)^2 = E V_t^2 U_t^2 = E V_t^2 E U_t^2 = E V_t^2, \quad (20.11)$$

что делает стационарным и процесс $\{X_t\}$.

Пример 20.2.1. Рассмотрим логнормальную модель. И пусть процессы $\{U_t\}$ и $\{V_t\}$ независимы друг от друга, $\{U_t\}$ является гауссовским белым шумом, а $\ln V_t \sim N(a, b^2)$. Одним из простых способов добиться этого, а также того, чтобы автокорреляция у $\{|X_t - \mu|\}$ и $\{(X_t - \mu)^2\}$ была положительной, сводится к использованию следующей модели AR(1) для $\{\ln V_t\}$:

$$\ln(V_t) - \alpha = \theta(\ln(V_{t-1}) - \alpha) + \xi_t, \quad \theta > 0.$$

В этом уравнении $\{\xi_t\}$ является гауссовским белым шумом с нулевым средним, независимым от $\{U_t\}$. Чтобы гарантировать для $\ln V_t$ дисперсию величины b , положим $D\xi_t = b^2(1 - \theta^2)$. Четыре параметра этой модели — a , b , θ и α — можно оценить по методу моментов [839]. $\triangleleft$

Упражнение 20.2.1. Предположим, что процессы $\{V_t\}$ и $\{U_t\}$ стационарны и независимы друг от друга. Покажите, что коэффициент эксцесса у X_t превосходит по величине аналогичную характеристику у процесса U_t , если обе они конечны.

Упражнение 20.2.2. Покажите, что в логнормальной модели

1) коэффициент эксцесса у X_t равен $3e^{4b^2}$,

2) $DV_t = e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 1)$, 3) $D|X_t - \mu| = e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 2/\pi)$,

4) $DV_t^2 = e^{4a+4b^2}(e^{4b^2} - 1)$ и 5) $D(X_t - \mu)^2 = e^{4a+4b^2}(3e^{4b^2} - 1)$.

20.2.1 Модели ARCH и GARCH

Одно из неприятных свойств у логнормальной модели состоит в том, что условная дисперсия эволюционирует независимо от прошлых доходов. Предположим, что мы исходим из допущения, что условная дисперсия оказывается фиксированной функцией от прошлых доходов: $V_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ при некоторой функции f . Тогда V_t можно вычислять при условии данного информационного множества $I_{t-1} \equiv \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ прошлых доходов. Одной из широко используемых моделей такого плана является **авторегрессионная модель условной неоднородности (ARCH)**.

Предположим, что U_t независима от V_t , U_{t-1} , V_{t-1} , U_{t-2} , $\dots$ при всех t . И, следовательно, процесс $\{X_t\}$ некоррелирован в силу (20.10). Предположим далее, что $\{U_t\}$ — процесс гауссовского белого шума. Поэтому $X_t | I_{t-1} \sim N(\mu, V_t^2)$. Процесс ARCH(p) определяется равенством

$$X_t - \mu = \left[a_0 + \sum_{i=1}^p a_i (X_{t-i} - \mu)^2 \right]^{1/2} U_t,$$

в котором обычно предполагается, что $a_1, \dots, a_p$ неотрицательны и $a_0 > 0$.

Дисперсия V_t^2 , таким образом, равна $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i (X_{t-i} - \mu)^2$. А это позволяет предположить, что V_t зависит от U_{t-1} , U_{t-2} , $\dots$, U_{t-p} , что и имеет место на самом деле; это означает, что $\{U_t\}$ и $\{V_t\}$ не являются независимыми друг от друга. А если выразиться с практической точки зрения, то модель утверждает, что волатильность момента времени t , оцениваемая в момент $t-1$, зависит от p самых последних наблюдений над квадратами доходов².

Процесс ARCH(1) $X_t - \mu = [a_0 + a_1(X_{t-1} - \mu)^2]^{1/2} U_t$ является простейшим, для которого

$$D(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}) = a_0 + a_1(x_{t-1} - \mu)^2. \quad (20.12)$$

Процесс $\{X_t\}$ является стационарным с конечной дисперсией тогда и только тогда, когда $a_1 < 1$, и в этом случае $DX_t = a_0/(1 - a_1)$. Коэффициент эксцесса конечен и равен величине $3(1 - a_1^2)/(1 - 3a_1^2)$, если $3a_1^2 < 1$

и превосходит 3, если $a_1 > 0$. Пусть $S_t \equiv (X_t - \mu)^2$. Тогда в силу (20.12)

$$E(S_t | S_{t-1}) = a_0 + a_1 S_{t-1}.$$

Это напоминает процесс AR. В самом деле, автокорреляция у $\{S_t\}$ равна a_1^2 , если дисперсия у S_t существует, т.е. $3a_1^2 < 1$. Поскольку $X_t | I_{t-1} \sim N(\mu, a_0 + a_1 S_{t-1})$, то логарифмическая функция правдоподобия равна

$$-\frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(a_0 + a_1 (X_{i-1} - \mu)^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{a_0 + a_1 (X_{i-1} - \mu)^2}.$$

И мы можем оценить параметры, максимизируя по ним это выражение. Результаты же по более общей модели ARCH(p) аналогичны.

Популярным обобщением модели ARCH является **обобщенный авторегрессионный процесс условной неоднородности**, характеризуемый двумя параметрами p и q и обозначаемый **GARCH**(p, q). Его простейший вариант, процесс GARCH(1, 1), всего лишь добавляет величину $a_2 V_{t-1}^2$ к модели ARCH(1):

$$V_t^2 = a_0 + a_1 (X_{t-1} - \mu)^2 + a_2 V_{t-1}^2.$$

Таким образом, в нем волатильность в момент времени t , оцениваемая в момент $t-1$, зависит от квадрата дохода и оцененной волатильности момента $t-1$. Записывая последнее равенство для разных значений индекса, как это мы дважды делали ранее, убеждаемся, что на оценку волатильности можно смотреть как на усреднение квадратов прошлых доходов, с приданием большего веса недавним квадратам (см. упр. 20.2.3 (1)). По соображениям простоты обычно предполагается, что $a_1 + a_2 < 1$ и $a_0 > 0$, и в этом случае безусловная долгосрочная дисперсия задается выражением $a_0/(1 - a_1 - a_2)$. Модель также обладает свойством возвращения к среднему (см. упр. 20.2.3 (2)).

Упражнение 20.2.3. Возьмем модель GARCH(1, 1). Покажите, что

- 1) $V_t^2 = a_0 \sum_{i=0}^{k-1} a_2^i + \sum_{i=1}^k a_1 a_2^{i-1} (X_{t-i} - \mu)^2 + a_2^k V_{t-k}^2$, где $k > 0$,
- 2) $D(X_{t+k} | V_t) = V + (a_1 + a_2)^k (V_t^2 - V)$, где $V \equiv a_0/(1 - a_1 - a_2)$.

Дополнительная литература

Многие книги посвящены не только анализу временных рядов, но и такому важному его аспекту, как проверка моделей, мельком затронутому здесь [22, 415, 422, 667, 839]. Вариант гипотезы эффективного рынка, сформулированной Самуэльсоном в 1965 г., утверждает, что доходы активов являются мартингалами (см. упр. 13.2.2) [594]. Однако свойство постоянства ожидаемого дохода, вытекающее из мартингалности, было бы отброшено на основании имеющихся данных, если бы рынки были эффективными [333]. Больше информации по гипотезе эффективного рынка можно найти в [148, 333, 424, 587, 594, 767]. Разложение Вольда принадлежит Вольду и появилось в 1938 г. [881]. Неустойчивое

поведение дисперсии доходов имеет последствия для долгосрочных инвесторов [69]. Стохастическая волатильность интенсивно изучалась [49, 293, 440, 444, 450, 471, 520, 579, 790, 823, 839, 840]. В качестве модели для стохастической волатильности предлагался не только процесс Ито из п. 15.5, но и скачкообразные процессы [177]. О проблемах, связанных с таким подходом к представлению волатильности, можно почитать в [255]. Еще один подход к проблеме «улыбки» предоставляет индуцированное биномиальное дерево [502, 503]. Модель ARCH предложил Энгл [319], а GARCH — Боллерслев [99] и Тэйлор [839]. Эта модель получила широкую экспериментальную поддержку [464, 552, 578]. О моделях оценки стоимости опционов, основанных на процессе GARCH, можно почитать в [286, 287, 288, 442], а о соответствующих алгоритмах — в [749]. Обзор по оцениванию процессов Ито вида $dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$ приведен в [517]. Как было показано в примере 20.1.1, непосредственная оценка сноса μ , вообще говоря, трудна, если пользоваться дискретными данными, которые, хотя и располагаются близко друг от друга, но в совокупности принадлежат короткому интервалу времени; диффузия же σ может быть оценена точно.

Обобщенный метод моментов (GMM) представляет собой метод оценки параметров, который обобщает метод моментов из п. 6.4.3. Подобно обычному методу моментов, GMM также задает условия на моменты, которыми параметры фактически и определяются. Однако, вместо решения уравнений в соответствии с GMM требуется найти те параметры, которые минимизируют взвешенное «расстояние» между выборочными и теоретическими моментами распределения. К типичным условиям, обеспечивающим состоятельность оценки по методу GMM, относятся стационарность, эргодичность и существование нужных математических ожиданий. Метод моментов GMM принадлежит Хансену [418] и весьма широко используется в анализе временных рядов [173, 248, 384, 526, 754, 819].

Примечания

1. Условие стационарности исключает случайное блуждание со сносом примера 13.1.2 из семейства стационарных AR-процессов. Броуновское движение, как предел такого случайного блуждания, также оказывается не стационарным процессом (посмотрите еще раз п. 13.3.3).

2. На практике μ часто предполагается равным нулю. И это разумно, если Δt мало, скажем равно 1 дню, поскольку ожидаемый доход в этом случае незначителен по сравнению со стандартным отклонением доходов.

Тот, кто попытается на основании современных наблюдений, сделанных в Лондоне и Париже, представить уровень смертности среди наших предков перед всемирным потопом, наверняка будет чрезвычайно далек от истины.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646—1716)

КЛАСС ЦЕННЫХ БУМАГ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКЕ, И ЕГО ПРОБЛЕМЫ

- 21 Производные ценные бумаги на процентную ставку**
- 22 Подгонка временной структуры**
- 23 Введение в моделирование временной структуры**
- 24 Основы моделирования временной структуры**
- 25 Равновесное моделирование временной структуры**
- 26 Безарбитражное моделирование временной структуры**

В главе 21 дается обзор весьма представительного класса производных финансовых инструментов, основанных на процентной ставке. В главе 22 обсуждается построение хорошей кривой доходности. В главе 23 начинается разговор о моделировании процентных ставок и продолжается — об оценке стоимости производных финансовых инструментов с помощью элементарного, но весьма важного, биномиального дерева процентной ставки. В главе 24 закладываются математические основы моделей процентной ставки, а в главах 25 и 26 излагаются отдельные модели, встречающиеся в литературе.

21 Производные ценные бумаги на процентную ставку

Я никогда не играю в азартные игры.

Дж. П. Морган (1837—1913)

Ценные бумаги, чувствительные к процентной ставке, это такие ЦБ, выплаты по которым зависят от уровня и/или эволюции процентных ставок. Рынок производных инструментов на процентной ставке огромен. Мировой объем внебиржевых контрактов по производным инструментам на конец июня 1998 г. оценивался в \$72 трлн., 67 % из которых составляли инструменты на процентной ставке и 31 % были фьючерсными инструментами [51]. Использование таких производных инструментов в управлении риском портфеля сделало возможным экономическую и эффективную перестройку понятия чувствительность к процентной ставке [325]. В этой книге в класс **производных ЦБ на процентную ставку** не входят ЦБ с фиксированной доходностью и вложенными опционами.

21.1 Фьючерсы и форварды на процентную ставку

Фьючерсный контракт на процентной ставке — это такой фьючерсный контракт, стоимость базового актива которого зависит лишь от уровня процентных ставок. Таблица на рис. 21.1 дает представление о разнообразии фьючерсов на процентную ставку.

21.1.1 Фьючерсы на векселя Казначейства

Первый финансовый фьючерсный контракт относился к инструменту с фиксированной доходностью, сертификатам на основе закладных Правительственной Национальной Ассоциации по Закладным (GNMA или «Ginnie Mac»), торговля которыми началась в 1972 г. на бирже СБТ. Другая организация, Международный Денежный Рынок (IMM) на другой бирже в Чикаго, СМЕ, 3 месяца спустя начала торговлю фьючерсными контрактами по 13-недельным ВК (векселям Казначейства) [95].

Фьючерсные контракты по ВК на IMM относились к 13-недельным (3-месячным) ВК с номиналом в \$1 млн. Продавец фьючерсного контракта по ВК соглашался поставить покупателю на момент даты поставки ВК общего номинала \$1 млн., и у которых до погашения будет оставаться 13 недель. Поставляемые ВК могли быть либо вновь выпущенными, либо старыми. Фьючерсная цена определялась как цена, по которой ВК будут проданы стороной, занимающей короткую позицию, и куплены стороной, занимающей длинную. По контракту разрешалась поставка 89-, 90- или 91-дневных ВК, но при соответствующей корректировке цены.

20 марта 1995 г., понедельник

ЦЕНЫ ФЬЮЧЕРСОВ

ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

	Цена при открытии	Верхнее значение	Нижнее значение	Цена урегули- рования	Изменение	За период жизни		Открытая позиция
						Верхнее значение	Нижнее значение	
Облигации Казначейства (СВТ) — \$ 100 000; пункты в 1/32 от 100 %								
Мар	104-31	105-05	104-18	104-20	—11	116-20	95-13	28 210
Июн	104-12	104-19	104-00	104-02	—11	113-15	94-27	328 566
Сен	104-06	104-06	103-19	103-21	—11	112-15	94-10	14 833
Дек	103-23	103-23	103-04	103-07	—12	111-23	93-27	1 372
Мар96	102-26	103-00	102-26	102-26	—13	103-17	93-13	232
Июн	102-15	102-15	102-13	102-13	—13	104-28	93-06	46
.....								
Банкноты Казначейства (СВТ) — \$ 100 000; пункты в 1/32 от 100 %								
Мар	105-00	105-02	104-27	104-28	—3	111-07	98-11	24 870
Июн	104-16	104-20	104-11	104-13	—3	105-22	97-27	225 265
.....								
5-летние Банкноты Казначейства (СВТ) — \$ 100 000; пункты в 1/32 от 100%								
Мар	103-31	103-315	103-27	103-275	—2,5	104-11	99-15	19 230
Июн	103-18	103-21	103-155	103-165	—2,0	104-01	99-06	179 928
2-летние Банкноты Казначейства (СВТ) — \$ 200 000; пункты в 1/32 от 100%								
Мар	102-085	102-085	102-07	102-07	—1/4	102-105	99-252	5 776
Июн	103-30	101-302	101-282	101-29	+1/4	102-015	99-24	26 904
.....								
30-дневная Ставка Федерального Фонда (СВТ) — \$ 5 млн.; пункты в 100%								
Мар	94,05	94,05	94,05	94,05	—0,01	94,44	93,28	2 905
Апр	93,97	93,97	93,96	93,97	...	93,98	93,05	4 331
.....								
	Цена при открытии	Верхнее значение	Нижнее значение	Цена урегули- рования	Изменение	Дисконт		Открытая позиция
						Цена урегул.	Изменение	
Билеты Казначейства (СМЕ) — \$ 1 млн.; пункты в 100%								
Июн	94,04	94,06	94,04	94,05	+0,02	5,95	—0,02	16 964
Сен	93,83	93,83	93,80	93,82	+0,01	6,18	—0,01	10 146
Дек	93,64	93,66	93,64	93,66	—0,01	6,34	+0,01	9 082
.....								
1-месячная ставка LIBOR (СМЕ) — \$ 3 млн.; пункты в 100%								
Апр	93,84	93,84	93,82	93,83	...	6,17	...	27 961
.....								
	Цена при открытии	Верхнее значение	Нижнее значение	Цена урегули- рования	Изменение	Доходность		Открытая позиция
						Цена урегул.	Изменение	
Евродоллар (СМЕ) — \$ 1 млн.; пункты в 100%								
Июн	93,52	93,54	93,51	93,52	...	6,48	...	515 578
Сен	93,31	93,32	93,28	93,30	...	6,70	...	322 889
.....								
Мар04	91,65	91,65	91,65	91,65	—0,01	8,35	+0,01	1 910
.....								

Рис. 21.1. Котировки фьючерсов по процентным ставкам. Расширенный вариант части таблицы на рис. 12.3.

Векселя Казначейства котируются на спот-рынке в терминах эквивалентной ежегодной ставки дисконта, рассчитываемой по формуле (3.9). И наоборот, фьючерсные контракты котируются не непосредственно в терминах доходности, а на индексной основе, которая связана с дисконтной ставкой формулой

$$\begin{aligned} \text{индексная цена} &= \\ &= 100 - (\text{соответствующая ежегодная ставка дисконта} \times 100). \end{aligned}$$

Цена, таким образом, оказывается другим способом котирования процентной ставки. Например, если доходность равна 8 %, то соответствующая индексная цена получается равной $100 - (0,08 \times 100) = 92$. И, наоборот, дисконтная ставка для фьючерсного контракта может быть получена из цены фьючерсного контракта:

$$\text{соответствующая ежегодная ставка дисконта} = \frac{100 - \text{индексная цена}}{100}.$$

Расчет цены по счету, которую покупатель 13-недельных ВК номинала \$ 1 млн. должен заплатить в момент поставки, начинается прежде всего с определения долларовой ставки дисконта (скидки):

$$\begin{aligned} \text{долларовый дисконт} &= \\ &= \text{соответствующая ежегодная ставка дисконта} \times \$ 1\,000\,000 \times (T/360), \end{aligned}$$

где T — число дней до погашения. Ну а цена по счету равна

$$\text{цена по счету} = \$ 1\,000\,000 - \text{долларовый дисконт}.$$

Комбинируя два предыдущих равенства, получаем:

$$\begin{aligned} \text{цена по счету} &= \\ &= \$ 1\,000\,000 \times [1 - \text{соответствующая ежегодная ставка дисконта} \times (T/360)], \end{aligned}$$

где $T = 89, 90$ или 91 . Предположим, например, что индексная цена за фьючерсный контракт по ВК равна 92,52. Тогда дисконтная доходность по этому фьючерсному контракту по ВК равна $(100 - 92,52)/100 = 7,48\%$, а долларовая скидка за поставку ВК с 91 днем до погашения составляет величину

$$0,0748 \times \$ 1\,000\,000 \times \frac{91}{360} = \$ 18\,907,78.$$

Таким образом, цена по счету составляет $1\,000\,000 - 18\,907,78 = 981\,092,22$ долларов.

«Тик» у фьючерсных контрактов по ВК равен 0,01. Изменение в 0,01 соответствует изменению в один базисный пункт у дисконтной доходности. Изменение долларовой цены, соответствующее одному тикку, следовательно, составляет $0,0001 \times \$ 1\,000\,000 \times (90/360) = \$ 25$ при 90-дневном контракте. Контракт котируется и торгуется с точностью до единиц, равных половине тика.

Предположим, что срок действия фьючерсного контракта истекает через t лет, а участвующих в нем ВК через $t^* > t$ лет, при разнице этих

сроков в 90 дней. Пусть $S(t)$ и $S(t^*)$ обозначают безрисковые спот-ставки непрерывного начисления процентов для сроков t и t^* , соответственно. Поскольку доход по векселям не выплачивается, то фьючерсная цена по лемме 12.2.1 равна $F = e^{S(t)t - S(t^*)t^*}$. Из этого, в частности, вытекает, что дюрация фьючерса по ВК равна $t^* - t$, если кривая доходности является плоской. Пусть $\bar{r} \equiv (t^* - t)^{-1} \ln(1/F) = [S(t^*)t^* - S(t)t]/(t^* - t)$ форвардная ставка непрерывного начисления процентов, относящаяся к периоду времени между моментами t и t^* . Следовательно, фьючерсная цена — это такая цена векселей, которая будет у них, если 90-дневная процентная ставка на момент поставки окажется равной $\bar{r}$. Перепишем указанное равенство по-другому и получим

$$S(t) = \frac{S(t^*)t^* - \bar{r}(t^* - t)}{t}.$$

Ставка, которую определяет правая часть этой формулы называется **индуцированной ставкой репо**. Как объяснялось ранее, арбитражные возможности существуют, если индуцированная ставка репо отличается от реальной ставки по векселям Казначейства $S(t)$.

Пример 21.1.1. Предположим, что цена ВК со сроком погашения через 138 дней (0,3781 года) равна 95, а цена фьючерсного контракта по 90-дневным (0,2466 года) ВК, истекающего через 48 дней, равна 96,50. Индуцированная ставка репо тогда составляет

$$\frac{138 \times (1/0,3781) \ln(1/0,95) - 90 \times (1/0,2466) \ln(1/0,965)}{48} = 0,1191,$$

или 11,91 %.

◁

Упражнение 21.1.1. Найдите выражение, описывающее изменение цены по счету, соответствующее одному тикю, для фьючерса по ВК с 91 днем до погашения.

Хеджирование, основанное на дюрации. При непрерывном начислении процентов дюрация ВК равна его сроку до погашения. Предположим, что некто предвидит поступление суммы \$ L в момент t и планирует инвестировать ее в 6-месячные ВК. Чтобы уменьшить беспокойство по поводу возможного падения процентной ставки к моменту t с помощью фьючерсов на ВК, в силу (4.13) нужно купить следующее число фьючерсных контрактов:

$$\frac{L \times 0,5}{\text{цена фьючерсного контракта по ВК} \times 0,25}.$$

Общая же формула в предположении параллельности сдвигов имеет вид

$$\frac{L \times \text{дюрация обязательства}}{\text{цена фьючерсного контракта по процентной ставке} \times \text{дюрация фьючерса}}.$$

Пример 21.1.2. Одна фирма владеет 6-месячными ВК общего номинала \$ 10 млн. Временная структура плоская на уровне 8 %. Текущая стоимость ВК поэтому равна \$ $10\,000\,000 \times e^{-0,08/2} = \$ 9\,607\,894$, а текущая стоимость фьючерса по ВК составляет величину \$ $1\,000\,000 \times e^{-0,08/4} = \$ 980\,199$. Эта фирма осуществляет хеджирование, продавая $(9\,607\,894 \times 0,5)/(980\,199 \times 0,25) = 19,6$ фьючерсных контрактов.

◁

21.1.2 Рынок евродолларов

Деньги, положенные на счет в банке вне страны их происхождения называются **евровалютой**. Торговля евовалютой включает в себя займы и предоставление кредита в форме вклада на время. Наиболее важной евовалютой является евродоллар, а процентной ставкой, по которой банки оплачивают депозиты на время в евродолларах, является ставка LIBOR. 1-месячная ставка LIBOR — это ставка для 1-месячных вкладов, 3-месячная ставка LIBOR — это ставка для 3-месячных вкладов, и т.д. Ставка LIBOR на международных финансовых рынках играет роль базовой ставки на финансовых рынках конкретной страны.

К ставке LIBOR применяется схема «действительный/360», поэтому в расчетах с этой процентной ставкой год равен 360 дням, даже если проценты выплачиваются ежедневно. Рассмотрим ссуду в \$1 млн. под ежегодную ставку процента, называемую 6-месячной ставкой LIBOR, плюс 0,5%. Срок жизни этой ссуды делится на 6-месячные периоды. И для каждого из этих периодов ставка процента считается на 0,5% больше 6-месячной LIBOR в начале периода. Так, если текущая LIBOR равна 8% и в периоде 182 дня, то полагающиеся в конце периода проценты равны

$$\$ 1\,000\,000 \times 0,085 \times \frac{182}{360} = \$ 42\,972,22.$$

Ставка LIBOR меньше эквивалентной ежегодной ставки процента*). Например, ежегодная ставка процентов, эквивалентная 6-месячной LIBOR в 7%, несколько больше и равна 7,2231%, поскольку

$$\left(1 + 0,07 \times \frac{182}{360}\right) \left(1 + 0,07 \times \frac{183}{360}\right) - 1 \approx 0,072231.$$

Поскольку доходности LIBOR котируются в терминах прибавленной процентной ставки, то их легко сравнивать со ставками по местным СВ.

21.1.3 Евродолларовые фьючерсы

Торговля евродолларовыми фьючерсами началась в 1981г. и в настоящее время идет как на IMM, так и на Лондонской международной финансовой бирже фьючерсов и опционов (LIFFE). Этот контракт является одним из наиболее интенсивно торгуемых фьючерсных контрактов в мире. Базовым инструментом для фьючерсного евродолларового контракта является 3-месячный евродоллар с датой поставки, меняющейся от 3 месяцев до 10 лет.

Как и с фьючерсами по ВК, этот контракт имеет номинал в \$1 млн. и цену, определяемую на индексной основе и с тиком в 0,01. Котируемая цена фьючерса определяется как 100 минус эквивалентная ежегодная доходность, которая называется также **индуцированной ставкой LIBOR**.

*) Удивительного в этом не много. Скажем, 6-месячная LIBOR является ежегодной ставкой процента полугодового начисления $i^{(2)}$, которая меньше эквивалентной ей ежегодной ставки процента i , поскольку $1 + i = (1 + i^{(2)}/2)^2$. — Прим. перев.

Месяц контракта определяет месяц и год, в котором истекает его срок действия. Например, июньский контракт из таблицы на рис.21.1 имеет котировку 93,52. И эта цифра означает, что (ежегодная) процентная ставка по евродолларам равна 6,48 % для 3-месячного периода, начинающегося в июне, а также, что стоимость контракта равна

$$\$ 1\,000\,000 \times [1 - (0,0648/4)] = \$ 983\,800.$$

В отличие от фьючерсов по ВК евродолларовый фьючерсный контракт оплачивается наличными. Стороны договариваются о цене в наличных евродолларового депозита на время, основываясь на ставке LIBOR в момент поставки. Соответственно, в результате рыночная цена контракта устанавливается равной

$$\$ 1\,000\,000 \times [1 - (LIBOR/4)].$$

Вышеуказанная ставка LIBOR представляет собой реальную 90-дневную ставку по евродолларовым депозитам с ежеквартальным начислением процентов. Поэтому фьючерсная цена по построению сходится к выражению $100 \times (1 - LIBOR)$. Или, что эквивалентно, индуцированная ставка LIBOR сходится к спот-ставке LIBOR.

Фьючерсы по ВК являются контрактом на цену в отличие от евродолларовых фьючерсов, которые представляют собой контракт на процентную ставку. Цены евродолларовых фьючерсов меняются линейно в зависимости от банковской дисконтной доходности; 1 % изменение доходности всегда приводит к изменению цены (контракта) на величину

$$\$ 1\,000\,000 \times \frac{1}{100} \times \frac{90}{360} = \$ 2500;$$

из чего следует, что стоимость тика равна \$ 25. А это резко контрастирует с фьючерсами по ВК, чьи цены линейно зависят от цен ВК.

Пример 21.1.3. Рассмотрим обязательство в \$ 10 млн. под плавающую ставку, определяемую как процентная ставка, на 1 % выше существующей 3-месячной ставки LIBOR на момент выплаты процентов в сентябре. Оказалось, что существует евродолларовый фьючерс с ценой в 93,33, срок действия которого истекает в этот момент. Продажа 10 таких контрактов «запирает» ставку LIBOR на уровне 6,67 % на период в 4 месяца, начиная с сентября. Поскольку стоимость займа на 1 % выше ставки LIBOR, то фиксируемая ставка займа оказывается равной 7,67 %. Процентная

Ставка LIBOR	5%	6%	7%	8%	9%
Цена фьючерса	95	94	93	92	91
Процентные выплаты	150 000	175 000	200 000	225 000	250 000
Потери на фьючерсах	41 750	16 750	–8 250	–33 250	–58 250
Чистая стоимость займа	191 750	191 750	191 750	191 750	191 750

Рис. 21.2. Фиксация стоимости займа с помощью евродолларовых фьючерсов. Процентные выплаты составляют $\$ 10\,000\,000 \times (1 \% + LIBOR)/4$, потери на фьючерсах равны $10 \times \$ 1\,000\,000 \times (\text{цена фьючерса} - 93,33)/400$. Объяснение см. в примере 21.1.3.

выплата при этой ставке равна $10 \times 0,0767/4 = 0,19175$ млн. долларов (см. таблицу на рис. 21.2). $\triangleleft$

Рассмотренный выше пример с одним периодом без проблем обобщается на ситуации с несколькими периодами. А способ преобразования обязательства, взятого под плавающую ставку, в обязательство с фиксированной ставкой сводится к продаже вереницы фьючерсов, чьи сроки действия истекают в моменты выплаты процентов. При этом зафиксированными ставками займа являются индуцированные ставки LIBOR плюс используемый спрэд. В этом случае проценты, связанные с регулярной фиксацией ситуации на рынке, игнорируются.

Временную структуру ставок LIBOR можно выяснить с помощью индуцированных 3-месячных ставок LIBOR. Предположим для начала, что июнь 1995 г. является окончанием срока действия евродолларового фьючерсного контракта июня 1995 г. Цены евродолларовых фьючерсов указаны в таблице на рис. 21.3. Текущая 3-месячная ставка LIBOR, действующая с июня по сентябрь, равна 6,48 %. Поскольку срок действия истекает через 92 дня, то доход составит $6,48 \% \times (92/360) = 1,656 \%$. Ну а 6-месячную ставку можно определить по июньскому и сентябрьскому евродолларовым контрактам следующим образом. Индуцированная ставка, действующая с сентября по декабрь, равна $6,70 \% \times (91/360) = 1,694 \%$. Индуцированная ставка на предстоящий 6-месячный период равна, таким образом, $(1,01656 \times 1,01694) - 1 = 3,378 \%$, что приводит к эквивалентной ежегодной ставке процентов $3,378 \% \times (360/183) = 6,645 \%$. Эта цифра представляет также ставку займа, которую можно зафиксировать на 6-месячный период. Для выяснения же временной структуры ставки LIBOR эту процедуру можно повторить.

Пример 21.1.4. Какова 12-месячная индуцированная ставка LIBOR в начале июня 1996 г.? Определяется она по июньскому, сентябрьскому,

	Цена фью- черса	Индуци- рованная ставка LIBOR	Число дней		Цена фью- черса	Индуци- рованная ставка LIBOR	Число дней		Цена фью- черса	Индуци- рованная ставка LIBOR	Число дней
Июн95	93,52	6,48	92	Июн98	92,65	7,35	92	Июн01	92,11	7,89	92
Сен 95	93,30	6,70	91	Сен 98	92,61	7,39	91	Сен 01	92,05	7,95	91
Дек 95	93,11	6,89	91	Дек 98	92,53	7,47	90	Дек 01	91,97	8,03	90
Мар96	93,10	6,90	92	Мар99	92,54	7,46	92	Мар02	92,01	7,99	92
Июн96	93,02	6,98	92	Июн99	92,49	7,51	92	Июн02	91,96	8,04	92
Сен 96	92,97	7,03	91	Сен 99	92,45	7,55	91	Сен 02	91,90	8,10	91
Дек 96	92,87	7,13	90	Дек 99	92,37	7,63	91	Дек 02	91,82	8,18	90
Мар97	92,88	7,12	92	Мар00	92,38	7,62	92	Мар03	91,83	8,17	92
Июн97	92,82	7,18	92	Июн00	92,31	7,69	92	Июн03	91,76	8,24	92
Сен 97	92,78	7,22	91	Сен 00	92,25	7,75	91	Сен 03	91,70	8,30	91
Дек 97	92,70	7,30	90	Дек 00	92,17	7,83	90	Дек 03	91,61	8,39	91
Мар98	92,71	7,29	92	Мар01	92,18	7,82	92	Мар04	91,65	8,35	92

Рис. 21.3. Цены евродолларовых фьючерсов. Доходностями являются гипотетические индуцированные (т. е. расчетные) 3-месячные ставки LIBOR, действующие с июня 1995 г.

декабрьскому и мартовскому евродолларовым фьючерсным контрактам как значение f , удовлетворяющее уравнению

$$1 + f \times \frac{365}{360} = \left(1 + 6,98 \% \times \frac{92}{360}\right) \left(1 + 7,03 \% \times \frac{91}{360}\right) \left(1 + 7,13 \% \times \frac{90}{360}\right) \times \left(1 + 7,12 \% \times \frac{92}{360}\right).$$

Решение этого уравнения приводит к значению $f = 7,257 \%$. $\triangleleft$

Упражнение 21.1.2. Рассчитайте по данным таблицы на рис.21.3 ежегодную ставку, эквивалентную 9-месячной индуцированной ставке LIBOR периода между июнем 1995 г. и мартом 1996 г.

21.1.4 Фьючерсы на облигации Казначейства

На Чикагской бирже СВТ торгуют фьючерсами на 2-летние, 5-летние и 10-летние банкноты Казначейства (БНК) и облигации Казначейства (ОК). По всем требуется поставка базовых ЦБ, однако в соответствии с контрактом также может быть принято и некоторое количество «подходящих» ЦБ.

Появившийся в 1977 г. фьючерсный контракт на ОК (облигации Казначейства) требует поставки ОК США номинала \$ 100 000, удовлетворяющих условиям поставки. Срок до погашения или до первой даты отзыва, если она отзывная, у поставляемой облигации должен быть не меньше 15 лет. Занимающий короткую позицию для поставки может выбрать любой рабочий день месяца поставки, хотя контракты редко урегулируются реальной поставкой. Базовым инструментом для фьючерсного контракта на ОК являются гипотетические 20-летние 8 % купонные облигации номинала в \$100 000. Например, если по мартовскому контракту стороны договорились о цене в 104-20, то покупателю дается право получить эти купонные облигации по цене $104\frac{20}{32} \%$ от \$ 100 000, или за \$ 104 625. Минимальное колебание цены фьючерсного контракта на ОК составляет $1/32$ от 1 %. В долларовом выражении эта величина составляет $\$ 100\,000 \times (1/32) \% = \$ 31,25$; поэтому минимальное колебание цены равно 31,25.

Хотя цены и доходности фьючерсного контракта на ОК котируются с помощью этой гипотетической облигации, продавец фьючерсного контракта стоит перед выбором из нескольких вариантов реальных ОК, которые годятся для поставки. В соответствии с хорошо отлаженным механизмом реальная фьючерсная цена рассчитывается по котируемой цене для любых облигаций, которые удовлетворяют условиям поставки. Сумма по счету определяется выражением

$$\text{цена по счету} = abk + d, \quad (21.1)$$

где a — цена урегулирования, b — объем контракта, k — коэффициент перевода и d — накопленные проценты. **Коэффициент перевода** представляет собой цену купонной облигации номинала в \$1 со сроком погашения — начиная с первого дня месяца поставки — равным сроку погашения поставляемой облигации, если она была оценена как приносящая

8 % годовых с полугодовым начислением процентов. Сроки погашения округляются вниз до ближайшего квартала. Например, срок в 24 года и 5 месяцев превратится в 24 года и 3 месяца. Пусть ω есть доля купона, которая принадлежит покупателю облигации и определяется в (3.19). Тогда цена облигации рассчитывается по формуле

$$\frac{c}{(1,04)^\omega} + \frac{c}{(1,04)^{\omega+1}} + \frac{c}{(1,04)^{\omega+2}} + \dots + \frac{1+c}{(1,04)^{\omega+n-1}} - c(1-\omega),$$

где c — полугодовая купонная ставка, а n — число оставшихся купонных выплат (величина 0,04 представляет полугодовой эквивалент ежегодной доходности 8 % полугодового начисления). Последнее слагаемое представляет накопленные проценты. Поскольку купонные выплаты делаются с интервалом в 6 месяцев, то ω равно либо $1/2$, либо 1. Например, если первая купонная выплата будет через 3 месяца, то $\omega = 1/2$ ¹.

Рассмотрим 13 % купонную облигацию с погашением через 19 лет и 2 месяца. При вычислении коэффициента перевода будет предполагаться, что до погашения облигации осталось 19 лет, а ближайшая купонная выплата пройдет через 6 месяцев. Поэтому в предположении, что ежегодная дисконтная ставка полугодового начисления процентов равна 8 %, стоимость облигации определяется выражением

$$\sum_{i=1}^{38} \frac{6,5}{(1,04)^i} + \frac{100}{(1,04)^{38}} = 148,42.$$

Таким образом, коэффициент перевода оказывается равным 1,4842. Рассмотрим далее в остальном такую же облигацию, но с погашением через 19 лет и 4 месяца. В этом случае при вычислении коэффициента перевода будет предполагаться, что погашение наступит через 19 лет и 3 месяца, а также, что всего будет 39 купонных выплат и первая из них пройдет через 3 месяца. Поэтому стоимость облигации записывается в виде

$$\sum_{i=0}^{38} \frac{6,5}{(1,04)^{i+0,5}} + \frac{100}{(1,04)^{38,5}} - 3,25 = 148,66.$$

А коэффициент перевода, следовательно, равен 1,4866.

Пример 21.1.5. Предположим, что цена во фьючерсном контракте на ОК устанавливается на уровне 96 и занимающий короткую позицию решает поставить ОК с коэффициентом перевода, равным 1,15. Цена контракта оказывается равной \$ 100 000 $\times$ 0,96 $\times$ 1,15 = \$ 110 400. Его покупатель должен также оплатить продавцу и накопленные проценты по облигации, рассчитанные по формуле (21.1). $\triangleleft$

Сторона, занимающая короткую позицию, среди годных к поставке облигаций может выбрать для поставки «самую дешевую». Поскольку эта сторона получает цену по счету, равную

$$S_f k + d,$$

где S_f — котируемая фьючерсная цена, а стоимость покупки облигации записывается в виде

$$S_c + d,$$

где S_c — котируемая цена в наличных, то **самой дешевой** будет облигация, для которой величина

$$S_c - S_f k$$

минимальна. Найти такую облигацию можно, проверив облигации, удовлетворяющие условиям поставки. Самая дешевая для поставки облигация может меняться каждый день.

В дополнение к возможности выбрать для поставки любой пригодный выпуск Казначейства (иногда упоминаемую под названием **выбор качества** или **возможность изменения**), у стороны, занимающей короткую позицию, есть еще две возможности для выбора. Во-первых, она решает, когда именно в месяце поставки произойдет сама поставка. Эта возможность называется **выбор времени поставки** (торговля по фьючерсному контракту прекращается за 7 рабочих дней до конца месяца поставки). Другой возможностью выбора является право сообщить свое решение по поставке до 8 часов вечера по чикагскому времени в день, когда была зафиксирована цена фьючерса. Эта возможность выбора называется **предоставлением wild card**. А все три возможности вместе представляют собой **право выбора, связанное с поставкой**, и оно означает, что сторона, занимающая длинную позицию никогда не может быть уверена в том, какая ОК будет поставлена и когда [325, 470]. Но все эти сложности лишь помогают добиваться ликвидности.

Упражнение 21.1.3. У годной к поставке 8 % купонной облигации коэффициент перевода должен быть равен единице независимо от срока погашения, если накопленные проценты равны нулю. Почему?

Упражнение 21.1.4. Рассчитайте коэффициент перевода для 13 % купонной облигации с погашением через 19 лет и 11 месяцев после момента поставки.

Оценка стоимости. Возможность осуществить выбор, связанный с поставкой, приводит к созданию стоимости у стороны, занимающей короткую позицию. Но эта возможность и превращает оценку стоимости в непростое дело. Если же самая дешевая облигация и дата поставки известны одновременно, то фьючерсный контракт по ОК превращается во фьючерсный контракт на ЦБ с известной доходностью. А лемма 12.2.3 утверждает, что фьючерсная цена F связана с ценой облигации в наличных S равенством $F = (S - I)e^{r\tau}$, где I есть приведенное значение (ПЗ) купонных выплат в течение жизни фьючерсного контракта, а r является безрисковой ставкой процента рассматриваемого периода².

Пример 21.1.6. Рассмотрим самую дешевую облигацию для поставки с 9 % купонами и коэффициентом перевода 1,0982. Следующая купонная выплата по ней должна пройти через 120 дней, поставка произойдет через 270 дней, а следующая после этого выплата по купонам — через 33 дня. Временная структура плоская на уровне 8 % непрерывного начисления. Предположим, что текущая котируемая цена облигации равна 108. Сначала вычисляем накопленные проценты и получаем, скажем, 1,533. Цена облигации в наличных, следовательно, равна 109,533. Цена

фьючерса, при условии, что контракт выписан на 9 % облигацию, должна быть равна

$$[109,533 - 4,5 \times e^{0,08 \times (120/365)}] \times e^{0,08 \times (270/365)} = 111,309.$$

До поставки пройдет 150 дней, по которым полагается начисление накопленных процентов ($270 - 120 = 150$). Следовательно, котируемая фьючерсная цена, если бы контракт был выписан на 9 % облигацию, должна быть равна

$$111,309 - \left(4,5 \times \frac{150}{150 + 33} \right) = 107,620.$$

Но контракт в действительности был выписан на стандартную 8 % облигацию, а 1,0982 стандартных облигаций считаются эквивалентными одной 9 % облигации, поэтому котируемая фьючерсная цена должна быть равна $107,620 / 1,0982 = 97,997$. $\triangleleft$

Хеджирование. Напомним, что стоимость базисного пункта (СБП) — это изменение в цене долгового инструмента, соответствующее изменению в один базисный пункт (0,01 %) его доходности. Например, если доходность облигации меняется с 8 % до 8,01 % и в результате ее цена увеличивается на \$ 70, то ее СБП равна \$ 70. Чем больше СБП, тем больше процентная ставка подвержена риску. СБП для фьючерсного контракта определяется как СБП самого дешевого для поставки инструмента, деленное на коэффициент перевода. Коэффициент перевода α означает, что подверженность к изменению цены у облигации примерно в α раз больше этой подверженности у фьючерса, и потому следует продать α фьючерсных контрактов, чтобы обезопасить от изменения цены все базовые облигации номинала \$ 100 000. СБП фьючерсных контрактов на ОК растет при уменьшении процентной ставки. И в этом они сильно отличаются от евродолларовых фьючерсов, у которых всякое изменение ставки на 0,01 % меняет цену ровно на \$ 25.

Чтобы использовать фьючерсы для изменения дюрации портфеля, необходимо вычислять как чувствительность портфеля из облигаций, так и чувствительность фьючерсной цены к изменениям доходности. А чтобы фьючерсный контракт был успешным в роли хеджа, изменения его цены должны четко отслеживать соответствующие изменения у базовой облигации. И это в самом деле важно [95, 746].

Пример 21.1.7 Один инвестор владеет портфелем из облигаций с дюрацией по Маклэю (ДМ) в 5,0 и рыночной стоимостью в \$ 100 млн. Пусть доходность, эквивалентная облигационной, равна 10 %. Тогда число фьючерсных контрактов, которые нужно приобрести, чтобы увеличить ДМ до 9,0 можно определить следующим образом. Предположим, что СБП фьючерса равно \$ 85. Тогда СБП портфеля равно

$$\frac{5,0}{1 + (0,10/2)} \times \$ 100\,000\,000 \times 0,0001 = \$ 47\,619.$$

И нужное СБП можно получить как возникающее при искомой ДМ:

$$\frac{9,0}{1 + (0,10/2)} \times \$ 100\,000\,000 \times 0,0001 = \$ 85\,714.$$

Поскольку же СБП следует увеличить на \$ 38 095, то купить для этого придется $38\,095/85 \approx 448$ фьючерсных контрактов. $\triangleleft$

Фьючерсы на облигации и фьючерсы на акционные индексы можно комбинировать для того, чтобы искусственно изменить распределение активов. Скажем, используя фьючерсы, управляющий хотел бы добиться эквивалентности двух операций: продажи облигаций на \$ 100 млн. и покупки акций на \$ 100 млн. В этом случае, во-первых, повторите шаги примера 21.1.7, чтобы выяснить СБП для облигаций на \$ 100 млн., а затем число фьючерсов на облигации с тем же СБП, которые следует продать. Число же фьючерсов на акционные индексы, которые следует купить определяется делением \$ 100 млн. на стоимость контракта, равную \$ 500, умноженным на значение индекса, скажем, индекса S&P 500 для фьючерсного контракта на этот индекс.

21.1.5 Фьючерсы на банкноты Казначейства

Фьючерсный контракт на БНК построен по типу фьючерсного контракта на ОК. Например, базовым инструментом для фьючерсного контракта на 10-летние БНК является гипотетически 10-летние БНК с 8 % доходностью и суммарным номиналом в \$ 100 000. Как и ранее, обычно имеется несколько выпусков Казначейства, пригодных к поставке. Для 10-летних фьючерсов, к примеру, выпуск пригоден, если его срок до погашения не менее 6,5 лет и не более 10 лет, начиная с первого дня месяца поставки. Права выбора при поставке, предоставляемые стороне, занимающей короткую позицию, а также минимальное колебание цены те же, что и у фьючерсов на ОК [325]. Исключение составляют фьючерсы на 2-летние БНК, номинал которых равен \$ 200 000, а цены котируются в единицах, равных одной четверти от 1/32 доллара.

Упражнение 21.1.5. Управляющий пенсионного фонда хочет извлечь выгоду из высокой доходности, предлагаемой по БНК, но необычно высокие страховые выплаты препятствуют таким капиталовложениям. Ожидается, однако, что в сентябре эти выплаты станут нормальными. Что может быть сделано в такой ситуации?

21.1.6 Соглашения по форвардной ставке

Впервые появившиеся в 1982 г. соглашения по форвардной ставке (СФС) представляют собой урегулируемые в наличных форвардные контракты между двумя сторонами, выплаты по которым связаны с будущим уровнем интересуемой процентной ставки [647]. Проценты основаны на гипотетическом вкладе и выплачиваются в заранее фиксированный момент времени в будущем. Покупатель СФС оплачивает разницу между процентами по этой гипотетической ссуде под фиксированную ставку и процентами по той же ссуде, но по существующей ставке. Рынок этих ЦБ главным образом межбанковский и представляет собой внебиржевой эквивалент биржевых фьючерсных контрактов по краткосрочным ставкам.

Если же формально, то предположим, что X означает фиксированную ставку, превращенную в ежегодную, а y — реальную ежегодную ставку, эквивалентную существующей выбранной ставке и относящейся к моменту заключения контракта T . Тогда чистая выплата в наличных покупателю СФС, причитающаяся ему в конце контрактного периода $T + t$ определяется выражением

$$(y - X) \times \mathcal{N} \times \frac{m}{360}. \quad (21.2)$$

Здесь m означает длительность «вклада» в днях, а $\mathcal{N}$ — величина гипотетической ссуды (**условная или оговоренная сумма**). Как правило, чистая сумма, оплачиваемая покупателем, представляет собой дисконтированную на момент заключения контракта вышеуказанную сумму, причем по дисконтной ставке, совпадающей с выбранной. Таким образом, оплата в наличных на момент заключения контракта T представляет величину

$$(y - X) \times \mathcal{N} \times \frac{m}{360} \times \frac{1}{1 + y(m/360)}.$$

В условиях котировки моменты времени, отмечающие начало контракта и его окончание, уточняются. Таким образом, если СФС покрывают период, начинающийся через 1 месяц и оканчивающийся через 4 месяца, то такие контракты обозначаются как контракты 1×4 (один на четыре). Они относятся к 3-месячной ставке LIBOR (см. нижеследующую диаграмму):



Аналогично, контракты СФС по 6-месячной LIBOR с началом через 1 месяц обозначаются как контракты 1×7 . В любой день имеются форвардные ставки LIBOR как для 3-месячных, так и для 6-месячных контрактов, заключаемых через 1 месяц, 2 месяца, 3 месяца, 4 месяца, 5 и 6 месяцев. И каждый следующий день опять предлагаются новые контракты.

Пример 21.1.8. Банк желает предоставить одному клиенту в долг через 3 месяца \$1 млн. на 6 месяцев. Желая защитить (прохеджировать) соглашение о ставке, которую просил клиент, банк использует СФС, чтобы зафиксировать стоимость займа. Он запрашивает котировку ставки LIBOR по контрактам 3×9 и получает 5,5%. И тогда он предлагает клиенту фиксированную ставку 6%. Предположим, что 6-месячная LIBOR через 3 месяца превращается в 6,2%. Тогда потери через 9 месяцев по реальному кредиту составят величину $(0,062 - 0,06) \times \$1\,000\,000 \times (182/360) = \$1\,011,11$, в то время как прибыль от использования СФС будет равна $(0,062 - 0,055) \times \$1\,000\,000 \times (182/360) = \$3\,538,89$. $\triangleleft$

Оценка стоимости СФС сводится к вычислению справедливой фиксированной форвардной ставки в предположении, что риск неплатежеспособности со стороны продавца СФС отсутствует. Форвардная ставка

для промежутка времени $[T, T + m]$ определяется равенством

$$f_L(T, T + m) \equiv \left[\frac{d_L(T)}{d_L(T + m)} - 1 \right] / \Delta t.$$

Здесь $\Delta t \equiv m/360$, а $d_L(t)$ обозначает приведенное значение (ПЗ) евро-долларового депозита, по которому \$1 выплачивается через t дней (см. упр. 5.6.3). Поэтому величина $f_L(T, T + m)$ представляет именно ту искомую фиксированную ставку по контракту X , которая обнуляет стоимость СФС сейчас. Вообще же ПЗ выплаты покупателю СФС из уравнения (21.2) равно величине

$$[f_L(T, T + m) - X] \times \Delta t \times d_L(T + m) = d_L(T) - (1 + X\Delta t)d_L(T + m) \quad (21.3)$$

на евродоллар условной суммы.

Упражнение 21.1.6. 1) Докажите равенство из упр. 5.6.3 с помощью арбитражной аргументации.

2) Проверьте справедливость равенства (21.3).

21.2 Опционы с фиксированной доходностью и опционы на процентную ставку

В этом разделе рассматриваются опционы на ЦБ с фиксированной доходностью и на процентные ставки. Мы используем название «опционы с фиксированной доходностью» для первых и «опционы на процентную ставку» для вторых. Внебиржевой рынок опционов с фиксированной доходностью начал функционировать в середине 1970 гг. преимущественно работая с опционами пут на закладные [724]. Почти все опционы на процентные ставки, торгуемые на бирже, являются Европейскими.

В случае опционов с фиксированной доходностью опционы пут покупают для защиты от повышения процентных ставок, а опционы колл — от их падения. В случае же опционов на процентную ставку, основанную на доходности, ситуация обратна: покупатель опциона колл ожидает, что процентные ставки начнут расти, а покупатель опциона пут предвидит, что процентные ставки начнут опускаться. Поэтому многие из торговых стратегий, упомянутых в гл. 7, находят здесь свое применение.

21.2.1 Опционы на ЦБ Казначейства

Рассмотрим Европейский опцион, срок действия которого истекает в момент T и который выписан на ВК с погашением через m дней после истечения срока действия опциона. Цена исполнения опциона x (в процентах) — это ставка дисконта, соответствующее значение*) которой в процентах от номинала равно

$$X = \left(1 - \frac{x}{100} \times \frac{m}{360} \right) \times 100$$

*) Имеется в виду приведенное значение \$1 при данной ставке x и выбранном сроке $m/360$ лет. — Прим. перев.

при 360-дневном годе. Выплата по опциону колл в момент истечения его срока действия составляет величину $\max(d(m) - X, 0)$, где $d(m)$ представляет стоимость в момент T бескупонной облигации номинала в \$ 1 и с погашением в момент $T + m$. А выплата по опцину пут составляет величину $\max(X - d(m), 0)$.

Опционы по ЦБ Казначейства не очень-то ликвидны. По торгуемым на бирже опционам на некоторые ОК существует узкий рынок. Цены котируются в пунктах и в 1/32 пункта, и каждый пункт представляет 1% от стоимости основной суммы, или \$ 1000. Сумма, выплачиваемая при исполнении, равна цене исполнения, умноженной на базовую сумму плюс накопленные проценты. Например, расчетная цена по опциону с ценой исполнения 90 равна $\$ 100\,000 \times (90/100) = \$ 90\,000$ плюс накопленные проценты.

21.2.2 **Опционы на процентную ставку,
когда ею являются доходности ЦБ Казначейства**

На Чикагской бирже СВОЕ торгуют опционами Европейского типа на процентную ставку с урегулированием в наличных, по следующим доходностям ЦБ Казначейства: 1) краткосрочной ставке, связанной с ежегодным эквивалентным вариантом ставки дисконта по недавно проданным с аукциона 13-недельным ВК (сокращенное обозначение IRX), 2) 5-летней ставке, построенной по доходности до погашения у недавно проданных с аукциона 5-летних БНК, 3) 10-летней ставке, основанной на доходности до погашения недавно проданных с аукциона 10-летних БНК и 4) 30-летней ставке, основанной на доходности до погашения

28 августа 1998 г., пятница						
Цена исполнения	Последние опционы колл			Последние опционы пут		
	Сен	Окт	Дек	Сен	Окт	Ноя
Опционы по краткосрочным процентным ставкам (IRX)						
50	...	...	...	17/16	...	...
55	...	...	5/16	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Опционы по 5-летней доходности БНК (FVX)						
52 1/2	...	...	7/8	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Опционы по 10-летней доходности БНК (TNX)						
55	...	...	7/8	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Опционы по 30-летней доходности ОК (TYX)						
50	...	...	4 1/8	3/16	...	...
52 1/2	...	...	...	5/8	...	...
55	7/16	...	...	1 15/16	...	...
57 1/2	...	5/16	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 21.4. Котировки доходностей Казначейства. Источник: газета Wall Street Journal от 31 августа 1998 г.

недавно проданных с аукциона 30-летних ОК (сокращенное обозначение ТУХ), см. таблицу на рис. 21.4.

Базовыми значениями для этих опционов являются базовые ставки в десятикратном размере. В результате эквивалентная ежегодная дисконтная ставка в 3,25% по 13-недельным ВК приведет к базовому значению IRX в 32,50, а доходность до погашения в 6,5% по 30-летним ОК сделает базовое значение ТУХ равным 65,00. И ясно, что любое однопроцентное изменение процентной ставки, т.е. на один пункт, приводит к изменению базового значения в 10 пунктов с тем же знаком. Подобно опционам на обычные акции, в этих опционах для определения стоимости контракта используется множитель \$ 100. А стоимость окончательного урегулирования определяется по котировкам на последний торговый день, которые предоставляет Федеральный Резервный Банк Нью-Йорка в 14.30 центрального времени. Выплата, если исполнение происходит, равна разности между стоимостью урегулирования и ценой исполнения, умноженной на \$ 100. Например, инвестор, владеющий июльским опционом колл на ТУХ с ценой исполнения 66 и стоимостью урегулирования 69 при истечении его срока действия его исполнит и получит \$ 300.

Упражнение 21.2.1. Один инвестор, имеющий ВК, ожидает повышения краткосрочных ставок и падения ставок промежуточных сроков. Чтобы воспользоваться этим намечающимся изменением кривой доходности, он продает ВК, вкладывает полученные деньги в банк и покупает опционы пут на 10-летнюю доходность Казначейства. Проанализируйте эту стратегию.

21.2.3 Шапки и полы на процентную ставку

Шапка или пол представляют собой ряд из опционов на процентную ставку. В роли базового актива может выступать процентная ставка или цена инструмента с фиксированной доходностью. Опционы же на шапку называются **шапонами**, а опционы на пол — **полонами** [325, 346]. Шапоны и полоны являются составными (или сложными) опционами.

При уточнении производных инструментов на процентную ставку часто используются ставки простых процентов. Выплата по шапке при истечении срока ее действия равна

$$\max\left(\frac{r-x}{1+r(m/360)}, 0\right) \times \frac{m}{360} \times \mathcal{N},$$

где x является ставкой шапки, представляющей собой ставку простых процентов, а r есть m -дневная процентная ставка (обе превращены в эквивалентные ежегодные ставки). Аналогично, выплата по полу при ставке пола x , выписанного на m -дневную процентную ставку r , равна

$$\max\left(\frac{x-r}{1+r(m/360)}, 0\right) \times \frac{m}{360} \times \mathcal{N}.$$

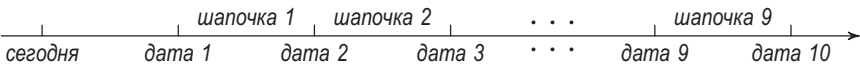
Как видим, выплаты $\max(r-x, 0) \times (m/360) \times \mathcal{N}$ и $\max(x-r, 0) \times (m/360) \times \mathcal{N}$ дисконтируются, поскольку их получают при погашении базового актива, которое наступает через m дней после истечения срока действия шапки или пола.

Выбранная ставка	6-месячная LIBOR
Ставка исполнения	8 %
Срок действия соглашения	пять лет
Частота урегулирований	каждые 6 месяцев
Условная величина номинала	\$ 100 млн.

Рис. 21.5. Шапка на процентную ставку.

Пример 21.2.1. Возьмем 6-месячный Европейский опцион колл на 6-месячную ставку LIBOR со ставкой исполнения 7 %. Его номинал равен \$ 10 млн., а срок действия истекает через 6 месяцев (183 дня). Этот опцион колл дает покупателю право получить сумму, равную $\max(r - 7 \%, 0) \times (182/360) \times \$ 10\,000\,000$, где r представляет собой 6-месячную ставку LIBOR, которая будет действовать через 6 месяцев. При этом указанная сумма будет получена в момент погашения базовой процентной ставки, который наступит через $183 + 182 = 365$ дней. Приведенное значение этой выплаты на момент окончания срока действия шапки, следовательно, равно вышеуказанной сумме, деленной на величину $1 + r(182/360)$. ◁

Пример 21.2.2. Рассмотрим шапку из таблицы на рис. 21.5. Хотя по соглашению в ней предусматривается десять 6-месячных периодов, но шапка содержит лишь 9 опционов, выплаты по которым определяются в моменты (даты) «переустановки». Базовой процентной ставкой для первого периода является процентная ставка, действующая сегодня, которая известна; поэтому в этом периоде опциона нет. См. следующий временной горизонт:



Соответствующий денежный поток указан в таблице на рис. 21.6. Механика полов аналогична. Наряду с 6-месячной ставкой LIBOR используются и другие кандидаты на роль базовой процентной ставки:

Год	Ставка LIBOR	ДП по ссуде	Выплаты по шапке	Суммарный ДП
0,0	8 %	+100,0000		+100, 0000
0,5	9 %	−4,0556	0,0000	−4,0556
1,0	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
1,5	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
2,0	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
2,5	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
3,0	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
3,5	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
4,0	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
4,5	9 %	−4,5625	0,5069	−4,0556
5,0		−104,5625	0,5069	−104,0556

Рис. 21.6. Денежный поток (ДП) ссуды под шапку. Предположим, что вначале ставка LIBOR равна 8 %, через полгода изменяется на 9 % и затем остается постоянной. ДП по ссуде и ДП по опциону на процентную ставку рассчитывается, исходя из действующей в начале каждого полугодового периода ставки LIBOR. Например, проценты по ссуде в конце первого года равны $100 \times 9 \% \times (182,5/360) = 4,5625$ млн. долларов. Для простоты считается, что в полугоде точно 182,5 дня.

основная ставка, ставка ВК, ставка СВ и ставка ЦБ, называемые «коммерческие бумаги»^{*}). ◁

Упражнение 21.2.2. Проверьте, что соглашение по форвардной ставке (СФС) для займа по ставке r можно продублировать с помощью портфеля, состоящего из одной длинной шапочки и одного короткого половичка с одинаковой ставкой исполнения x и датой истечения срока действия, совпадающей с датой урегулирования по СФС.

21.2.4 Шапки/полы и опционы фиксированной доходности

Рассмотрим шапочку на m -дневную ставку LIBOR со ставкой исполнения x . И пусть для простоты условная основная сумма равна \$1. Тогда по истечении ее срока действия и если настоящая процентная ставка равна r , то по шапочке выплачивается сумма

$$\max \left(\frac{r(m/360) - x(m/360)}{1 + r(m/360)}, 0 \right).$$

Интересно отметить, что эта шапочка эквивалентна $\alpha \equiv 1 + x(m/360)$ опционам пут на m -дневную бескупонную облигацию с ценой исполнения $1/\alpha$ и той же датой окончания срока действия, поскольку выплата по этим опционам равна

$$\alpha \times \max \left(\frac{1}{1 + x(m/360)} - \frac{1}{1 + r(m/360)}, 0 \right) = \max \left(\frac{r(m/360) - x(m/360)}{1 + r(m/360)}, 0 \right).$$

Аналогично, полик эквивалентен α опционам колл с той же ценой исполнения. Таким образом, шапка представляет собой пакет опционов пут на бескупонки, а пол — пакет опционов колл на них. А, значит, воротник на процентную ставку эквивалентен покупке пакета опционов пут и продаже пакета опционов колл.

Модель Блэка широко используется на практике для оценки стоимости шапок и полов. Для шапок используется формула (12.16), в которой F обозначает индуцированную форвардную ставку для периода между окончанием срока действия шапки T и моментом $T + m$. А это сводится к предположению, что форвардная ставка в периоде $[T, T + m]$ логнормально распределена. Возникающая формула сначала умножается на условную (оговоренную) сумму, а затем на величину $(m/360)/[1 + F(m/360)]$.

Упражнение 21.2.3. Докажите эквивалентность для полика.

21.2.5 Опционы на кривую доходности

Опцион на кривую доходности — это Европейский опцион на разницу между двумя выбранными ставками. По опциону колл на разницу между доходностями по 20-летней ОК и 12-месячному ВК, например,

^{*}) Так называются краткосрочные облигации со сроками погашения от 2 до 270 дней, выпускаемые банками, компаниями и другими заемщиками и предназначенные для инвесторов с временно неработающей наличностью. — Прим. перев.

при истечении срока выплачивается сумма $\max((y_{20y} - y_{12m}) - X, 0)$, где X представляет спрэд исполнения между двумя выбранными доходностями [149, 616].

21.3 Опционы на фьючерсы по процентной ставке

Наиболее популярными биржевыми опционами на процентную ставку являются опционы на фьючерсы по ОК, фьючерсы по БНК (торгуемые на бирже СВТ) и евродолларовые фьючерсы (торгуемые на международном денежном рынке). Все эти опционы на фьючерсы Американского типа. Их цены котируются в виде процента от основной суммы по базовой долговой ЦБ. Для опционов на евродолларовые фьючерсы цена котируется с точностью до двух десятичных знаков, а один контракт относится к поставке фьючерсных контрактов общего номинала \$1 млн. Для опционов на фьючерсы по ОК и БНК (за исключением 2-летней БНК) цена котируется с точностью до 1/64 от 1%, а один контракт подразумевает поставку фьючерсных контрактов общего номинала в \$100 000. В таблице на рис. 21.7 представлены образцы котировок. Например, инвестор, владеющий декабрьским опционом колл с ценой исполнения 98 и уплативший за него 1-08, получит чистую прибыль в размере

$$\$ 100\,000 \times \frac{101,00 - 98,00 - 1,125}{100} = \$ 1875,$$

если цена на фьючерсы по ОК поднимется до 101,00. Опционы на фьючерсы по ЦБ с фиксированной доходностью в значительной степени заменили опционы на те же ЦБ, поскольку представляют значительно более интересный вариант для крупных инвесторов [325].

Опцион на фьючерс по ОК является опционом на саму цену фьючерса, т.е. на фьючерсную цену фиктивной 20-летней и 8% облигации Казначейства. Объем контракта составляет \$100 000. Поэтому, к примеру, при цене фьючерса в 95 опцион колл с ценой исполнения 94 будет иметь внутреннюю стоимость, равную \$1000, а опцион пут с ценой исполнения 100 будет иметь внутреннюю стоимость, равную \$5000. Цены котируются с точностью до величин, кратных 1/64 от 1% стоимости в \$100 000 фьючерсного контракта на ОК. И каждая 1/64 пункта (величина тика) составляет \$15,625 [375]. Опционами перестают торговать в месяце, предшествующем месяцу поставки базового фьючерсного контракта.

Номинал фьючерсного контракта на 10-летнюю БНК при погашении равен \$100 000. Величина тика составляет 1/64 пункта (\$15,625 на контракт). Опционами перестают торговать в месяце, предшествующем месяцу поставки базового фьючерсного контракта. Фьючерсный опцион на 5-летнюю БНК имеет такие же характеристики. А фьючерсный опцион на 2-летнюю БНК отличается лишь номиналом в \$200 000 и величиной тика, который составляет 1/128 пункта (\$15,625 на контракт).

20 марта 1995 г., понедельник

ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

ОК (СВТ) \$ 100 000; пункты и их 1/64 доли

Цена испол- нения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
102	2-06	2-26	2-47	0-03	0-23	0-43
103	1-12	1-44	...	0-08	0-40	...
104	0-30	1-05	1-29	0-26	1-01	1-25
105	0-07	0-39	...	1-03	1-34	...
106	0-01	0-21	0-40	1-61	...	2-35
107	0-01	0-10	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Евродоллар (СМЕ) \$ 1 млн.; пункты 100%

Цена испол- нения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Июн	Сен	Дек	Июн	Сен	Дек
9300	0,56	0,49	0,52	0,04	0,20	0,41
9325	0,34	0,34	0,39	0,07	0,29	0,52
9350	0,17	0,22	0,29	0,15	0,41	0,67
9375	0,05	0,11	0,19	0,28	0,55	...
9400	0,01	0,06	0,12	0,49	0,75	0,98
9425	0,00	0,03	0,07	0,73	0,96	1,18
...	...	...	...	...	...	...

БНК (СВТ) \$ 100 000; пункты и их 1/64 доли

Цена испол- нения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
102	2-26	...	2-45	0-01	...	0-20
103	1-28	...	1-60	0-02	0-19	0-35
104	0-36	...	1-19	0-11	...	0-57
105	0-07	0-32	0-51	0-45	1-06	1-25
106	0-01	...	0-28	1-39	...	2-01
107	0-01	0-05	0-14	...	...	2-51
...	...	...	...	...	...	...

1-мес. LIBOR (СМЕ) \$ 1 млн.; пункты 100 %

Цена испол- нения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
9325	0,58	0,51	0,45	0,00	0,01	0,03
9350	0,34	0,29	0,24	0,01	0,04	0,07
9375	0,11	0,10	0,09	0,03	...	0,17
9400	0,01	...	0,03	...	...	...
9425	...	...	...	...	...	...
9450	0,00	0,00	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

5-летн. БНК (СВТ)

\$100 000; пункты и их 1/64 доли

Цена испол- нения	Опционы колл — урегулирование			Опционы пут — урегулирование		
	Апр	Май	Июн	Апр	Май	Июн
10200	1-33	...	1-47	0-01	0-07	0-15
10250	1-02	...	1-23	0-01	0-12	0-22
10300	0-36	...	1-01	0-03	0-21	0-32
10350	0-13	...	0-46	0-12	0-33	0-45
10400	0-03	0-20	0-31	0-34	...	0-62
10450	0-01	0-11	0-21	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 21.7. Котировки фьючерсных опционов на процентную ставку. Месяц указывает момент окончания срока действия базового фьючерсного контракта. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

Опционы на евродолларовые фьючерсы ориентируются на котируемую цену евродолларового фьючерса. Как и в базовом фьючерсе, размер контракта составляет \$ 1 млн., и потому всякое изменение цены на 0,01 влечет изменение в стоимости в \$ 25. Премия по опциону объявляется в базисных пунктах. Так, премия в 20 означает, что цена опциона равна $20 \times \$ 25 = \$ 500$. Возьмем 3-месячный опцион пут на июньский евродолларовый фьючерсный контракт с ценой исполнения в 93. Срок действия этого опциона истекает в июне, а базовым активом является июньский евродолларовый фьючерс. Заключительной выплатой по нему будет величина $[\max(93 - F, 0)/100] \times (90/360) \times \$ 1\,000\,000$, в которой F — цена фьючерса в июне.

21.3.1 Хеджирование обязательств с плавающей ставкой

Подверженность краткосрочных ставок заметным колебаниям можно ослабить с помощью евродолларовых фьючерсных опционов. Давайте повторим вычисления, связанные с таблицей на рис. 21.2 (см. пример 21.1.3), только на этот раз используем опционы на евродолларовые фьючерсы. Напомним, что рассматриваемое там обязательство представляет собой долг в \$ 10 млн. под плавающую ставку, которая на 1 % выше 3-месячной ставки LIBOR, действующей на момент оплаты. И оказалось,

Ставка LIBOR	5%	6%	7%	8%	9%
Цена фьючерса	95	94	93	92	91
Процентные выплаты	150 000	175 000	200 000	225 000	250 000
Выплата по опциону пут	0	0	0	25 000	50 000
Чистая стоимость займа	150 000	175 000	200 000	200 000	200 000

Рис. 21.8. Ограничение стоимости займа с помощью опционов на евродолларовые фьючерсы. Процентные выплаты определяются по формуле $10\,000\,000 \times (1\% + \text{LIBOR})/4$, а выплата по опциону пут — выражением $10 \times 1\,000\,000 \times (93 - \text{цена фьючерса})/(4 \times 100)$.

что есть опционы на евродолларовые фьючерсы, срок действия которых заканчивается в момент оплаты. Покупка 10 фьючерсных опционов пут с ценой исполнения 93 ограничивает стоимость займа величиной \$ 200 000 на момент возвращения долга (см. таблицу на рис. 21.8). Но, конечно, остается и стоимость шапки, которую представляет премия по опциону.

21.4 Свопы на процентную ставку

Две стороны заключают контракт, называемый своп на процентную ставку, для обмена периодическими процентными выплатами. Величина суммы в долларах, которую каждая из сторон выплачивает другой, определяется как произведение оговоренной процентной ставки на условную основную сумму. При этом обычно в качестве плавающей ставки выбираются ставки, характеризующие различные существующие на денежном рынке инструменты [226].

21.4.1 Свопы на процентную ставку «простая ваниль»

В свопе на процентную ставку под названием «простая ваниль»*) одна сторона выплачивает регулярный денежный поток, определяемый по фиксированной процентной ставке (**фиксированная нога**) и получает денежный поток, определяемый по плавающей ставке (**плавающая нога**). Другая сторона делает обратное. Иными словами, обе стороны производят обмен долга под плавающую ставку на долг под фиксированную. При этом в отличие от валютного свопа обмен основными

*) Ванилью (vanilla) называют стандартный, основной вариант продукта. — Прим. перев.

суммами не происходит. Фиксированная ставка, при которой стоимость свопа оказывается нулевой, называется **ставкой свопа**.

Любой своп характеризуют четыре основных элемента: величина условной основной суммы, процентные ставки двух сторон, частота выплат в обмениваемых денежных потоках и продолжительность обмена. Так, фраза «\$ 40 миллионный, 2-летний, выплачиваемые суммы фиксированные, получаемые — переменные, полу» своп означает, что условная основная сумма равна \$ 40 млн., одна сторона каждые 6 месяцев оплачивает суммы, определяемые по фиксированной ставке от этих \$ 40 млн., а другая по плавающей и также от \$ 40 млн., причем обе в течение 2 лет.

Выплаты по плавающей ставке связываются с какой-то краткосрочной процентной ставкой, скажем, 6-месячной LIBOR. На роль фиксированной ставки для свопа «простая ваниль» обычно выбирается какая-то широко распространенная ставка Казначейства США. Например, котировка «30 сверх» для 5-летнего свопа означает, что в качестве фиксированной ставки берется 5-летняя доходность Казначейства плюс 30 базисных пунктов. Хотя чистый денежный поток определяется в начале периода, но выплачивается он обычно в конце периода (**в конце**), а не в его начале (**авансом**).

Рассмотрим 2-летний своп с условной основной суммой в \$ 10 млн. и полугодовыми выплатами. Фиксированной является ставка на 20 базисных пунктов выше 2-летней ставки Казначейства, а плавающей — 6-месячная ставка LIBOR. Предположим, что ставка Казначейства в настоящее время равна 5%. Следовательно, фиксированная ставка равна 5,2%. А тот, кто оплачивает по ней, будет получать по 6-месячным ставкам LIBOR, определяемым в моменты времени 0, 0,5 года, 1 год и 1,5 года. И если соответствующие ставки LIBOR для указанных выше моментов равны 5,5%, 6%, 5,9% и 5%, то денежные потоки стороны, оплачивающей по фиксированной ставке, будут иметь следующий вид:

<i>Моменты выплат</i>	<i>0,5 года</i>	<i>1 год</i>	<i>1,5 года</i>	<i>2 года</i>
Получаемые суммы	275 000	300 000	295 000	250 000
Выплачиваемые суммы	260 000	260 000	260 000	260 000

Заметим, что используемые ставки делятся на два, поскольку проценты оплачиваются лишь за полгода. В действительности же платит лишь проигравшая сторона, и, естественно, разницу.

Котировки ставок Казначейства отличаются от котировок по ставкам LIBOR. Рассмотрим фиксированную ставку, котируемую как ставка доходности, эквивалентной облигационной, (ДЭО) при условии расчета количества дней по схеме «действительный/365». Чтобы сравнить эту ставку со ставкой LIBOR, котировка которой относится к другому числу дней, нужно умножить либо 6-месячную ставку LIBOR на 365/360, либо ставку ДЭО — на 360/365. Поэтому, если 0,4% превышение ставки LIBOR относится к 365-дневному году с полугодовым начислением процентов, то искомая ставка оказывается равной

$$\text{LIBOR} + 0,4 \times (360/365) = \text{LIBOR} + 0,3945 \%$$

при 360-дневном годе. Но возможны и другие осложнения. Например, моменты поступления сумм, выплачиваемых сторонами с фиксированной и плавающей ставкой, редко совпадают; скажем, сторона, оплачивающая по фиксированной ставке, может производить выплаты ежегодно, в то время как сторона с плавающей ставкой может делать это раз в полгода. Способы, по которым сами проценты начисляются по «каждой ноге» сделки могут также отличаться по причине использования разных схем расчета числа дней.

Предположим, что *A* желает взять ссуду под плавающую ставку, связанную с 6-месячной LIBOR, а *B* хотел бы получить ссуду под фиксированную ставку. И рассматривают они следующие ставки по займу:

	Фиксированная	Плавающая
<i>A</i>	$F_A\%$	6-месячная LIBOR + $S_A\%$
<i>B</i>	$F_B\%$	6-месячная LIBOR + $S_B\%$

Ясно, что *A* может непосредственно занять под ставку LIBOR плюс $S_A\%$, а *B* может занять под ставку $F_B\%$. Поэтому оплачиваемая ими совокупная процентная ставка равна ставке LIBOR плюс $(S_A + F_B)\%$. Предположим, что $S_B - S_A < F_B - F_A$. Другими словами, что *A* относительно более конкурентоспособен на рынке с фиксированной ставкой, чем на рынке с плавающей, и наоборот для *B*. Рассмотрим альтернативную возможность, при которой *A* занимает на рынке с фиксированной ставкой под $F_A\%$, *B* занимает на рынке с плавающей ставкой под ставку LIBOR плюс $S_B\%$ и затем они заключают своп, возможно, при финансовом посредничестве банка. Эти сделки преобразуют ссуду для *A* в ссуду под плавающую ставку и ссуду для *B* в ссуду под фиксированную ставку, как они того и желали. По новому соглашению совместно выплачивается ставка LIBOR плюс $(S_B + F_A)\%$, и тем самым получается экономия, выражаемая ставкой $(S_A + F_B - S_B - F_A)\%$. Естественно, такие сделки будут исполнены только в случае, если совокупная прибыль будет распределена так, что выиграют все участвующие стороны; т.е. *A* заплатит меньше, чем ставка LIBOR плюс $S_A\%$, *B* заплатит меньше, чем $F_B\%$, а банк получит от этой экономии свою долю.

Пример 21.4.1. Рассмотрим следующие процентные ставки по займу, с которыми столкнулись *A* и *B*:

	Фиксированная	Плавающая
<i>A</i>	8 %	6-месячная LIBOR + 1 %
<i>B</i>	11 %	6-месячная LIBOR + 2 %

Сторона *A* желает получить ссуду под плавающую ставку, а *B* — под фиксированную. Ясно, что *A* может сам занять под ставку LIBOR плюс 1 %, а *B* может занять под 11 %. Поскольку разница ставок при ссуде под фиксированную ставку (3 %) отличается от соответствующей разницы плавающих ставок (1 %) и так, что возникает экономия в $3 - 1 = 2\%$, то своп возможен. Сторона *A* относительно более конкурентоспособна на рынке с фиксированной ставкой, в то время как сторона *B* — на рынке

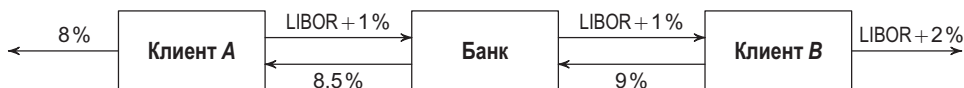


Рис. 21.9. Своп процентной ставки «простая ваниль».

с плавающей ставкой. Поэтому каждая сторона занимает на том рынке, где она более конкурентоспособна и после этого обе они заключают своп с банком. Соответственно возникают два различных соглашения по свопу, что и проиллюстрировано на рис. 21.9. При этом: *A* реально занимает под ставку LIBOR плюс 0,5 %, а *B* занимает под 10 %. Распределение прибыли: 0,5 % для *A*, 1 % для *B*, и 0,5 % для банка. С точки зрения банка своп с клиентом *A* подобен оплате 7,5 % и получению **чисто** ставки LIBOR (т.е. без добавки), а своп с клиентом *B* сравним с получением 8 % и оплате **чисто** ставки LIBOR. Предположим, что длительность свопа равна 10 годам, а 10-летняя доходность Казначейства равна 7 %. Тогда банк котировал бы такой своп в виде «50—100», что означало бы: он желает заключить своп, чтобы 1) получить ставку LIBOR и оплатить по фиксированной ставке, равной 10-летней ставке Казначейства плюс 50 базисных пунктов, а также 2) оплатить ставку LIBOR и получить по фиксированной ставке, равной 10-летней ставке Казначейства плюс 100 базисных пунктов. Разница между оплачиваемой ставкой Казначейства и получаемой (в рассматриваемом случае 50 базисных пунктов) и составляет спрэд спроса-предложения. $\triangleleft$

Как и в предыдущем примере, противоположные стороны редко вступают в соглашение по свопу непосредственно друг с другом. Вместо этого своп обычно заключается между противоположными сторонами и рыночным торговцем или просто между рыночными торговцами. Рыночный торговец стоит перед необходимостью искать другую сторону, а также рисковать, занимая позицию без другой стороны, если «одна нога» у свопа отсутствует. Однако он не рискует потерей основной суммы, поскольку в этих соглашениях нет обмена основной суммой.

Кривую паритета по свопу можно построить из свопов нулевой стоимости разных сроков погашения. Для получения теоретической **кривой ставок свопа**, которую можно использовать для оценки стоимости произвольного свопа, можно применить сходящийся алгоритм на рис. 5.4.

Упражнение 21.4.1. Сторона *A* желает получить ссуду под плавающую ставку, а сторона *B* — под фиксированную. И они рассматривают следующие ставки по займу:

	Фиксированная	Плавающая
<i>A</i>	F_A %	$\text{LIBOR} + S_A$ %
<i>B</i>	F_B %	$\text{LIBOR} + S_B$ %

Оплачивать банку плавающую ставку $(\text{LIBOR} - S'_A)$ % сторона *A* соглашается в обмен на фиксированную ставку $(F_A + F'_A)$ %, а сторона *B* согла-

шается оплачивать банку фиксированную ставку $(F_B + F'_B) \%$ в обмен на плавающую ставку $(\text{LIBOR} - S'_B) \%$. Докажите, что должны выполняться неравенства

$$0 < S_A + F'_A + S'_A < S_A + F_B - F_A + F'_B + S'_B < S_A + F_B - S_B - F_A,$$

чтобы оба, и A , и B , могли заключить соглашения по свопу с банком, в котором A реально берет ссуду под плавающую ставку, а B под фиксированную.

Об управлении системой активы/обязательства. Изменяя характеристики денежных потоков из активов, своп может лучше «согласовать» активы и обязательства. Рассмотрим коммерческий банк с краткосрочными вкладами, ставки по которым пересматриваются каждые 6 месяцев в соответствии с 6-месячной ставкой LIBOR за вычетом 20 базисных пунктов. И он сталкивается с проблемой несоответствия портфелей, поскольку его клиенты берут в долг на долгосрочной основе. Чтобы справиться с этой проблемой несоответствия сроков, банк заключает соглашение по свопу, в котором он оплачивает фиксированную ставку 10 % полугодового начисления, а получает по 6-месячной ставке LIBOR. Как показано на рис. 21.10, это соглашение преобразует обязательство с плавающей ставкой в обязательство с фиксированной ставкой в 9,8 %.

В качестве еще одного применения предположим, что банк предоставил на 10 лет коммерческую ссуду в размере \$ 100 млн., по которой выплачивается фиксированная ставка 10 %. При этом проценты выплачиваются раз в полгода, а основная сумма возвращается через 10 лет. Для финансирования этой ссуды банк выпускает 6-месячные СВ. Процентная ставка, которую банк планирует выплачивать по этим сертификатам, будет на 50 базисных пунктов превосходить 6-месячную ставку LIBOR. Ясно, что банк будет терять деньги, если эта 6-месячная LIBOR поднимется выше 9,5 %. С другой стороны, одна из компаний по страхованию жизни сталкивается с иной проблемой. Она подрядилась выплачивать 9 % по **гарантируемому инвестиционному контракту (ГИК)**, который она выпустила на предстоящие 10 лет. Объем этого ГИК'а также составляет \$ 100 млн. Страховая компания вкладывает эти деньги в один финансовый инструмент с плавающей ставкой, который приносит доходность, равную 6-месячной ставке LIBOR плюс 150 базисных пунктов. Ставка пересматривается через полгода. Ясно, что если 6-месячная ставка LIBOR упадет ниже 7,5 %, страховая компания столкнется с потерями.

Свопы процентной ставки могут помочь обеим сторонам зафиксировать спрэд. Предположим, что существует 10-летний своп процентной ставки условного номинала \$ 100 млн. По его условиям банк оплачивает 8,5 % годовых и получает ставку LIBOR каждые 6 месяцев, а страховая

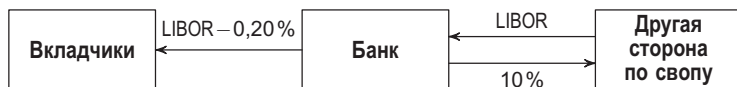


Рис. 21.10. Свопы процентной ставки для управления системой «активы/обязательства».

	Банк			Страховая компания		
	Ссуда	Своп	Суммарно	Инвестиции/ГИК	Своп	Суммарно
Приход	10 %	LIBOR	10 % + LIBOR	LIBOR + 1,5 %	8,4 %	9,9 % + LIBOR
Расход	LIBOR + 0,5 %	8,5 %	9 % + LIBOR	9 %	LIBOR	9 % + LIBOR
Спрэд			1 %			0,9 %

Рис. 21.11. Фиксация спреда с помощью свопов процентной ставки.

компания оплачивает ставку LIBOR и получает 8,4 % годовых каждые 6 месяцев. В результате деятельность банка и страховой компании каждые 6 месяцев характеризуют следующие денежные потоки, которые представлены в таблице на рис. 21.11. Тем самым, банку удастся зафиксировать спред в 100 базисных пунктов, какой бы ни оказалась 6-месячная ставка LIBOR. И аналогично, страховая компания фиксирует спред в 90 базисных пунктов.

Свопы процентной ставки подобно валютным свопам можно представить либо как пакет из денежных сумм от покупки и продажи рыночных инструментов в наличных, либо как пакет форвардных контрактов. Ниже предлагается анализ этих соображений при условии, что риск неплатежеспособности отсутствует.

Оценка стоимости свопа как пакета из рыночных инструментов в наличных. Предположим для упрощения анализа, что в конце жизни свопа противоположные стороны обмениваются условным номиналом в $\mathcal{N}$ долларов. Тогда легко видеть, что сторона, оплачивающая по фиксированной ставке занимает длинную позицию по облигации с плавающей ставкой и короткую позицию по облигации с фиксированной ставкой. Следовательно, стоимость свопа равна $P_2 - P_1$ с точки зрения стороны, оплачивающей по фиксированной ставке, если P_1 (P_2 , соответственно) представляет стоимость облигации с фиксированной (соответственно, с плавающей) ставкой, являющейся базовой для свопа. Ну а для стороны, оплачивающей по плавающей ставке, стоимость свопа равна $P_1 - P_2$. Как показано в п. 4.2.3, стоимость плавающей ноги следует оценивать по номиналу сразу же после даты выплаты, т.е. $P_2 = \mathcal{N}$, если ставка, используемая для дисконтирования будущего денежного потока, является плавающей ставкой, базовой для свопа. К примеру, для свопа из рис. 21.9 это была ставка LIBOR плюс 1 %. Поскольку своп при своем появлении имеет нулевую стоимость, то $P_1 = \mathcal{N}$.

Пусть выплаты по фиксированной ставке (каждая по C долларов) и по плавающей ставке делаются в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, начиная с настоящего момента. Тогда в соответствии с вышесказанным величина $P_1 = \sum_{i=1}^n C e^{-r_i t_i} + \mathcal{N} e^{-r_n t_n}$, где r_i представляет спот-ставку момента времени t_i . Что же касается облигации с плавающей ставкой, то $P_2 = (\mathcal{N} + C^*) e^{-r_1 t_1}$, где C^* — известная выплата с плавающей ставкой, которая должна быть сделана при следующей выплате в момент t_1 .

Пример 21.4.2. Одна сторона соглашается оплачивать 6-месячную ставку LIBOR плюс 1 % каждые 6 месяцев и получать (взамен) 9 % годовых, причем каждые 6 месяцев и от условного номинала в \$ 10 млн. Все ставки являются ставками полугодового начисления процентов. Предположим, что 6-месячная ставка LIBOR при последней выплате была равна 9 %. И остались еще две выплаты, через 0,3 и 0,8 года, причем ставки по которым эти выплаты будут дисконтироваться, являются ставками непрерывного начисления процентов, равными 10,1 % и 10,3 %, соответственно. По этим данным

$$P_1 = 0,45 \times e^{-0,101 \times 0,3} + 10,45 \times e^{-0,103 \times 0,8} = 10,0600 \text{ (млн.)},$$

$$P_2 = (10 + 0,5)e^{-0,101 \times 0,3} = 10,1866 \text{ (млн.)}.$$

Поэтому стоимость свопа для стороны, оплачивающей по фиксированной ставке, равна $P_2 - P_1 = 0,1266$ (млн.).

Дюрацию свопа процентной ставки с точки зрения стороны оплачивающей по фиксированной ставке, можно представить в виде

дюрация облигации с плавающей ставкой –

– дюрация облигации с фиксированной ставкой.

Чувствительность свопа к процентной ставке в основном определяется дюрацией облигации с фиксированной ставкой, поскольку дюрация облигации с плавающей ставкой меньше промежутка времени до следующей даты пересмотра (см. п. 4.2.3).

Сторона, которая занимает длинную позицию по облигации с плавающей ставкой и короткую по облигации с фиксированной ставкой теряет основную сумму и должна продолжать обслуживать свой долг с фиксированной ставкой, если организация, выпустившая банкноту с плавающей ставкой оказывается банкротом. И наоборот, сторона в свопе, оплачивающая по фиксированной ставке не обязана продолжать выплаты, если противоположная сторона не выполняет своих обязательств. Поэтому замечание, что своп эквивалентен портфелю из облигаций с плавающей и фиксированной ставками имеет место лишь при отсутствии риска неплатежеспособности.

Упражнение 21.4.2. Фирма покупает 3-летние облигации с плавающей ставкой номинала \$ 100 миллионов, по которым каждые 6 месяцев выплачивается 6-месячная ставка LIBOR плюс 0,5 %. Их выпуск финансируется займом в \$ 100 млн. на 3 года и под 10 % годовых, выплачиваемых каждые 6 месяцев. Покажите, что эти сделки образуют искусственный своп процентной ставки.

Оценка стоимости свопа как пакета соглашений о форвардной ставке.

Рассмотрим своп на условную основную сумму $\mathcal{N}$ долларов. И пусть выплаты по фиксированной ставке (по C долларов каждая) и по плавающей ставке (основанные на будущих ежегодных ставках $f_1, f_2, \dots, f_n$), делаются в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, если считать от настоящего момента. Ставка f_i становится известной в момент времени t_{i-1} . В момент t_i

C долларов обмениваются на сумму $(f_i/k) \times \mathcal{N}$, в которой $k \equiv 1/(t_i - t_{i-1})$ определяет частоту выплат в год, а f_i является ежегодной ставкой k -кратного начисления процентов (т.е. $k=2$ при полугодовых выплатах). Для стороны, оплачивающей по фиксированной ставке, этот своп по существу является форвардным контрактом на плавающую ставку, скажем, 6-месячную LIBOR, по которому она соглашается оплачивать C долларов в обмен на поставку 6-месячной ставки LIBOR. И аналогично, сторона, оплачивающая по плавающей ставке по сути занимает короткую позицию по форвардному контракту на 6-месячную ставку LIBOR. Поэтому своп процентной ставки эквивалентен пакету СФС.

В силу (12.7) стоимость форвардного контракта на поставку плавающей ставки равна $[(f_i/k)\mathcal{N} - C]e^{-r_i t_i}$ где r_i обозначает спот-ставку момента времени t_i , а f_i — форвардную ставку. ПЗ первого обмена в момент времени t_1 равно $(C^* - C)e^{-r_1 t_1}$, где C^* определяется по плавающей ставке, в настоящее время известной. Поэтому стоимость свопа для стороны, оплачивающей по фиксированной ставке, равна

$$(C^* - C)e^{-r_1 t_1} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{f_i}{k} \mathcal{N} - C \right) e^{-r_i t_i}. \quad (21.4)$$

Для стороны, оплачивающей по плавающей ставке, в этом выражении нужно просто изменить знак.

Пример 21.4.3. Рассмотрим своп между клиентом B и банком из рис. 21.9. Сторона B получает 6-месячную ставку LIBOR плюс 1% и оплачивает 9%. Все упомянутые ставки полугодового начисления процентов. Выплаты производятся каждые 6 месяцев и рассчитываются по условной основной сумме в \$10 млн. Предположим, что 6-месячная ставка LIBOR при последней выплате была равна 9%. И остаются еще две выплаты, через 0,3 и 0,8 года, причем соответствующие им ставки непрерывного начисления для их дисконтирования — 6-месячная LIBOR плюс 1% — равны 10,1% и 10,3%. Ежегодный эквивалент (непрерывного начисления) 6-месячной форвардной ставки, относящийся к моменту 0,3 года спустя, оказывается равным $(0,8 \times 0,103 - 0,3 \times 0,101)/(0,8 - 0,3) = 0,1042$. Эквивалентная ему ежегодная ставка двукратного начисления равна $2 \times (e^{0,1042/2} - 1) = 0,106962$. Поэтому стоимость свопа по формуле (21.4) равна

$$(0,5 - 0,45)e^{-0,101 \times 0,3} + \left(\frac{0,106962}{2} \times 10 - 0,45 \right) e^{-0,103 \times 0,8} = 0,1266 \text{ (млн.)}$$

в полном соответствии с примером 21.4.2. ◁

Поскольку формула (21.4) определяет стоимость произвольного свопа, она может выступать и в роли **стоимости замещения** для стороны, оплачивающей по фиксированной ставке. Другими словами, если оплачивающий по плавающей ставке выходит из свопа, то это именно та сумма, которую сторона с фиксированной ставкой может потребовать в качестве компенсации в ситуации, когда плавающую сторону можно заменить без увеличения фиксированной ставки. Пусть V означает стоимость замещения. Тогда ясно, что если $V < 0$, то противоположная сторона не откажется от выполнения обязательств по данному соглашению,

поскольку его можно продать с прибылью. Поэтому подверженность к риску можно записать в виде $\max(0, V)$.

Как и другие искусственные ЦБ, свопы процентной ставки нельзя считать лишними (в финансовой жизни), хотя их и можно продублировать с помощью форвардных контрактов. Несколько причин этого были указаны в [325]. Прежде всего, они предлагают более длинные сроки погашения, чем форвардные контракты. Во-вторых, операционные издержки у свопов процентной ставки меньше, чем у заменяющего их пакета форвардных контрактов, с которым связано большое число сделок. В-третьих, свопы процентной ставки более ликвидны, чем форвардные контракты, и в особенности долгосрочные форвардные контракты.

Упражнение 21.4.3. Используйте данные примера 21.4.3 для расчета фиксированной ставки, которая делает стоимость свопа нулевой.

Упражнение 21.4.4. Проверьте эквивалентность двух точек зрения на свопы процентной ставки.

Упражнение 21.4.5. Рассмотрим своп с нулевой стоимостью. Насколько большую авансовую премию должна заплатить сторона, оплачивающая по фиксированной ставке, чтобы снизить выплату по фиксированной ставке с величины C до $\hat{C}$?

Упражнение 21.4.6. Продублируйте свопы с помощью шапок и полов процентной ставки.

21.4.2 Другие свопы процентной ставки

Число различных типов свопов практически неограничено. **Отзывной своп** позволяет стороне, выплачивающей по фиксированной ставке, выйти из свопа без оплаты штрафных санкций и уйти от потерь при падении ставок. Премию можно погасить на протяжении срока жизни свопа. Стороне, оплачивающей по плавающей ставке, выйти из соглашения по свопу досрочно позволяет **откладываемый своп**. Инвестор может занять по свопам короткую позицию (**обратный своп**), чтобы оплачивать по плавающей ставке и получать по фиксированной. Эта стратегия оказывается выигрышной при падении процентных ставок и приводит к потерям при их росте. **Базисный своп** — это такой своп, в котором обе его ноги привязаны к двум различным плавающим ставкам. Базисный своп превращается в **своп кривой доходности**, если обе его ноги связаны с кратко- и долгосрочными процентными ставками, скажем, 6-месячной LIBOR и 10-летней доходностью Казначейства. Такой своп можно использовать для контроля за подверженностью к изменениям формы кривой доходности. В **отложенных свопах** (или **форвардных свопах**) стороны начинают обмениваться процентными выплатами лишь после некоторой фиксированной даты в будущем. В **растяжимом свопе** одна из сторон имеет право продлить жизнь свопа за оговоренный срок. Своп может быть соглашением по обмену фиксированной процентной ставки в одной валюте на плавающую ставку в другой, иными словами, быть комбинацией свопа процентной ставки «простая ваниль» и ва-

лютного свопа. В **амортизирующем свопе** основная сумма уменьшается таким образом, что это напоминает, скажем, схему погашения ссуды. В **разрастающемся свопе** основная сумма увеличивается в соответствии с определенным расписанием.

Упражнение 21.4.7. Одна фирма владеет корпоративными облигациями с большой дюрацией. И она использует свопы для создания искусственных активов с плавающей ставкой и привлекательным спрэдом по отношению к ставке LIBOR, а также для сокращения их срока жизни так, как это делала сторона A на рис. 21.9. Почему тот факт, что большинство корпоративных ЦБ являются отзывными, должен волновать фирму? И как отзывной своп может здесь помочь?

Свопционы. Свопцион является опционом, позволяющим войти в своп процентной ставки. Он почти всегда Европейского типа. Ставка по свопу и длительность свопа процентной ставки, измеряемая от даты истечения срока действия опциона, уточняются в контракте. Рынок обычно дает котировки по стороне свопа с фиксированной ставкой. Поэтому свопционы могут быть либо **получающими свопционами** (т.е. дающими право получать по фиксированной ставке и оплачивать по плавающей; называемые также **плавающая за фиксированную**), либо **оплачивающими свопционами** (предоставляющими право оплачивать по фиксированной ставке и получать по плавающей; они называются также **фиксированная за плавающую**). Покупатель получающего свопциона выигрывает при падении процентных ставок, а покупатель оплачивающего свопциона выгадывает при подъеме процентных ставок.

Пример 21.4.4. Одна фирма планирует выпустить через 1 год 5-летний заем под плавающую ставку и затем преобразовать его в ссуду под фиксированную ставку, используя свопы процентной ставки. Для фиксации пола ставки по свопу она покупает 1-летний свопцион для получения права обменять фиксированную ставку, скажем, 8 % годовых на плавающую ставку в промежутке времени в 5 лет, начинающемся через 1 год. Если фиксированная ставка по 5-летнему свопу через год окажется меньше 8 %, то фирма вступит в соглашение по свопу обычным образом. Однако, если она окажется больше 8 %, то фирма исполнит свой свопцион.

Своп процентной ставки «фиксированная за плавающую» можно рассматривать как соглашение по обмену облигации с фиксированной ставкой на облигацию с плавающей ставкой. В начале жизни свопа стоимость облигации с плавающей ставкой равняется основной сумме свопа. Следовательно, оплачивающий свопцион можно рассматривать как опцион для обмена облигации с фиксированной ставкой на основную сумму свопа, иными словами, как опцион пут на облигацию с фиксированной ставкой и основной суммой в качестве цены исполнения. Аналогично, получающий свопцион является опционом колл на облигацию с фиксированной ставкой и основной суммой в роли цены исполнения. Когда же при оценке стоимости свопционов используется модель Блэка, то базовым активом является форвардная ставка для свопа процентной ставки [844].

Упражнение 21.4.8. Докажите, что шапка стоит больше, чем в остальных такой же свопции.

Свопы с индексной амортизацией. Амортизирующие свопы, чья основная сумма уменьшается (амортизирует) при падении процентных ставок, называются **свопами с индексной амортизацией (СИА)**. При этом основная сумма уменьшается по специальному плану погашения, опирающемуся на текущую процентную ставку. График амортизации может и не использоваться вплоть до окончания некоторого «запирающего» периода времени. Поскольку величины предоплат по закладным при понижении процентных ставок обычно резко возрастают, то эти инструменты могут частично хеджировать риск предоплаты ЦБЗ [848].

С формальной точки зрения, пусть T срок жизни свопа с исходной основной суммой $\mathcal{N}$. И контракт предусматривает получение фиксированной ставки c и выплату плавающей ставки $r(t)$. Пусть запирающий период равен T^* годам, в течение которых основная сумма остается фиксированной и равной $\mathcal{N}$. Но при $t > T^*$ остающаяся непогашенной основная сумма момента t изменяется в соответствии с рекуррентным соотношением

$$\mathcal{N}_t = \mathcal{N}_{t-1}(1 - a_t),$$

в котором $\mathcal{N}_{T^*} = \mathcal{N}$ и a_t — величина амортизации. Тем самым величина $\mathcal{N}_t$ получается как значение $\mathcal{N}_{t-1}$, уменьшенное в соответствии с величиной a_t графика амортизации. А план амортизации может выглядеть следующим образом:

$$a_t = \begin{cases} 0, & \text{если } r(t) > k_0, \\ b_0, & \text{если } k_0 \geq r(t) > k_1, \\ b_1, & \text{если } k_1 \geq r(t) > k_2, \\ b_2, & \text{если } k_2 \geq r(t) > k_3, \\ b_3, & \text{если } k_3 \geq r(t) > k_4, \\ b_4, & \text{если } k_4 \geq r(t) > k_5, \\ 1, & \text{если } k_5 \geq r(t), \end{cases}$$

где $k_0 > k_1 > \dots > k_5$ и $b_0 < b_1 < \dots < b_4 < 1$ некоторые положительные постоянные. Приведенный график амортизации зависит от процентной ставки $r(t)$. Если ставка больше k_0 , то никакого уменьшения основной суммы не происходит и $a_t = 0$; если она попадает в интервал между k_0 и k_1 , то a_t оказывается равным b_0 и т. д.

Поступающая в момент t сумма по контракту СИА может быть записана в виде $[c - r(t - 1)]\mathcal{N}_{t-1}$ и становится она известной в момент $t - 1$. Ясно, что основная сумма $\mathcal{N}_j$ зависит от всей траектории процентной ставки до момента j , что превращает СИА в производный инструмент, зависящий от траектории процентной ставки. Эффективный алгоритм (по расчету его стоимости) будет представлен в задании по программированию 29.1.3.

Дифференциальные свопы. Дифференциальный своп — это своп процентной ставки, в котором процентные ставки двух ног привязаны

к разным валютам, а реальные процентные выплаты деноминируются в одной той же валюте по фиксированному обменному курсу. Например, рассмотрим своп с основанной на долларе процентной ставкой x и связанной с немецкой маркой процентной ставкой y . Оба потока платежей деноминируются (выражаются) в долларах США. Пусть обменный курс $\$/DEM$ фиксируется на уровне $\hat{s}$. Тогда договорная сумма сделки оказывается равной $(y\hat{s} - x)\mathcal{N}$ долларам. Ясно, что дифференциальные свопы представляют собой одну из разновидностей квантовых производных инструментов, а потому понятно, что они имеют другое название **квантовые свопы**.

Дополнительная литература

Если требуется больше информации по производным инструментам на процентную ставку, то материал по фьючерсам на процентную ставку можно найти в [95, 155, 325, 470, 746, 827, 837], по опционам на процентную ставку — в [397, 538], по свопам на процентную ставку — в [54, 369, 474, 514, 608, 746, 821], по СИА — в [449, 510, 792], и по дифференциальным свопам — в [873]. О дюрации фьючерсов на ОК идет речь в [554, 737]. О происхождении Евродолларов можно почитать в [95, с. 267]. Наконец, об оценке стоимости **свопов на обычную акцию** говорится в [175].

Примечания

1. Коэффициент перевода не зависит от существующих процентных ставок. Теоретически более правильный коэффициент конверсии должен быть равен отношению цены поставляемой облигации к цене 20-летней и 8 % купонной облигации, которые следует дисконтировать по существующим процентным ставкам. С регулярно обновляемыми на Чикагской бирже СВТ таблицами коэффициентов перевода можно познакомиться на странице

<http://www.cbot.com/ourproducts/financial/convbond.html>

2. Цены фьючерсов на облигации как правило меньше цен на облигационные форварды (см. упр. 12.3.3).

22 Подгонка временной структуры

Это наш старый и неискоренимый порок: думать, что вычислить — это все равно, что сделать открытие.

Йоганн Вольфганг Гёте (1749—1832),
Der Pantheist

Анализ случая фиксированного дохода начинается с кривой доходности. В этой главе дается обзор теории, посвященной **подбору временной структуры**, что означает получение кривой, представляющей кривую доходности, кривую спот-ставок, кривую форвардных ставок или дисконтирующую функцию. Построенная кривая должна в разумной степени хорошо соответствовать имеющимся данным и быть достаточно гладкой. А в роли данных могут выступать цены или доходности облигаций, причем они могут быть либо реальными, либо искусственными, скажем, предлагаемыми такими авторитетными фирмами, как Salomon Brothers (в настоящее время часть Citigroup).

22.1 Введение

Кривая доходности состоит из сотен точек. Поскольку облигации могут иметь различные характеристики в терминах налогообложения, отзываемости и т. д., то одному сроку погашения могут отвечать разные доходности. Данные по некоторым срокам погашения могут и вовсе отсутствовать. Эти две проблемы уже упоминались ранее в п. 5.3 под названием проблемы составных денежных потоков и проблемы неполноты данных. Как следствие, при построении по имеющимся данным непрерывной кривой требуется использовать как метод регрессии (для решения первой проблемы), так и линейную интерполяцию (для решения второй проблемы).

Функциональная форма кривой сначала выбирается, а уже затем ее параметры оцениваются по имеющимся данным на облигацию. Скажем, экспонента может использоваться в роли дисконтирующей функции, а полиномы — в качестве кривой спот-ставок [7, 317]. Получаемая кривая должна быть, кроме того, непрерывной или даже дифференцируемой, поскольку считается, что связь между сроком погашения и доходностью должна быть весьма гладкой. Хотя функциональные формы с большим числом параметров часто и описывают данные лучше, но они также могут с большой вероятностью **перекрывать** имеющиеся данные (т. е. делать их недостаточными для определения с их помощью параметров такой функции). Экономически обоснованную кривую, относительно хорошо представляющую данные, следует предпочесть невразумительной с экономической точки зрения кривой, но такой, которая подгоняет имеющиеся данные очень хорошо.

Теоретически не играет роли для какой именно из кривых мы подбираем аппроксимацию: для дисконтирующей функции $d(t)$, функции спот-ставок $s(t)$ или для кривой форвардных ставок $f(t)$. Все они несут одну и ту же информацию, поскольку при непрерывном начислении процентов

$$d(t) = e^{-ts(t)} = e^{-\int_0^t f(s) ds}, \quad f(t) = s(t) + ts'(t).$$

Следовательно, знания любой одной из них достаточно для получения двух других кривых. Однако действительность более сложна. Скажем, с точки зрения эмпирических данных можно сказать, что после подгонки наиболее гладкой оказывается дисконтирующая функция, затем идет кривая спот-ставок и лишь потом кривая форвардных ставок [848].

Использование доходностей разделенных ЦБ*) Казначейства для построения кривой спот-ставок, хотя и имеет смысл, но может ввести в заблуждение. Основной возможной проблемой здесь является налогообложение. Накопленные сложные проценты разделенной ЦБ облагаются налогом раз в год, превращая ее доходность в посленалоговую спот-ставку, если на рынке не доминируют инвесторы, освобожденные от уплаты налога. Ликвидность таких ценных бумаг также уступает ликвидности купонных ЦБ Казначейства. Наконец, разделенные Казначейские бумаги определенных сроков погашения могут привлекать инвесторов, желающих торговать доходностью для получения какой-то желаемой характеристики, связанной именно с этим сектором сроков погашения [326, 653]. Это может произойти при построении специальных портфелей, предназначенных для иммунизации.

Налоги являются общей проблемой, характерной не только для разделенных ЦБ. Предположим, что накопленная прибыль облагается налогом в меньшей степени, чем купонный доход. Тогда облигация, продаваемая со скидкой, к моменту погашения будет иметь накопленную прибыль и потому должна иметь меньшую доходность до погашения, чем подобная облигация, продаваемая по номиналу, чтобы привести к сравнимым доходам с учетом налогов [568]. И как следствие обе эти облигации будут иметь различные доходности до погашения. В этом и проявляется эффект купона.

Упражнение 22.1.1. Проверьте справедливость соотношения между $s(t)$ и $d(t)$, приведенного выше.

22.2 Линейная интерполяция

Простым способом подбора, позволяющим справиться с проблемой неполноты, является **линейная интерполяция доходности** [335]. В этом подходе начинают с получения списка по-преимуществу таких

*) Разделенными ЦБ Казначейства (stripped Treasury securities) называются ЦБ, которые делятся на две естественные части: периодические процентные платежи и погашение. Каждая из процентных выплат и возвращаемая основная сумма отделяются фирмой-брокером друг от друга и продаются независимо в качестве бескупонных ЦБ. Тем самым инвесторы при покупке бескупонных ЦБ получают более широкий ассортимент сроков погашения. — Прим. перев.

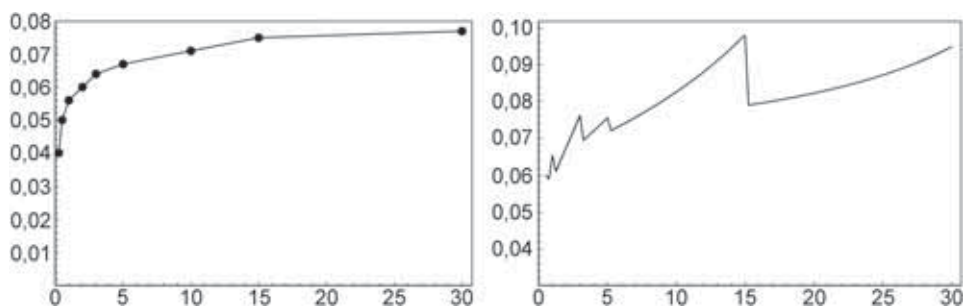


Рис. 22.1. Линейная интерполяция кривой доходности и кривой форвардных ставок. Линейно проинтерполированная кривая номинальной доходности находится слева, а соответствующая кривая форвардных ставок — справа.

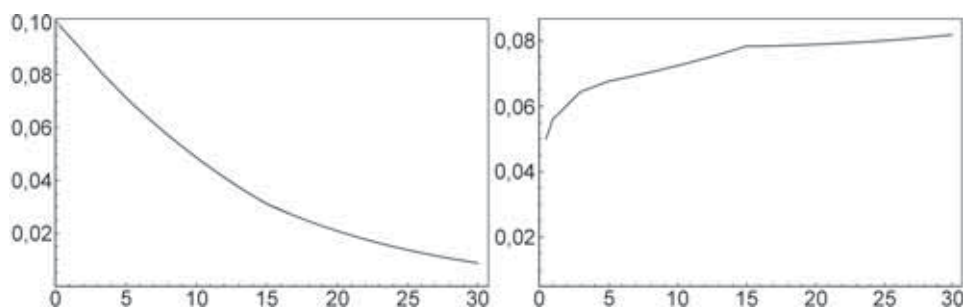


Рис. 22.2. Дисконтирующая функция и кривая спот-ставок. Изображены дисконтирующая функция и кривая спот-ставок, определенные с помощью линейной интерполяции по кривой номинальной доходности из рис. 22.1.

облигаций, которые продаются почти по номиналу и цены которых являются доступными и точными. Обычно такому критерию удовлетворяют лишь действующие выпуски¹. А строить кривую доходности в нем предполагается, соединяя имеющиеся доходности прямыми линиями (см. рис. 22.1 и 22.2). Сама же кривая доходности не содержит достаточно информации для получения спот-ставок и значит, по этой же причине, дисконтирующих множителей и форвардных ставок. Но для кривой номинальной доходности эта проблема не существует, поскольку доходность облигации, продаваемой по номиналу, совпадает с купонной ставкой.

Кривую спот-ставок, получаемую по линейно интерполированной кривой доходности с точки зрения формы обычно трудно признать удовлетворительной. Например, она может содержать выпуклые сегменты. Кривая форвардных ставок также ведет себя плохо: она чрезвычайно ухабиста, каждый горб соответствует конкретной облигации из множества данных и она может быть выпуклой там, где должна быть вогнутой [848]. Но несмотря на эти оговорки, статистические свойства у этой схемы лучше, чем у многих других [90].

Другая, но связанная с рассмотренной схема исходит из того наблюдения, что дисконтирующая функция экспоненциальна по своей природе.

дюрации [90, 147]. С вычислительной точки зрения в этом случае приходим к проблеме взвешенных НК. Если какие-то несколько облигаций слишком сильно влияют на конечный результат, то в качестве целевой функции можно выбрать и минимальное абсолютное отклонение. Наконец, мы можем дополнительно ввести условия $d(1) \geq d(2) \geq \dots \geq d(n) > 0$ (см. упр. 8.1.1) и с вычислительной точки зрения придем к проблеме оптимизации квадратической целевой функции при линейных ограничениях — т.е. к решению **задачи квадратичного программирования** [153].

Разобраться с налогами можно следующим образом. Для каждой купонной облигации вычтем налоговую ставку из купонной. Для каждой дисконтной облигации уменьшим выплату-погашение основной суммы на величину НДС (налога на добавленную стоимость). Для каждой облигации, продаваемой с премией предположим, что потери будут погашаться линейно на протяжении всей ее жизни. Для каждой бескупонной облигации будем рассматривать подоходный налог на проценты, которые могли быть начислены в каждом периоде, как отрицательный денежный поток. Наконец, чтобы получить дисконтирующую функцию с учетом взятых налогов, применим используемую методологию к денежному потоку, измененным соответствующим образом [652].

Схема множественной регрессии (22.2) называется схемой МакКаллоха. Но ясно, что возможны как другие функциональные формы, так и другие искомые кривые [653]. К примеру, схема Брэдли—Крейна имеет форму $\ln(1 + S(n)) = a + b_1 n + b_2 \ln n + \varepsilon_n$ с тремя параметрами a , b_1 , и b_2 . Слагаемое ε , как и обычно, представляет ошибку. В качестве еще одного примера упомянем схему Эллиотта—Эчолса, использующую равенства $\ln(1 + S(n_i)) = a + b_1/n_i + b_2 n_i + c_3 C_i + \varepsilon_i$, в которых n_i — срок до погашения i -й купонной облигации. Такое явное использование купонных ставок имеет целью учесть влияние купона на доходности, связанное с налоговыми соображениями. Обе приведенные схемы предназначены для получения кривой спот-ставок. Иллюстрацию к обеим схемам см. на рис. 22.3.

Подгонка временной структуры может определяться также выбором модели. Предположим, что для описания динамики процентной ставки мы выбираем модель Мертона. Из этого будет следовать, что кривая

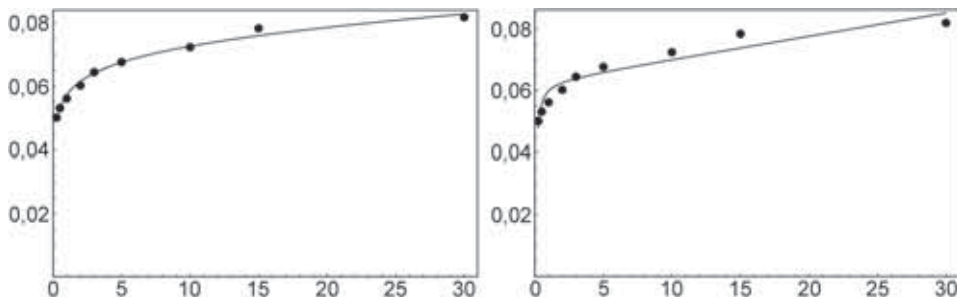


Рис. 22.3. Схемы Брэдли—Крейна и Эллиотта—Эчолса. Схема Брэдли—Крейна слева, а Эллиотта—Эчолса справа, в ней $C_i = 0$.

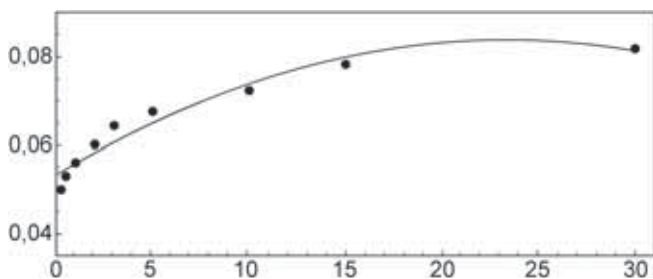


Рис. 22.4. Полиномиальная регрессия.

спот-ставок является полиномом второй степени вида $r + (\mu/2)t - (\sigma^2/6)t^2$ (см. рис. 22.4). В этом случае параметры модели Мертона — μ и σ — определяются с помощью регрессии [256, 511].

Упражнение 22.3.1. Покажите как сделать квадратичную функцию $d(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ соответствующей дисконтирующим множителям, используя многомерную регрессию.

Упражнение 22.3.2. Предположим, что мы хотим описать имеющиеся данные экспоненциальной кривой $y = ae^{bx}$, но имеем лишь программу использования линейной регрессии. Как следует поступить?

22.4 Сплаины

Схема НК МакКаллоха, в отличие от схем Брэдли—Крейна и Эллиотта—Эчолса, не может справиться с проблемой неполноты, не накладывая дополнительных ограничений. Одно из предложений состоит в том, чтобы рассматривать функцию $d(i)$ как линейную комбинацию из некоторых заранее выбранных функций:

$$d(i) = 1 + \sum_{j=1}^l a_j f_j(i), \quad 1 \leq i \leq m; \quad (22.3)$$

здесь $f_j(i)$, $1 \leq j \leq l$, некоторые известные функции срока погашения i , а величины $a_1, a_2, \dots, a_l$ являются параметрами, которые следует оценить [652]. Поскольку $P(0) = 1$, то $f_j(0)$ равны нулю при всех j . Если равенства (22.3) подставим в соотношения (22.2), то получим следующую переопределенную систему:

$$P_i - 1 - C_i n_i = \sum_{k=1}^l a_k \left[f_k(n_i) + C_i \sum_{j=1}^{n_i} f_k(j) \right], \quad 1 \leq i \leq m. \quad (22.4)$$

В ней окажется лишь l неизвестных коэффициентов, а не n .

Существует немало возможностей для выбора базисных функций $f_j(\cdot)$. Например, полагая $f_j(x) = x^j$ мы превращаем дисконтирующую функцию в сумму полиномов. В этом случае проблема сводится к полиномиальной регрессии и решается по методу НК (см. пример 19.2.1). Мак Каллох предположил, что дисконтирующая функция должна быть кубическим сплайном [652]. Он также рекомендовал выбирать точки

разбиения так, чтобы каждый подинтервал содержал равное число дат погашения. Этот подход, вероятно, наиболее известен.

Упражнение 22.4.1. Проверьте справедливость равенств (22.4).

Упражнение 22.4.2. Мотивируйте следующие утверждения, предполагая, что начисление процентов непрерывное.

1) Если кривая форвардных ставок должна быть непрерывной функцией, то квадратичный сплайн будет сплайном наименьшего порядка, который может описать дисконтирующую функцию.

2) Если кривая форвардных ставок должна быть непрерывно дифференцируемой функцией, то минимальный порядок сплайна для тех же целей будет кубическим.

22.5 Схема Нельсона—Зигеля

Форма записи функции, которая зависит лишь от нескольких параметров, имеет очевидные преимущества. Схемы Брэдли—Крейна, Эллиотта—Эчолса и полиномиальная как раз и относятся к этой категории функций. Однако, схема с кубическими сплайнами выпадает из нее. Еще одна ее проблема, разделяемая многими другими функциями состоит в том, что данная функция стремится резко изогнуться в конце диапазона сроков погашения. Это свойство не представляется отражающим истинный вид кривой доходности и позволяет предположить, что прогнозы вне диапазона выборочных сроков погашения вызывают опасения [800, 801]. Наконец, схема с использованием сплайнов сталкивается с трудностями при намерении получить хорошую кривую форвардных ставок [352].

Но хорошая кривая форвардных ставок имеет большое значение, поскольку многие важные модели процентных ставок основываются на форвардных ставках. Нельсон и Зигель для получения кривой форвардных ставок предложили весьма экономную схему [695]. И эта схема является наиболее известной из семейства гладких кривых форвардных ставок [77, 133]. Пусть кривая мгновенных форвардных ставок описывается выражением

$$f(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\tau/\alpha} + \beta_2 \frac{\tau}{\alpha} e^{-\tau/\alpha},$$

в котором α постоянная (все ставки непрерывного начисления процентов). Ее цель сводится к тому, чтобы обеспечить возможность измерять величину кратко-, средне- и долгосрочной компонент у кривой форвардных ставок. А точнее говоря, вклад долгосрочной компоненты представляется величиной β_0 , краткосрочной — β_1 , а среднесрочной — β_2 . С ее помощью мы сможем определить четверку параметров $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha)$, которые минимизируют ошибку в среднеквадратическом смысле между f и выборочными данными (см. рис. 22.5). Ну а кривая спот-ставок определяется выражением

$$S(\tau) = \frac{\int_0^\tau f(s) ds}{\tau} = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-\tau/\alpha}) \frac{\alpha}{\tau} - \beta_2 e^{-\tau/\alpha},$$

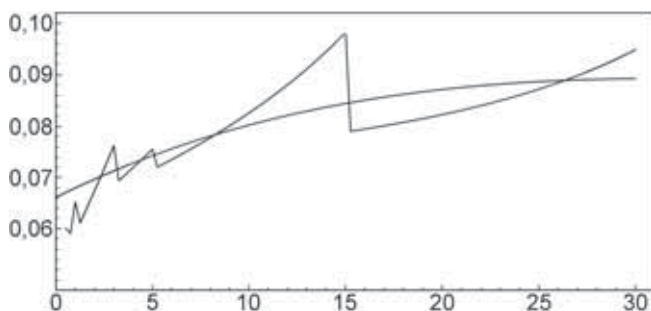


Рис. 22.5. Схема Нельсона—Зигеля. Кривая форвардных ставок на рис. 22.1 (повторенная здесь) сглаживается с помощью схемы Нельсона—Зигеля.

которое при данном α является линейным относительно коэффициентов. Обе вышеуказанные кривые, как форвардных ставок, так и спот-ставок, сходятся к постоянной, имеющей определенный смысл. Все другие функциональные выражения, с которыми мы познакомились выше, принимают неограниченно большие значения с правой стороны кривой доходности. Но, с другой стороны, схема Нельсона—Зигеля не исключает того, что форвардные ставки окажутся отрицательными.

Дополнительная литература

В действительности мы имеем котировки как спроса, так и предложения. Но иногда для построения кривой (доходности) используются котировки спроса, в других случаях предпочитают усреднять цены спроса и предложения. В некоторых схемах ошибку подбора считают нулевой до тех пор, пока подбираемые значения лежат в интервале спроса и предложения [90]. О моделировании временной структуры в Японии можно почитать в [551]. Поскольку сплайны составлены из нескольких кусков полиномов, они представляются малопригодными для моделирования дисконтирующей функции, которая по своей природе является экспоненциальной. Пытаясь разрешить это противоречие, Фонг и Васичек предложили **экспоненциальные сплайны** [856], но полученные с их помощью результаты представляются мало отличающимися от того, что дают полиномиальные сплайны [801]. В [171] для подбора каждой спот-ставки предлагается использовать полиномы, причем со степенями, определенными опытным путем. О других идеях по сглаживанию данных можно почитать в [39, 219, 352, 609, 801], а об использовании линейного программирования для получения кривой спот-ставок — в [135]. Многие схемы сглаживания сравниваются в [90].

Примечание

1. Однако и существующие облигации могут быть переоценены по самым разным причинам [890].

23 Введение в моделирование временной структуры

Насколько велика та часть наших теорий, которая действительно хорошо описывает природу вещей, и насколько многое в этих теориях говорит лишь о нас самих?

Артур Эддингтон (1882—1944)

Высокая волатильность процентных ставок, и в особенности начиная с 6 октября 1979 г. [401], подтолкнула к созданию стохастических моделей процентной ставки. Но такие модели требуются и в управлении рисками, связанными с процентной ставкой у ЦБ с денежными потоками, чувствительными к изменениям процентной ставки. В этой главе стохастическое моделирование временной структуры исследуется с помощью **биномиального дерева процентной ставки** [779]. Хотя и очень простая сама по себе, эта модель иллюстрирует большую часть основополагающих идей, лежащих в основании будущих моделей. Ее приложения также являются общими в том смысле, что связанные с ней методологии оценки стоимости и хеджирования можно легко приспособить к другим моделям. Хотя основная идея и похожа на ту, которая ранее использовалась при оценке стоимости опционов, настоящая задача усложняется двумя обстоятельствами. Во-первых, требуется моделировать эволюцию всей временной структуры, а не только изменение цены одной акции. И, во-вторых, процентные ставки различных сроков погашения не могут изменяться произвольно, поскольку в противном случае может возникнуть арбитражная прибыль. Вообще же большое число моделей процентной ставки резко контрастирует с единственной и доминирующей моделью Блэка и Шоулса, используемой для оценки стоимости опционов.

23.1 Введение

Стохастическая модель процентной ставки преследует две задачи. Во-первых, она предлагает случайный процесс, который определяет будущую временную структуру. И этот процесс должен также препятствовать возникновению арбитражной прибыли. Во-вторых, модель должна быть «совместимой» с реально наблюдаемой временной структурой [457]. Работа Мертона 1970 г. положила начало моделированию временной структуры в рамках методологии непрерывного времени [493, 660]. Эта стохастическая теория дополняет традиционные теории временной структуры в том, что все они — теория несмещенного оценивания, теория предпочтения ликвидности и теория сегментации рынка — могут быть легко согласованы с ней введением соответствующих предположений о случайном процессе [653].

Зарождение современного моделирования процентных ставок часто относят к 1977 г., когда Васичек и Кокс, Ингерсолл и Росс одновременно создали свои модели, имеющие и теперь важное значение [183, 234, 855]. У первых моделей были проблемы со сглаживанием данных, поскольку результирующие процессы могли не совсем корректно оценивать стоимость существующих основных вариантов облигаций. Альтернативный подход, впервые предложенный Хо и Ли в 1986 г., превращает процесс получения кривой рыночной доходности в обязательный ритуал [458]. Модели, основанные на подобной идее, обычно называются **безарбитражными моделями** или моделями, **свободными от арбитража** [482]. Альтернативными для них являются **равновесные модели** и модели Блэка—Шоулса, разговор о которых пойдет в других главах.

Упражнение 23.1.1. Рыночная цена безрисковой ЦБ с денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$ равна величине $\sum_{i=1}^n C_i d(i)$. Дисконтирующий множитель $d(i)$ обозначает здесь ПЗ стоимости в \$1, отнесенной к моменту времени i , на настоящий момент. Остается ли эта формула в силе, если денежный поток зависит от процентных ставок?

Упражнение 23.1.2. Пусть i_t обозначает процентную ставку периода между моментами времени $t-1$ и t . Предположим, что с.в. $1+i_t$ имеет логнормальное распределение, т.е. $\ln(1+i_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- 1) Какая с.в. тогда представляет стоимость в \$1 через n периодов?
- 2) И каковы ее распределение, среднее и дисперсия?

23.2 Биномиальное дерево процентной ставки

Нашей целью в этом параграфе будет построение безарбитражного дерева процентной ставки, совместимого с наблюдаемой временной структурой, и в особенности с доходностями и/или волатильностями доходностей бескупонных облигаций всех сроков погашения. Процедура эта называется **калибровкой**. Мы используем модель биномиального дерева, в которой логарифм будущей краткосрочной ставки подчиняется биномиальному распределению. Предельное распределение краткосрочной ставки на любой момент времени в будущем поэтому является логнормальным. Биномиальное дерево будущих процентных ставок строится в биномиальном процессе процентной ставки. В нем каждая краткосрочная ставка, действующая в данном периоде, будет заменена на одно из двух возможных значений краткосрочной ставки следующего периода. На рис. 23.1 узел A совпадает с началом периода j , в течение которого и действует ставка r . В момент окончания периода j в силу входит ставка нового периода $j+1$. И она может принять одно из двух возможных значений: r_l , «низкое» значение краткосрочной ставки-исхода в узле B и r_h , «высокое» значение краткосрочной ставки-исхода в узле C . При этом каждая из возможностей в риск-нейтральной экономике может реализоваться с 50 % вероятностью.

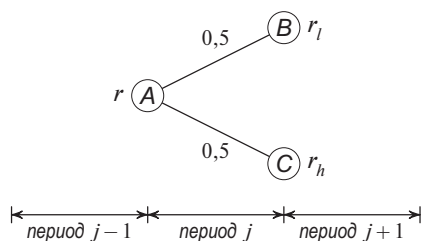


Рис. 23.1. Биномиальный процесс процентной ставки. В узле A у краткосрочной ставки есть два равновероятных сценария: принять значения r_l или r_h . Ставка r относится к узлу A и действует в периоде j . Ставки r_l и r_h относятся к узлам B и C , соответственно, и действуют в периоде $j+1$.

Мы требуем, чтобы при развертывании биномиального процесса траектории совпадали. Предположим, что краткосрочная ставка r , действующая в некотором периоде длины Δt^1 , меняется на случайную ставку $\bar{r}$, действующую в следующем периоде такой же длины и принимающую два значения, r_h или r_l с равными риск-нейтральными вероятностями $1/2$. Тогда ежегодная волатильность с.в. $\ln \bar{r}$ (т.е. корень из отношения ее дисперсии к периоду времени Δt) равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \ln \left(\frac{r_h}{r_l} \right)$$

(см. упр. 23.2.3 (1)). Подчеркнем, что указанная выше σ имеет смысл именно ежегодной волатильности, хотя ставки r_l и r_h относятся к периоду. Поскольку

$$\frac{r_h}{r_l} = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (23.1)$$

то большая волатильность, а значит, неопределенность, ведет к большим значениям отношения r_h/r_l и большому диапазону возможных краткосрочных ставок. Это отношение r_h/r_l может меняться со временем, если волатильность зависит от времени. Заметим, что величина r_h/r_l ничего общего не имеет с текущей краткосрочной ставкой r , если σ не зависит от r . Волатильность краткосрочной ставки за предстоящий период приблизительно равна $r\sigma$ (см. упр. 23.2.3 (2)).

Вообще говоря, ставка периода j может принимать какое-то одно из следующих j возможных значений:

$$r_j, \quad r_j v_j, \quad r_j v_j^2, \quad \dots, \quad r_j v_j^{j-1};$$

в них величина

$$v_j \equiv e^{2\sigma_j \sqrt{\Delta t}} \quad (23.2)$$

является отношением-множителем для ставок периода j (и аналогом величины r_h/r_l ; см. рис. 23.2). Величины r_j мы называем **ставками основной линии**. Индекс j у σ_j должен подчеркнуть, что волатильность краткосрочной ставки может зависеть от времени. В пределе краткосрочная ставка описывается следующим процессом:

$$r(t) = \mu(t) e^{\sigma(t)W(t)}, \quad (23.3)$$

в котором волатильность краткосрочной ставки $\sigma(t)$ (в процентах) является детерминированной функцией времени (напоминаем, что $\mu(t)$

является сносом, а $\sigma(t)$ диффузией некоторого процесса Ито $dX = \mu(t) dt + \sigma(t) dW(t)$). Поскольку ожидаемое значение с.в. $r(t)$ равно $\mu(t)e^{\sigma(t)^2 t/2}$, то обычно накладывается условие, что волатильность краткосрочной ставки убывает, чтобы избежать неоправданно высоких значений у ставок. В частности, этим же объясняется и свойство возвращения к исходному состоянию в среднем, которое имеется у биномиального дерева процентной ставки.

Одним из бросающихся в глаза свойств дерева является независимость от траектории: временная структура в любом узле не зависит от траектории, которая привела к нему. И его приятным следствием является вывод: чтобы закодировать все дерево в памяти компьютера следует хранить только ставки основной линии r_i и отношения-множители v_i . А это требует от памяти лишь объема $O(n)$ (на протяжении всей этой главы n будет обозначать глубину дерева, т.е. число используемых периодов). Наивный подход, при котором хранятся все элементы дерева, потребовал бы объема памяти $O(n^2)$. А это могло бы означать, что с большими деревьями нельзя работать. Так, при моделировании дневных движений процентной ставки на протяжении 30 лет придется хранить в памяти набор из примерно $(30 \times 365)^2/2 \approx 6 \times 10^7$ чисел с плавающей запятой и двойной точностью. И если для записи каждого числа потребуется 8 байт, то весь набор займет около половины гигабайта!

При использовании абстрактного процесса конкретными числами, которые приводят его в действие, являются превращенные в ежегодные доходности, связанные с различными безрисковыми облигациями, по которым строится образцовая кривая доходности, и их волатильности. В Соединенных Штатах, например, в качестве образцовой кривой доходности может использоваться действующая кривая доходности, полученная с помощью самых последних выпусков ЦБ Казначейства. **Временная структура волатильности (доходностей)** или просто **(временная) структура волатильности** может быть оценена либо по прошлым данным (историческая волатильность), либо по ценам опционов на процентную ставку,

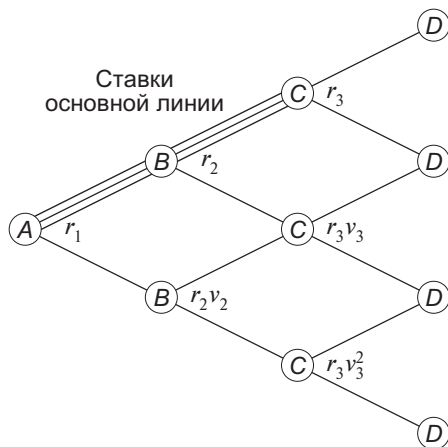


Рис. 23.2. Биномиальное дерево процентной ставки. Последовательность, относящаяся к каждому моменту времени показывает, что распределение краткосрочной ставки будет сходиться к логнормальному распределению.

таким как ценам шапок (индуцированная волатильность) [149, 880]. Биномиальное же дерево должно быть совместимым с обеими временными структурами. Но в этой главе мы концентрируем свое внимание на временной структуре процентных ставок, откладывая разговор о структуре волатильности до п. 26.3.

С целью экономии места все числа в алгоритмах относятся к периоду, если не оговаривается противное, и при всяком их использовании не нужно переходить к их ежегодным эквивалентам. В случае волатильности связь тривиальна: $\sigma(\text{периода}) = \sigma(\text{годовая}) \times \sqrt{\Delta t}$. Что же касается процентных ставок, то обратитесь к п. 3.1.

Альтернативным процессом, обладающим таким же свойством независимости от траектории, является следующая арифметическая прогрессия из краткосрочных ставок периода j :

$$r_j, \quad r_j + v_j, \quad r_j + 2v_j, \quad \dots, \quad r_j + (j-1)v_j.$$

Эту модель биномиального дерева предложили Хо и Ли [458]. В случае, когда предполагается, что j возможных значений ставок периода j равны

$$ru^{j-1}, \quad ru^{j-2}d, \quad \dots, \quad rd^{j-1}$$

при некоторых общих значениях u и d , то параметрами являются u , d и, возможно, переходные вероятности. Эта экономная модель принадлежит Рэндельману и Бартеру [739].

Упражнение 23.2.1. Проверьте, что дисперсия с.в. $\ln \bar{r}$ в k -м периоде равна $\sigma_k^2(k-1)\Delta t$ (в соответствии с равенством (23.3) дисперсия $\ln r(t)$ в случае непрерывного времени в пределе равна $\sigma(t)^2 t$).

Упражнение 23.2.2. Рассмотрим модель краткосрочной ставки, в которой из текущей ставки r возникают два равновероятных варианта краткосрочной ставки $re^{\mu+\sigma\sqrt{\Delta t}}$ и $re^{\mu-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, где μ может зависеть от времени. Проверьте, что эта модель может вытекать из биномиального дерева процентной ставки в случае, когда все волатильности σ_j равны некоторой постоянной σ (параметр μ меняется со временем, чтобы иметь возможность подобрать нужную временную структуру).

Упражнение 23.2.3. Предположим, что вероятность перехода от r к r_l равна $1-q$, а к $r_h = q$, т.е. $P\{\bar{r}=r_l\}=1-q$, а $P\{\bar{r}=r_h\}=q$. Будем считать также, что длина периода равна Δt .

1) Покажите, что дисперсия с.в. $\ln \bar{r}$ равна $q(1-q)(\ln r_h - \ln r_l)^2$.

2) Поэтому, если определить σ^2 как отношение вышеуказанной величины к Δt , то вместо (23.1) получим равенство

$$\frac{r_h}{r_l} = \exp \left[\sigma \sqrt{\frac{\Delta t}{q(1-q)}} \right].$$

А затем докажете, что дисперсия величины $\bar{r}$ приближенно равна $r^2 \sigma^2 \Delta t$.

23.2.1 Временная структура и ее динамика

При наличии биномиального дерева процентной ставки «под рукой» модельная цена ЦБ может быть получена по методу обратной индукции. Вернемся к рис. 23.1. При условии, что цены в узлах *B* и *C* равны P_B и P_C , соответственно, цена в узле *A* оказывается равной

$$\frac{P_B + P_C}{2(1 + r)} + \text{сумма в узле } A.$$

Для экономии компьютерной памяти мы вычисляем значения цен столбец за столбцом не раскрывая явно биномиальное дерево процентной ставки (см. иллюстрацию этих соображений на рис. 23.3). На рис. 23.4 приведен алгоритм для определения цены ЦБ с фиксированным денеж-

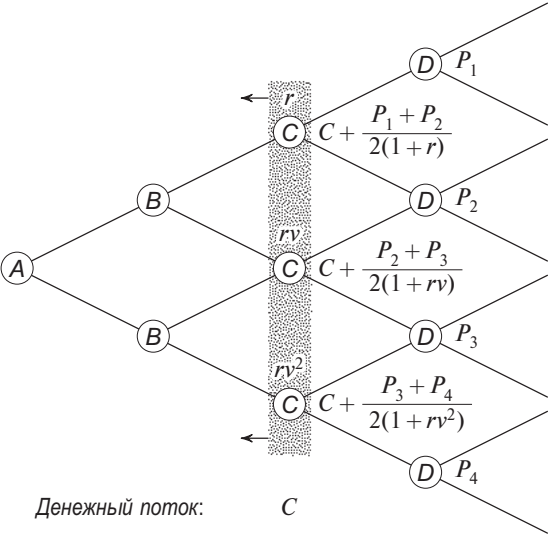


Рис. 23.3. Для расчета модельной цены передвигайте линию по времени в обратном направлении.

Алгоритм для определения модельной цены с помощью биномиального дерева процентной ставки:

```
ввод:  $m, n, r[1..n], C[0..n], v[1..n]$ ; //  $m \leq n$   
действительные числа  $P[1..m+1]$ ;  
целые  $i, j$ ;  
для ( $i = 1$  до  $m + 1$ ) {  $P[i] := C[m]$ ; } // Инициализация  
для ( $i = m$  вниз до 1) { // Обратная индукция  
  для ( $j = 1$  до  $i$ ) {  $P[j] := C[i - 1] + 0,5 \times (P[j] + P[j + 1]) / (1 + r[i] \times v[i]^{j-1})$ ; }  
}  
вывод  $P[1]$ ;
```

Рис. 23.4. Алгоритм для определения модельной цены. Величина $C[i]$ представляет денежную сумму, относящуюся к моменту i или к концу i -го периода, $r[i]$ является ставкой основной линии, $v[i]$ — отношение — множитель для ставок периода i , а n обозначает число периодов. Набор P хранит ПЗ в каждом узле. Все числа относятся к периоду.

Период	1	2	3
Спот-ставка (%)	4	4,2	4,3
Однопериодная форвардная ставка (%)	4	4,4	4,5
Дисконтирующий множитель	0,96154	0,92101	0,88135

Рис. 23.5. Выборочная временная структура.

ным потоком, квадратичный по времени и линейный по памяти. Но ту же идею можно применить и к модели любого дерева.

Мы сможем рассчитать цену n -периодной бескупонной облигации, приписывая \$1 каждому узлу момента n и затем используя обратную индукцию. Повторяя эту операцию при каждом $n = 1, 2, \dots$ мы получим рыночную дисконтирующую функцию, индуцированную рассмотренным деревом. Следовательно, дерево определяет временную структуру. Более того, оно содержит в себе **эволюцию временной структуры** или ее **динамику**, поскольку рассмотрение любого узла в качестве текущего фактически задает (меньшее) биномиальное дерево процентной ставки, и, следовательно, временную структуру. Дерево, таким образом, определяет, как вся временная структура меняется со временем.

Замечание 23.2.1. Предположим, что узнать m -периодную спот-ставку момента времени n мы хотим для того, чтобы оценить стоимость ЦБ, выплата по которой связана с этой ставкой. Дерево тогда следует построить вплоть до момента $n + m$, чтобы получить указанную ставку момента n со всеми вытекающими характеристиками. Позже в п. 25.2.1 мы познакомимся со случаями, в которых дерево придется строить только на протяжении жизни производного инструмента (n периодов), а не жизни базового актива ($n + m$ периодов). $\triangleleft$

Мы будем строить деревья процентной ставки, совместимые с выборочной временной структурой из таблицы на рис. 23.5. И если дойдет до числовых расчетов, то будем предполагать, что волатильность краткосрочной ставки такова, что $v \equiv r_h/r_l = 1,5$, независимо от времени.

Схема приближенной калибровки. Схема, которая сама по себе напращивается, начинается с индуцированных однопериодных форвардных ставок и затем приравнивает форвардную ставку к математическому ожиданию краткосрочной ставки. Это наверняка работает в детерминированной экономике (см. упр. 5.6.6). Для первого периода форвардная ставка является однопериодной спот-ставкой на сегодня. Вообще же пусть f_j обозначает форвардную ставку периода j . Сама эта форвардная ставка может быть получена из рыночной дисконтирующей функции с помощью выражения $f_j = [d(j)/d(j+1)] - 1$ (см. упр. 5.6.3). Поскольку j -я краткосрочная ставка принимает свое i -е возможное значение с вероятностью $2^{-(j-1)} \binom{j-1}{i-1}$, $1 \leq i \leq j$, то предлагаемый подход приводит

к равенству $\sum_{i=1}^j 2^{-(j-1)} \binom{j-1}{i-1} r_j v_j^{i-1} = f_j$ и, следовательно,

$$r_j = \left(\frac{2}{1+v_j} \right)^{j-1} f_j. \quad (23.4)$$

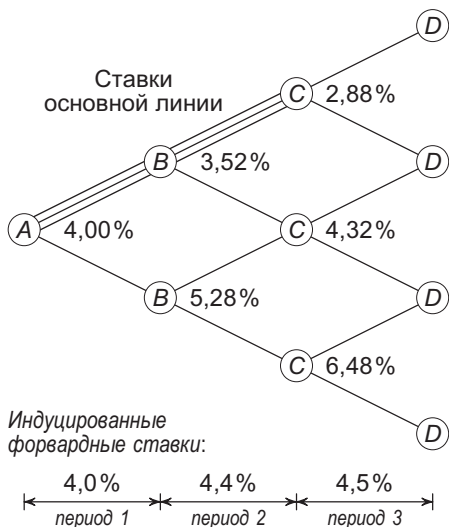


Рис. 23.6. Биномиальное дерево процентной ставки, опирающееся на теорию несмещенного оценивания.

Построить биномиальное дерево процентной ставки, таким образом, не представляет труда.

Получающееся в результате дерево для выборочной временной структуры показано на рис. 23.6. Например, цена бескупонной облигации, по которой \$ 1 выплачивается в конце третьего периода равна

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{1,04} \times \left[\frac{1}{1,0352} \times \left(\frac{1}{1,0288} + \frac{1}{1,0432} \right) + \frac{1}{1,0528} \times \left(\frac{1}{1,0432} + \frac{1}{1,0648} \right) \right] = 0,88155, \quad (23.5)$$

что очень близко, хотя и слегка превышает его, к значению дисконтирующего фактора 0,88135. Таким образом, дерево можно считать неоткалиброванным. В действительности, такое смещение ему свойственно.

Теорема 23.2.2. Биномиальное дерево процентной ставки, построенное с помощью равенства (23.4), переоценивает цены образцовых ЦБ при заданных волатильностях. Причем такой вывод не зависит от того, угадана ли структура волатильности.

Из теоремы 23.2.2 вытекает, что в случае биномиального дерева процентной ставки, математическое ожидание будущей спот-ставки превосходит форвардную ставку. Если, как и всегда, в качестве платежного средства мы явно выбираем счет на денежном рынке. Но в п. 13.2.1 было показано, что изменение платежного средства меняет риск-нейтральную вероятностную меру. И в самом деле, существует платежное средство, при котором форвардная ставка равняется математическому ожиданию будущей спот-ставки (см. упр. 23.2.5 (1)).

Упражнение 23.2.4. Докажите теорему 23.2.2

- 1) для двухпериодных бескупонных облигаций и
- 2) в ее общем виде.

Упражнение 23.2.5. Зафиксируем период.

1) Покажите, что форвардная ставка этого периода равна математическому ожиданию будущей спот-ставки по некоторой риск-нейтральной вероятностной мере.

2) Покажите далее, что указанная форвардная ставка является мартингалом (указание: см. упр. 13.2.13).

23.2.2 Калибровка биномиальных деревьев процентной ставки

В высшей степени важно, чтобы модельные цены, полученные с помощью биномиального дерева процентной ставки хорошо отражали наблюдаемые рыночные цены. Это обстоятельство вполне можно принять за решающий момент построения модели. Чтобы реализовать его, мы можем применить алгоритм обратной индукции, предназначенный для вычисления модельной цены m -периодной бескупонной облигации, представленный на рис. 23.4, для вычисления некоторой функции от неизвестной ставки основной линии r_m , скажем $f(r_m)$. Используя далее хороший приближенный метод, определим корень r_m уравнения $f(r_m) = P$ при данных нулевой рыночной цене P и $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$. Причем выполним эту процедуру при всех $m = 1, 2, \dots, n$. Суммарно такой алгоритм потребует кубического времени, и потому он безнадежно медленный [508].

Но калибровка может быть выполнена и за квадратичное время при помощи **форвардной индукции** [508]. В этой схеме определяют как много к модельной цене добавляет \$1 произвольного узла. Число это называют **ценой состояния**, поскольку оно означает цену условного требования по состоянию, при котором \$1 выплачивается именно в этом узле (состоянии) и ничего в противном случае. Столбец цен состояний устанавливается при движении *вперед* от момента времени 1 к моменту времени n .

А теперь выразимся поточнее. Предположим, что сейчас и есть момент времени j и ему отвечает $j+1$ узлов. Пусть ставкой основной линии периода j будет $r \equiv r_j$, отношение-множитель $v \equiv v_j$, а $P_1, P_2, \dots, P_j$ — цены состояния в предыдущем периоде, соответствующие ставкам $r, rv, \dots, rv^{j-1}$. По определению $\sum_{i=1}^j P_i$ является ценой $(j-1)$ -периодной бескупонной облигации. У одного доллара момента времени j известная рыночная цена, определяемая выражением $1/[1+S(j)]^j$, в котором $S(j)$ является j -периодной спот-ставкой. С другой стороны, приведенное значение (ПЗ) этого доллара равно величине

$$g(r) \equiv \frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+rv)} + \frac{P_3}{1+rv^2} + \dots + \frac{P_j}{1+rv^{j-1}}.$$

И потому величину r можно найти из уравнения

$$g(r) = \frac{1}{[1+S(j)]^j}. \quad (23.6)$$

При данной убывающей рыночной дисконтирующей функции единственное решение для r гарантировано². Цены состояния момента j поэтому

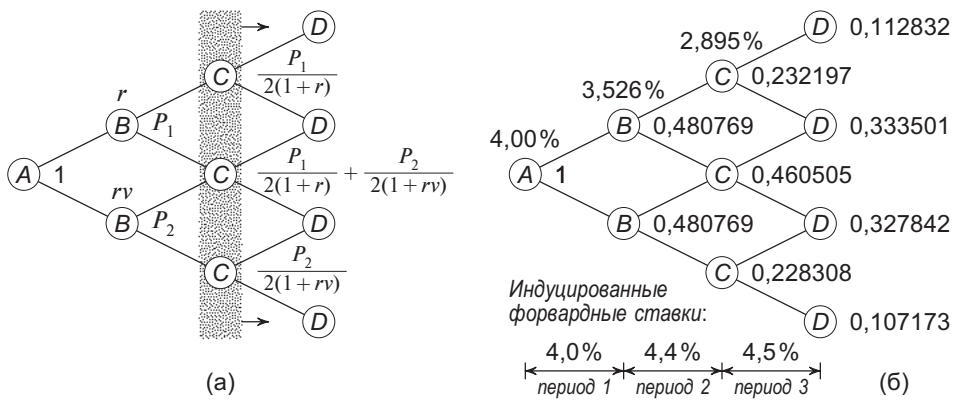


Рис. 23.7. Для расчета биномиального дерева цен состояния пронесите линию вперед. (а) Цена состояния в узле является взвешенной суммой цен состояния предшествующих двух узлов. (б) Биномиальное дерево цен состояния рассчитано по выборочной временной структуре и результирующему биномиальному дереву процентной ставки. Имеющиеся облигации оно оценивает корректно.

можно рассчитать в виде

$$\frac{P_1}{2(1+r)}, \frac{P_1}{2(1+r)} + \frac{P_2}{2(1+rv)}, \dots, \frac{P_{j-1}}{2(1+rv^{j-2})} + \frac{P_j}{2(1+rv^{j-1})}, \frac{P_j}{2(1+rv^{j-1})}$$

(см. рис. 23.7 (а)). Дерево с этими ценами состояния мы называем **биномиальным деревом цен состояния**. Одно такое дерево показано на рис. 23.7 (б). Откалиброванное дерево приведено на рис. 23.8.

Поскольку производная $g'(r)$ легко вычисляется, то для получения корня r уравнения (23.6) можно использовать метод Ньютона—Рафсона. Монотонность и выпуклость функции $g(r)$ также облегчают поиск корня. Хорошее начальное приближение к корню могут предоставить и выражения (23.4), которые гарантированно его недооценивают (см. теорему 23.2.2). Но использование предыдущей ставки основной линии в качестве приближенного значения для текущей ставки основной линии также быстро приводит к цели.

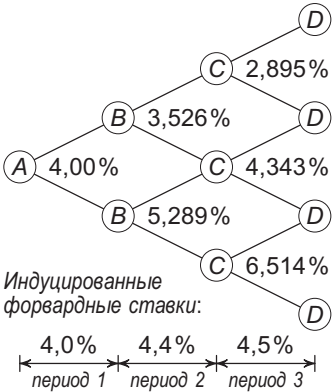


Рис. 23.8. Откалиброванное биномиальное дерево процентной ставки. Само это дерево взято из рис. 23.7 (б).

Алгоритм для поиска**калиброванного биномиального дерева процентной ставки:**

ввод: $n, S[1..n], \sigma[1..n]$;
 действительные числа $P[0..n], r[1..n], r, v$;
 целые i, j ;
 $P[0] := 0$; // Фиктивная переменная; всегда равна нулю
 $P[1] := 1$;
 $r[1] := S[1]$;
 для $(i = 2 \text{ до } n) \{$
 $v := \exp[2 \times \sigma[i]]$;
 $P[i] := 0$;
 для $(j = i \text{ вниз до } 1) \left\{ P[j] := \frac{P[j-1]}{2 \times (1 + r[i-1] v^{j-2})} + \frac{P[j]}{2 \times (1 + r[i-1] v^{j-1})} \right\}$;
 // Цены состояния в момент $i-1$
 Из уравнения $\sum_{j=1}^i \frac{P[j]}{(1 + r v^{j-1})} = (1 + S[i])^{-i}$ находим r ;
 $r[i] := r$;
 }
 вывод $r[]$;

Рис. 23.9. Алгоритм построения калиброванного биномиального дерева процентной ставки. Величина $S[i]$ означает i -периодную спот-ставку, $\sigma[i]$ представляет волатильность ставок периода i в процентах, а n — число периодов. Все числа относятся к периоду. Ставка основной линии периода i вычисляется и хранится в $r[i]$.

Предыдущую идею легко реализовать (см. рис. 23.9). При этом суммарно затрачиваемое время равно $O(\mathcal{C}n^2)$, где $\mathcal{C}$ есть максимальное число подключений процедуры поиска корня, каждый раз затрачивающей на работу время, по величине равное $O(n)$. При угадывании хорошего начального приближения метод Ньютона—Рафсона сходится всего лишь за несколько шагов [190, 625].

Давайте проведем несколько численных расчетов. Приведенное значение (ПЗ) стоимости одного доллара конца второго периода равно 0,92101 в соответствии с выборочной временной структурой таблицы на рис. 23.5. Ставка основной линии для второго периода, r_2 , удовлетворяет уравнению

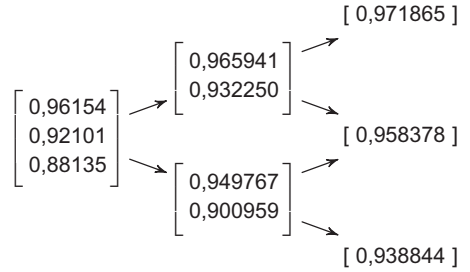
$$\frac{0,480769}{1+r_2} + \frac{0,480769}{1+1,5 \times r_2} = 0,92101.$$

Из него получаем, что $r_2 = 3,526\%$. С помощью этого числа получаем следующий столбец цен состояний, приведенных на рис. 23.7 (б) — 0,232197, 0,460505 и 0,228308 — в сумме точно равных рыночному дисконтирующему фактору 0,92101. Поэтому ставка r_3 основной линии для третьего периода удовлетворяет уравнению

$$\frac{0,232197}{1+r_3} + \frac{0,460505}{1+1,5 \times r_3} + \frac{0,228308}{1+(1,5)^2 \times r_3} = 0,88135.$$

Его решением является $r_3 = 2,895\%$. Теперь запишем заново равенство

Рис. 23.10. Динамика временной структуры. В каждом узле перечисляются значения рыночной дисконтирующей функции в соответствии с увеличивающимся сроком до погашения.



(23.5), используя новые ставки:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{1,04} \times \left[\frac{1}{1,03526} \times \left(\frac{1}{1,02895} + \frac{1}{1,04343} \right) + \frac{1}{1,05289} \times \left(\frac{1}{1,04343} + \frac{1}{1,06514} \right) \right] = 0,88135,$$

и получим полное совпадение. Таким образом, дерево на рис. 23.8 оценивает стоимость образцовых ЦБ без смещения. Динамика временной структуры калиброванного дерева показана на рис. 23.10.

Упражнение 23.2.6. 1) Определите, исходя из выборочной временной структуры и связанного с ней биномиального дерева процентной ставки из рис. 23.8, следующую ставку основной линии, если четырехпериодная спот-ставка равна 4,4 %?

2) Подтвердите правильность теоремы 23.2.2, показав, что ставка основной линии, получаемая из равенства (23.4), меньше, чем ставка из (23.1).

Упражнение 23.2.7. 1) Предположим, что у нас есть биномиальное дерево цен состояния и мы хотим оценить стоимость ЦБ с выплатой s в момент j , используя риск-нейтральную формулу для оценки стоимости $d(j)$. Какова вероятность каждого из состояний, возможных в момент j ?

2) Возьмите биномиальное дерево цен состояния из рис. 23.7 (б). Каковы в этой риск-нейтральной экономике вероятности узлов C ?

Упражнение 23.2.8. Рассчитайте n дисконтирующих множителей, индуцированных деревом, за время $O(n^2)$.

Упражнение 23.2.9. Начните с биномиального дерева процентной ставки, но без вероятностей ветвления, как на рис. 23.2.

1) Предположим, что дерево цен состояния также дано.

2) Предположим, что даны лишь цены состояний заключительных узлов, а также, что вероятности всех траекторий, попадающих в один и тот же узел, равны. Как следует рассчитывать вероятности ветвления каждого узла? Получающийся результат в упр. 9.4.3 был назван индуцированным биномиальным деревом.

Задание по программированию 23.2.10. Составьте программу для алгоритма, представленного на рис. 23.9, используя метод Ньютона—Рафсона.

Задание по программированию 23.2.11. Откалибруйте дерево с помощью метода хорд.

23.3 Применения к оценке стоимости и хеджированию

23.3.1 Спрэд у необразцовых облигаций без вложенных опционов*)

Модельные цены, полученные с помощью калиброванного дерева как правило не совпадают с рыночными ценами необразцовых облигаций. Чтобы оценить дополнительный доход или **спрэд** по сравнению с образцовыми облигациями, мы ищем такую величину, что если ее добавить равномерно ко всем краткосрочным ставкам дерева, то это позволит модельным ценам сравняться с рыночными. Очевидно, спрэд у образцовой облигации равен нулю. Мы применим идею спреда сначала к облигациям без вложенных опционов и вернемся к облигациям с вложенными опционами в п. 27.4.3. Действия же будут практически одинаковыми, если исключить возможность досрочного исполнения.

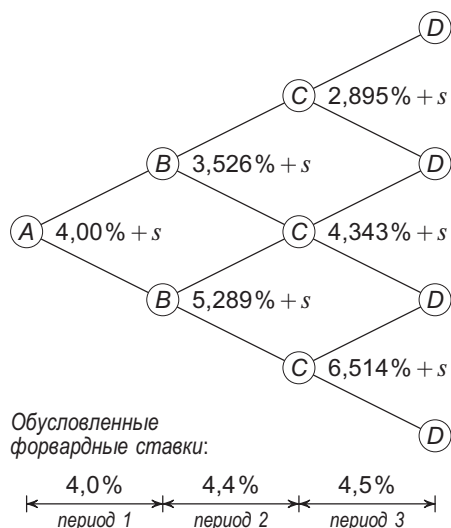


Рис. 23.11. Спрэд для краткосрочных ставок биномиального дерева процентной ставки. Это дерево построено из калиброванного биномиального дерева процентной ставки на рис. 23.8 добавлением постоянной величины (спреда) s к каждой краткосрочной ставке дерева.

Лучше всего будет, если мы проиллюстрируем идею на примере. Начнем с дерева на рис. 23.11. Рассмотрим ЦБ с денежным потоком, состоящим из сумм C_i , относящихся к моментам $i = 1, 2, 3$. Ее модельная цена описывается выражением

$$p(s) \equiv \frac{1}{1,04+s} \times \left\{ C_1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1,03526+s} \times \left[C_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_3}{1,02895+s} + \frac{C_3}{1,04343+s} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1,05289+s} \times \left[C_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_3}{1,04343+s} + \frac{C_3}{1,06514+s} \right) \right] \right\}.$$

При данной рыночной цене P спрэдом будет величина s , удовлетворяющая уравнению $P = p(s)$.

*) То есть без дополнительных функций. — Прим. перев.

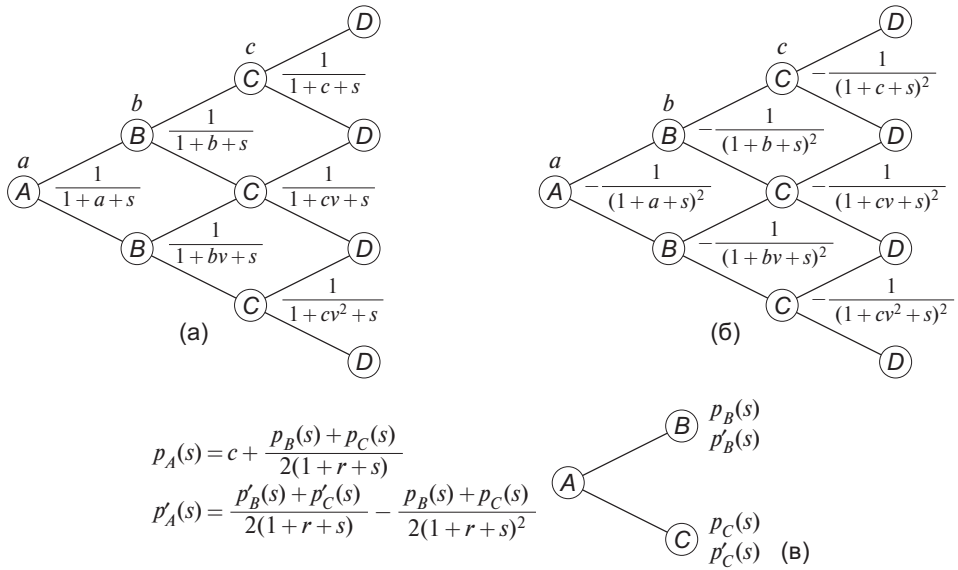


Рис. 23.12. Метод дифференциального дерева. (а) В первоначальном биномиальном дереве процентной ставки краткосрочные ставки заменяются на дисконтирующие множители, в (б) приводятся производные чисел из (а) по s , а в (в) представлена одновременная оценка функции и ее производной на дереве с помощью чисел из (а) и (б).

Вообще же, если мы добавляем постоянную величину s к каждой ставке биномиального дерева процентной ставки, то модельная цена будет монотонно убывающей и выпуклой функцией s . Обозначим эту функцию через $p(s)$. При рыночной цене P для решения уравнения $p(s) - P = 0$ относительно s мы используем метод Ньютона—Рафсона (поиска корня). Однако при первом взгляде на предыдущее уравнение видим, что прямая оценка $p'(s)$ невозможна. К счастью, в процессе обратной индукции дерево можно использовать для оценки как $p(s)$, так и $p'(s)$. Идея состоит в следующем. Рассмотрим произвольный узел A дерева, связанный с краткосрочной ставкой r . В процессе расчета модельной цены $p(s)$ цена $p_A(s)$ вычисляется в узле A . Цены, вычисляемые в двух следующих за узлом A узлах B и C , при получении $p_A(s)$ дисконтируются по ставке $r+s$:

$$p_A(s) = c + \frac{p_B(s) + p_C(s)}{2(1+r+s)},$$

здесь c обозначает сумму узла A *). Чтобы рассчитать в узле A также и $p'_A(s)$, используем выражение**)

$$p'_A(s) = \frac{p'_B(s) + p'_C(s)}{2(1+r+s)} - \frac{p_B(s) + p_C(s)}{2(1+r+s)^2}, \quad (23.7)$$

для чего нужно, чтобы в узлах B и C рассчитывались как $p'_B(s)$, так и $p'_C(s)$.

*) То есть сумму, поступившую по рассматриваемой ЦБ в момент, соответствующий узлу A . — Прим. перев.

**) Вытекающее из предыдущего равенства, поскольку для получения (23.7) нужно лишь приравнять производные обеих его сторон по s . — Прим. перев.

Алгоритм для расчета спреда, основанного на методе дифференциального дерева:

```

ввод:  $n, P, r[1..n], C[0..n], v[1..n], \varepsilon$ ;
действительные числа  $P[1..n+1], P'[1..n+1], s_{\text{старая}}, s_{\text{новая}}$ ;
целые  $i, j$ ;
 $s_{\text{старая}} := 0$ ; // Начальная догадка
 $P[1] := \infty$ ;
пока [  $|P[1] - P| > \varepsilon$  ] {
  для ( $i = 1$  до  $n + 1$ ) {  $P[i] := C[n]; P'[i] := 0$ ; }
   $s_{\text{старая}} := s_{\text{новая}}$ ;
  для ( $i = n$  вниз до 1) { // Провести столбец в обратном направлении
    для ( $j = 1$  до  $i$ ) {
      1.  $P[j] := C[i - 1] + (P[j] + P[j + 1]) / (2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1} + s_{\text{старая}}))$ ;
      2.  $P'[j] := (P'[j] + P'[j + 1]) / (2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1} + s_{\text{старая}})) -$ 
          $- (P[j] + P[j + 1]) / (2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1} + s_{\text{старая}}))^2$ ;
    }
  }
  3.  $s_{\text{новая}} := s_{\text{старая}} - (P[1] - P) / P'[1]$ ; // Алгоритм Ньютона—Рафсона
}
ВЫВОД  $s_{\text{новая}}$ ;

```

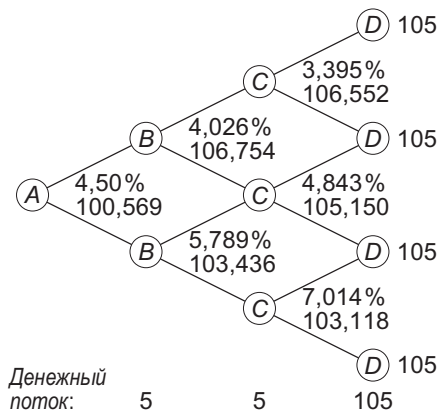
Рис. 23.13. Алгоритм для расчета спреда, основанный на методе дифференциального дерева. Величина P означает рыночную цену, $r[i]$ — ставку основной линии периода i , в $C[i]$ находятся постоянные, представляющие суммы момента i , $v[i]$ — мультипликативное отношение для ставок периода j , а n — число периодов. Все числа относятся к периоду. Цены и их производные хранятся в $P[]$ и $P'[]$, соответственно.

Если же применять эту процедуру последовательно, то в конечном счете она приведет к значениям $p(s)$ и $p'(s)$ в корне дерева. Проиллюстрирована эта идея на рис. 23.12. Сама же эта техника, принадлежащая Люу, называется **методом дифференциального дерева** и применяется довольно широко [625]. Она также связана с **автоматическим дифференцированием** в численном анализе [602, 687].

Давайте проанализируем теперь алгоритм дифференциального дерева, представленный на рис. 23.13. При данном спреде на шаге 1 вычисляется ПЗ, на шаге 2 вычисляется производная ПЗ в соответствии с равенством (23.7), а на шаге 3 метод Ньютона—Рафсона используется для получения следующего приближения. Если число $\mathcal{C}$ представляет число прохождений дерева, каждое из которых занимает время $O(n^2)$, то общее затрачиваемое время равняется $O(\mathcal{C}n^2)$. На практике $\mathcal{C}$ является маленькой постоянной. Требования к памяти выражаются в виде $O(n)$.

А сейчас обратимся к численному примеру. Рассмотрим 3-летнюю 5% облигацию с рыночной ценой в 100,569. И для простоты предположим, что по облигации выплачиваются ежегодные проценты. Можно показать, что спред на протяжении всего дерева составляет 50 базисных пунктов (см. рис. 23.14). Для примера давайте рассчитаем спред доходности и статический спред у необразцовой облигации, по сравнению с в остальном такой же, как и образцовой. Напомним, что статический

Рис. 23.14. Дерево цен со спредом. Основанное на дереве из рис. 23.11, это дерево цен рассчитывается для 3-летней облигации, по которой выплачивается 5 % годовых. Каждому узлу дерева наряду с краткосрочной ставкой ставится в соответствие ПЗ будущего денежного потока плюс сумма этого узла, если таковая имеется. Расчетная (модельная) цена равна 100,569.



спред представляет собой дополнительный доход по сравнению с кривой спот-ставок, в то время как спред, основанный на биномиальном дереве процентной ставки является превышением доходности над будущими краткосрочными ставками. Можно показать, что у необразцовой облигации доходность до погашения равна 4,792 %. У 3-летней облигации Казначейства рыночная цена равна

$$\frac{5}{1,04} + \frac{5}{(1,04)^2} + \frac{105}{(1,04)^3} = 101,954, \quad (23.8)$$

а доходность до погашения — 4,292 %. Спред доходности, таким образом, равен 4,792 % – 4,292 % = 0,5 %. Можно показать, что и статический спред равен 0,5 %. И, следовательно, все три спреда оказываются равными 0,5 % с точностью до ошибок округления.

Упражнение 23.3.1. Предполагается ли в идее спреда параллельный сдвиг временной структуры?

Задание по программированию 23.3.2. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 23.13.

Задание по программированию 23.3.3. Реализуйте метод дифференциального дерева для получения индуцированной волатильности Американских опционов при использовании биномиальной модели оценки стоимости опциона (БМО) [172, 625].

23.3.2 Цена фьючерса

Цена фьючерса по отношению к риск-нейтральной вероятности является мартингалом (см. упр. 13.2.11). Чтобы ее рассчитать, мы сначала используем дерево для расчета цен базовой ЦБ на дату поставки фьючерсного контракта, к которой фьючерсная цена и сходится. Затем мы находим ожидаемое значение. На рис. 23.15, к примеру, речь идет о 2-летнем фьючерсном контракте на 1-летние ВК. Найдено, что фьючерсная цена равна 95,687. Рассчитать фьючерсную цену можно за время $O(n)$.

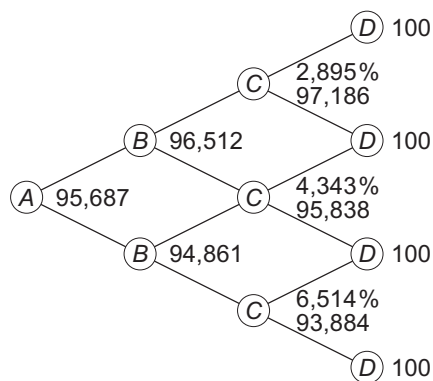


Рис. 23.15. Цена фьючерса. Дерево цен рассчитано для двухлетнего фьючерсного контракта на однолетние ВК. Около узлов С наряду с краткосрочной ставкой отмечена и дисконтированная стоимость однолетних ВК в модели. В узлах А и В приведены ожидаемые значения стоимости. Цена фьючерса равна 95,687.

Если условия фьючерсного контракта не предусматривают обращение к котировке, которая равняется результату нашего расчета, то следует предпринять шаги для того, чтобы преобразовать теоретическое значение в то, которое будет удовлетворять условиям контракта. Вышеуказанное теоретическое значение, например, соответствует цене по счету фьючерса на ВК, которым торгуют на Чикагской бирже СВТ, а котируется цена индекса.

Упражнение 23.3.4. 1) Как рассчитывать цену форварда для форвардного контракта на облигацию?

2) Рассчитайте цену форварда для 2-летнего форвардного контракта по 1-летним векселям Казначейства (ВК).

23.3.3 Опционы фиксированной доходности

Определение стоимости опционов фиксированной доходности с помощью биномиального дерева процентной ставки следует той же логике, что и в случае использования алгоритма биномиального дерева для оценки стоимости опционов на акцию из гл. 9. Поэтому здесь попытаемся разобрать лишь числовые примеры. Рассмотрим 2-летний Европейский опцион колл с ценой исполнения 99 на 3-летние и 5% бумаги Казначейства. Предположим, что по ЦБ выплачиваются ежегодные проценты. Из рис. 23.16 видно, что цена 3-летних бумаг Казначейства за вычетом \$ 5 на проценты через два года может быть равной \$ 102,046, \$ 100,630, или \$ 98,579. Поскольку эти цены не включают в себя накопленные проценты, мы должны сравнить с ними цену исполнения. Следовательно, опцион колл в первых двух сценариях оказывается в деньгах, со значениями \$ 3,046 и \$ 1,630, и вне денег в третьем сценарии. Расчетная стоимость опциона на рис. 23.16 (а) оказывается равной \$ 1,458. Стоимость Европейского опциона пут на процентную ставку может быть найдена аналогично. Рассмотрим 2-летний Европейский опцион пут с ценой исполнения 99 на ту же ЦБ. В момент окончания срока опцион пут будет в деньгах лишь если бумаги Казначейства будут стоить \$ 98,579 без

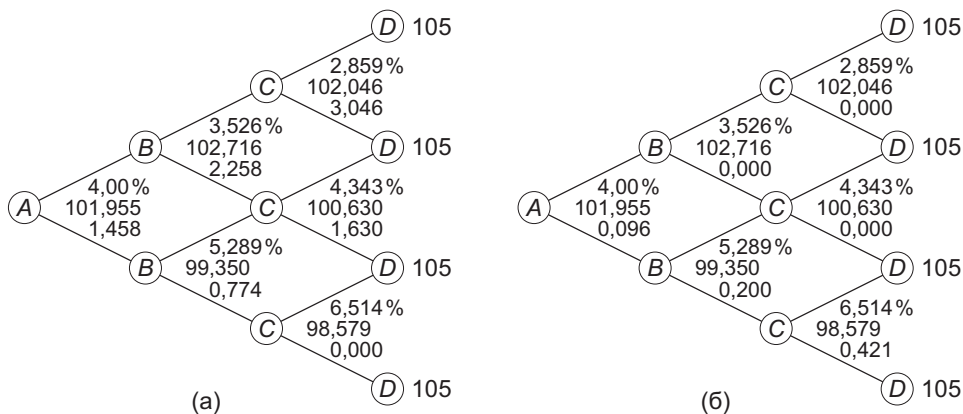


Рис. 23.16. Европейские опционы на ЦБ Казначейства. Вышеуказанные деревья цен построены для 2-летних Европейских опционов (а) колл и (б) пут с ценой исполнения 99 на 3-летние и 5% бумаги Казначейства. Рядом с каждым узлом дерева стоят краткосрочная ставка, цена ЦБ без \$ 5 на проценты (исключая узлы D) и стоимость опциона. Цена \$ 101,955 слегка отличается от приведенной в (23.8) из-за ошибок округления.

накопленных процентов. Расчетная стоимость опциона равна \$ 0,096, см. рис. 23.16 (б).

Если опцион является Американским и выплаты по базовой облигации производятся до истечения его срока действия, то следует рассматривать и возможность досрочного исполнения. Критерием при этом будет сравнение внутренней стоимости со стоимостью опциона в каждом узле. Более детальное рассмотрение ситуации предлагается провести читателю.

Приведенное значение (ПЗ) цены исполнения есть $\text{ПЗ}(X) = 99 \times \times 0,92101 = 91,18$. Стоимость ЦБ $B = 101,955$. ПЗ процентных выплат на протяжении жизни опциона равно

$$\text{ПЗ}(I) = 5 \times 0,96154 + 5 \times 0,92101 = 9,41275.$$

Опционы колл и пут стоят $C = 1,458$ и $P = 0,096$, соответственно. Поэтому

$$C = P + B - \text{ПЗ}(I) - \text{ПЗ}(X).$$

Паритет пут—колл остается в силе.

Упражнение 23.3.5. Покажите, что Американский опцион на бескупонную облигацию не будет исполнен досрочно.

Упражнение 23.3.6. Установите паритет пут—колл для опционов на купонные облигации.

Задание по программированию 23.3.7. Напишите программу для оценки стоимости Европейских опционов на бумаги Казначейства.

23.3.4 Дельта (коэффициент хеджирования)

Важно знать как сильно меняется стоимость опциона при изменении цены базовой облигации. Эта связь называется дельтой (коэффициентом или отношением хеджирования) и определяется выражением

$$\frac{O_h - O_l}{P_h - P_l}.$$

Здесь P_h и P_l обозначают цены облигации, если краткосрочная ставка двинется вверх или вниз, соответственно. Аналогично, O_h и O_l обозначают стоимость опциона, если краткосрочная ставка поднимется вверх или опустится вниз. Поскольку величина дельты измеряет чувствительность стоимости опциона к изменениям в цене базовой облигации, то эта характеристика показывает, как хеджировать одну из них с помощью другой [84]. Возьмем опционы колл и пут из рис. 23.16 в качестве примера. Их дельта равны

$$\frac{0,774 - 2,258}{99,350 - 102,716} = 0,441, \quad \frac{0,200 - 0,000}{99,350 - 102,716} = -0,059,$$

соответственно.

23.3.5 Доходность за период владения

Анализ доходности за период владения (ДПВ) с помощью биномиального дерева процентной ставки оказывается очень простым. Рассмотрим в качестве примера двухпериодный срок для трехпериодных бескупонных облигаций. Величины ДПВ из таблицы на рис. 23.17 получены с использованием динамики цены, представленной на рис. 23.10.

Краткосрочная ставка	Цена в конце срока	Вероятность
2,895 %	0,971865	0,25
4,343 %	0,958378	0,50
6,514 %	0,938844	0,25

Рис. 23.17. Величины ДПВ. Срок оканчивается через два периода.

Если облигации с купонами, то возникающий внутренний денежный поток следует реинвестировать по существующей краткосрочной ставке и добавить к цене при окончании срока. Распределение вероятностей различных сценариев задается в модели, а не определяется внешними обстоятельствами.

23.4 Временная структура волатильности

Биномиальное дерево процентной ставки можно использовать для расчета волатильности доходности у бескупонных облигаций. Рассмотрим n -периодную бескупонную облигацию. Найдем сначала ее доходность до погашения y_h (y_l , соответственно) в конце начального периода, если ставка поднимется (соответственно, опустится). Волатильность

доходности в нашей модели определяется выражением $(1/2) \ln(y_h/y_l)$. Например, исходя из дерева на рис. 23.8, доходность у 2-летней бескупонки в конце первого периода равна 5,289%, если ставка поднимается и 3,526%, если она падает. Таким образом, волатильность доходности оказывается равной

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{0,05289}{0,03526} \right) = 20,273 \, \%.$$

А теперь рассмотрим 3-летнюю бескупонную облигацию. Если ставка поднимается, то цена бескупонки через 1 год будет равна

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{1,05289} \times \left(\frac{1}{1,04343} + \frac{1}{1,06514} \right) = 0,90096.$$

И, следовательно, ее доходность равна

$$\sqrt{\frac{1}{0,90096}} - 1 = 0,053531.$$

Если же ставка падает, то цена бескупонки через 1 год будет равна

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{1,03526} \times \left(\frac{1}{1,02895} + \frac{1}{1,04343} \right) = 0,93225.$$

И, значит, ее доходность есть

$$\sqrt{\frac{1}{0,93225}} - 1 = 0,0357.$$

Поэтому волатильность доходности оказывается равной

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{0,053531}{0,0357} \right) = 20,256 \, \%,$$

т.е. несколько меньше, чем 1-летняя волатильность. Интересно, что такой вывод согласуется с реальностью, согласно которой у долгосрочных облигаций волатильность доходности меньше, чем у краткосрочных. Проведенную процедуру можно повторить для получения волатильности доходности у бескупонки большего срока жизни.

Мы начинали с v_i , а затем определяли временную структуру волатильности. Однако на практике эти шаги делаются в обратном порядке. Временная структура волатильности поставляется пользователем наряду с просто временной структурой. Величины же v_i — т.е. волатильности краткосрочной ставки в силу (23.2) — и r_i затем определяются одновременно. В результате используется модель Блэка—Дермана—Тоя, речь о которой пойдет в п. 26.3.

Предположим, что пользователь предоставляет временную структуру волатильности, которая приводит к параметрам дерева $(v_1, v_2, v_3, \dots)$. Тогда временная структура волатильности через период будет определяться числами $(v_2, v_3, v_4, \dots)$, а не $(v_1, v_2, v_3, \dots)$. Поэтому поставляемая пользователем временная структура волатильности со временем не сохраняется.

Упражнение 23.4.1. Предположим, что для описания цены акции мы добавим биномиальный процесс к нашей биномиальной модели процентной ставки. Другими словами, предположим, что цена акции S через период может превратиться в Su или Sd . Каковы в этом случае условия на u и d ?

Задание по программированию 23.4.2. В программе из задания по программированию 23.2.10 поставьте дополнительную задачу поиска временной структуры волатильностей доходности (ее ежегодного варианта).

Примечания

1. Объявляя риск-нейтральные вероятности равными $1/2$, мы обязаны подправить переменную состояния и краткосрочную ставку, чтобы иметь искомое распределение. И это было проделано в упр.9.3.1, например, в случае использования БМОО. Альтернатива состоит в том, чтобы приписывать переменной состояния значения на дереве и затем находить вероятности. Именно таким был подход при использовании конечно-разностного метода в п.18.1.

2. Это потому, что функция $g(r)$ строго убывает по r и принимает значения $g(0) = \sum_{i=1}^j P_i > \frac{1}{[1 + S(j)]^j}$ и $g(\infty) = 0$.

24 Основы моделирования временной структуры

Основы представляют собой наиболее противоречивый раздел во многих, если не во всех науках.

Леонард Дж. Сэвидж (1917—1971),
Основы статистики

В этой главе приводятся основные определения и результаты проблематики моделирования временной структуры. В ней также излагаются теоретические основы для построения моделей процентной ставки. В конце главы представлены несколько простых моделей.

24.1 Терминология

Всюду в этой главе в качестве единицы прошедшего времени выступает период. Поэтому, для рассматриваемого момента времени t следующий момент времени относится к моменту $t + dt$ в непрерывном случае и к моменту $t + 1$ в дискретном случае. Если модель дискретного времени получается при делении временного интервала $[s, t]$ на n периодов, то каждый период занимает время $(t - s)/n$. Здесь предполагается, что номинал облигации равен единице, если что-то другое не оговаривается. Мы используем одни и те же обозначения для моделей как дискретного, так и непрерывного времени, поскольку рассматриваемые ситуации всегда прозрачны. Единицей времени для моделей непрерывного времени обычно является год. Стандартными считаются следующие обозначения:

- t : Момент времени.
- $r(t)$: Однопериодная безрисковая ставка, действующая в момент t и предназначенная для оплаты через период (мгновенная спот-ставка или **краткосрочная ставка** момента t).
- $P(t, T)$: Стоимость (т.е. приведенное значение (ПЗ)) в момент t \$1 момента T .
- $r(t, T)$: Однопериодная процентная ставка, действующая на момент t в интервале (t, T) , с одним начислением процентов за период — другими словами, $(T - t)$ -периодная спот-ставка момента t (из этого определения следует, что в моделях непрерывного времени используется непрерывное начисление процентов, а в дискретных — периодическое). **Долгосрочная ставка** определяется как $r(t, \infty)$, т.е. доходность непрерывного начисления консольной облигации, по которой \$1 выплачивается вечно и в единицу времени, но никогда не возвращается основная сумма.
- $F(t, T, M)$: Цена в момент t форвардного контракта с поставкой в момент T бескупонной облигации с погашением в момент $M \geq T$.

$f(t, T, L)$: L -периодная форвардная ставка, относящаяся к моменту T , рассматриваемая в момент t как периодическая ставка с одним начислением процентов за период.

$f(t, T)$: Однопериодная или мгновенная форвардная ставка момента T , рассматриваемая в момент t , с однократным начислением процентов за период. Она совпадает с величиной $f(t, T, 1)$ в моделях дискретного времени и со ставкой $f(t, T, dt)$ в моделях непрерывного времени. Заметим, что $f(t, t)$ есть краткосрочная ставка $r(t)$.

24.2 Основные соотношения

Цена бескупонной облигации

$$P(t, T) = \begin{cases} [1 + r(t, T)]^{-(T-t)} & \text{в случае дискретного времени,} \\ e^{-r(t, T)(T-t)} & \text{в случае непрерывного времени.} \end{cases}$$

Напоминаем, что $r(t, T)$, как функция T , определяет кривую спот-ставок в момент времени t . По определению

$$f(t, t) = \begin{cases} r(t, t+1) & \text{в случае дискретного времени,} \\ r(t, t) & \text{в случае непрерывного времени.} \end{cases}$$

Цены форвардов и бескупонных облигаций связаны равенством

$$F(t, T, M) = \frac{P(t, M)}{P(t, T)}, \quad T \leq M, \quad (24.1)$$

которое утверждает, что форвардная цена равна НЗ стоимости базового актива момента M на момент T . Уравнение (24.1) можно обосновать арбитражными соображениями, подобными «запиранию» форвардных ставок из п. 5.6.1 (см. упр. 24.2.1 (1)). Это уравнение выполняется независимо от того, рассматривается ли модель дискретного времени или непрерывного, и из него вытекает, что

$$F(t, T, M) = F(t, T, S) F(t, S, M), \quad T \leq S \leq M.$$

В случае дискретного времени (и, следовательно, периодического начисления процентов) форвардные ставки и цены по определению связаны выражением

$$f(t, T, L) = \left[\frac{1}{F(t, T, T+L)} \right]^{1/L} - 1 = \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T+L)} \right]^{1/L} - 1. \quad (24.2)$$

В частности, $1 + f(t, T, 1) = 1/F(t, T, T+1) = P(t, T)/P(t, T+1)$. В случае непрерывного времени (и, значит, непрерывного начисления процентов) в силу (24.1)

$$f(t, T, L) = -\frac{\ln F(t, T, T+L)}{L} = \frac{\ln(P(t, T)/P(t, T+L))}{L}. \quad (24.3)$$

Далее, поскольку при $\Delta t \rightarrow 0$

$$f(t, T, \Delta t) = \frac{\ln(P(t, T)/P(t, T+\Delta t))}{\Delta t} \rightarrow -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial P(t, T)/\partial T}{P(t, T)},$$

то мы заключаем, что

$$f(t, T) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T, \Delta t) = -\frac{\partial P(t, T)/\partial T}{P(t, T)}, \quad t \leq T. \quad (24.4)$$

Поскольку равенство (24.4) эквивалентно равенству

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}, \quad (24.5)$$

то кривая спот-ставок $r(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds$. Дискретным аналогом равенства (24.5) является выражение

$$P(t, T) = \frac{1}{[1+r(t)][1+f(t, t+1)] \dots [1+f(t, T-1)]}. \quad (24.6)$$

Премией за ликвидность является величина $f(t, T) - E_t(r(T) | r(t))$, т.е. разница между форвардной ставкой и ожидаемым значением спот-ставки. Наконец, краткосрочная ставка и рыночная дисконтирующая функция связаны соотношением

$$r(t) = - \left. \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}.$$

В этом можно убедиться с помощью (24.4) заметив, что $P(t, t) = 1$ и $f(t, t) = r(t)$.

Упражнение 24.2.1. 1) Приведите арбитражные соображения для обоснования равенства (24.1).

2) Попробуйте обобщить п. (1), описав стратегию, которая копирует форвардный контракт на купонную облигацию, по которой до момента поставки могут производиться выплаты.

Упражнение 24.2.2. Предположим, что в момент t мы продаем одну бескупонку с датой погашения T и покупаем $P(t, T)/P(t, M)$ единиц бескупонных облигаций с датой погашения M . Начните с этого объяснение равенства (24.1).

Упражнение 24.2.3. Докажите представление (24.4) с помощью равенства (5.11).

Упражнение 24.2.4. Выведите равенство (24.6) из равенства (24.2).

Упражнение 24.2.5. Покажите, что τ -периодная спот-ставка равна $\frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{\tau-1} f(i, i+1)$ (т.е. среднему арифметическому форвардных ставок), если все ставки являются ставками непрерывного начисления процентов.

Упражнение 24.2.6. Проверьте, что выражение

$$f(t, T, L) = \frac{1}{L} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T+L)} - 1 \right]$$

является аналогом равенства (24.2) в случае использования простых процентов.

Упражнение 24.2.7. Докажите, что аналогом равенства (5.9) для случая непрерывного времени будет выражение

$$f(t, T, M-t) = \frac{(M-t)r(t, M) - (T-t)r(t, T)}{M-T}$$

(указание: используйте равенство (24.3)).

Упражнение 24.2.8. Выведите выражение для премии за ликвидность и форвардной ставки в модели Мертона. Проверьте, что форвардная ставка «уходит» в минус бесконечность, когда срок до погашения увеличивается до бесконечности.

Упражнение 24.2.9. Покажите, что

$$\frac{P(t, T)}{M(t)} = \frac{1}{M(T)}$$

в некоторой такой экономике, в которой величина $M(t) \equiv e^{\int_0^t r(s) ds}$ представляет счет на денежном рынке (указание: см. упр. 5.6.6).

24.2.1 Частота начисления сложных процентов

Произвольную ставку можно записать разными, эквивалентными способами, в зависимости от желательной частоты начисления процентов (просмотрите еще раз п. 3.1). В этой главе мы договариваемся считать стандартным непрерывное начисление процентов для моделей непрерывного времени и периодическое начисление для моделей дискретного времени, если не оговаривается противное.

Выбор между непрерывным и периодическим начислением связан с серьезными последствиями для моделей процентной ставки. Пусть r_e реальная ежегодная ставка процентов, а $r_c \equiv \ln(1 + r_e)$ — эквивалентная ей ежегодная ставка непрерывного начисления процентов. Отметим, что обе ставки являются мгновенными. Если процентная ставка непрерывного начисления логнормально распределена, то стоимость Евродолларовых фьючерсов принимает бесконечные отрицательные значения [875]. Однако, этой проблемы нет, если логнормально распределена реальная ставка [781, 782].

Упражнение 24.2.10. Предположим, что реальная ежегодная ставка процентов удовлетворяет уравнению

$$\frac{dr_e}{r_e} = \mu(t) dt + \sigma(t) dW.$$

Докажите, что

$$\frac{dr_c(t)}{1 - e^{-r_c(t)}} = \left\{ \mu(t) - \frac{1}{2} [1 - e^{-r_c(t)}] \sigma(t)^2 \right\} dt + \sigma(t) dW$$

(ставка непрерывного начисления процентов приближенно логнормально распределена, если $r_c(t) = o(dt)$, поскольку $1 - e^{-r_c(t)} \approx r_c(t) + o(dt^2)$, и сходится к нормальному распределению, когда $r_c(t) \rightarrow \infty$).

24.3 Риск-нейтральная оценка стоимости

В теории локального оценивания в среднем считается, что ожидаемая доходность у любой безрисковой облигации в любом, но одном периоде, равняется действующей однопериодной спот-ставке,

т. е. при любых $t + 1 < T$,

$$\frac{E_t(P(t+1, T))}{P(t, T)} = 1 + r(t). \quad (24.7)$$

В действительности это равенство вытекает из принципа риск-нейтральной оценки стоимости, т. е. из теоремы 13.2.3, которая предположительно сохраняет свою силу и для моделей непрерывного времени. Теория локального оценивания в среднем, таким образом, является следствием существования риск-нейтральной вероятности π и потому мы можем использовать символ $E_t^\pi(\cdot)$ вместо $E_t(\cdot)$. Перепишем равенство (24.7) в виде

$$\frac{E_t^\pi[P(t+1, T)]}{1 + r(t)} = P(t, T),$$

из которого следует, что кривая текущих спот-ставок равна ожидаемой кривой спот-ставок один период спустя, дисконтированной по краткосрочной ставке. Применяя предыдущее равенство последовательно получаем, что

$$\begin{aligned} P(t, T) &= E_t^\pi \left[\frac{P(t+1, T)}{1 + r(t)} \right] = E_t^\pi \left[\frac{E_{t+1}^\pi[P(t+2, T)]}{\{1 + r(t)\}\{1 + r(t+1)\}} \right] = \dots \\ &\dots = E_t^\pi \left[\frac{1}{\{1 + r(t)\}\{1 + r(t+1)\} \dots \{1 + r(T-1)\}} \right]. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Поскольку равенство (24.7) также может быть записано в виде

$$E_t(P(t+1, T)) = F(t, t+1, T),$$

то форвардная цена для следующего периода оказывается несмещенной оценкой ожидаемой цены облигации.

В непрерывном случае из теории локального оценивания в среднем вытекает, что

$$P(t, T) = E_t \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \right), \quad t < T. \quad (24.9)$$

Другими словами, реальная вероятность и риск-нейтральная идентичны.

Заметим, что величина $e^{-\int_t^T r(s) ds}$ представляет собой процесс накопления на банковском счете, точнее, на счете денежного рынка с произвольно меняющейся ставкой. Мы знаем, что цены облигации по отношению к счету на денежном рынке в детерминированной экономике являются постоянными (см. упр. 24.2.9). Равенство (24.9) обобщает это утверждение на стохастическую экономику. Если теория локального оценивания в среднем имеет место, то безрисковые арбитражные возможности исключены [232]. Теория локального оценивания в среднем, однако, является не единственной версией теории оценивания в среднем, совместимой с наличием равновесного состояния [351].

Риск-нейтральную методологию можно использовать для оценки стоимости свопов на процентную ставку. Рассмотрим своп процентной ставки, заключенный в момент t , с выплатами, обмениваемыми в моменты

времени $t_1, t_2, \dots, t_n$. Фиксированная ежегодная ставка равна c . Выплаты с плавающей ставкой основаны на будущих ежегодных ставках $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ моментов $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$. Предположим для простоты, что величина $t_{i+1} - t_i$ является фиксированной постоянной, равной Δt при всех i , а условная основная сумма равна \$1. Если $t < t_0$, то у нас форвардный своп процентной ставки, поскольку первая выплата не связана со ставкой момента заключения соглашения. Обычный своп отвечает значению $t = t_0$.

Сумма, которая должна быть выплачена в момент t_{i+1} стороной, оплачивающей по плавающей ставке, равна $(f_i - c)\Delta t$. Отметим, что здесь мы используем ставки простых процентов; поэтому для f_i имеет место равенство

$$P(t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{1 + f_i \Delta t}.$$

Стоимость свопа в момент t , таким образом, равна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_t^\pi \left[e^{-\int_t^{t_i} r(s) ds} (f_{i-1} - c)\Delta t \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_t^\pi \left[e^{-\int_t^{t_i} r(s) ds} \left\{ \frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - (1 + c\Delta t) \right\} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n [P(t, t_{i-1}) - (1 + c\Delta t) \times P(t, t_i)] = P(t, t_0) - P(t, t_n) - c\Delta t \sum_{i=1}^n P(t, t_i). \end{aligned}$$

Поэтому своп можно продублировать портфелем из облигаций. В действительности же его стоимость можно определить простым вычислением приведенного значения (ПЗ). Ставка же свопа c , при которой его стоимость обнуляется, равна

$$\frac{P(t, t_0) - P(t, t_n)}{\Delta t \sum_{i=1}^n P(t, t_i)}.$$

Ставка свопа — это такая фиксированная ставка, при которой ПЗ выплат по фиксированной и плавающей ставке совпадают. Для обычного свопа $P(t, t_0) = 1$.

Упражнение 24.3.1. Предположим, что имеет место теория локального оценивания в среднем. Докажите, что $(T - t)$ -периодная спот-ставка момента t меньше или равна величине $\mathbb{E}_t \left(\int_t^T r(s) ds \right) / (T - t)$, т.е. ожидаемой средней процентной ставке между моментами t и T , причем равна лишь тогда, когда неопределенность у ставки $r(s)$ отсутствует.

Упражнение 24.3.2. Докажите, что в теории локального оценивания в среднем форвардная ставка $f(t, T)$ меньше ожидаемой спот-ставки $\mathbb{E}_t(r(T))$ при условии, что процентные ставки стремятся двигаться в одном направлении в том смысле, что функция $\mathbb{E}_t \left(r(T) \mid \int_t^T r(s) ds \right)$ возрастает при увеличении величины $\int_t^T r(s) ds$ (поэтому теория несмещенного

оценивания в среднем несовместима с теорией локального оценивания в среднем. См. также упр. 5.7.3 (2)).

Упражнение 24.3.3. Покажите, что калиброванное биномиальное дерево процентной ставки, построенное с помощью идей, перечисленных в п. 23.2.2 (а потому и слегка более общее дерево из упр. 23.2.2), удовлетворяет теории локального оценивания в среднем. А как обстоит дело с некалиброванным деревом из рис. 23.6?

Упражнение 24.3.4. Покажите, что в теории несмещенного оценивания в среднем

$$P(t, T) = \frac{1}{[1 + r(t)]\{1 + E_t[r(t+1)]\} \dots \{1 + E_t[r(T-1)]\} - \int_t^T E_t(r(s)) ds}$$

в дискретном случае и $P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}$ в непрерывном (предыдущее равенство отличается от выражения (24.8), которое справедливо в теории локального оценивания в среднем).

Упражнение 24.3.5. Цена консоли, по которой дивиденды выплачиваются непрерывно со скоростью \$1 в год, определяется следующим выражением типа ожидаемого дисконтированного значения:

$$P(t) = E_t^\pi \left[\int_t^\infty e^{-\int_t^s r(u) du} ds \right].$$

Сравните это равенство с формулой (24.9) и объясните разницу.

Упражнение 24.3.6. Рассмотрим амортизирующий своп, в котором условная основная сумма уменьшается на $1/n$ доллара при каждой из n точек пересмотра. Исходная основная сумма равна \$1. Напишите формулу для ставки свопа.

Упражнение 24.3.7. Объясните, почему своп форвардной процентной ставки эквивалентен портфелю из одного длинного оплачивающего своп-циона и одного короткого получающего своп-циона (ситуация похожа на ситуацию упр. 12.2.4, в которой говорится, что форвардный контракт эквивалентен портфелю из Европейских опционов).

Упражнение 24.3.8. Используйте риск-нейтральную методологию для оценки стоимости шапок процентной ставки, а также шапочек, полов и поликов, как опционов с фиксированным доходом.

24.4 Уравнение временной структуры

При арбитражной оценке стоимости мы начинаем с процесса накопления на банковском счете и выделенного множества основных торгуемых ценных бумаг (ЦБ), а также их цен и случайных процессов. Затем мы оцениваем стоимость ЦБ, не принадлежащей к этому множеству, подбирая эквивалентный портфель, состоящий лишь из первичных активов. Для ЦБ с фиксированной доходностью первичное множество торгуемых ЦБ включает в себя бескупонные облигации и счет на денежном рынке.

Пусть цена бескупонной облигации $P(r, t, T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP}{P} = \mu_p dt + \sigma_p dW.$$

Предположим, что инвестор в момент t занимает короткую позицию по одной облигации с погашением в момент s_1 и в то же время покупает α облигаций с погашением в момент s_2 . Совокупное изменение стоимости можно записать в виде

$$-dP(r, t, s_1) + \alpha dP(r, t, s_2) = [-P(r, t, s_1) \mu_p(r, t, s_1) + \alpha P(r, t, s_2) \mu_p(r, t, s_2)]dt + \\ + [-P(r, t, s_1) \sigma_p(r, t, s_1) + \alpha P(r, t, s_2) \sigma_p(r, t, s_2)]dW.$$

Поэтому, если выбрать

$$\alpha \equiv \frac{P(r, t, s_1) \sigma_p(r, t, s_1)}{P(r, t, s_2) \sigma_p(r, t, s_2)},$$

то у совокупной стоимости не будет волатильности и ее доход должен быть безрисковым, т. е.

$$\frac{-P(r, t, s_1) \mu_p(r, t, s_1) + \alpha P(r, t, s_2) \mu_p(r, t, s_2)}{-P(r, t, s_1) + \alpha P(r, t, s_2)} = r.$$

Упрощая это уравнение, получим равенство

$$\frac{\sigma_p(r, t, s_1) \mu_p(r, t, s_2) - \sigma_p(r, t, s_2) \mu_p(r, t, s_1)}{\sigma_p(r, t, s_1) - \sigma_p(r, t, s_2)} = r,$$

которое после перестановки слагаемых превратится в соотношение

$$\frac{\mu_p(r, t, s_2) - r}{\sigma_p(r, t, s_2)} = \frac{\mu_p(r, t, s_1) - r}{\sigma_p(r, t, s_1)}.$$

Поскольку заключительное равенство имеет место при любых s_1 и s_2 , то мы заключаем, что

$$\frac{\mu_p(r, t, s) - r}{\sigma_p(r, t, s)} \equiv \lambda(r, t) \quad (24.10)$$

при некотором λ , которое не зависит от срока погашения облигации s . Поскольку $\mu_p = r + \lambda \sigma_p$, то увеличение средней стоимости любого актива происходит со скоростью, равной сумме краткосрочной ставки плюс некоторая постоянная, умноженная на волатильность этого актива.

Величина $\lambda(r, t)$ называется рыночной ценой риска, поскольку она представляет собой увеличение ожидаемой мгновенной доходности по облигации на единицу риска. Ну а разница $\mu_p(r, t, s) - r$ представляет **премию за риск**. И опять следует подчеркнуть, что рыночная цена риска должна быть одинаковой для любых облигаций, чтобы исключить арбитражные возможности [76].

Предположим, что модель краткосрочной ставки является марковской и описывается уравнением $dr = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW$. Тогда процесс,

описывающий изменение цены облигации, также является марковским. А в силу (14.15)

$$\mu_p = \left[-\frac{\partial P}{\partial T} + \mu(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma(r, t)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] / P, \quad \sigma_p = \left[\sigma(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} \right] / P, \quad (24.11)$$

причем $P(\cdot, T, T) = 1$ при любом T . Отметим, что обе величины μ_p и σ_p зависят от P . Вставим их в равенство (24.10) и получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа:

$$-\frac{\partial P}{\partial T} + [\mu(r, t) - \lambda(r, t) \sigma(r, t)] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(r, t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP. \quad (24.12)$$

Это и есть **уравнение временной структуры** [660, 855]. Численные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных были описаны в п.18.1. А как только функция P получена, то кривая спотовых ставок также «оказывается под рукой», поскольку

$$r(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}.$$

Уравнение временной структуры в действительности применимо ко всем производным инструментам, связанным с процентной ставкой. И разница будет лишь в граничных и заключительных условиях. Это уравнение можно также записать в терминах дюрации $D \equiv (\partial P / \partial r) P^{-1}$, выпуклости $C \equiv (\partial^2 P / \partial r^2) P^{-1}$ и **временной стоимости** $\Theta \equiv (\partial P / \partial t) P^{-1}$ следующим образом:

$$\Theta - [\mu(r, t) - \lambda(r, t) \sigma(r, t)] D + \frac{1}{2} \sigma(r, t)^2 C = r. \quad (24.13)$$

Но в отличие от модели Блэка—Шоулса, уточнение процесса краткосрочной ставки и предположение о том, что рынок облигаций свободен от арбитража, *не* определяют цены облигаций однозначно. Можно указать две причины: процентная ставка не является торгуемой ЦБ и рыночная цена риска не определяется *внутри* модели.

В качестве ограничения для удобства обычно выбирается теория локального оценивания в среднем. В действительности, существует такая вероятностная мера, что стоимость облигаций можно оценивать так, как если бы теория была верна и чтобы арбитражные возможности исключались [492, 493, 746]. В мире, в котором теория локального оценивания в среднем имеет место, $\mu_p(r, t, s) = r$ и рыночная цена риска равна нулю (поправки на риск не нужны) и наоборот. Уравнение временной структуры принимает вид

$$-\frac{\partial P}{\partial T} + \mu(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(r, t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP, \quad (24.14)$$

а уравнение динамики цены облигации упрощается до

$$dP = rP dt + \sigma(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} dW.$$

Рыночная цена риска обычно предполагается равной нулю, если не оговаривается противное. Мы также можем вывести формулу (24.9) для

оценки стоимости облигации в условиях теории локального оценивания в среднем предполагая, что краткосрочная ставка описывается риск-нейтральным процессом:

$$dr = [\mu(r, t) - \lambda(r, t) \sigma(r, t)] dt + \sigma(r, t) dW.$$

Упражнение 24.4.1. Предположим, что для обязательства найден портфель с равной дюрацией. Что можно сказать о взаимосвязи между соответствующими им временными стоимостями и выпуклостями?

Упражнение 24.4.2. Объясните, почему стоимости Европейских опционов на бескупонные облигации удовлетворяют уравнению временной структуры при соответствующих граничных условиях.

Упражнение 24.4.3. Опишите явный метод для решения уравнения временной структуры (24.14). Вы можете упростить процесс краткосрочной ставки до $dr = \mu(r) dt + \sigma(r) dW$. И предположите, что $\mu(r) \geq 0$ и $\sigma(0) = 0$, чтобы не было отрицательных краткосрочных ставок.

Упражнение 24.4.4. Рассмотрим фьючерсный контракт на бескупонную облигацию с датой погашения T_1 . Срок действия фьючерсного контракта истекает в момент T . Пусть $F(r, t)$ обозначает фьючерсную цену, которая удовлетворяет уравнению $dF/F = \mu_f dt + \sigma_f dW$. Докажите, что F удовлетворяет и уравнению

$$-\frac{\partial F}{\partial T} + [\mu(r, t) - \lambda(r, t) \sigma(r, t)] \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(r, t)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0,$$

причем $F(\cdot, T) = P(\cdot, T, T_1)$, а $\lambda \equiv \mu_f / \sigma_f$.

24.5 Процесс форвардной ставки

Предположим, что цена бескупонной облигации описывается уравнением $dP(t, T)/P(t, T) = \mu_p(t, T) dt + \sigma_p(t, T) dW$, как и прежде. Тогда процесс изменения мгновенной форвардной ставки задается уравнением

$$df(t, T) = \left[\sigma_p(t, T) \frac{\partial \sigma_p(t, T)}{\partial T} - \frac{\partial \mu_p(t, T)}{\partial T} \right] dt - \frac{\partial \sigma_p(t, T)}{\partial T} dW.$$

В риск-нейтральной экономике процесс изменения форвардной ставки описывается выражением

$$df(t, T) = \left[\sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds \right] dt - \sigma(t, T) dW, \quad (24.15)$$

где

$$\sigma(t, T) \equiv \frac{\partial \sigma_p(t, T)}{\partial T},$$

поскольку $\mu_p(t, T) = r(t)$ и

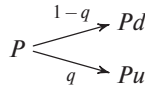
$$\sigma_p(t, T) = \int_t^T \frac{\partial \sigma_p(t, s)}{\partial s} ds.$$

Упражнение 24.5.1. Мотивируйте уравнение (24.15) напрямую.

Упражнение 24.5.2. Какой должна быть функция $\sigma_p(t, T, P)$ из диффузионного слагаемого в представлении для $df(t, T)$, чтобы ее можно было записать в виде $\psi(t) f(t, T)$? Зависимость σ_p от $P(t, T)$ здесь называется явной.

24.6 Биномиальная модель с приложениями

Суть дела можно легко проиллюстрировать с помощью биномиальной модели. Предположим, что цена облигации P может измениться на Pu с вероятностью q и на Pd с вероятностью $1 - q$, где $u > d$:



Тогда математическое ожидание доходности облигации за период равно

$$\hat{\mu} \equiv \frac{qPu + (1-q)Pd}{P} - 1 = qu + (1-q)d - 1, \quad (24.16)$$

а ее дисперсия имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 \equiv q(1-q)(u-d)^2. \quad (24.17)$$

Из всех облигаций цена той, чей срок погашения наступит через один период, изменится с величины $1/(1+r)$ до номинала в \$ 1. Тем самым получаем счет на денежном рынке, моделируемый с помощью краткосрочной ставки. А рыночная цена риска определяется числом $\lambda \equiv (\hat{\mu} - r)/\hat{\sigma}$, по аналогии с равенством (24.10). Ну а чтобы показать, что λ не зависит от срока погашения облигации, можно использовать ту же арбитражную аргументацию, что и в непрерывном случае (см. упр. 24.6.2).

А теперь заменим вероятность q на величину

$$p \equiv q - \lambda \sqrt{q(1-q)} = \frac{(1+r)-d}{u-d}, \quad (24.18)$$

которая не зависит от срока погашения облигации и q . Тогда ожидаемая доходность облигации оказывается равной

$$\frac{pPu + (1-p)Pd}{P} - 1 = pu + (1-p)d - 1 = r.$$

Поэтому при новой вероятностной мере p теория локального оценивания в среднем справедлива¹.

Упражнение 24.6.1. Проверьте справедливость равенства (24.18).

Упражнение 24.6.2. Докажите, что рыночная цена риска не зависит от срока погашения облигации (указание: выберите такой портфель из двух облигаций, чтобы он стал мгновенно безрисковым).

Упражнение 24.6.3. Предположим, что за период цена облигации может измениться с \$1 на P_u или P_d , а стоимость производного инструмента — с \$1 на V_u или V_d .

1) Покажите, что портфель, состоящий из облигаций стоимостью \$1 и $(P_d - P_u)/(V_u - V_d)$ единиц производного инструмента является безрисковым.

2) Докажите, что стоимость производных инструментов в таком количестве равна величине

$$\frac{(R - P_d)V_u + (P_u - R)V_d}{(P_u - P_d)R},$$

где $R \equiv 1 + r$ представляет грубый безрисковый доход.

Упражнение 24.6.4. Для моделирования краткосрочной ставки рассмотрим симметричное случайное блуждание $r(t+1) = \alpha + \rho r(t) \pm \sigma$. И пусть V означает текущую стоимость производного инструмента на процентную ставку, V_u представляет его стоимость в следующем периоде при подъеме ставок, а V_d — при падении. Если положить далее, что $u \equiv e^{\alpha + \rho r(t) + \sigma}/P(t, t+2)$ и $d \equiv e^{\alpha + \rho r(t) - \sigma}/P(t, t+2)$, то ясно, что эти величины представляют грубый доход за период у двухпериодной бескупонной облигации при повышении или при понижении ставок, соответственно.

1) Покажите, что стоимость портфеля из однопериодных облигаций стоимостью \$ B и двухпериодных бескупонных облигаций номинала \$ Δ , будет совпадать со стоимостью производного инструмента, если

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{(u - d)P(t, t+2)}, \quad B = \frac{uV_d - dV_u}{(u - d)e^{r(t)}}.$$

2) Докажите, что

$$V = \frac{pV_u + (1-p)V_d}{e^{r(t)}},$$

где $p \equiv (e^{r(t)} - d)/(u - d)$.

Упражнение 24.6.5. Для того, чтобы при оценке стоимости использовать реальную вероятность q , мы должны дисконтировать по дисконтирующему множителю с подкорректированным риском, равным $1 + r + \lambda \hat{\sigma} = 1 + \hat{\mu}$. Докажите это утверждение.

24.6.1 Численные примеры

В нижеследующих численных примерах, в частности, оценка стоимости опционов фиксированной доходности, ценных бумаг на основе закладных (ЦБЗ) и производных инструментов на ЦБЗ, рассматривается в предположении, что кривая спот-ставок имеет следующий вид:

Год	1	2
Спот-ставка	4 %	5 %

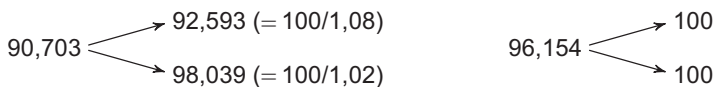
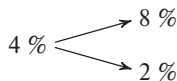


Рис. 24.1. Процессы изменения цены облигации. Процесс изменения цены 2-летней бескупонной облигации слева, а 1-летней — справа.

Предположим, что 1-летняя ставка (краткосрочная ставка) может через год подняться до 8 % или опуститься до 2 %:



Соответствующие реальные вероятности не уточняются. Тогда цены одно- и двухлетних безкупонных облигаций равны $100/1,04 = 96,154$ и $100/(1,05)^2 = 90,703$ соответственно. Более того, они подчиняются биномиальным процессам из рис. 24.1.

Оценку стоимости производных инструментов можно упростить, если мы предположим, что все инвесторы риск-нейтральны. Если у всех ЦБ одна и та же ожидаемая однопериодная доходность, равная безрисковой ставке, то имеет место представление

$$(1-p) \times \frac{92,593}{90,703} + p \times \frac{98,039}{90,703} - 1 = 4 \%,$$

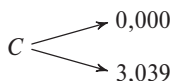
в котором p означает риск-нейтральную вероятность повышения ставок. Решая это уравнение находим, что $p = 0,319$. Стоимость условных требований по процентной ставке можно оценивать при этой вероятности.

Упражнение 24.6.6. Мы бы не смогли получить единственную риск-нейтральную вероятность, если бы не сказали, что существующая временная структура должна быть воспроизводима. Объясните.

Упражнение 24.6.7. Проверьте, что риск-нейтральная вероятность $p = 0,319$ может быть получена с помощью равенства (24.18).

24.6.2 Опционы с фиксированным доходом

У 1-летнего Европейского опциона колл на 2-летнюю бескупонку с ценой исполнения \$95 выплата представлена справа на диаграмме:



Чтобы найти стоимость опциона C , мы строим дубликат опциона колл с помощью портфеля из x 1-летних и y 2-летних бескупонков. Тем самым приходим к уравнениям

$$\begin{cases} x \times 100 + y \times 92,593 = 0,000, \\ x \times 100 + y \times 98,039 = 3,039, \end{cases}$$

из которых находим, что $x = -0,5167$ и $y = 0,5580$. Следовательно,

$$C = x \times 96,154 + y \times 90,703 \approx 0,93,$$

если мы хотим уйти от арбитража. Заметим, что эта цена получена без использования какой-либо версии теории оценивания в среднем; вместо этого мы установили безарбитражную цену, дублируя требование с помощью инструмента денежного рынка и его базового актива. Цена условного требования на процентную ставку прямо не зависит от вероятностей. В действительности, зависимость имеет место лишь косвенно, через посредство текущих цен облигаций (см. упр. 24.6.6).

Эквивалентным является метод риск-нейтральной оценки стоимости. Стоимость предыдущего опциона колл при $p = 0,319$ равна

$$C = \frac{(1-p) \times 0 + p \times 3,039}{1,04} \approx 0,93,$$

т.е. она та же, что и прежде. Но это и не удивительно, поскольку арбитражная свобода и существование риск-нейтральной экономики эквивалентны.

Упражнение 24.6.8 (динамическая иммунизация). Объясните, почему идея дублирования решает проблему арбитражных возможностей при иммунизации от параллельных сдвигов, поднятую в п. 5.8.2.

24.6.3 Цены фьючерсов и форвардов

У 1-летнего фьючерсного контракта на 1-летнюю ставку выплата равна $100 - r$, где r есть 1-летняя ставка при окончании срока действия, как показано ниже:

$$F \begin{cases} \rightarrow 92 (= 100 - 8) \\ \rightarrow 98 (= 100 - 2) \end{cases}$$

Поскольку фьючерсная цена F является ожидаемым значением будущей выплаты (см. упр. 13.2.11), то $F = (1-p) \times 92 + p \times 98 = 93,914$. С другой стороны, цена форварда для 1-летнего форвардного контракта на 1-летнюю бескупонную облигацию равна $90,703/96,154 = 94,331\%$. Т.е. цена форварда выше цены фьючерса, как и было предсказано в упр. 12.3.3.

24.6.4 Ценные бумаги на закладных (ЦБЗ)

Рассмотрим 2-летние ЦБЗ с 5%-купонами, но без амортизации, предоплаты и риска неплатежеспособности. Ее денежный поток и процесс изменения цены проиллюстрированы на рис. 24.2, а ее справедливая цена

$$M = \frac{(1-p) \times 102,222 + p \times 107,941}{1,04} = 100,045.$$

Те же результаты можно было бы получить и с помощью безарбитражных соображений.

В действительности по закладным может быть предусмотрена и предоплата. Предположим, что рассматриваемая ЦБ допускает предоплату по номиналу и подобное решение может иметь смысл, если решение

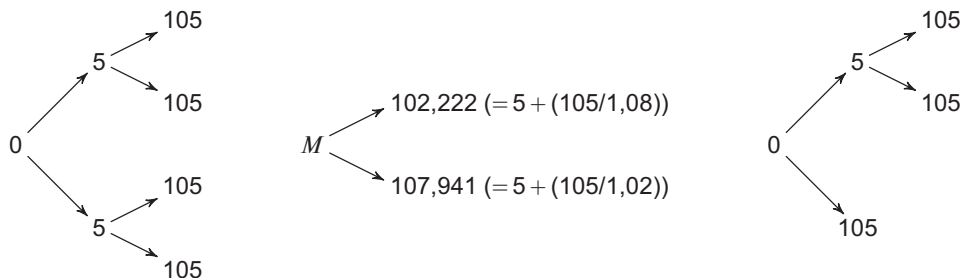
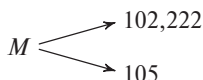


Рис. 24.2. Процессы поступления выплат и изменения цены у ЦБЗ. На диаграмме слева представлены поступающие суммы в случае без предоплаты, а справа — с предоплатой. В центре проиллюстрирован процесс изменения цены в случае без предоплаты.

о предоплате принимается лишь тогда, когда цена закладной оказывается выше номинала. Поэтому предоплата пройдет лишь в «нижнем» положении, т.е. когда цена ЦБ окажется равной 102,941 (исключая купонную выплату). Следовательно, цену будет описывать процесс



а стоимость ЦБ окажется равной

$$M = \frac{(1-p) \times 102,222 + p \times 105}{1,04} = 99,142.$$

Перейдем далее к оценке стоимости **разделенных ЦБ на закладных (РЦБЗ)**; имеется в виду «разделенных на части», опираясь на рассмотренный случай закладной с предоплатой. Денежный поток **части, состоящей только из погашений (ТПО)**, составлен из погашающих сумм по закладной, а денежный поток **части, состоящей только из процентов (ТПР)**, составлена лишь из процентных выплат по закладной (см. рис. 24.3 (а)). Цены же этих частей меняются в соответствии с рис. 24.3 (б). Справед-

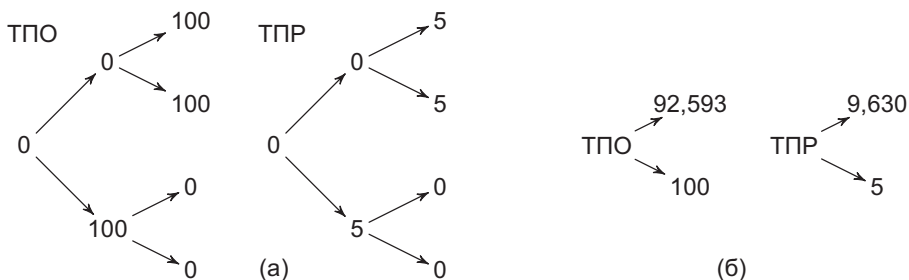


Рис. 24.3. Денежные потоки и процессы изменения цен частей ТПО и ТПР. Цена 9,360 возникает как сумма $5 + (5/1,08)$.

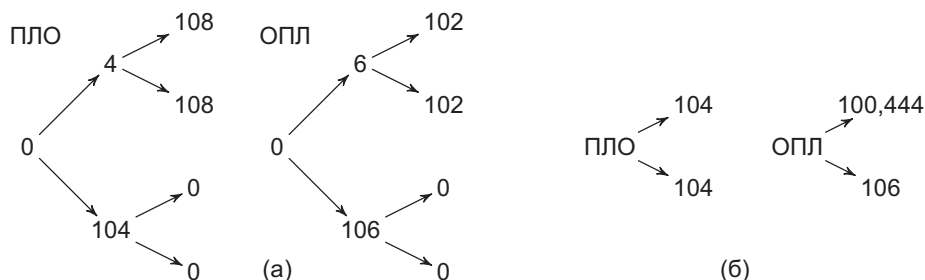


Рис. 24.4. Денежные потоки и процессы изменения цен пловца и обратного пловца. Цена пловца 104 в верхнем узле возникает как сумма $4 + (108/1,08)$, а цена обратного пловца $100,444 = 6 + (102/1,08)$.

ливые цены поэтому равны

$$\text{ТПО} = \frac{(1-p) \times 92,593 + p \times 100}{1,04} = 91,304, \quad \text{ТПР} = \frac{(1-p) \times 9,630 + p \times 5}{1,04} = 7,839.$$

И, конечно, $\text{ТПО} + \text{ТПР} = M^2$.

Вышеприведенные формулы показывают, что части ТПО и ТПР реагируют на изменения параметра p по-разному. Стоимость части ТПО с ростом p возрастает, в то время как стоимость части ТПР с ростом p убывает. Предположим, что рыночная цена риска положительна и потому реальная вероятность q превышает риск-нейтральную вероятность p . Тогда рыночная стоимость части ТПО, подобно стоимости бескупонной облигации, меньше, чем ее дисконтированное ожидаемое значение при q , что компенсирует инвесторов за их рискованность тем, что они получают в среднем больше, чем безрисковый доход. Рыночная стоимость части ТПР, однако, выше, чем ее дисконтированное ожидаемое значение при q , а это позволяет зарабатывать по ЦБ *меньше, чем* безрисковая ставка, несмотря на то, что она является рискованной ЦБ. Причина состоит в том, что цены части ТПО и бескупонной облигации имеют отрицательную корреляцию.

Предположим, что закладная делится на следующие две части: половину **пловца** и половину **обратного пловца***). Пусть пловец (ПЛО) получает 1-летнюю ставку. Тогда обратный пловец (ОПЛ) в качестве купонной ставки должен иметь (10 % 1-летнюю ставку), чтобы общая купонная ставка составляла 5 %. Соответствующие им денежные потоки и стоимости представлены на рис. 24.4. Текущие цены равны

$$\text{ПЛО} = \frac{1}{2} \times \frac{104}{1,04} = 50, \quad \text{ОПЛ} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-p) \times 100,444 + p \times 106}{1,04} = 49,142.$$

*) Floater (буквальный перевод: «нечто плавающее») мы перевели как «пловец». Под этим названием имеется в виду долговой инструмент с переменной ставкой, например, со ставкой, которая выплачивается по векселям Казначейства (ВК). Название «обратный пловец» для второй половины закладной объясняется тем, что его ставка получается по принципу дополнения. — Прим. перев.

Упражнение 24.6.9. Объясните, почему все ЦБ, упоминаемые до настоящего времени, имеют одну и ту же 1-летнюю доходность в риск-нейтральной экономике, равную 4%.

Упражнение 24.6.10. Проверьте, что стоимость Европейского опциона пут подобно стоимости части ТПР убывает с ростом r .

24.7 Модели Блэка—Шоулса

Несколько моделей процентной ставки основаны на модели оценки стоимости опционов Блэка—Шоулса или связанной с ней модели Блэка. В основном они отличаются лишь тем, что моделируется: цена или доходность. Несмотря на простоту этих моделей и некоторые трудности при их использовании, они как правило позволяют получать приличные результаты для опционов с небольшими сроками действия [305, 456].

24.7.1 Модели цены

Предположим, что цена долгосрочной облигации подчиняется геометрическому броуновскому движению, во многом подобно цене акции. Как и в случае опционов на акцию опционы на облигацию можно продублировать при помощи непрерывной торговли этими облигациями и заимствованию по существующей краткосрочной ставке. Поэтому формула Блэка—Шоулса (12.16) применима.

С этой моделью оценки стоимости связаны несколько проблем. Непоследовательно предполагать, что краткосрочная ставка постоянна — это требуется в модели Блэка—Шоулса оценки стоимости опционов, — а цена долгосрочной облигации случайна. Другое возражение относится к волатильности цен облигаций. Хотя сначала эта волатильность и должна возрастать с ростом времени, но в конечном счете она должна уменьшаться до нуля, поскольку стоимость облигации при истечении срока действия сходится к номиналу. Другими словами, неопределенность цены мала в ближайшем будущем и около момента погашения, но велика в промежутке между этими крайними значениями (см. рис. 24.5). Это уникальное свойство не «ухватывается» предыдущей моделью, в которой предполагается, что дисперсия цены облигации возрастает со временем линейно.

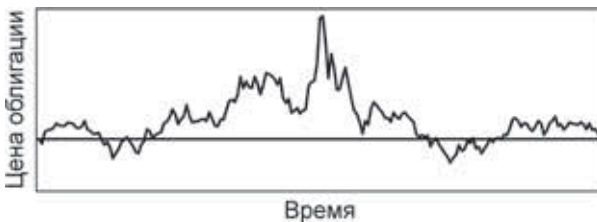


Рис. 24.5. Стремление цен облигаций к номиналу. Волатильность цены облигации изменяется со временем.

Предположение логнормальности цены бескупонной облигации означает, что процентная ставка непрерывного начисления распределена нормально. Но с этим распределением связаны три проблемы: возможность отрицательных значений у процентной ставки, независимость волатильности процентной ставки от ее уровня, а также возможность роста цены облигации выше суммы порождающих ее элементов денежного потока.

Упражнение 24.7.1. Предположим, что процентные ставки не могут быть отрицательными.

1) Почему стоимость опциона колл на бескупонную облигацию с ценой исполнения \$ 102 должна быть нулевой при номинале в \$ 100?

2) По формуле Блэка—Шоулса получается, что стоимость опциона колл положительна. Почему?

Упражнение 24.7.2. Рассмотрим опцион колл на бескупонную облигацию с датой окончания срока действия, которая совпадает с моментом погашения облигации. Зависит ли премия по этому опциону от движений процентной ставки от настоящего момента до даты окончания?

24.7.2 Модели доходности

Рассмотрим альтернативную модель, которая геометрическим броуновским движением описывает доходность до погашения, а не цену облигации. Она позволяет избавиться от нескольких проблем, которые «отравляли» предыдущую модель. Для начала заметим, что поскольку теперь доходность до погашения имеет логнормальное распределение, то отрицательные процентные ставки невозможны. Далее, так как цена облигации в любой момент времени определяется по распределению вероятностей доходности, то она будет иметь как свойство уменьшения волатильности цены, так и свойство стремления к номиналу по мере приближения к моменту погашения облигации.

Но у этой модели свои сложности. Известно, что в биномиальной постановке для избавления от арбитража величина однопериодной безрисковой ставки должна находиться между сдвигами однопериодной доходности облигации вверх и, соответственно, вниз (см. упр.9.2.1). Однако, если безрисковая ставка постоянна, то добиться этого может оказаться весьма сложно, особенно в связи с тем, что оба выражения для дохода, верхнее и нижнее, в конечном счете оба сближаются с единицей, поскольку имеет место стремление цены к номиналу. Другая проблема состоит в том, что волатильность доходности постоянна на протяжении жизни облигации; в действительности же она уменьшается при увеличении срока погашения.

24.7.3 Модели на базе броуновского моста

Поскольку стоимость бескупонной облигации приближается к номиналу вблизи даты погашения, то процесс броуновский мост представляется идеальным для моделирования динамики цен таких облигаций

[50]. Напомним, что броуновский мост $\{B(t), 0 \leq t \leq T\}$ можно определить равенством

$$B(t) = W(t) - \frac{t}{T} W(T).$$

Заметим, что $B(0) = B(T) = 0$. Поэтому модель изменения цены облигации $P(t, T) = e^{r(t-T) + \sigma B(t)}$ очевидно, обладает искомым свойством стремления к номиналу, поскольку $P(T, T) = 1$. Однако некоторые модели, основанные на броуновском мосту не являются безарбитражными и тем самым недостаточно хорошо отражают действительность [193].

Дополнительная литература

С теорией, на которую опираются модели временной структуры, можно познакомиться с помощью [38, 76, 290, 510, 691, 725, 731]. В п. 24.6.1 мы следовали монографии [34].

Примечания

1. Отметим, что выражение (24.18) идентично риск-нейтральной вероятности (9.5) из БМОО.

2. Вы можете заказать либо цельное молоко, либо молоко со снятыми сливками и нужное количество самих сливок. Оба варианта заказа будут стоить одинаково!

25 Равновесные модели временной структуры

8. Какие у Вас проблемы? Любой идиот может разобраться в моделях оценки стоимости облигаций.

Десять самых известных неправд, о которых профессора по финансам рассказывают своим студентам¹

Многие модели процентной ставки уже были предложены в литературе и использованы на практике. В этой главе делается обзор равновесных моделей, а в следующей будут рассмотрены безарбитражные модели. Поскольку спот-ставки удовлетворяет равенству

$$r(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t},$$

то для получения кривой спот-ставок достаточно иметь дисконтирующую функцию $P(t, T)$. Большая часть моделей, которые мы рассмотрим, являются моделями краткосрочной ставки, в которых краткосрочная ставка оказывается единственным источником неопределенности. Если не оговаривается противное, то рыночная цена риска λ предполагается нулевой; поэтому процессы, с которых мы начинаем, являются риск-нейтральными.

25.1 Модель Васичека

Васичек [855] предложил модель, в которой краткосрочная ставка удовлетворяет уравнению

$$dr = \beta(\mu - r) dt + \sigma dW.$$

Краткосрочная ставка, таким образом, устремляется к долгосрочному среднему уровню μ со скоростью β . Накладывающимся на это «притягивание» является нормально распределенное случайное слагаемое σdW . Идея возвращения к среднему в отношении процентных ставок восходит еще к Кейнсу [232]. Подходящей эта модель представляется для процентных ставок в Германии и Соединенном Королевстве [248].

Поскольку процесс является процессом Орнштейна—Уленбека, то

$$E(r(T) | r(t) = r) = \mu + (r - \mu)e^{-\beta(T-t)},$$

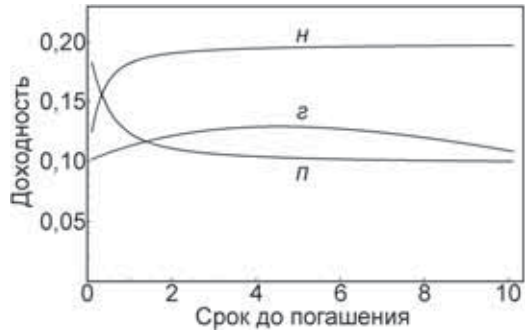
как следует из уравнения (14.13). Уравнение временной структуры в модели Васичека имеет вид

$$-\frac{\partial P}{\partial T} + \beta(\mu - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP.$$

Можно показать, что цена бескупонной облигации, по которой один доллар выплачивается при погашении, есть

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (25.1)$$

Рис. 25.1. Формы временной структуры. Параметры (β, μ, σ, r) принимают значения $(5, 9, 0, 2, 0, 3, 0, 1)$, $(3, 9, 0, 1, 0, 3, 0, 2)$ и $(0, 1, 0, 4, 0, 11, 0, 1)$ при нормальной (n), перевернутой (n) и горбатой (g) временной структуре, соответственно.



где

$$A(t, T) = \begin{cases} \exp \left[\frac{\{B(t, T) - T + t\}(\beta^2 \mu - \sigma^2/2)}{\beta^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\beta} \right], & \text{если } \beta \neq 0, \\ \exp \left[\frac{\sigma^2 (T-t)^3}{6} \right], & \text{если } \beta = 0, \end{cases}$$

$$B(t, T) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta}, & \text{если } \beta \neq 0, \\ T - t, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

У этой модели есть и ряд неприятных свойств; например, если $\beta = 0$, то P стремится к бесконечности при $T \rightarrow \infty$, как в модели Мертона. Однако, если $\beta \neq 0$, то P весьма заметно приближается к нулю при $T \rightarrow \infty$. Но даже при этом P может превзойти единицу при конечном T . На рис. 25.1 представлены возможные формы кривой спот-ставок. Структура волатильности спот-ставок описывается кривой $[\partial r(t, T)/\partial r]\sigma = \sigma B(t, T)/(T-t)$. Если $\beta > 0$, то эта кривая стремится убывать с ростом срока до погашения. Скорость β возвращения к среднему контролирует форму кривой; в самом деле, при больших значениях β с увеличением срока до погашения возникает большее ослабление волатильности. Нетрудно проверить, что дюрация $-\frac{\partial P(t, T)/\partial r}{P(t, T)}$ равна $B(t, T)$. Дюрация уменьшается, приближаясь к $1/\beta$ с увеличением срока, если возвращение к среднему имеет место ($\beta > 0$). С другой стороны, дюрация равняется сроку до погашения $T-t$, если возвращения к среднему нет ($\beta = 0$), совсем как в статическом мире. Интересно и то, что дюрация не зависит от волатильности процентной ставки σ .

Упражнение 25.1.1. Свяжите модель Васичека с процессом AR(1).

Упражнение 25.1.2. 1) Покажите, что долгосрочная ставка равна $\mu - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}$ независимо от текущей краткосрочной ставки.

2) Найдите выражение для премии за ликвидность в случае $\beta \neq 0$.

Упражнение 25.1.3. Покажите, что выражение (25.1) удовлетворяет уравнению временной структуры.

Упражнение 25.1.4. Проверьте, что цена облигации в модели Васичека удовлетворяет уравнению $dP/P = r dt - B(t, T) \sigma dW$.

Упражнение 25.1.5. Покажите, что мгновенная форвардная ставка $f(t, T)$ в модели Васичека с $\beta \neq 0$ удовлетворяет процессу Ито

$$df = \frac{\sigma^2}{\beta} e^{-\beta(T-t)} [1 - e^{-\beta(T-t)}] dt + \sigma e^{-\beta(T-t)} dW$$

(указание: см. п. 24.5 и упр. 25.1.4).

25.1.1 Опционы на бескупонные облигации

Рассмотрим Европейский опцион колл с ценой исполнения X и сроком действия, истекающим в момент T , на бескупонную облигацию номинала \$1 и с погашением в момент $s > T$. Его цена определяется следующей формулой, похожей на формулу Блэка—Шоулса [506]:

$$P(t, s) \Phi(x) - X P(t, T) \Phi(x - \sigma_v),$$

где

$$x \equiv \frac{1}{\sigma_v} \ln \left(\frac{P(t, s)}{P(t, T) X} \right) + \frac{\sigma_v}{2}, \quad \sigma_v \equiv v(t, T) B(T, s),$$

$$v(t, T)^2 \equiv \begin{cases} \frac{\sigma^2 [1 - e^{-2\beta(T-t)}]}{2\beta}, & \text{если } \beta \neq 0, \\ \sigma^2 (T-t), & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $v(t, T)^2$ представляет собой дисперсию с.в. $r(t, T)$ в силу (14.14). Паритет пут—колл утверждает, что $(C - \text{стоимость опциона колл})$

$$C = P + P(t, s) - P(t, T) X.$$

Поэтому стоимость P Европейского опциона пут описывается величиной $X P(t, T) \Phi(-x + \sigma_v) - P(t, s) \Phi(-x)$.

Упражнение 25.1.6. Покажите, что дисперсия $\ln P(t, T)$ равна σ_v^2 .

25.1.2 Биномиальное приближение

Рассмотрим биномиальную модель краткосрочной ставки во временном промежутке $[0, T]$, поделенном на n одинаковых частей. Пусть $\Delta t \equiv T/n$ и

$$p(r) \equiv \frac{1}{2} + \frac{\beta(\mu - r)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}.$$

Следующая биномиальная модель сходится к модели Васичека по распределению [696]:

$$r(k+1) = r(k) + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi(k), \quad 0 \leq k < n;$$

здесь $\xi(k)$ независимы при различных k , принимают значения ± 1 и

$$P\{\xi(k) = 1\} = \begin{cases} p(r(k)), & \text{если } 0 \leq p(r(k)) \leq 1, \\ 0, & \text{если } p(r(k)) < 0, \\ 1, & \text{если } 1 < p(r(k)). \end{cases}$$

Заметим, что вероятность p движения вверх является убывающей функцией процентной ставки r . Это вполне согласуется со свойством возвращения к среднему.

Ставка принимает то же значение независимо от того, появляется ли она в результате сначала движения вверх, а затем вниз, или наоборот, сначала вниз, а затем вверх; иными словами, узлы биномиального дерева сочетаются друг с другом. Ключевое свойство модели, которое и гарантирует эту его характеристику, состоит в том, что ее волатильность σ постоянна. Для более общего процесса Y с непостоянной волатильностью, у возникающего в результате биномиального дерева узлы на следующем шаге могут и не совпадать. Но к счастью, если процесс Y можно преобразовать в другой процесс с постоянной волатильностью, скажем, X , то сначала мы можем построить дерево с сочетающимися узлами для X , а затем применить обратное преобразование в каждом узле и получить дерево с сочетающимися узлами для Y . Эта идея будет использована в п. 25.2.2.

Упражнение 25.1.7. Докажите, что

$$\frac{E(r(k+1) - r(k))}{\Delta t} = \begin{cases} \beta[\mu - r(k)], & \text{если } 0 \leq p(r(k)) \leq 1, \\ \sigma/\sqrt{\Delta t}, & \text{если } p(r(k)) < 0, \\ -\sigma/\sqrt{\Delta t}, & \text{если } 1 < p(r(k)), \end{cases}$$

а $D(r(k+1) - r(k)) \rightarrow \sigma^2 \Delta t$.

Упражнение 25.1.8. Покажите, что дискретизация модели Васичека непосредственно по аналогии с (14.7) не приведет к биномиальному дереву с сочетающимися узлами.

Задание по программированию 25.1.9. Напишите программу реализации биномиального дерева для модели Васичека. Оцените стоимость бескупонных облигаций и сравните результаты с получаемыми при использовании формулы (25.1).

25.2 Модель Кокса—Ингерсолла—Росса

Кокс, Ингерсолл и Росс (КИР) предложили следующую модель краткосрочной ставки с квадратным корнем [234]:

$$dr = \beta(\mu - r) dt + \sigma\sqrt{r} dW. \quad (25.2)$$

Хотя изменяющаяся случайным образом процентная ставка эластично притягивается к долгосрочному среднему значению μ , как в модели Васичека, но диффузия на этот раз отличается множителем $\sqrt{r}$. Параметр β определяет скорость корректировки. Краткосрочная ставка может принять значение ноль лишь если $2\beta\mu < \sigma^2$.

Цена бескупонной облигации, по которой при погашении выплачивается \$1, равна [470]

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) r(t)}, \quad (25.3)$$

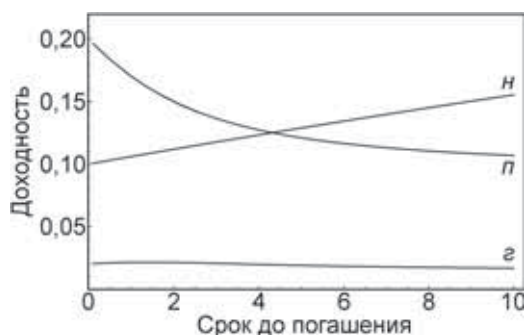


Рис. 25.2. Типы временной структуры. Параметры (β, μ, σ, r) принимают значения $(0,02, 0,7, 0,02, 0,1)$, $(0,7, 0,1, 0,3, 0,2)$ и $(0,06, 0,09, 0,5, 0,02)$ при нормальной (n), перевернутой (n) и горбатой ($г$) временной структуре, соответственно. Долгосрочные ставки равны 0,512436, 0,0921941 и 0,0140324.

где

$$A(t, T) = \left\{ \frac{2\gamma e^{(\beta+\gamma)(T-t)/2}}{(\beta+\gamma)[e^{\gamma(T-t)} - 1] + 2\gamma} \right\}^{2\beta\mu/\sigma^2}, \quad B(t, T) = \frac{2[e^{\gamma(T-t)} - 1]}{(\beta+\gamma)[e^{\gamma(T-t)} - 1] + 2\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}.$$

Формула для консолей (в этой модели) также имеется в наличии [266]. На рис. 25.2 приведены и формы кривой спот-ставок. Вообще говоря, кривая нормальна, если текущая краткосрочная ставка $r(t)$ оказывается ниже долгосрочной ставки $r(t, \infty)$, становится перевернутой, если $r(t) > \mu$, и является слегка горбатой, если $r(t, \infty) < r(t) < \mu$ [493]. На рис. 25.3 представлены долгосрочные ставки и дюрация бескупонных облигаций. Чтобы включить рыночную стоимость риска в цену облигаций, следует заменить все β в $A(t, T)$ (за исключением показателя экспоненты $2\beta\mu/\sigma^2$), $B(t, T)$ и γ на $\beta + \lambda$. О других свойствах процесса с квадратным корнем можно прочитать в п. 14.3.2.

Два следствия из модели КИР находятся в явном несоответствии с экспериментальными данными: постоянная долгосрочная ставка и полная корреляция изменений доходности на протяжении всей временной структуры. Модель КИР была подвергнута большому количеству экспе-

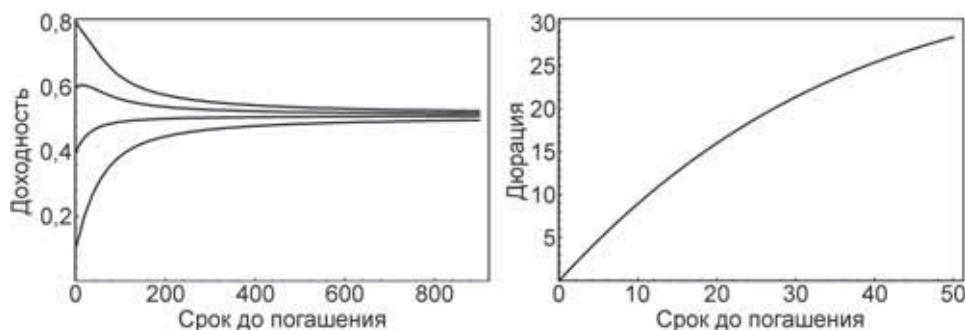


Рис. 25.3. Долгосрочные ставки и дюрация в модели КИР. Параметры (β, μ, σ) принимают значения $(0,02, 0,7, 0,02)$. Графики долгосрочных ставок в качестве начальных значений используют ставки 0,8, 0,6, 0,4 и 0,1. Дюрация бескупонных облигаций использует значение $r = 0,1$.

риментальных проверок (см., например, [11, 135, 138, 173, 257, 384, 835]). Вплоть до 1992 г. казалось, что эта модель хорошо описывает временную структуру *реальных* процентных ставок в Соединенном Королевстве [137] (реальные ставки, вообще говоря, были менее волатильны, чем номинальные). Она представляется вполне подходящей и к ситуации в Дании и Швеции [248].

Упражнение 25.2.1. Покажите, что долгосрочная ставка равна $2\beta\mu/(\beta + \gamma)$ независимо от краткосрочной.

Упражнение 25.2.2. Покажите, что функция (25.3) удовлетворяет уравнению временной структуры.

Упражнение 25.2.3. Убедитесь в том, что цена облигации в модели КИР удовлетворяет уравнению $dP/P = r dt - B(t, T)\sigma\sqrt{r} dW$.

Упражнение 25.2.4 (аффинные модели). Покажите, что в любой модели краткосрочной ставки вида $dr = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW$, для которой цена бескупонной облигации $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$, структуру волатильности спот-ставки описывает функция $\sigma(r, t) B(t, T)/(T - t)$.

Упражнение 25.2.5. 1) Запишите формулу для цены облигации с помощью функций $\varphi_1 \equiv \gamma$, $\varphi_2 \equiv (\beta + \gamma)/2$ и $\varphi_3 \equiv 2\beta\mu/\sigma^2$.

2) Как мы будем оценивать σ при данных оценках для φ_1 , φ_2 и φ_3 ?

Упражнение 25.2.6. Рассмотрим опцион на кривую доходности с выплатой $\max(0, r(T, T_1) - r(T, T_2))$ при окончании срока действия T , где $T < T_1$ и $T < T_2$. Эта ЦБ основана на спреде доходности двух различных сроков погашения, $T_1 - T$ и $T_2 - T$. Предположите, что имеет место модель КИР или Васичека. Покажите, что тогда такой опцион эквивалентен портфелю шапочек на $(T_2 - T)$ -летнюю спот-ставку.

Задание по программированию 25.2.7. Реализуйте явный метод из упр. 24.4.3 для бескупонных облигаций в модели КИР.

25.2.1 Биномиальное приближение

Предположим, что мы хотим получить дискретную аппроксимацию процесса краткосрочной ставки во временном промежутке $[0, T]$, разделенном на n периодов длительности $\Delta t \equiv T/n$. И будем считать, что $\mu, \beta \geq 0$. Непосредственная дискретизация нашего процесса не годится, поскольку у получающегося в результате дерева узлы *не* будут сочетаться (см. упр. 25.2.14 (1)). Рассмотрим поэтому преобразованный процесс $x(r) \equiv 2\sqrt{r}/\sigma$, который удовлетворяет уравнению

$$dx = m(x) dt + dW,$$

где $m(x) \equiv \frac{2\beta\mu}{\sigma^2 x} - \frac{\beta x}{2} - \frac{1}{2x}$. Поскольку у этого процесса волатильность постоянна, то у связанного с ним биномиального дерева узлы сочетаются.

Дерево с сочетающимися узлами для процесса r можно построить следующим образом. Сначала строим дерево для процесса x . Затем преобразуем значение процесса в каждом узле полученного дерева с помощью обратного преобразования $r = f(x) \equiv x^2 \sigma^2 / 4$ (см. рис. 25.4). Вероятность

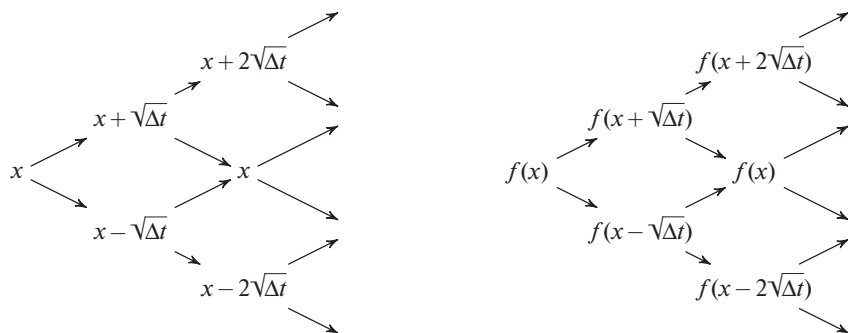


Рис. 25.4. Биномиальное дерево для модели КИР.

движения вверх в каждом узле со значением r равна

$$p(r) \equiv \frac{\beta(\mu - r)\Delta t + r - r^-}{r^+ - r^-}, \quad (25.4)$$

где $r^+ \equiv f(x + \sqrt{\Delta t})$ обозначает значение, получающееся при движении вверх из r , а $r^- \equiv f(x - \sqrt{\Delta t})$ — в результате движения вниз [268, 696, 746]. Наконец, полагаем вероятность $p(r)$ равной единице, если значение r опускается до нуля, чтобы сама вероятность оставалась всегда между нулем и единицей. Алгоритм приведен на рис. 25.5.

Биномиальная модель КИР для бескупонных облигаций:

ввод: $\tau, r, \beta, \mu, \sigma, n$;

действительные числа $r^+, r^-, r', x, x', p, \Delta t, \Delta x, P[0..n]$;

целые i, j ;

$\Delta t := \tau/n$;

$x := 2\sqrt{r}/\sigma$;

$\Delta x := \sqrt{\Delta t}$;

для $(i = 0 \text{ до } n) \{ P[i] := 1; \}$

для $(j = n - 1 \text{ вниз до } 0) \{$

 для $(i = 0 \text{ до } j) \{$

$x' := x + (j - 2i) \Delta x$;

$r' := x'^2 \sigma^2 / 4$;

$r^+ := (x' + \Delta x)^2 \sigma^2 / 4$;

$r^- := (x' - \Delta x)^2 \sigma^2 / 4$;

 если $[r' = 0] \{ p := 1; \}$

 в противном случае $\{ p := (\beta(\mu - r') \Delta t + r' - r^-) / (r^+ - r^-); \}$

 если $[p < 0] \{ p := 0; \}$

 если $[p > 1] \{ p := 1; \}$

$P[i] := (p \times P[i] + (1 - p) \times P[i + 1]) / e^{r' \Delta t}$;

 }

}

вывод $P[0]$;

Рис. 25.5. Биномиальная модель КИР для бескупонных облигаций.

В качестве конкретного примера рассмотрим процесс

$$dr = 0,2(0,04 - r) dt + 0,1\sqrt{r} dW$$

на интервале $[0, 1]$ и при данной начальной ставке $r(0) = 0,04$. Для биномиального приближения используем $\Delta t = 0,2$ (года). На рис. 25.6 (а) показано возникающее в результате биномиальное дерево краткосрочной процентной ставки с указанными в скобках вероятностями движений вверх. Чтобы познакомить читателя с тем, как возникают указанные числа, рассмотрим узел, который появляется в результате движения вверх из корня. Поскольку значение x в корне равно $2\sqrt{r(0)}/\sigma = 4$, то искомое значение x равно $4 + \sqrt{\Delta t} = 4,4472135955$. Далее используем обратное преобразование, чтобы получить соответствующее значение краткосрочной ставки $r = x^2 \times (0,1)^2/4 \approx 0,0494442719102$ (здесь $x = 4,4472135955$!). Другие значения краткосрочной ставки могут быть получены аналогично.

Как только краткосрочные ставки оказываются на своих местах, расчет вероятностей не представляет труда. Отметим, что вероятности движения вверх уменьшаются с увеличением процентной ставки и увеличиваются с ее уменьшением. Этот факт вполне согласуется со свойством возвращения к среднему.

Упражнение 25.2.8. Найдите $E(r(k+1) - r(k))$ и $D(r(k+1) - r(k))$.

Упражнение 25.2.9. Покажите, что $p(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(x(r))\sqrt{\Delta t}$.

Задание по программированию 25.2.10. Напишите программу для реализации биномиального дерева краткосрочной ставки и дерева цены облигации для модели КИР. Сравните результаты с полученными по формуле (25.3).

Динамика временной структуры. Дерево краткосрочных ставок можно использовать для расчета цен однопериодных облигаций (подчеркнутые числа на рис. 25.6 (б)). Например, ставка $0,05988854382$, возникающая после двух движений вверх, приводит к цене

$$e^{-0,05988854382 \times 0,2} = 0,988093738447.$$

Цены однопериодных облигаций и теория локального оценивания в среднем полностью определяют эволюцию временной структуры на рис. 25.6 (б) следующим образом. Предположим, что нам нужно узнать цену t -периодной бескупонной облигации в узле A при условии, что в двух следующих узлах известны цены $(t-1)$ -периодных бескупонных облигаций P_u (движение вверх) и P_d (движение вниз). И пусть вероятность движения вверх есть p . Тогда искомая цена равна

$$P_A(pP_u + (1-p)P_d),$$

где P_A — цена однопериодной облигации в узле A . Например, цена 5-периодной бескупонной облигации в момент ноль, $0,960831229521$, может быть получена с использованием величин $P_A = 0,992031914837$, $p = 0,472049150276$, $P_u = 0,961665706744$ и $P_d = 0,974702907786$. Если же под рукой имеются дисконтирующие множители, то их можно использовать для получения спот-ставок. Например, спот-ставки момента ноль

окажутся равными (0,04, 0,039996, 0,0399871, 0,0399738, 0,0399565), если опираться на рис. 25.6 (б).

Упражнение 25.2.11. Предположим, что мы хотим вычислить цену некоторой ЦБ, чувствительной к процентной ставке, используя биномиальное дерево для моделей КИР или Васичека. И будем считать также, что мы выбираем метод Монте-Карло с противоположно направленными переменными. Одна из трудностей, связанных со стандартной идеей, изложенной в п. 18.2.3 состоит в том, что в рассматриваемом случае вероятности в каждом узле меняются и потому все траектории уже не являются равновероятными. Как справиться с этой трудностью?

Упражнение 25.2.12. 1) Построение биномиального дерева краткосрочной ставки, как было указано, требует объема памяти $O(n^2)$. Как проводить обратную индукцию на дереве при объеме памяти в $O(n)$?

2) Опишите схему, которая для построения дерева цены облигации требует лишь объема памяти $O(n^2)$.

Сходимость. Биномиальная аппроксимация сходится быстро. Например, используя теоретическую формулу (25.3), можно получить следующие рыночные дисконтирующие множители моментов ноль и Δt , после движения вверх.

Год	Дисконтирующие множители	
	сейчас	через Δt ; верхнее состояние
0,2	0,992032	0,990197
0,4	0,984131	0,980566
0,6	0,976299	0,971102
0,8	0,968536	0,961804
1,0	0,960845	

Можно убедиться в том, что числа, полученные с помощью биномиальной модели на рис. 25.6 (б), оказываются достаточно близкими к реальным даже при $\Delta t = 0,2$. В действительности же мы могли бы начать с дерева краткосрочных ставок и получить цены бескупонной облигации в заключительных узлах с помощью формулы (25.3). Это приятное свойство, возможное благодаря наличию точных формул, может ускорить оценку стоимости производных инструментов. Ведь нам нужно построить дерево лишь вплоть до момента погашения производного инструмента, вместо того, чтобы строить дерево для соответствующей базовой облигации, которое может быть значительно длиннее (несколько больше об этом в замечании 23.2.1).

25.2.2 **Общий метод построения биномиальных моделей**

При построении биномиального приближения в модели Васичека или модели КИР используются следующие общие соображения. При данном процессе с непрерывным временем $dy = \alpha(y, t) dt + \sigma(y, t) dW$ мы сначала убеждаемся в том, что снос и диффузия биномиальной модели сходятся к соответствующим характеристикам непрерывного процесса,

полагая вероятность движения вверх равной величине

$$\frac{\alpha(y, t)\Delta t + y - y_d}{y_u - y_d},$$

где $y_u \equiv y + \sigma(y, t)\sqrt{\Delta t}$ и $y_d \equiv y - \sigma(y, t)\sqrt{\Delta t}$ представляют две ставки, которые последуют за текущей ставкой y . Отметим, что сдвиги одинаковы и в обоих случаях равны $\sigma(y, t)\sqrt{\Delta t}$.

В рассматриваемой ситуации узлы биномиального дерева могут и не сойтись: при движении вверх с последующим движением вниз может получаться значение, отличающееся от того, которое возникает в результате сначала движения вниз, а затем вверх, поскольку, вообще говоря,

$$\sigma(y, t)\sqrt{\Delta t} - \sigma(y_u, t)\sqrt{\Delta t} \neq -\sigma(y, t)\sqrt{\Delta t} + \sigma(y_d, t)\sqrt{\Delta t}.$$

Если же функция $\sigma(y, t)$ постоянна по y , то выше будет равенство и узлы дерева будут сойтись. Но чтобы добиться этого, введем преобразование

$x(y, t) \equiv \int_y^y \sigma(z, t)^{-1} dz$. Тогда x удовлетворяет уравнению $dx = m(y, t) dt + dW$ при некоторой функции $m(y, t)$ (см. упр. 25.2.13). И суть дела в том, что диффузия теперь постоянна и узлы биномиального дерева для x будут сойтись. Вероятность же движения вверх остается равной

$$\frac{\alpha(y(x, t), t)\Delta t + y(x, t) - y_d(x, t)}{y_u(x, t) - y_d(x, t)},$$

где $y(x, t)$ есть преобразование, обратное к $x(y, t)$, т. е. переводящее x обратно в y . Заметим, что $y_u(x, t) \equiv y(x + \sqrt{\Delta t}, t + \Delta t)$, а $y_d(x, t) \equiv y(x - \sqrt{\Delta t}, t + \Delta t)$ [696].

Так, например, в модели КИР таким преобразованием является функция $x(r, t) = \int_r^r (\sigma\sqrt{z})^{-1} dz = 2\sqrt{r}/\sigma$. Другим примером является преобразование

$x(S, t) = \int_1^S (\sigma z)^{-1} dz = (1/\sigma) \ln S$ в модели Блэка—Шоулса. Но знакомая всем БМОО в действительности дискретизирует процесс $\ln S$, а не S .

Упражнение 25.2.13. Проверьте, что преобразование $x(y, t) \equiv \int_y^y \sigma(z, t)^{-1} dz$ переводит процесс $dy = \alpha(y, t) dt + \sigma(y, t) dW$ в некоторый такой процесс для x , диффузия у которого равна единице.

Упражнение 25.2.14. 1) Покажите, что в биномиальном дереве для непреобразованной модели КИР узлы не сочетаются.

2) Покажите, что биномиальное дерево для геометрического броуновского движения $dr = r\mu dt + r\sigma dW$ имеет сочетающиеся узлы несмотря на то, что его волатильность не постоянна.

25.2.3 Многофакторные модели КИР

В таких одномерных моделях как модели Васичека и КИР, источником случайности является одна переменная, сама краткосрочная ставка. Чтобы попытаться бороться со слабостями этих моделей, упомянутых в п. 5 (ниже), были предложены многофакторные модели. В одной

из двухфакторных моделей КИР краткосрочная ставка является суммой двух факторов r_1 и r_2 : $r \equiv r_1 + r_2$ [474]. Риск-нейтральные процессы r_1 и r_2 в ней описываются уравнениями

$$dr_1 = \beta_1(\mu_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dW_1, \quad dr_2 = \beta_2(\mu_2 - r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dW_2,$$

и заданием коэффициента корреляции ρ между dW_1 и dW_2 . Дифференциальное уравнение в частных производных для цены бескупонной облигации имеет следующий вид

$$-\frac{\partial P}{\partial T} + \beta_1(\mu_1 - r_1)\frac{\partial P}{\partial r_1} + \beta_2(\mu_2 - r_2)\frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_1^2 r_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2 r_2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\sqrt{r_1 r_2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} = rP.$$

Поскольку оба фактора оказывают влияние на доходности короткого конца временной структуры, то эта модель ведет себя как одномерная [149].

25.3 Другие модели

Огден предложил описывать краткосрочную ставку следующим процессом:

$$dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma r dW,$$

где $\beta \geq 0$ означает скорость корректировки, а μ — процентная ставка устойчивого положения [702]. Предсказуемая часть изменения ставки $\beta(\mu - r)dt$ свидетельствует о наличии свойства возврата к долгосрочному среднему. Ясно, что величина изменений ставки тем больше, чем дальше текущая ставка отклоняется от этого среднего. По непредсказуемой же части видно, что процентная ставка в абсолютном выражении более волатильна при своих высоких значениях, чем при низких. Модель Досэна логнормальна [282]:

$$\frac{dr}{r} = \alpha dt + \sigma dW.$$

Поскольку рост процентных ставок должен быть все-таки ограничен, то могут предпочесть ее версию $dr = \sigma r dW$.

Костантинидес разработал семейство моделей с целью избавиться от некоторых недостатков модели КИР, но при этом сохраняющих свойство положительности процентных ставок и возможность получения точных формул для цен различных производных инструментов на процентную ставку [223]. Простейшая из них имеет вид

$$dr = 2a \left(1 - \frac{\sigma^2}{a}\right) (\sigma^2 - 2axy)dt + 4a \left(1 - \frac{\sigma^2}{a}\right) y\sigma dW_1,$$

где a , σ и α являются постоянными, удовлетворяющими некоторым неравенствам, $y \equiv x - \alpha + \frac{\alpha}{2(1 - \sigma^2/a)}$, а x описывается процессом Орнштейна—Уленбека $dx = -axdt + \sigma dW_2$. При этом оба винеровских процесса W_1 и W_2 некоррелированы. Эта модель способна «выдавать» кривые доходности перевернутого и горбатого вида, что невозможно в модели КИР.

Чан, Карольи, Лонгстафф и Сандерс (ЧКЛС) предложили следующую модель [173]:

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^\gamma dW.$$

Она включает в себя модели Васичека, КИР, Огдена, Досэна и многие другие. Используя 1-месячные ВК, ее авторы обнаружили, что при $\gamma \geq 1$ модель «ухватывает» динамику краткосрочной ставки лучше, чем при $\gamma < 1$. Они также отметили положительную взаимосвязь между волатильностью процентной ставки и ее уровнем. Однако их вывод о том, что о свойстве возвращения к среднему говорят немногие данные, не подтверждается данными, полученными в нескольких европейских странах [248]. Другие исследователи предполагают, что в ситуации $\gamma \geq 1$ влияние уровня процентной ставки на ее волатильность переоценивается [93, 126, 563].

Бреннан и Шварц предложили следующую двухфакторную модель:

$$d \ln r = \beta(\ln l - \ln r)dt + \sigma_1 dW_1, \quad \frac{dl}{l} = a(r, l, b_2)dt + \sigma_2 dW_2,$$

в которой известным считается коэффициент корреляции ρ между dW_1 и dW_2 [121, 123]. В отличие от двухфакторной модели КИР, оба фактора здесь относятся к разным концам кривой доходности, т.е. краткосрочной и долгосрочной ставкам. У краткосрочной ставки есть свойство возвращения к долгосрочной ставке и она подчиняется одному логнормальному процессу, в то время как долгосрочная ставка подчиняется другому логнормальному процессу. Эта модель представляется достаточно популярной [38, 653]. Связанные с ней проблемы обсуждаются в [462].

Фонг и Васичек предложили модель, в которой двумя случайными факторами являются краткосрочная ставка и ее мгновенная дисперсия v :

$$dr = \beta(\mu_r - r)dt + \sqrt{v} dW_1, \quad dv = \gamma(\mu_v - v)dt + \xi \sqrt{v} dW_2;$$

в ней μ_r есть долгосрочное среднее краткосрочной ставки, а μ_v представляет долгосрочное среднее дисперсии краткосрочной ставки [362]. Дополнительную информацию по этой модели можно найти в [462]. В связанной с ней трехфакторной модели долгосрочное среднее μ_r считается случайной величиной [46].

Упражнение 25.3.1. Какую функцию ставки r следует моделировать, чтобы построить биномиальное дерево с сочетающимися узлами для модели ЧКЛС?

25.4 Калибровка модели

Двумя стандартными подходами к калибровке моделей являются подход с временными рядами и подход с так называемым сравнением по профилю. В подходе с **временным рядом** для оценки параметров процесса используется временной ряд из краткосрочных ставок. Хотя этот подход и может помочь при обосновании предложенного процесса процентной ставки, но только с его помощью нельзя оценить параметр

премии за риск λ . Кроме того, и модельные цены, основанные на выбранных параметрах, могут заметно отличаться от имеющихся на рынке.

В подходе со **сравнением по профилю** предполагается разбиение наблюдаемых данных по ценам облигаций на отдельные части. А в качестве параметров выбираются такие, при которых модельные цены оказываются весьма близкими к рыночным. После такой процедуры калиброванную модель уже можно использовать для оценки стоимости производных инструментов на процентную ставку. В отличие от подхода с временным рядом подход со сравнением по профилю не способен отделить премию за риск процентной ставки от параметров модели. Более того, эмпирические данные свидетельствуют, что такие оценки могут и зависеть от времени [77, 746]. Обычная практика повторных рекалибровок, хотя и является прагматической, с теоретической точки зрения не вполне оправдана. Но возможна и совместная оценка, использующая как подход с временным рядом, так и со сравнением по профилю [257].

Если в модели имеется лишь конечное число параметров, что верно в отношении моделей КИР и Васичека, то полное совпадение с рыночными данными может появиться лишь в результате простого везения. Это соображение заставляет обратиться к моделям с бесконечным числом параметров. Чтобы добиться этого, например, достаточно позволить некоторым параметрам из конечномерной модели быть детерминированными функциями времени [234]. Многие безарбитражные модели идут по этому пути. При этом следует подчеркнуть, что превращение параметров в функции времени *не* делает модель многофакторной. Каждый фактор у многофакторной модели должен представлять различный источник неопределенности, что зависящий от времени параметр не делает несмотря на то, что все-таки придает модели большую гибкость [38].

Калибровка не может исправить ошибки, свойственные (т.е. заложенные при построении) модели. Напомним, что цена производного инструмента представляет стоимость выполнения самофинансируемой копирующей стратегии, основанной на ее дельта. Дельта-хеджи, которым не удастся скопировать производный инструмент, приведут к неправильным ценам. Поэтому неточно настроенная модель не оценит стоимость правильно или не прохеджирует, даже если она и была откалибрована [42, 149]. Например, если снос краткосрочной ставки не является линейным, о чем говорят результаты некоторых наблюдений [11], то все модели, которые используют предположение линейности, будут ошибаться. Но, конечно, и неправильная модель может оказаться полезной в роли интерполятора цен в пределах множества требований, подобных тем, которые используются при калибровке. Однако нет оснований для использования такой модели при оценке стоимости требований, заметно отличающихся от имеющихся в калибрующем множестве.

Упражнение 25.4.1. При калибровке модели Блэка—Шоулса оценки стоимости опционов были упомянуты два метода: историческая волатильность и «индуцированная» волатильность. Какая из них относится к подходу с временным рядом, а какая к подходу со сравнением по профилю?

25.5 Однофакторные модели краткосрочной ставки

У однофакторных моделей краткосрочной ставки есть несколько недостатков. Начнем с того, что они отбрасывают много информации. Используя лишь краткосрочные ставки, они не обращают внимания на другие ставки на кривой доходности. Кроме того, в таких моделях волатильность оказывается функцией лишь от *уровня* процентной ставки [126].

Если изменения временной структуры описываются одним фактором, то цены всех облигаций сдвигаются в одном направлении в одно и то же время даже если их значения и могут отличаться. Доходности всех облигаций, таким образом, становятся сильно коррелированными. В действительности же представляется, что между краткосрочными и долгосрочными ставками имеется определенная независимость [38, 304]². Следовательно, однофакторные модели не могут предоставить невырожденную структуру корреляции ставок различных сроков погашения. Поэтому и неудивительно, что те производные инструменты, чья стоимость зависит от структуры корреляции различных секторов кривой доходности, такие как опционы на кривую доходности, оцениваются однофакторными моделями неправильно [149].

В однофакторных моделях форма временной структуры как правило ограничена тремя возможностями: монотонным возрастанием, монотонным убыванием и небольшой горбатостью. Калиброванные модели также могут и не привести к настолько вогнутой временной структуре, насколько можно предположить по данным [41]. А судя по ним получается, что временная структура меняется по наклону и кривизне так же часто, как и совершает параллельные движения (просмотрите еще раз п. 19.2.5). А это несовместимо с ограничением, по которому все сегменты временной структуры жестко коррелированы. Следовательно, однофакторные модели являются неполными [607].

Если же говорить в общем, то однофакторные модели приводят к ошибкам в хеджировании сложных ЦБ [91] и их точность в хеджировании невелика [42, 149]. Тем не менее они могут оказаться пригодными в таких приложениях, как управление портфелями облигаций близких сроков погашения или оценка стоимости ЦБ с денежным потоком, который в сильной степени определяется общим уровнем процентных ставок [198].

Модели, в которых цены облигаций зависят от двух и более источников неопределенности приводят к семействам кривых доходности, которые могут принимать формы значительно более широкого спектра и могут лучше отражать реальность [46, 793]. Ко многофакторным моделям относятся модель Бреннана—Шварца, модель Ричарда [741], модель Лангетьега, модель Лонгстаффа—Шварца и модель Чена—Скотта [183]. Многофакторные модели, однако, значительно труднее анализировать и с ними труднее работать. Они также поглощают значительно больше компьютерного времени — проклятие размерности здесь снова поднимает голову. Эти практические озабоченности ограничивают использование многофакторных моделей двумерными моделями [38]. Ну а начать со знакомства с различными однофакторными моделями, возможно, и разумно

рекомендовать тем, кто собирается использовать многомерные модели [84, 482].

Цену Европейского опциона на купонную облигацию можно рассчитать по ценам на бескупонные облигации следующим образом. Рассмотрим Европейский опцион колл срока действия, истекающего в момент T , на облигацию номинала \$ 1. И пусть X обозначает его цену исполнения, а денежный поток облигации состоит из выплат $c_1, c_2, \dots, c_n$, относящихся к моментам времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, где $t_i > T$ при всех i . Выплата по такому опциону, очевидно, равна*)

$$\max\left(\sum_{i=1}^n c_i P(r(T), T, t_i) - X, 0\right).$$

В момент T существует единственное значение r^* величины $r(T)$, которое делает цену купонной облигации равной цене исполнения X . Мы можем получить это r^* , решая уравнение $X = \sum_i c_i P(r, T, t_i)$ по какому-либо приближенному методу относительно r , что не представляет труда, если точные формулы для цен бескупонных облигаций известны. Решение для однофакторных моделей также является единственным, поскольку цена облигации монотонно убывает по r . Пусть $X_i \equiv P(r^*, T, t_i)$ есть стоимость в момент T бескупонной облигации номинала \$ 1 с погашением в момент t_i , если $r(T) = r^*$. Отметим, что $P(r(T), T, t_i) \geq X_i$ тогда и только тогда, когда $r(T) \leq r^*$. Поскольку $X = \sum_i X_i$, то выплата по опциону равна

$$\sum_{i=1}^n c_i \times \max(P(r(T), T, t_i) - X_i, 0).$$

Таким образом, рассматриваемый опцион колл является пакетом из n опционов на базовые бескупонные облигации [506].

Упражнение 25.5.1. Предположим, что кривая спот-ставок $r(r, a, b, t, T) \equiv r + a(T - t) + b(T - t)^2$ получается с помощью трехфакторной модели. Какие из факторов r , a и b влияют на наклон, кривизну и параллельные сдвиги, соответственно?

Упражнение 25.5.2. Повторите предыдущее рассуждение в отношении Европейского опциона пут на купонную облигацию и покажите, что выплата по нему равна $\sum_{i=1}^n c_i \times \max(X_i - P(r(T), T, t_i), 0)$.

Заключительные замечания и дополнительная литература

Если финансовый ряд описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t,$$

то выбор конкретной параметрической формы для функций μ и σ может

*) Под функцией $P(r(T), T, t_i)$ здесь и ниже следует понимать функцию $P(T, t_i)$, дисконтирование в которой ведется по ставке $r(T)$. — Прим. перев.

основываться не столько на экономических соображениях, сколько на возможности проще вести с этими функциями вычисления и теоретический анализ процесса. И эта произвольность представляет потенциальную проблему для любой **параметрической модели**: ошибки возможны из-за выбора неправильной функциональной формы. Более того, в одном исследовании утверждается, что ни одна из существующих параметрических моделей процентной ставки не согласуется с прошлыми данными достаточно хорошо [11] (этот вывод оспаривается в [728]). В **непараметрических моделях**, наоборот, не делается никаких параметрических предположений о функциональной форме сноса μ и/или диффузии σ [819]. Вместо этого одна или обе функции должны оцениваться непараметрически по конечной выборке. При этом требования сводятся к тому, чтобы приближение к истинным значениям сноса и диффузии сходились поточечно к μ и σ со скоростью $(\Delta t)^k$, где Δt представляет промежуток времени между последовательными наблюдениями и $k > 0$. В результате ошибка приближения должна быть маленькой в случае, когда наблюдения совершаются достаточно часто. Оценке процессов Ито посвящены источники [517, 611, 613].

В этой главе был дан обзор равновесных моделей и указаны некоторые из их слабостей. Один из способов борьбы с этими слабостями сводится к переходу на безарбитражные модели, к которым мы обратимся в следующей главе. Другим подходом будет использование дополнительных факторов. Еще одна возможность связана с непараметрическими моделями. В отличие от производных инструментов на обычные акции единой и доминирующей модели не существует.

Познакомиться с оцениванием стоимости шапок на процентную ставку можно по [616] (случай КИР) и [617] (случай Васичека). Больше информации по многофакторным моделям КИР и технике параметрического оценивания можно найти в [184, 185, 186, 257, 630, 645, 803]. Более подробному обсуждению однофакторных моделей посвящены книги [291, 477]. Наконец, материал по долгосрочным ставкам имеется в [301, 302].

Примечания

1. <http://www.cob.ohio-state.edu/~fin/journal/lies.htm>.
2. Представляется, что реальные ставки коррелированы больше [135].

26 Безарбитражные модели временной структуры

Лисицы часто подбегают к отверстию, через которое они должны возвращаться в нору, чтобы удостовериться, что их тело еще достаточно узкое, чтобы проскользнуть через него.

Полное собрание сказок братьев Гримм

В этой главе собраны безарбитражные модели, впервые предложенные Хо и Ли. О некоторых ярких чертах таких моделей мы уже говорили, хотя возможно и неявно, в гл. 23.

26.1 Введение

Некоторые из проблем, связанных с равновесными моделями, были упомянуты в п. 25.4. Например, такие модели обычно требуют оценки рыночного риска и не очень-то согласуются с временной структурой рынка. Однако, совместимость с реальным рынком часто необходима практически [457]. Безарбитражные модели, наоборот, в полной мере используют информацию о временной структуре. В них считается, что наблюдаемая временная структура согласуется с ненаблюдаемым и неопределенным равновесием. Исходя из этого и моделируются свободные от арбитража движения процентных ставок и цен облигаций в зависимости от времени. По определению рыночная цена риска должна быть отражена в текущей временной структуре; поэтому результирующий процесс процентной ставки является риск-нейтральным.

Безарбитражные модели могут уточнять динамику цен бескупонных облигаций, форвардных ставок или краткосрочной ставки [477, 482]. Модели цены облигации и форвардной ставки обычно немарковские (зависят от траектории), в то время как модели краткосрочной ставки, как правило, строятся так, чтобы оказаться явно марковскими (независимыми от траектории). С вычислительной точки зрения с марковскими моделями работать проще, чем с немарковскими.

Упражнение 26.1.1. Какие модели, равновесные или безарбитражные, являются более пригодными для принятия решения о том, какие правительственные облигации переоценены?

26.2 Модель Хо—Ли

Эта однофакторная модель с разрывными траекториями пользуется популярностью среди практических работников [72]. На рис. 26.1 показан возникающий в модели процесс изменения краткосрочной ставки. Краткосрочные ставки в любой заданный момент времени принимают значения, равноотстоящие друг от друга. Пусть r обозначает риск-

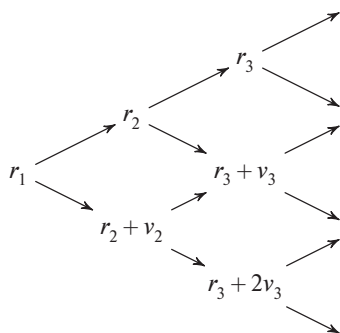


Рис. 26.1. Биномиальное дерево процентной ставки в модели Хо—Ли. Распределение ставки любого момента времени сходится к нормальному; модель Хо—Ли в пределе представляет нормальный процесс. Величины v_i связаны с волатильностями краткосрочной ставки равенством (23.2).

нейтральную вероятность того, что значение краткосрочной ставки сдвинется вверх. И будем использовать непрерывное начисление процентов.

При построении модели начинают с введения цен бескупонных облигаций $P(t, t+1)$, $P(t, t+2)$, ..., момента времени t , которые принимаются за корень дерева. И пусть дисконтирующие факторы следующего периода равны

$P_d(t+1, t+2)$, $P_d(t+1, t+3)$, ..., если краткосрочная ставка понизится,

$P_u(t+1, t+2)$, $P_u(t+1, t+3)$, ..., если краткосрочная ставка повысится.

Тогда с помощью обратной индукции нетрудно видеть, что при $n \geq 2$

$$P_u(t+1, t+n) = P_d(t+1, t+n) e^{-(v_2 + \dots + v_n)} \quad (26.1)$$

(см. упр. 26.2.1), а доходности n -периодной бескупонной облигации равны

$$y_d(n) \equiv -\frac{\ln P_d(t+1, t+n)}{n-1}, \quad y_u(n) \equiv -\frac{\ln P_u(t+1, t+n)}{n-1} = y_d(n) + \frac{v_2 + \dots + v_n}{n-1},$$

соответственно. Волатильность доходности до погашения у этой облигации, следовательно, равна

$$\begin{aligned} \kappa_n &\equiv \sqrt{py_u(n)^2 + (1-p)y_d(n)^2 - [py_u(n) + (1-p)y_d(n)]^2} = \\ &= \sqrt{p(1-p)} |y_u(n) - y_d(n)| = \sqrt{p(1-p)} \frac{|v_2 + \dots + v_n|}{n-1}. \end{aligned}$$

В частности, мы определим волатильность краткосрочной ставки, полагая $n = 2$:

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)} |v_2|. \quad (26.2)$$

Дисперсия краткосрочной ставки, следовательно, равна $p(1-p)(r_u - r_d)^2$, где r_u и r_d — два последующих значения ставки¹.

Временная структура волатильности состоит из чисел κ_2 , κ_3 , ... независимых от величин r_i . Величины v_i легко рассчитать по структуре волатильности (см. упр. 26.2.2) и наоборот. Величины r_i можно вычислить с помощью форвардной индукции. Структура модели в первоначальной модели Хо—Ли является плоской, поскольку в ней предполагается, что все v_i равны некоторой постоянной. В общей модели Хо—Ли, которая

включает в себя временную структуру волатильности, структура волатильности поставляется рынком.

Упражнение 26.2.1. Проверьте справедливость равенства (26.1).

Упражнение 26.2.2. Покажите, что

$$v_i = \frac{(i-1)\kappa_i - (i-2)\kappa_{i-1}}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

26.2.1 Процесс изменения цены облигации

В риск-нейтральной экономике начальные дисконтирующие множители удовлетворяют уравнению

$$P(t, t+n) = [pP_u(t+1, t+n) + (1-p)P_d(t+1, t+n)]P(t, t+1).$$

Объединяя это уравнение с выражением (26.1) и предполагая, что $p = 1/2$, получим представления²

$$P_d(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2 \exp[v_2 + \dots + v_n]}{1 + \exp[v_2 + \dots + v_n]}, \quad (26.3)$$

$$P_u(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2}{1 + \exp[v_2 + \dots + v_n]}. \quad (26.3')$$

Процесс изменения цены облигации и определяется этими уравнениями. Вышеуказанная система уравнений устанавливает такие соотношения между ценами, при которых безрисковый арбитраж исключается [304, 504]. Узлы дерева цен облигации обладают свойством сочетаемости (см. упр. 26.2.3).

В оригинальной модели Хо—Ли все v_i равны некоторой постоянной v . Поэтому

$$P_d(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2\delta^{n-1}}{1 + \delta^{n-1}}, \quad P_u(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2}{1 + \delta^{n-1}},$$

где $\delta \equiv e^v > 0$. Волатильность краткосрочной ставки σ в силу (26.2) тогда равна $v/2$. Чтобы превратить используемые числа в ежегодные, будем просто опираться на равенства $\sigma(\text{периода}) = \sigma(\text{года}) \times \sqrt{\Delta t}$ и $v(\text{периода}) = v(\text{года}) \times \Delta t$. Их следствием окажется формула

$$\delta(\text{года}) = e^{2\sigma(\text{года})(\Delta t)^{3/2}}. \quad (26.4)$$

Модель Хо—Ли ясно показывает, что безарбитражные модели оценивают стоимость ЦБ способом, который согласуется с начальной временной структурой. Далее, в этих моделях постулируется динамика, которая не позволяет возникнуть промежуточным арбитражным возможностям. Стоимость производных инструментов оценивается взятием математического ожидания по риск-нейтральной вероятности [369].

Упражнение 26.2.3. Покажите, что повышение ставки с последующим ее понижением приведет к той же временной структуре, что и при понижении ставки с последующим ее повышением.

Упражнение 26.2.4. Докажите, что уравнения (26.3) и (26.3') при произвольной риск-нейтральной вероятности принимают следующий вид

$$P_d(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{\exp(v_2 + \dots + v_n)}{p + (1-p) \times \exp(v_2 + \dots + v_n)},$$

$$P_u(t+1, t+n) = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{1}{p + (1-p) \times \exp(v_2 + \dots + v_n)}.$$

Упражнение 26.2.5. Рассмотрим портфель, состоящий из одной бескупонной облигации со сроком погашения T_1 и β бескупонных облигаций со сроком погашения T_2 . Определите β , которое в модели Хо—Ли делает портфель мгновенно безрисковым.

Задание по программированию 26.2.6. Напишите программу линейного времени для калибровки оригинальной модели Хо—Ли. Входными данными пусть будут Δt , текущие рыночные дисконтирующие множители и волатильность краткосрочной ставки σ , причем все рассматриваемые как ежегодные.

Волатильности доходности и их ковариации. Однопериодная доходность n -периодной бескупонной облигации

$$r(t, t+n) \equiv \ln \frac{P(t+1, t+n)}{P(t, t+n)}.$$

И поскольку она принимает либо значение

$$\ln \frac{P_d(t+1, t+n)}{P(t, t+n)},$$

либо

$$\ln \frac{P_u(t+1, t+n)}{P(t, t+n)},$$

то ее дисперсия оказывается равной

$$Dr(t, t+n) = p(1-p)[(n-1)v]^2 = (n-1)^2 \sigma^2.$$

Ковариация между с.в. $r(t, t+n)$ и $r(t, t+m)$ равна (см. упр. 26.2.7) $(n-1)(m-1)\sigma^2$. Поэтому коэффициент корреляции между любыми двумя однопериодными доходностями равен единице. Такая сильная корреляция между ставками присуща всем однофакторным марковским моделям.

Упражнение 26.2.7. Покажите, что при произвольном p дисперсия однопериодной доходности n -периодной бескупонной облигации равна $(n-1)^2 \sigma^2$, а ковариация между однопериодными доходностями n - и m -периодных бескупонных облигаций равна $(n-1)(m-1)\sigma^2$.

26.2.2 Процесс изменения форвардной ставки

Форвардная ставка момента t для денег, взятых в долг или предоставленных в кредит в промежутке времени между моментами $t+n$ и $t+n+1$, равна

$$f(t, t+n) = -\ln \frac{P(t, t+n+1)}{P(t, t+n)}$$

в силу (24.3). Поэтому, если рассматривать текущее состояние как ре-

зультат движения ставки вниз при переходе от момента $t-1$, то мы придем к равенству

$$f(t, t+n) = -\ln \frac{\frac{P(t-1, t+n+1)}{P(t-1, t)} \cdot \frac{2\delta^{n+1}}{1+\delta^{n+1}}}{\frac{P(t-1, t+n)}{P(t-1, t)} \cdot \frac{2\delta^n}{1+\delta^n}} = f(t-1, t+n) - \ln \frac{1+\delta^n}{1+\delta^{n+1}} - \ln \delta,$$

а если текущее состояние рассматривать как результат движения ставки вверх, то получим равенство

$$f(t, t+n) = -\ln \frac{\frac{P(t-1, t+n+1)}{P(t-1, t)} \cdot \frac{2}{1+\delta^{n+1}}}{\frac{P(t-1, t+n)}{P(t-1, t)} \cdot \frac{2}{1+\delta^n}} = f(t-1, t+n) - \ln \frac{1+\delta^n}{1+\delta^{n+1}}.$$

Оба указанных равенства можно объединить и получить следующий процесс изменения форвардной ставки:

$$f(t, t+n) = f(t-1, t+n) - \ln \frac{1+\delta^n}{1+\delta^{n+1}} - \frac{1}{2} \ln \delta + \xi_{t-1}, \quad (26.5)$$

где ξ_s ($s \geq 0$) представляет следующую случайную величину (с.в.) с нулевым математическим ожиданием:

$$\xi_s = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \delta, & \text{если в момент } s \text{ движение происходит вниз,} \\ \frac{1}{2} \ln \delta, & \text{если в момент } s \text{ движение происходит вверх.} \end{cases}$$

Поскольку $D(f(t, t+n) - f(t-1, t+n)) = \sigma^2$ (см. упр. 26.2.8), то волатильность σ можно оценить на основании исторических данных, не будучи обязанным оценивать риск-нейтральную вероятность [436]. Если рекуррентное соотношение (26.5) применить последовательно несколько раз, то получим, что

$$f(t, t+n) = f(0, t+n) - \ln \frac{1+\delta^n}{1+\delta^{n+t}} - \frac{t}{2} \ln \delta + \sum_{s=1}^t \xi_{s-1}.$$

Упражнение 26.2.8. Проверьте, что $D\xi_s = \sigma^2$.

Упражнение 26.2.9. Докажите, что придем к сходимости

$$-\ln \frac{1+\delta^n}{1+\delta^{n+1}} - \frac{1}{2} \ln \delta \approx \sigma^2 (T-t)(\Delta t)^2,$$

если в уравнении (26.5) заменим $t/\Delta t$ на t и $(T-t)/\Delta t$ на n , а затем используем формулу (26.4). Все параметры T , t , Δt и σ считаются ежегодными. Соответственно, поэтому процесс форвардной ставки сходится к непрерывному процессу, определяемому уравнением $df(t, T) = \sigma^2 (T-t)dt + \sigma dW$.

26.2.3 Процесс изменения краткосрочной ставки

Поскольку краткосрочная ставка $r(t)$ равна $f(t, t)$, то

$$r(t) = f(0, t) - \ln \frac{2}{1+\delta^t} - \frac{t}{2} \ln \delta + \sum_{s=1}^t \xi_{s-1}.$$

А это приводит к следующему разностному уравнению:

$$r(t) = r(t-1) + f(0, t) - f(0, t-1) - \ln \frac{1 + \delta^{t-1}}{1 + \delta'} - \frac{1}{2} \ln \delta + \xi_{t-1}. \quad (26.6)$$

Непрерывным же аналогом модели Хо—Ли будет процесс, описываемый уравнением $dr = \theta(t)dt + \sigma dW$. По-существу это модель Васичека, в которой снос со свойством возвращения к среднему заменяется на детерминированный снос, зависящий от времени. Можно добиться и неплюской временной структуры волатильностей, если волатильность краткосрочной ставки также сделать зависящей от времени, т.е. взять уравнение $dr = \theta(t)dt + \sigma(t) dW$ [508]. Это уже будет соответствовать модели с дискретным временем, в которой не все v_i равны между собой.

Упражнение 26.2.10. Докажите, что

$$-\ln \frac{1 + \delta^{t-1}}{1 + \delta'} - \frac{1}{2} \ln \delta \approx \sigma^2 t (\Delta t)^2,$$

если заменить $t/\Delta t$ на t и воспользоваться формулой (26.4). Параметры t , Δt и σ выше считаются ежегодными (процесс изменения краткосрочной ставки (26.6), таким образом, будет сходиться к процессу, описываемому уравнением $dr = \{\partial f(0, t)/\partial t\} dt + \sigma dW$).

26.2.4 Недостатки модели Хо—Ли

Номинальные процентные ставки должны быть неотрицательными, поскольку мы можем держать наличные при себе. Однако в модели Хо—Ли отрицательные в будущем процентные ставки возможны. Правда, эта проблема может не вызывать большого беспокойства в случае реалистичных волатильностей и некоторых диапазонов у срока погашения облигаций [72]. Больше вопросов вызывает тот факт, что волатильность краткосрочной ставки не зависит от уровня ставки [83, 173, 359, 645]. Известно, что модель Хо—Ли включает в себя модель Мертона и обладает наравне с ней многими ее нереалистичными свойствами. Поэтому как она может порождать разумные начальные временные структуры? Ответ лежит в неразумной динамике краткосрочной ставки из модели³.

Упражнение 26.2.11. Оцените правоту утверждения, что проблема отрицательных процентных ставок может быть снята с повестки дня предположением, что волатильность краткосрочной ставки зависит от времени.

Общие проблемы безарбитражных моделей. Движения процентной ставки должны отражать сдвиги переменных состояния модели (факторов), а не ее параметров. Это означает, что такие параметры модели, как снос $\theta(t)$ в непрерывной модели Хо—Ли, должны оставаться устойчивыми относительно времени. Однако на практике безарбитражные модели улавливают сдвиги кривой доходности с помощью повторной калибровки параметров. Новая модель, таким образом, рождается каждый

день. Это в сущности говорит о том, что модель, полученная в какой-то определенный момент времени не описывает временную структуру процентных ставок и их волатильностей в другое время. Следовательно, поведение модели в промежутках между какими-то моментами времени вызывает опасения (проскольку плохо отражает реальность) и потому использование ее для хеджирования и управления риском может оказаться ненадежным.

26.3 Модель Блэка—Дермана—Тоя

Блэк, Дерман и Той (БДТ) предложили свою модель в 1990 г. [84]. И она интенсивно использовалась практическими работниками [72, 149, 215, 600, 731]. Процесс краткосрочной ставки у БДТ является логнормальным биномиальным процессом процентной ставки, описанным в гл. 23 и приведенным вновь на рис. 26.2. Структура волатильности задается рынком и потому волатильности краткосрочной ставки (т.е. v_i) определяются вместе с r_i . Для сравнения, в нашем прежнем биномиальном дереве процентной ставки предполагалось, что v_i задаются априори, а в связанной с ней модели братьев Саломон v_i считаются постоянными [848]. Логнормальные модели исключают отрицательные краткосрочные ставки.

Структура волатильности определяет волатильности доходностей бескупонных облигаций различных сроков погашения. Пусть волатильность доходности i -периодной бескупонной облигации обозначается через κ_i . И предположим, что P_u (P_d) есть цена i -периодной бескупонной облигации спустя период, если за это время краткосрочная ставка сдвинется вверх (соответственно, вниз). Соответствующими этим двум ценам доходностями до погашения являются:

$$y_u \equiv P_u^{-1/(i-1)} - 1, \quad y_d \equiv P_d^{-1/(i-1)} - 1.$$

Выражение $\kappa_i \equiv (1/2) \ln(y_u/y_d)$ определяет волатильность доходности.

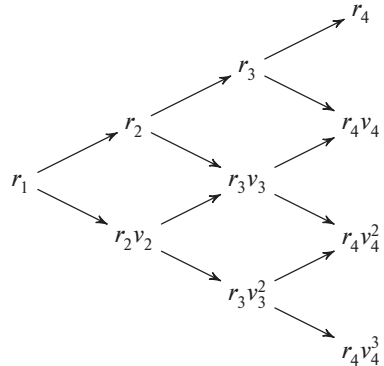


Рис. 26.2. Биномиальное дерево процентной ставки в модели БДТ. Распределение ставки в любой момент времени сходится к логнормальному.

26.3.1 Калибровка

Входными данными модели БДТ являются безрисковые доходности бескупонной облигации и их волатильности. Для экономии места будем считать, что все числа относятся к периоду. В соответствии с индукцией предположим, что мы уже рассчитали величины $r_1, v_1, r_2, v_2, \dots, r_{i-1}, v_{i-1}$, которые определяют биномиальное дерево вплоть до периода $i-1$. И теперь приступаем к вычислению r_i и v_i , чтобы расширить дерево на период i . Предположим также, что цена i -периодной бескупонки через период может измениться на P_u или P_d . И пусть y обозначает текущую i -периодную спот-ставку, которая известна. Тогда в риск-нейтральной экономике

$$\frac{P_u + P_d}{2(1+r_i)} = \frac{1}{(1+y)^i}. \quad (26.7)$$

Очевидно, P_u и P_d являются функциями неизвестных r_i и v_i . Рассматриваемая в настоящий момент будущая $(i-1)$ -периодная спот-ставка момента один является неизвестной. И пусть y_u, y_d представляют собой значения этой спот-ставки в верхнем и нижнем узле, соответственно, с дисперсией κ^2 , где

$$\kappa_i = \frac{1}{2} \ln \frac{P_u^{-1/(i-1)} - 1}{P_d^{-1/(i-1)} - 1}. \quad (26.8)$$

Для получения алгоритма калибровки квадратичного времени будем использовать форвардную индукцию [190, 625]. Напомним, что индукция вперед позволяет последовательно выяснить, продвигаясь вперед по времени, насколько большой вклад \$1 в узле вносит в цену (просмотрите еще раз рис.23.7 (а)). Это число называется ценой состояния и является ценой требования, по которому выплачивается \$1 в данном узле и ничего в остальных местах.

Пусть ставкой основной линии периода i является $r_i = r$, мультипликативное отношение обозначается через $v_i = v$, а цены состояния момента $i-1$ равны $P_1, P_2, \dots, P_i$ и отвечают ставкам $r, rv, \dots, rv^{i-1}$, соответственно. Тогда ПЗ одного доллара момента i равно

$$f(r, v) \equiv \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{1+rv} + \frac{P_3}{1+rv^2} + \dots + \frac{P_i}{1+rv^{i-1}},$$

а волатильность доходности записывается в виде

$$g(r, v) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\left(\frac{P_{u,1}}{1+rv} + \frac{P_{u,2}}{1+rv^2} + \dots + \frac{P_{u,i-1}}{1+rv^{i-1}} \right)^{-1/(i-1)} - 1}{\left(\frac{P_{d,1}}{1+r} + \frac{P_{d,2}}{1+rv} + \dots + \frac{P_{d,i-1}}{1+rv^{i-2}} \right)^{-1/(i-1)} - 1}.$$

В последнем уравнении величины $P_{u,1}, P_{u,2}, \dots$ обозначают цены состояния момента $i-1$ на поддереве с корнем в верхнем узле (подобно $r_2 v_2$ на рис.26.2), а $P_{d,1}, P_{d,2}, \dots$ обозначают цены состояния в момент $i-1$ на поддереве с корнем в нижнем узле (подобно r_2 на рис.26.2) момента 2. А теперь найдем величины $r=r_i$ и $v=v_i$ из уравнений:

$$f(r, v) = \frac{1}{(1+y)^i}, \quad g(r, v) = \kappa_i.$$

Алгоритм для калибровки модели БДТ:

ввод: $n, S[1..n], \kappa[1..n]$;

действительные числа $P[0..n], P_u[0..n-1], P_d[0..n-1], r[1..n], v[1..n], r, v$;
целые i, j ;

$P[0] := 0; P_u[0] := 0; P_d[0] := 0$; // Фиктивные; равны нулю всегда

$P[1] := 1; P_u[1] := 1; P_d[1] := 1$;

$r[1] := S[1]; v[1] := 0$;

для $(i = 2 \text{ до } n) \{$

$P[i] := 0$;

для $(j = i \text{ вниз до } 1) \{$ // Цены состояния момента $i - 1$

$$P[j] := \frac{P[j-1]}{2 \times (1 + r[i-1] \times v[i-1]^{j-2})} + \frac{P[j]}{2 \times (1 + r[i-1] \times v[i-1]^{j-1})};$$

$\}$

Найти r и v из системы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^i \frac{P[j]}{(1 + r \times v^{j-1})} = (1 + S[i])^{-i}, \\ \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_u[j]}{(1 + r \times v^j)} \right)^{-1/(i-1)} - 1 = e^{2 \times \kappa[i]} \times \left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_d[j]}{(1 + r \times v^{j-1})} \right)^{-1/(i-1)} - 1 \right); \end{cases}$$

$r[i] := r; v[i] := v$;

если $[i < n] \{$

$P_u[i] := 0; P_d[i] := 0$;

для $(j = i \text{ вниз до } 1) \{$ // Цены состояния момента i

$$P_u[j] := \frac{P_u[j-1]}{2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1})} + \frac{P_u[j]}{2 \times (1 + r[i] \times v[i]^j)};$$

$$P_d[j] := \frac{P_d[j-1]}{2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-2})} + \frac{P_d[j]}{2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1})};$$

$\}$

$\}$

$\}$

вывод $r[]$ и $v[]$;

Рис. 26.3. Алгоритм для калибровки модели БДТ. Параметр $S[i]$ представляет i -периодную спот-ставку, $\kappa[i]$ — волатильность доходности периода i , а n — число периодов. Все числа относятся к периоду. Ставка основной линии периода i и мультипликативное отношение хранятся в $r[i]$ и $v[i]$, соответственно. Поскольку частные производные легко высчитываются, то для получения величин r и v следует использовать двумерный метод Ньютона—Рафсона из (3.16).

Соответствующий алгоритм со временем $O(n^2)$ приведен на рис. 26.3. Непрерывным пределом модели БДТ является процесс, описываемый уравнением $d \ln r = \{\theta(t) + [\sigma'(t)/\sigma(t)] \ln r\} dt + \sigma(t) dW$ [76, 149, 508]. Очевидно, волатильность краткосрочной ставки должна быть убывающей функцией времени, чтобы модель обладала свойством возвращения к среднему; в частности, при постоянной волатильности возвращения к среднему не будет.

Упражнение 26.3.1. Опишите метод дифференциального дерева с обратной индукцией для калибровки модели БДТ.

Задание по программированию 26.3.2. Реализуйте алгоритм, приведенный на рис. 26.3.

Задание по программированию 26.3.3. Откалибруйте модель БДТ с помощью метода хорд и оцените его эффективность по сравнению с эффективностью метода дифференциального дерева.

26.3.2 Модель Блэка—Карасинского

В близкой «по духу» модели Блэка—Карасинского считается, что краткосрочная ставка удовлетворяет уравнению

$$d \ln r = \kappa(t)[\theta(t) - \ln r] dt + \sigma(t) dW.$$

Поведение ставки в этой модели с очевидно присутствующим у модели свойством возвращения к среднему зависит от времени через посредство функций $\kappa(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$. Поэтому у модели Блэка—Карасинского на одну степень свободы больше, чем у модели БДТ. Скорость возвращения к среднему $\kappa(t)$ и волатильность краткосрочной ставки $\sigma(t)$ независимы [85].

Дискретная версия модели Блэка—Карасинского выглядит так же, как и в модели БДТ. Однако, чтобы сохранить у биномиального дерева свойство сочетаемости узлов, нужно проделать некоторые манипуляции. Соответствующие соображения проиллюстрированы на рис. 26.4, где $t_2 \equiv t_1 + \Delta t_1$ и $t_3 \equiv t_2 + \Delta t_2$. Отметим, что

$$\ln r_d(t_2) = \ln r(t_1) + \kappa(t_1)[\theta(t_1) - \ln r(t_1)]\Delta t_1 - \sigma(t_1)\sqrt{\Delta t_1},$$

$$\ln r_u(t_2) = \ln r(t_1) + \kappa(t_1)[\theta(t_1) - \ln r(t_1)]\Delta t_1 + \sigma(t_1)\sqrt{\Delta t_1}.$$

А чтобы гарантировать, что движение вверх с последующим движением вниз приведет к тому же значению, что и движение вниз с последующим движением вверх, накладывается условие

$$\begin{aligned} \ln r_d(t_2) + \kappa(t_2)[\theta(t_2) - \ln r_d(t_2)]\Delta t_2 + \sigma(t_2)\sqrt{\Delta t_2} = \\ = \ln r_u(t_2) + \kappa(t_2)[\theta(t_2) - \ln r_u(t_2)]\Delta t_2 - \sigma(t_2)\sqrt{\Delta t_2}, \end{aligned}$$

из которого вытекает, что

$$\kappa(t_2) = \frac{1 - [\sigma(t_2)/\sigma(t_1)]\sqrt{\Delta t_2/\Delta t_1}}{\Delta t_2}.$$

Поэтому по выбранному Δt_1 мы можем рассчитать Δt_2 , которое удовлетворяет условию сочетаемости, а уже затем приступить к итерации.

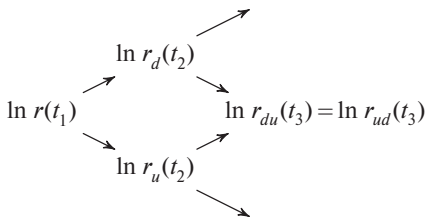


Рис. 26.4. Дерево Блэка—Карасинского. Промежутки времени между последовательными моментами могут не совпадать по длине.

Упражнение 26.3.4. Покажите, что (условная относительно момента t) дисперсия приращения $\Delta r(t)$ приблизительно равна $(r(t)\sigma(t))^2 \Delta t$.

Задание по программированию 26.3.5. Реализуйте алгоритм с индукцией вперед для калибровки модели Блэка—Карасинского при данной постоянной κ .

26.3.3 Проблемы логнормальных моделей

В таких логнормальных моделях, как модели БДТ, Блэка—Карасинского и Досэна, сталкиваются с тем, что $E^\pi[M(t)] = \infty$ при любом конечном t , если моделируется ставка непрерывного начисления процентов (см. еще раз п.24.2.1) [76]. Поэтому следует использовать периодическое начисление процентов. Другой момент связан с вычислениями. В логнормальных моделях точные формулы обычно отсутствуют даже для основных ЦБ с фиксированной доходностью. Как следствие, чтобы оценить стоимость краткосрочных производных инструментов по долгосрочным облигациям, нужно строить дерево для всей жизни базового актива — а его длительность может быть равна, скажем, 30 годам — вместо жизни требования, которая, возможно, сводится лишь к одному или двум годам (см. еще раз замечание 23.2.1). В определенной степени эту проблему можно смягчить, если использовать шаги разной длины по времени: а именно, использовать короткий временной промежуток вплоть до момента погашения краткосрочного производного инструмента и крупный после этого момента [477]. Правда обратной стороной такой процедуры будет необходимость проводить ее для каждого производного инструмента отдельно.

26.4 Модели по Халлу и Уайту

Халл и Уайт предложили модели, которые обобщают модели Васичека и КИР [474]. Они так и называются: обобщенная модель Васичека и обобщенная модель КИР. Обобщенная модель Васичека добавляет к оригинальной модели Васичека зависимость параметров от времени:

$$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t) dW.$$

Подобно модели Хо—Ли эта модель является нормальной, а введение параметра $\theta(\cdot)$ позволяет точно улавливать текущую кривую спот-ставок. Что же касается двух других функций, то $\sigma(t)$ определяет волатильность краткосрочных ставок, а $a(t)$ — форму структуры волатильности. В этой модели стоимость многих ЦБ Европейского типа можно оценить теоретически, а для ЦБ Американского типа можно разработать эффективные численные методы. Сама же модель Халла—Уайта представляет собой следующий частный случай:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW.$$

Если текущая временная структура улавливается, то

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

[477]. В обобщенной модели КИР краткосрочная ставка удовлетворяет уравнению

$$dr = [\theta(t) - a(t)r]dt + \sigma(t)\sqrt{r} dW.$$

Функции $\theta(\cdot)$, $a(\cdot)$, и $\sigma(\cdot)$ берутся из рыночных наблюдений. При постоянных параметрах для небольшого множества ЦБ, чувствительных к процентной ставке, таких, как купонные облигации и Европейские опционы на облигации, существуют аналитические (точные) решения.

В моделях БДТ и Хо—Ли, как только первоначальная структура волатильности уточняется, то волатильность будущих краткосрочных ставок оказывается полностью определенной. И наоборот, если уточняется волатильность будущих спот-ставок, то полностью определяется исходная структура волатильности. Однако, мы можем захотеть уточнить структуру волатильности и волатильность краткосрочной ставки порознь, поскольку волатильность будущих краткосрочных ставок может мало сказываться на волатильности доходности, а это будет означать практически неопределенность в отношении значения спот-ставки в следующем периоде [476]. Но у обобщенной модели Васичека есть достаточно степеней свободы, чтобы удовлетворить это требование.

Упражнение 26.4.1. Какие из моделей, нормальные или логнормальные, переоценивают опционы колл «вне денег» на облигации и недооценивают опционы пут «вне денег» на облигации?

26.4.1 Калибровка модели Халла—Уайта с помощью триномиальных деревьев

А теперь опишем схему триномиальной форвардной индукции для калибровки модели Халла—Уайта при данных a и σ [477]. Как и в модели Хо—Ли, в этой модели множество возможных значений краткосрочных ставок состоит из чисел, равноудаленных друг от друга. Пусть r_0 представляет ежегодный эквивалент краткосрочной ставки непрерывного начисления процентов момента ноль. Тогда произвольная краткосрочная ставка на дереве принимает значение $r_0 + j\Delta r$ при некотором целом j . Точки деления по оси времени также равноудалены и отстоят друг от друга на расстоянии Δt (биномиальные деревья не следует использовать для моделирования процентных ставок со свойством возвращения к среднему при постоянном Δt [475]). Поэтому узлы находятся в моментах $i\Delta t$ при $i = 0, 1, 2, \dots$. Узел на дереве с $t_i \equiv i\Delta t$ и $r_j \equiv r_0 + j\Delta r$ мы будем называть **узел** (i, j) . Краткосрочная ставка узла (i, j) , равная r_j , действует в периоде времени $[t_i, t_{i+1}]$. Для обозначения ставки сноса или ожидаемого изменения краткосрочной ставки в узле (i, j) будем использовать величину

$$\mu_{i,j} \equiv \theta(t_i) - ar_j. \quad (26.9)$$

Три различные возможности, которые имеют место в узле (i, j) для

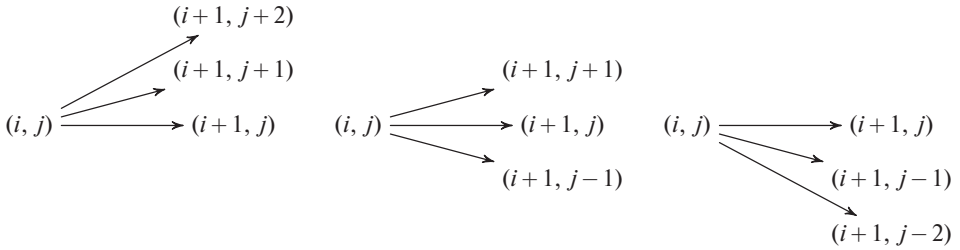


Рис. 26.5. Три схемы тринomialного ветвления в модели Халла—Уайта. Выбор зависит от краткосрочной ставки на момент t_{i+1} , ожидаемой в момент t_i .

расположения ветвей, представлены на рис. 26.5. Движение процентной ставки, описываемое средним вариантом, может сводиться к увеличению ставки на Δr , принятию прежнего значения или уменьшению на Δr . Верхний и нижний варианты окаймляют средний. Введем обозначения:

$p_1(i, j) \equiv$ вероятность перехода из узла (i, j) по верхней ветви,

$p_2(i, j) \equiv$ вероятность перехода из узла (i, j) по средней ветви,

$p_3(i, j) \equiv$ вероятность перехода из узла (i, j) по нижней ветви.

Значение в корне дерева полагается равным текущей краткосрочной ставке r_0 . В соответствии с индукцией снос $\mu_{i,j}$ в узле (i, j) является функцией $\theta(t_i)$. Поэтому как только значение $\theta(t_i)$ будет получено, то величина $\mu_{i,j}$ может быть определена из равенства (26.9). Это, в свою очередь, и вскоре мы в этом убедимся, определяет схему (или вариант) ветвления в каждом узле (i, j) и для каждого j . Таким образом, значение $\theta(t_i)$ должно быть согласовано со спот-ставкой $r(0, t_{i+2})$.

Ветви, исходящие из узла (i, j) вместе с соответствующими вероятностями $p_1(i, j)$, $p_2(i, j)$ и $p_3(i, j)$, следует выбрать так, чтобы они оказались согласованными с $\mu_{i,j}$ и σ . Этого добиваются, выбирая средний узел как можно ближе к текущему значению краткосрочной ставки плюс снос. Пусть k — одно из чисел $\{j-1, j, j+1\}$, при котором краткосрочная ставка r_k , достигаемая средней ветвью, оказывается ближайшей к значению $r_j + \mu_{i,j}\Delta t$. Тогда тремя узлами, следующими за узлом (i, j) , будут узлы $(i+1, k+1)$, $(i+1, k)$ и $(i+1, k-1)$. Геометрия получающегося в результате дерева может иметь вид представленный на рис. 26.6. Узлы в этом дереве сочетаются.

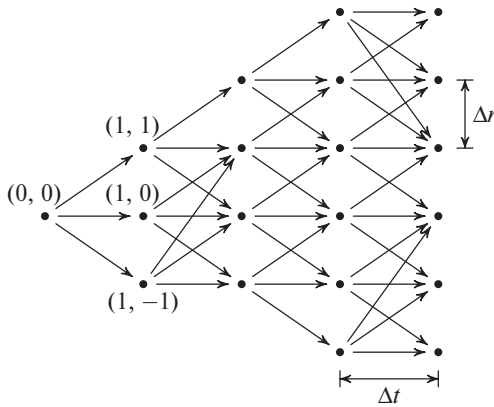
Вероятности движения вдоль этих ветвей являются функциями параметров $\mu_{i,j}$, σ , j и k :

$$p_1(i, j) = \frac{\sigma^2 \Delta t + \eta^2}{2(\Delta r)^2} + \frac{\eta}{2\Delta r}, \quad (26.10)$$

$$p_2(i, j) = 1 - \frac{\sigma^2 \Delta t + \eta^2}{(\Delta r)^2}, \quad (26.10')$$

$$p_3(i, j) = \frac{\sigma^2 \Delta t + \eta^2}{2(\Delta r)^2} - \frac{\eta}{2\Delta r}, \quad (26.10'')$$

причем $\eta \equiv \mu_{i,j}\Delta t + (j-k)\Delta r$. Поскольку алгоритмы тринomialного де-



Алгоритм для калибровки модели Халла—Уайта:

ввод: $\sigma, a, \Delta t, n, S[1..n]$;
 действительные числа ветвь $[0..n-2][-n..n]$, $Q[-n..n]$, $q[-n..n]$,
 $\theta, \mu, r_0, \Delta r, p_1, p_2, p_3$;
 целые i, j, k ;
 $Q[0] := 1; r_0 := S[1]$;
 $\Delta r = \sigma\sqrt{3}\Delta t$;
 для $(i=0$ до $n-2)$ {
 для $(j=-n$ до $n)$ {
 ветвь $[i][j] := \infty$ // Начальные значения $\notin \{-1, 0, 1\}$
 }
 }
 для $(i=0$ до $n-2)$ {

$$\theta := \frac{S[i+2] \times (i+2)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{\ln \left(\sum_{j=-i}^i Q[i][j] \times \exp[-2(r_0 + j\Delta r)\Delta t + a(r_0 + j\Delta r)(\Delta t)^2] \right)}{(\Delta t)^2};$$
 // $\theta(t_i)$
 для $(j=-i$ до $i)$ { $q[j] := 0$; }
 для $(j=-i$ до $i)$ { // Работаем по схеме ветвления узла (i, j)
 $\mu := \theta - a(r_0 + j\Delta r)$; // $\mu_{i,j}$
 Пусть $k \in \{-1, 0, 1\}$ минимизирует $|(r_0 + (j+k)\Delta r) - (r_0 + j\Delta r + \mu\Delta t)|$;
 ветвь $[i][j] := k$;
 Используйте уравнение (26.10) для вычисления p_1, p_2 и p_3 с $k = j + \text{ветвь}[i][j]$;
 $q[k+1] := p_1 \times Q[j] \times e^{-(r_0 + j\Delta r)\Delta t} + q[k+1]$; // Добавочный вклад в Q
 $q[k] := p_2 \times Q[j] \times e^{-(r_0 + j\Delta r)\Delta t} + q[k]$;
 $q[k-1] := p_3 \times Q[j] \times e^{-(r_0 + j\Delta r)\Delta t} + q[k-1]$;
 }
 для $(j=-i$ до $i)$ { $Q[j] := q[j]$; } // Модернизируем Q
 }
 вывод ветвь $[][]$;

Рис. 26.7. Алгоритм для калибровки модели Халла—Уайта. Параметр $S[i]$ представляет ежегодную ставку, эквивалентную i -периодной спот-ставке, в ячейке $Q[]$ хранятся цены состояния с нулевыми начальными значениями, ветвь $[i][j]$ поддерживает схему ветвления узла (i, j) , а n — число периодов. Избираются лишь те схемы ветвления, которые позволяют получать краткосрочные ставки.

ния из (26.12) известна точная формула:

$$\mathbb{E}^n[e^{-\hat{r}(i+1)\Delta t} | \hat{r}(i) = r_j] = e^{-r_j\Delta t + [-\theta(t_i) + ar_j + \sigma^2\Delta t/2](\Delta t)^2}.$$

Следовательно, имеет место и другое представление:

$$\theta(t_i) = \frac{r(0, t_{i+2})(i+2)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{\ln \sum_j Q(i, j) e^{-2r_j\Delta t + ar_j(\Delta t)^2}}{(\Delta t)^2}.$$

Имея же под рукой $\theta(t_i)$, мы можем рассчитать $\mu_{i,j}$, вероятности и в конце концов новые цены состояния:

$$Q(i+1, j) = \sum p_{j^*} e^{-r_{j^*}\Delta t} Q(i, j^*).$$

(суммирование здесь ведется по всем (i, j^*) , переходящим в $(i+1, j)$)

с вероятностью p_j^*). Общее затрачиваемое время является квадратичным. Алгоритм приведен на рис. 26.7.

При использовании модели Халла—Уайта можно подбирать различные значения параметров a и σ при каждом выборе или останавливаться на одном общем значении a , но использовать при каждом выборе различные значения σ . Оба подхода позволяют определить все цены опционов достаточно точно. Если же есть необходимость в подборе одного единственного множества параметров, которое позволяет скопировать все цены опционов, то модель Халла—Уайта может быть откалибрована по отношению ко всем ценам опционов таким выбором параметров a и σ , при котором минимизируется среднеквадратичная ошибка в оценке стоимости [482].

Используемая алгоритмическая идея здесь является весьма общей и может быть модифицирована для использования в ситуациях, когда диффузионный множитель имеет вид σr^β [215]. Существует и чрезвычайно эффективный алгоритм, который полностью использует тот факт, что элемент диффузии в модели Халла—Уайта является постоянным [479].

Упражнение 26.4.2. Проверьте справедливость приближения (26.12).

Задание по программированию 26.4.3. Реализуйте алгоритм, приведенный на рис. 26.7.

Задание по программированию 26.4.4. Калибровка использует кривую спот-ставок, чтобы обратить получение параметров модели Халла—Уайта. Однако, именно из того, что кривая улавливается, несомненно следует, что параметры истинной модели близки к оценкам этих параметров. Назовем модель **устойчивой**, если ее параметры можно хорошо приблизить оценками этих параметров. Проверьте, что обе модели, Халла—Уайта и БДТ, являются устойчивыми [192, 885].

Задание по программированию 26.4.5. Реализуйте алгоритм тринomialного дерева для модели Блэка—Карасинского $d \ln r = (\theta(t) - a \ln r)dt + \sigma dW$.

26.4.2 Проблемы, связанные с использованием моделей

Если параметры $\sigma(t)$ и $a(t)$ меняются со временем, то структура волатильности будет нестационарной. Стремление же выбрать функции $\sigma(t)$ и $a(t)$ с целью точно подобрать начальную структуру волатильности приводит к тому, что эта структура начинает меняться непредсказуемым образом и доверие к получаемым ценам опционов теряется. Причем замечание это справедливо для всех марковских моделей [76, 164]. Поскольку, вообще говоря, для точного выявления начальной кривой волатильности опасно использовать зависящие от времени параметры, то было показано, что в марковских моделях следует вводить не более одного параметра, зависящего от времени, причем он должен использоваться лишь для улавливания начальной кривой спот-ставок [482]. Этот способ рассуждений хорошо подходит к модели Халла—Уайта. Другой подход к сохранению структуры волатильности с течением времени сводится к использованию модели Хита—Джэрроу—Мортон (ХДМ).

26.5 Модель Хита—Джэрроу—Мортон

Мы познакомились с несколькими марковскими моделями краткосрочной ставки. Марковский подход, хотя и эффективен с вычислительной точки зрения, имеет тот недостаток, что с его помощью трудно моделировать поведение доходностей и цен облигаций различных сроков погашения. Альтернативный подход с кривой доходности рассматривает всю временную структуру как состояние процесса и прямо уточняет, как этот процесс изменяется [725].

Важная модель, предложенная Хитом, Джэрроу и Мортон, является моделью форвардной ставки [437, 511]. Она также является очень популярной моделью [17, 198]. Модель ХДМ уточняет исходную кривую форвардной ставки и структуру волатильности форвардной ставки, что и позволяет описать волатильность каждой форвардной ставки заданного момента погашения. Подобно модели Блэка—Шоулса оценки стоимости опционов, в ней не требуется вводить ни предположений об отношении к риску, ни сносов форвардных ставок [515].

26.5.1 Процесс форвардной ставки

Кривую форвардной ставки $f(0, t)$ момента ноль мы считаем заданной на конечном промежутке времени $[0, U]$, т.е. при $t \in [0, U]$. Поскольку эта кривая используется как граничное значение при $t=0$, то идеальное отражение наблюдаемой временной структуры оказывается автоматическим. Форвардные ставки управляются n случайными факторами. А если точнее, то изменения форвардной ставки описываются случайным процессом

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T)dW_i,$$

где μ и σ_i могут зависеть от прошлой истории винеровских процессов.

Возьмем однофакторную модель

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t. \quad (26.13)$$

Она является бесконечномерной системой, поскольку каждому T соответствует свое уравнение. Представляется, что однофакторные модели с эмпирической точки зрения ведут себя лучше, чем многофакторные [19]. Когда рынок облигаций, индуцированный моделью форвардной ставки (26.13), является безарбитражным в том смысле, что существует эквивалентная мартингальная мера? Чтобы это случилось, должен существовать такой процесс $\lambda(t)$, что при всех $0 \leq t \leq T$ снос

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds + \sigma(t, T) \lambda(t). \quad (26.14)$$

Этот процесс $\lambda(t)$, который может зависеть от прошлой истории винеровского процесса, является рыночной ценой риска. Вставьте это условие в уравнение (26.13) и вы получите следующую безарбитражную динамику

форвардной ставки:

$$df(t, T) = \left[\sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds + \sigma(t, T) \lambda(t) \right] dt + \sigma(t, T) dW_t. \quad (26.15)$$

Рыночная цена риска в этом уравнении присутствует лишь в сносе. А краткосрочная ставка удовлетворяет уравнению

$$dr(t) = \left[\sigma(t, t) \lambda(t) + \frac{\partial f(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} \right] dt + \sigma(t, t) dW_t. \quad (26.16)$$

Можно установить существование и единственность эквивалентной мартингальной меры, при которой цены производных инструментов на процентную ставку не будут зависеть от рыночной цены риска. Этот фундаментальный результат приводится ниже.

Теорема 26.5.1. *Предположим, что π является мартингальной мерой для рынка облигаций, а динамика форвардной ставки при π описывается уравнением $df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T)dW_i$. Причем его функции волатильности $\sigma_i(t, T)$ могут зависеть от $f(t, T)$.*

1) При всех $0 < t \leq T$ равенство

$$\mu(t, T) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, u) du \quad (26.17)$$

выполняется относительно π почти наверное.

2) Динамика цены облигации по отношению к π определяется уравнением

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{p,i}(t, T)dW_i,$$

где $\sigma_{p,i}(t, T) \equiv - \int_t^T \sigma_i(t, u) du$ (параметры сноса при π и цены всех требований определяются единственным образом выбором функции волатильности $\sigma(t, T)$ уравнения, определяющего динамику форвардной ставки по отношению к π).

Для использования модели ХДМ сначала выбирается $\sigma(t, T)$. Это и есть моделирующая часть. Параметры сноса затем определяются из уравнения (26.17). После этого, чтобы получить форвардные ставки, берется кривая форвардных ставок на сегодня $\{f(0, T), T \geq 0\}$ и интегрируется:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T)ds + \int_0^t \sigma(s, T)dW_s. \quad (26.18)$$

Рассчитайте будущие цены облигации по формуле $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$, если необходимо. Стоимость производных инструментов Европейского типа можно оценить, если смоделировать много траекторий и взять их среднее.

В силу (26.17) и (26.18)

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t df(s, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma_p(s, t) \sigma(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s,$$

где $\sigma_p(s, t) \equiv \int_s^t \sigma(s, u) du$. Поэтому, если продифференцируем по t и заметим, что $\sigma_p(t, t) = 0$, то получим, что

$$dr(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} dt + \left\{ \int_0^t \left[\sigma_p(s, t) \frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} + \sigma(s, t)^2 \right] ds \right\} dt + \left[\int_0^t \frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} dW_s \right] dt + \sigma(t, t) dW_t. \quad (26.19)$$

Поскольку второе и третье слагаемые правой части зависят от предистории σ_p и/или dW , то из-за этого функция r может оказаться немарковской. В частном случае, когда $\sigma_p(t, T) = \sigma(T - t)$ при некоторой постоянной σ , процесс краткосрочной ставки r становится марковским и уравнение (26.19) упрощается:

$$dr = \left[\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \right] dt + \sigma dW.$$

Обратите внимание, что это равенство представляет непрерывный вариант модели Хо—Ли (взгляните еще раз на упр. 26.2.10).

Упражнение 26.5.1. Какой будет $\mu(t, T)$, если $\sigma(t, T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$?

Упражнение 26.5.2. Докажите равенство (26.16) (указание: используйте уравнение (26.15)).

Упражнение 26.5.3. Рассмотрим динамику форвардной ставки из уравнения (26.13) и введем функцию $r(t, \tau) \equiv f(t, t + \tau)$. Проверьте, что

$$dr(r, \tau) = \left[\frac{\partial r(t, \tau)}{\partial \tau} + \mu(t, t + \tau) \right] dt + \sigma(t, t + \tau) dW_t.$$

Заметим, что τ означает срок до погашения.

Оценка стоимости опционов с фиксированной доходностью. В однофакторной модели ХДМ с риск-нейтральной вероятностью изменение цены облигации описывается уравнением

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t) dt + \sigma_p(t, T) dW_t. \quad (26.20)$$

Если взять Европейский опцион на покупку в момент s бескупонной облигации с погашением в момент $T \geq s$, то при цене исполнения X его стоимость в момент t

$$C_t = P(t, T) \Phi(d_t) - X P(t, s) \Phi(d_t - \sigma_t), \quad (26.21)$$

где

$$d_t \equiv \sigma_t^{-1} \ln \left(\frac{P(t, T)}{X P(t, s)} \right) + \frac{\sigma_t}{2},$$

а $\sigma_t^2 \equiv \int_t^s [\sigma \sigma_p(\tau, T) - \sigma_p(\tau, s)]^2 d\tau$ [164].

26.5.2 Марковские модели краткосрочной ставки

Упростить численные процедуры (т. е. процесс приближенного решения уравнений) часто удается в случае марковских моделей краткосрочной ставки. Прежде всего временная структура в любой момент времени t определяется параметром t , сроком погашения и краткосрочной ставкой момента t . Во-вторых, динамику краткосрочной ставки часто можно смоделировать с помощью дерева с сочетающимися узлами. Процесс краткосрочной ставки модели ХДМ обычно является немарковским. Однако при некоторых ограничениях на волатильность, краткосрочная ставка содержит всю информацию, нужную для оценки стоимости.

Пример 26.5.2. Предположим, что функция волатильности $\sigma(t, T) = \sigma$. Тогда снос по отношению к π по теореме 25.5.1 определяется равенством $\mu(t, T) = \sigma \int_t^T \sigma ds = \sigma^2(T - t)$. Процесс форвардной ставки можно записать в виде $df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma dW$, который представляет собой модель Хо—Ли (см. упр. 26.2.9). Проинтегрируем это уравнение при каждом T и получим, что

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma^2(T - s)ds + \int_0^t \sigma dW_s = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma W(t).$$

В частности, краткосрочная ставка $r(t) \equiv f(t, t)$ и потому может быть записана в виде $r(t) = f(0, t) + (\sigma^2 t^2/2) + \sigma W(t)$. Поскольку

$$\int_t^T f(t, s) ds = \int_t^T f(0, s) ds + \frac{\sigma^2}{2} t T(T - t) + \sigma(T - t) W(t),$$

то цена облигации

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-(\sigma^2/2)tT(T-t) - \sigma(T-t)W(t)}.$$

Объединяя это равенство с вышеуказанным процессом краткосрочной ставки, придем к соотношению

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{f(0, t)(T-t) - (\sigma^2/2)t(T-t)^2 - r(t)(T-t)},$$

которое и выражает цену облигации с помощью краткосрочной ставки. $\triangleleft$

Пример 26.5.3. Для модели Халла—Уайта $dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW$ с $a, \sigma > 0$, формулировка модели ХДМ имеет вид $df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma e^{-a(T-t)}dW$. Структура волатильности форвардной ставки является экспоненциально убывающей: $\sigma(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$. А все множество форвардных ставок в любой момент времени t можно определить с помощью краткосрочной ставки из уравнения

$$f(t, T) = f(0, T) + e^{-a(T-t)}[r(t) - f(0, t) + \beta(t, T) \varphi(t)],$$

где

$$\beta(t, T) \equiv \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}], \quad \varphi(t) \equiv \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}).$$

Цены облигации момента t и переменная состояния $r(t)$ также связаны друг с другом:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-\beta(t, T)[r(t) - f(0, t)] - [\beta(t, T)^2 \varphi(t)/2]}.$$

Дюрация бескупонной облигации с погашением в момент T на момент t есть $\beta(t, T)$. Наконец, динамика краткосрочной ставки задается уравнением

$$dr(t) = \left[-a[r(t) - f(0, t)] + \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \varphi(t) \right] dt + \sigma dW_t. \quad \triangleleft$$

Пример 26.5.4. Если σ_p из уравнения (26.20) неслучайна, то функция $r(t)$ является марковской тогда и только тогда, когда $\sigma_p(t, T)$ может быть представлена в виде $x(t)[y(T) - y(t)]$. В этом случае процесс, описывающий изменение r , имеет форму обобщенной модели Васичека: $dr = [\theta(t) - a(t)r]dt + \sigma(t)dW$ [477]. $\triangleleft$

Упражнение 26.5.4. 1) Оцените стоимость опционов колл на бескупонную облигацию в модели Хо—Ли.

2) Оцените стоимость опционов колл на бескупонную облигацию в модели Халла—Уайта.

Упражнение 26.5.5. Определите структуру волатильности в модели Халла—Уайта.

Упражнение 26.5.6. Проверьте, что модель из примера 26.5.3 сходится к модели Хо—Ли при $a \rightarrow 0$.

26.5.3 Биномиальное приближение

Пусть Δt обозначает длину периода. Исходная кривая форвардных ставок задается в виде $\{f(0, T), T = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots\}$, и пусть функция $f(t, T)$ представляет получаемую в модели форвардную ставку момента T , рассматриваемую в момент t . В течение каждого следующего промежутка времени Δt может поступить новая информация и заставить измениться временную структуру. Пусть $f(t + \Delta t, T)$ и будет новой форвардной ставкой. Сдвиг $f(t + \Delta t, T) - f(t, T)$ зависит от форвардной ставки, ее даты погашения T и множества других факторов. Иллюстрацией этих соображений служит рис. 26.8.

Рассмотрим следующий биномиальный процесс в реальной экономике:

$$f(t + \Delta t, T) = \begin{cases} f(t, T) + \mu(t, T)\Delta t + \sigma(t, T)\sqrt{\Delta t} & \text{с вероятностью } q, \\ f(t, T) + \mu(t, T)\Delta t - \sigma(t, T)\sqrt{\Delta t} & \text{с вероятностью } 1 - q, \end{cases}$$

где $q = 1/2 + o(\Delta t)$. Среднее и дисперсия изменения форвардной ставки равны $\mu(t, T)\Delta t + o(\Delta t)$ и $\sigma(t, T)^2\Delta t + o(\Delta t)$ соответственно. В мягких условиях гарантируется сходимость этого процесса [434]. Чтобы можно было

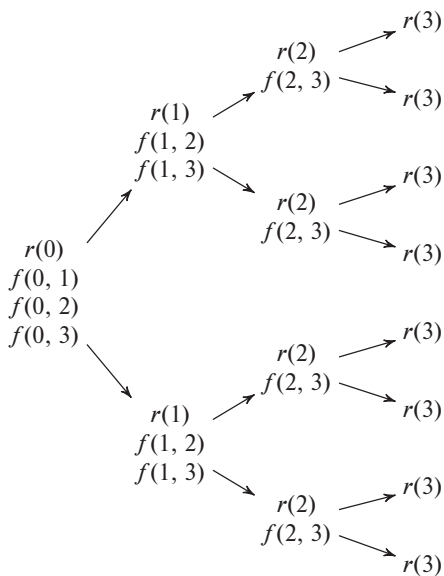


Рис. 26.8. Биномиальная модель Хита—Джэрроу—Мортон (ХДМ). Для простоты через $f(i, j)$ будем обозначать форвардную ставку периода $[j\Delta t, (j+1)\Delta t]$, известную в момент $i\Delta t$. Как и всегда, $r(i) \equiv f(i, i)$ является краткосрочной ставкой. Как правило, узлы такого биномиального дерева не сочетаются.

сделать его безарбитражным, должна существовать вероятностная мера p , при которой все требования можно оценивать, как если бы оказалась справедливой теория локального оценивания в среднем. Для простоты вычислений мы можем предположить, что $p = 1/2$. Тогда можно показать, что

$$\mu(t, T)\Delta t = \text{th } x \sigma(t, T)\sqrt{\Delta t}, \quad (26.22)$$

где

$$x \equiv \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T \sigma(t, u) du, \quad \text{th } x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

И в этом случае цена любого требования по процентной ставке оказывается безарбитражной [746].

Пример 26.5.5. Пусть функция $\sigma(t, T) = \sigma r(t)^\gamma e^{-\kappa(T-t)}$ представляет волатильность форвардной ставки. Тогда

$$\mu(t, T)\Delta t = \text{th} \left(\frac{\sigma r(t)^\gamma}{\kappa} [e^{-\kappa\Delta t} - e^{-\kappa(T-t)}] \sqrt{\Delta t} \right) \sigma r(t)^\gamma e^{-\kappa(T-t)} \sqrt{\Delta t}.$$

В частности, $\sigma(t, t)$ является волатильностью краткосрочной ставки. При $\gamma = 0$ эта волатильность постоянна, как в модели Васичека. При $\gamma = 0,5$ волатильность напоминает эту же характеристику из модели КИР, а при $\gamma = 1$ волатильность пропорциональна уровню краткосрочной ставки из модели БДТ. Возьмем трехпериодную модель с $\Delta t = 1$, $\gamma = 1$, $\kappa = 0,01$ и $\sigma = 0,3$. Тогда

$$\mu(t, T)\Delta t = \text{th}(30 \times r(t)[e^{-0,01} - e^{-0,01 \times (T-t)}]) \times 0,3 \times r(t)e^{-0,01 \times (T-t)}.$$

При заданной плоской начальной временной структуре в 5%, избранные форвардные ставки представлены на рис. 26.9. А временная струк-

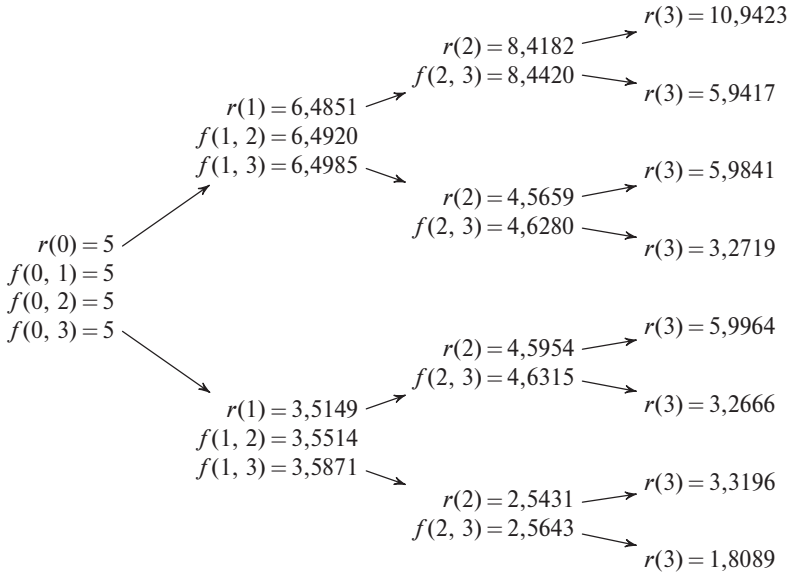


Рис. 26.9. Выборочное биномиальное дерево модели ХДМ. См. пример 26.5.5 (ставки указаны в %) и рис. 26.8.

тура каждого узла может определяться по его множеству форвардных ставок. ◁

Упражнение 26.5.7. При оценке стоимости производного инструмента на облигации с помощью модели ХДМ нужно ли строить дерево для всей жизни долгосрочной базовой облигации или достаточно его построить всего лишь для жизни производного инструмента?

Более формальная постановка. Предположим, что сделки могут происходить в моменты времени Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, ... И пусть, $f(t, T)$, как и прежде, обозначает форвардную процентную ставку, зафиксированную в контракте на момент t для одного периода (длительности Δt) по займу или кредиту, взятому в момент T . В любой из моментов t совершения сделок форвардные ставки удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению:

$$f(t + \Delta t, T) - f(t, T) = \mu(t, T)\Delta t + \sigma(t, T) \xi(t + \Delta t)\sqrt{\Delta t}, \quad (26.23)$$

где величины $\xi(\cdot)$ являются независимыми с.в. с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Значение $\xi(t)$ реализуется до сделки момента t , но после момента $t - \Delta t$. Снос μ и диффузия σ могут быть функциями текущего или прошлых значений форвардных ставок. Тем самым имеется единственный источник неопределенности (или фактор), представляемый с.в. ξ , который оказывает влияние на форвардные ставки всех сроков погашения. Ну а чтобы форвардные ставки разных сроков погашения менялись независимо, просто добавьте дополнительные источники неопределенности в уравнение (26.23).

Цена в момент времени t дисконтной облигации с погашением в момент T задается уравнением

$$P(t, T) = \exp \left[- \sum_{i=t/\Delta t}^{(T/\Delta t)-1} f(t, i\Delta t) \Delta t \right], \quad t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$$

Вставляя в него равенство (26.23) получим, что

$$P(t, T) = \exp \left[- \sum_{i=t/\Delta t}^{(T/\Delta t)-1} \left(f(0, i\Delta t) + \sum_{j=0}^{i-1} \{ \mu(j\Delta t, i\Delta t) \Delta t + \sigma(j\Delta t, i\Delta t) \xi[(j+1)\Delta t] \sqrt{\Delta t} \} \right) \Delta t \right].$$

Используем теперь в роли платежного средства счет на денежном рынке $M(t)$ и предположим, что им можно торговать. Таким образом,

$$M(0) = 1, \quad M(t) = \exp \left[\sum_{i=0}^{(t/\Delta t)-1} r(i\Delta t) \Delta t \right] = \exp \left[\sum_{i=0}^{(t/\Delta t)-1} f(i\Delta t, i\Delta t) \Delta t \right].$$

Чтобы не было арбитража, должна существовать вероятностная мера π , относительно которой последовательность $P(t, T)/M(t)$ является мартингалом; и, в частности,

$$P(t, T) = E_t^\pi(P(t + \Delta t, T) | \mathcal{F}_t). \quad (26.24)$$

Переход в пределе к процессу непрерывного времени по мере π позволяет получить, что $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du$.

Мы можем считать, что $\xi(\cdot) = \pm 1$, причем оба значения принимаются с вероятностью 0,5, а затем скорректировать числа в узлах соответственно. Именно так мы и поступали с биномиальным деревом процентной ставки, в модели Хо—Ли и модели БДТ, полагая риск-нейтральную вероятность равной 0,5. Поскольку условие мартингалности выполняется лишь если $\Delta t \rightarrow 0$, то большей точности вычислений можно добиться, если потребовать его выполнения в биномиальной ситуации [19]. Это приведет к равенству

$$\Delta t \int_{t+\Delta t}^T \mu(t, u) du = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (26.25)$$

в котором $x \equiv \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T \sigma(t, u) du$. В приведенном равенстве (26.25) подразумевается, что $\mu(t, u)$ постоянна при значениях u , лежащих между двумя смежными моментами торговли. Сносы $\mu(\cdot, \cdot)$ можно рассчитать с помощью представления (26.25), разрешая их последовательно для моментов времени $T = t + i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$

Упражнение 26.5.8. Проверьте справедливость равенства (26.25).

Упражнение 26.5.9. Покажите, что уравнения (26.22) и (26.25) в пределе эквивалентны.

26.6 Модель Ритчкена—Санкарасубрамания

В модели Ритчкена—Санкарасубрамания (РС), предложенной ими в [747], волатильность форвардной ставки $\sigma(t, T)$ связывается с волатильностью краткосрочной ставки $\sigma(t, t)$ уравнением

$$\sigma(t, T) = \sigma(t, t) e^{-\int_t^T \kappa(x) dx},$$

детерминированная функция $\kappa(x)$ которого определяется внешними условиями. На волатильность краткосрочной ставки $\sigma(t, t)$ никаких особых ограничений не накладывается. Но эта модель исключает некоторые структуры волатильности. Например, она не позволяет волатильностям различных форвардных ставок изменяться в соответствии с различными спот-ставками [600].

Динамика временной структуры может быть марковской по отношению к двум переменным состояниям. Цены облигации — а потому и форвардные ставки — момента t могут быть выражены через информацию о цене в момент ноль, краткосрочную ставку $r(t)$ и зависящую от траектории статистику, которая представляет накопленную дисперсию форвардной ставки вплоть до момента t :

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t \sigma(u, t)^2 du.$$

Отметим, что $\varphi(t)$ зависит от траектории ставки на промежутке от момента ноль до момента t . В действительности,

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-\beta(t, T)[r(t) - f(0, t)] - \beta(t, T)^2 \varphi(t)/2}, \quad (26.26)$$

где $\beta(t, T) \equiv \int_t^T e^{-\int_t^u \kappa(x) dx} du$. Риск-нейтральный процесс описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dr(t) &= \mu(r, \varphi, t) dt + \sigma(t, t) dW, \\ d\varphi(t) &= [\sigma(t, t)^2 - 2\kappa(t) \varphi(t)] dt, \end{aligned} \quad (26.27)$$

в которых

$$\mu(r, \varphi, t) \equiv \kappa(t)[f(0, t) - r(t)] + \frac{df(0, t)}{dt} + \varphi(t). \quad (26.28)$$

Поскольку волатильность краткосрочной ставки может зависеть от обеих переменных состояния, $r(t)$ и $\varphi(t)$, то она может быть записана в виде $\sigma(r(t), \varphi(t), t)$. Калибровка достигается соответствующим выбором $\kappa(\cdot)$.

26.6.1 Биномиальное приближение

В этом пункте структура волатильности форвардной ставки задается уравнением

$$\sigma(t, T) = \sigma r(t)^\gamma e^{-\kappa(T-t)}$$

(заметим, что волатильность краткосрочной ставки $\sigma(t, t)$ равняется

$\sigma r(t)^\gamma$). Следовательно, отдаленные форвардные ставки менее волатильны, чем близкие. Например, при $\gamma = 0$ мы получаем обобщенную модель Васичека, и формула (26.26) для оценки стоимости облигаций сводится к соответствующей формуле в обобщенной модели Васичека (см. упр. 26.6.1). Модель КИР отвечает значению $\gamma = 0,5$.

Форвардная ставка момента t задается равенством

$$f(t, T) = f(0, T) + e^{-\kappa(T-t)}[r(t) - f(0, t) + \beta(t, T) \varphi(t)],$$

в котором $\beta(t, T) \equiv [1 - e^{-\kappa(T-t)}]/\kappa$. Если $\gamma \neq 0$, то переменная $\varphi(t)$ определяется траекторией из значений ставки во всем периоде $[0, t]$. Хотя знания одной лишь функции $r(t)$ недостаточно для того, чтобы охарактеризовать временную структуру в момент t , но знания двух функций, $r(t)$ и $\varphi(t)$, для этого достаточно. Дюрация бескупонной облигации с погашением в момент T на момент t равна $\beta(t, T)$ [746].

Модель биномиального дерева может быть построена по аналогии с тем, как мы это делали в модели КИР. Прежде всего, возьмем следующее преобразование к виду с постоянной волатильностью:

$$Y(t) = \int \frac{1}{\sigma(r(t), \varphi(t), t)} dr(t).$$

И пусть $r(t) = h(Y(t))$ обратная функция. Тогда

$$dY(t) = m(Y, \varphi, t) dt + dW_t, \quad d\varphi(t) = [\sigma(r(t), \varphi(t), t)^2 - 2\kappa(t) \varphi(t)] dt,$$

где

$$m(Y, \varphi, t) \equiv \frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \mu(r, \varphi, t) \frac{\partial Y(t)}{\partial r(t)} + \frac{1}{2} \sigma(r(t), \varphi(t), t)^2 \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial r(t)^2}.$$

К примеру, для **пропорциональной модели** с $\gamma = 1$, $Y(t) = (1/\sigma) \ln r(t)$, $\sigma(r(t), \varphi(t), t)^2 = \sigma^2 e^{2\sigma Y(t)}$ и

$$m(Y, \varphi, t) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[\kappa(f(0, t) - e^{\sigma Y(t)}) + \varphi(t) + \frac{df(0, t)}{dt} \right] e^{-\sigma Y(t)} - \frac{\sigma^2}{2} \right\}.$$

Далее разобьем интервал $[0, T]$ на n равных периодов длины $\Delta t \equiv T/n$ и построим биномиальное дерево с сочетающимися узлами для Y . В нуле $Y_0 = Y(0)$ и $\varphi_0 = 0$. При каждом приращении времени аппроксимирующее значение Y_i может перейти в одно из следующих двух значений

$$Y_i \begin{cases} \rightarrow Y_{i+1}^+ = Y_i + \sqrt{\Delta t} \\ \rightarrow Y_{i+1}^- = Y_i - \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

Пусть $r_i \equiv h(Y_i)$. У каждого узла дерева есть две переменных состояния. И дерево изменяется следующим образом:

$$r_i, \varphi_i \begin{cases} \rightarrow r_{i+1}^+ = h(Y_{i+1}^+), \varphi_{i+1} \\ \rightarrow r_{i+1}^- = h(Y_{i+1}^-), \varphi_{i+1} \end{cases}$$

где $\varphi_{i+1} = \varphi_i + (\sigma^2 r_i^{2\gamma} - 2\kappa \varphi_i) \Delta t$ в силу (26.27). Функция φ принимает одинаковые значения как в верхнем, так и в нижнем узле, и эти значения

должны определяться с помощью форвардной индукции. А вероятность движения вверх, т.е. перехода в точку $(r_{i+1}^+, \varphi_{i+1})$ из точки (r_i, φ_i) , равна

$$p(r_i, \varphi_i, i) \equiv \frac{\mu(r_i, \varphi_i, i\Delta t)\Delta t + r_i - r_{i+1}^-}{r_{i+1}^+ - r_{i+1}^-},$$

где $\mu(\cdot, \cdot, \cdot)$ представляет собой элемент сноса из равенства (26.28) при $\kappa(x) = \kappa$. Оценку стоимости можно провести с помощью обратной индукции, а временную структуру в каждом узле можно рассчитать с помощью формулы (26.26).

Пример 26.6.1. В пропорциональной модели преобразование имеет вид $r(t) = h(Y(t)) = e^{\sigma Y(t)}$. Пусть $r_i \equiv e^{\sigma Y_i}$. Тогда биномиальное дерево изменяется следующим образом

$$\begin{array}{c} r_i, \varphi_i \\ \swarrow \quad \searrow \\ r_i e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \varphi_{i+1} \\ r_i e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \varphi_{i+1} \end{array}$$

где $\varphi_{i+1} = \varphi_i + (\sigma^2 r_i^2 - 2\kappa\varphi_i)\Delta t$. ◁

Объем дерева, как и отмечено выше, растет экспоненциально по n . В действительности число значений φ в узле равно числу различных траекторий, ведущих в этот узел из корня, поскольку значения φ зависят от траектории. Это наблюдение должно быть очевидным из устройства биномиального процесса. Один из приемов, позволяющих бороться с этим недостатком, предписывает сохранять лишь максимальное и минимальное значения φ в каждом узле, определяя остальные m промежуточных значений с помощью линейной интерполяции, и выбирая величину m по желанию (та же идея использована в п. 11.7.1). По-видимому, модель сходится при достаточно больших n и m .

Упражнение 26.6.1. Покажите, что для обобщенной модели Васичека $\varphi(t) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}$.

Дополнительная литература

Обзор моделей процентной ставки приведен в [858], о сравнении моделей говорится в [754], их теоретический анализ содержится в [32, 78, 378, 670], экспериментальному исследованию моделей краткосрочной ставки и ХДМ посвящены публикации [47, 139, 677], а за более детальной информацией по оценке стоимости производных инструментов можно обращаться к [276, 507, 779, 780, 850]. В монографиях [40, 183, 470, 510, 681, 731] также затрагиваются модели процентной ставки. В отношении экспериментального исследования модели Хо—Ли можно проконсультироваться по [359]. О калибровке модели БДТ можно почитать в [74, 625], а модели Халла—Уайта — в [479, 483, 735]. Двухфакторная обобщенная модель Васичека была предложена в [480]. Модель ХДМ исследована значительно более детально: ее теоретический анализ имеется в [58, 116, 165, 166, 435, 437], условия, при которых краткосрочная ставка

становится марковской, приводятся в [163, 197, 477, 499, 515, 747], элементы управления риском есть в [682], оценка волатильности с помощью метода главных компонент обсуждается в [510], о дискретных вариантах модели говорится в [436, 510] и, наконец, об использовании метода Монте-Карло для оценки стоимости опционов Американского типа фиксированной доходности информация есть в [160]. В отношении модели РС за дополнительными идеями относительно численных расчетов можно обратиться к [600, 746, 747], а с ее экспериментальным исследованием можно познакомиться по [92]. В книге [77] ставится вопрос, генерирует ли модель процентной ставки временные структуры из класса функционалов (скажем, полиномов), используемых для подгонки временной структуры; в частности, в ней показывается, что модели Хо—Ли и Халла—Уайта несовместимы со схемой Нельсона—Зигеля. Структуры волатильности исследованы в [136, 393, 722]. Универсальный алгоритм триномиального дерева для произвольного процесса Ито предложен в [187].

Примечания

1. Сопоставьте это с логнормальной моделью из упр.23.2.3.
2. Значение p может быть выбрано скорее произвольно, поскольку в пределе играет роль лишь волатильность [436].
3. В предположении, что форвардная ставка стремится к постоянной при больших t , из уравнения (26.6) вытекает, что либо разность $r(t) - r(t-1)$ практически равна нулю, либо $|\ln \delta| > 0$ [300].

НАИБОЛЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ ЦЕННЫЕ БУМАГИ

27 Ценные бумаги с фиксированной доходностью

28 Ценные бумаги, обеспеченные закладными. Введение

29 Анализ ценных бу- маг, обеспеченных закладными

30 Облигации, обеспеченные закладными

В главе 27 рассматриваются ценные бумаги с фиксированной доходностью и особенное внимание в ней уделяется ценным бумагам с вложенными опционами. Остальные главы посвящены ценным бумагам, связанным с закладными. В главе 28 вводятся основные идеи, объясняются общепринятые правила обращения этих ценных бумаг и возникающие при этом проблемы. В главе 29 исследуется трудная проблема предоплаты и обсуждается оценка стоимости. В главе 30 дается обзор очень известного типа облигаций США, обеспеченных портфелем закладных и предлагающих фиксированную дату погашения, которые так и называются: «облигации, обеспеченные закладными».

27 Ценные бумаги с фиксированной доходностью

Не будь ни заемщиком, ни кредитором.

Шекспир (1564—1616), *Гамлет*

Облигации выпускаются с целью привлечения денежных средств. Внимание в этой главе концентрируется на облигациях и в особенности на облигациях со вложенными опционами*). Заканчивается она дискуссией по дюрациям ключевых ставок.

27.1 Введение

Облигация может быть обеспеченной или не обеспеченной. **Обеспеченным выпуском** называется тот, в котором выпускающая организация предоставляет в залог конкретные активы, которые можно использовать для оплаты держателям облигаций в случае, если фирма не сможет выполнить свои обязательства. Однако многие облигации являются **необеспеченными**, без каких бы то ни было активов в роли залога. Долгосрочные необеспеченные выпуски называются **долговыми обязательствами**, в то время как краткосрочные необеспеченные выпуски, такие, как **коммерческие бумаги**, упоминаются как **банкноты**.

В случае облигаций принято включать в соглашение пункт, позволяющий или держателю облигаций и/или выпускающей организации предпринять определенные действия против другой стороны. Облигационный **контракт в двух экземплярах** представляет собой оригинальное соглашение по ссуде между инвестором и выпускающей организацией. Обычным же для облигации вариантом вложенного опциона является возможность отзыва (свойство колл), а точнее говоря, предоставление выпускающей организации права погасить свою задолженность, полностью или частично, до момента погашения. Другим примером является выпуск со свойством пут, который предоставляет держателю облигаций право продать выпуск выпускающей организации обратно. В этом случае преимущество инвестора будет состоять в том, что если процентные ставки поднимутся после момента выпуска, уменьшая тем самым цену облигаций, то инвестор может заставить выпускающую организацию погасить стоимость облигаций, скажем, по номиналу. Конвертируемая облигация (КО) — это такой выпуск, который дает держателю облигаций право обменять их на определенное количество обычных акций. Такое свойство выпуска предоставляет держателю облигаций право использовать к своей выгоде благоприятное движение цены акции выпускающей

*) То есть с некоторыми дополнительными функциями. — Прим. перев.

организации. **Облигация, подлежащая обмену**, позволяет своему владельцу обменять выпуск на определенное число обычных акций, но другой компании, отличной от той, которая предприняла этот выпуск облигаций. Некоторые облигации выпускаются в комбинации с warrants, рассматриваемыми как часть сделанного предложения. Вarrant дает держателю право купить оговоренную ценную бумагу (ЦБ) по определенной цене.

27.2 Облигации Казначейства, агентств и муниципалитетов

Строго говоря, названия «ЦБ с фиксированной доходностью» заслуживают лишь облигации без опционов (т.е. какого-то дополнительного права что-то предпринять) и без риска неплатежеспособности. На рынке США почти все ЦБ с фиксированной доходностью в этом узком смысле выпускаются Казначейством. Тем не менее в реальной жизни термин «ЦБ с фиксированной доходностью» используется скорее свободно и в настоящее время его относят даже к облигациям с неопределенными выплатами. В таблице на рис. 27.1 указана непогашенная задолженность по ЦБ Казначейства, а таблица на рис. 27.2 дает представление о необъятном рынке бумаг Казначейства США.

В начале 1996 г. Казначейство объявило свои планы по выпуску облигаций, номинальные выплаты по которым индексировались в соответствии с инфляцией, так что в реальных ценах эти выплаты оказывались фиксированными [147]. В качестве индекса, измеряющего ставку инфляции, был привлечен средний по всем городам США Индекс Потребительских Цен для всех городских потребителей CPI-U (Consumer Price Index for all Urban Consumers), по всем наименованиям товаров и независимо от сезона ежемесячно публикуемый Бюро Статистических исследований по труду. При погашении облигаций их номинал должен корректироваться так, чтобы отражать инфляцию на протяжении всей их жизни (Британское правительство выпустило привязанные к индексу ЦБ еще в 1981 г. [135]). С аукциона 29 января 1997 г. 10-летние банкноты Казначейства США с доходностью в $3\frac{3}{8}\%$ и проиндексированной инфляцией были проданы на сумму в \$ 7 млрд. (см. таблицу на рис. 27.3)

Долги Казначейства США по ЦБ (в млрд. \$)							
1980	616,4	1985	1 360,2	1990	2 195,8	1995	3 307,2
1981	683,2	1986	1 564,3	1991	2 471,6	1996	3 459,7
1982	824,4	1987	1 675,0	1992	2 754,1	1997	3 456,8
1983	1 024,4	1988	1 821,3	1993	2 989,5	1998	3 355,5
1984	1 176,6	1989	1 945,4	1994	3 126,0	1999	3 281,0

Рис. 27.1. Стоимость непогашенных ЦБ Казначейства США в 1980—1999 гг. Источник: Казначейство США.

[759]¹. Процентная ставка, установленная при аукционе, будет оставаться фиксированной на протяжении всего срока жизни ЦБ. Полугодовые выплаты по процентам будут оплачиваться, исходя из суммы, оставшейся непогашенной на момент оплаты, причем скорректированной в зависимости от инфляции. При погашении ЦБ величина возвращаемой суммы будет определяться по наибольшей из величин: скорректированных непогашенных остатков или номиналу при выпуске.

20 марта 1995 г., понедельник						
Облигации, Банкноты и Векселя Казначейства						
Ставка	Дата погашения	Тип	Цена при покупке	Цена при продаже	Изменение	Доходность
Правительственные Облигации и Банкноты						
37/8	Мар 95	n	99:29	99:31	-1	5,05
83/8	Апр 95	n	100:03	100:05	-1	5,79
37/8	Апр 95	n	99:24	99:26	...	5,54
57/8	Май 95	n	99:31	100:01	...	5,55
81/2	Май 95	n	100:12	100:14	...	5,38
103/8	Май 95		100:20	100:22	...	5,53
...						
71/8	23 Фев 95		95:26	95:28	-11	7,48
61/4	23 Авг 95		85:21	85:23	-12	7,47
71/2	24 Ноя 95		100:14	100:16	-15	7,46
75/8	25 Фев 95		102:23	102:25	-10	7,39
Разделенные ЦБ Казначейства США						
	Май 95	ci	99:04	99:04	+1	5,84
	Май 95	np	99:04	99:04	+1	5,95
	Авг 95	ci	97:22	97:23	...	5,82
	Авг 95	np	97:19	97:19	...	6,10
...						
	24 Ноя 95	ci	11:17	11:20	-4	7,39
	24 Ноя 95	bp	11:21	11:24	-4	7,35
	25 Фев 95	ci	11:25	11:29	-3	7,25
	25 Фев 95	bp	12:04	12:08	-3	7,15
Векселя Казначейства						
		Количество дней до погашения				
	23 Мар 95	1	5,43	5,33	+0,42	5,40
	30 Мар 95	8	4,96	4,86	-0,04	4,93
	6 Апр 95	15	5,61	5,51	+0,04	5,60
	13 Апр 95	22	5,50	5,40	+0,01	5,49
...						
	14 Дек 95	267	5,93	5,91	-0,01	6,21
	11 Янв 96	295	5,95	5,93	-0,01	6,25
	8 Фев 96	323	5,96	5,94	-0,01	6,28
	7 Мар 96	351	5,98	5,96	...	6,34

Рис. 27.2. Котировки ЦБ Казначейства. Числа после двоеточий представляют 32-е доли. В последнем столбце по ВК приведены эквивалентные ежегодные варианты ставок ДЭО, рассчитанные по формуле (3.10). Котировки ВК даны в сотых долях и на дисконтной основе. Все доходности представляют предлагаемую котировку. Обозначения: n = банкнота Казначейства, ci = отделенные проценты по купонам, bp = отделенные суммы погашения по ОК, tt = отделенные суммы погашения по БНК. Источник: газета Wall Street Journal от 21 марта 1995 г.

7 января 1999 г., четверг						
Облигации, Банкноты и Векселя Казначейства						
Ставка	Дата погашения	Цена при покупке	Цена при продаже	Изменение	Доходность до погашения по отношению к накопленному капиталу	Накопленный капитал
ЦБ Казначейства, индексируемые с учетом инфляции						
3,625	02 Июл 99	99-15	99-16	-01	3,768	1024
3,375	07 Янв 99	96-23	96-24	-02	3,850	1035
3,625	08 Янв 99	98-11	98-12	-05	3,831	1015
3,625	28 Апр 99	98-03	98-04	+17	3,734	1014

Рис. 27.3. Котировки ЦБ Казначейства, индексируемых с учетом инфляции. Источник: газета Wall Street Journal от 8 января 1999 г.

Долговые обязательства Федеральных Агентств могут быть выпущены Федеральными агентствами, которые являются непосредственными подразделениями правительства США или различными **предприятиями, спонсируемыми правительством (GSE; government-sponsored enterprises)**, которые были созданы Конгрессом для предоставления ссуд таким заемщикам, как владельцы домов, фермеры и студенты [395]. Все GSE находятся в частной собственности и имеют лицензии, позволяющие привлекать денежные средства на рынке. Примерами GSE являются Федеральные банки по ссудам для покупки домов (FHL Banks = Federal Home Loan Banks), Федеральная Национальная Ассоциация по ипотечным (FNMA = Federal National Mortgage Association или «Fannie Mae»), Федеральная корпорация по ссудам для покупки дома под залог (FHLMC = Federal Home Loan Mortgage Corporation или «Freddie Mac») и Студенческая Ассоциация по управлению ссудами (SLMA = Student Loan Marketing Association или «Sallie Mae»). И, хотя федеральных гарантий по ЦБ, выпускаемым GSE никто не дает, но убеждение, что правительство в крайнем случае поможет ликвидировать задолженность при любом невыполнении обязательств приводит к тому, что ставки по этим ЦБ оказываются ниже ставок ЦБ большинства компаний. Однако в будущем такое убеждение может измениться [404].

Муниципальные облигации представляют собой ЦБ с фиксированной доходностью, выпускаемые штатом, властями штата или местными правительствами для финансирования важнейших проектов по улучшению жизни или поддержке самых общих нужд правительства. Есть две основные категории муниципальных облигаций: доходные облигации и облигации с обязательствами общего плана.

Доходные облигации выпускаются для сбора денег на реализацию каких-то конкретных проектов, таких, как платная дорога или госпиталь, которые проектируются с целью получения дохода, достаточного как для оплаты основной суммы, так и процентов по ней держателям облигаций. **Облигации с обязательствами общего плана** обычно сопровождаются налоговыми льготами таких выпускающих организаций, как город, графство

или штат. Они часто рассматриваются как менее рискованные, чем доходные облигации. Инвесторов привлекает в муниципальных облигациях тот факт, что полученные по ним проценты исключаются из федерального налогообложения доходов, а в некоторых случаях освобождаются также от местных налогов и налога штата. Муниципальные облигации котируются в процентах от номинала и в долях, выраженных в 1/32 процента подобно облигациям Казначейства (ОК).

27.3 Корпоративные облигации

Рынки как облигаций, так и акций предоставляют корпорациям эффективный способ привлечения капиталов. У облигаций есть то преимущество, что они не разбавляют акционерную собственность. В сравнении со ссудами в банке, облигации часто позволяют корпорациям занимать деньги под процентные ставки, которые меньше существующих ставок в банках. Кроме того, с облигациями корпорация может занять деньги по фиксированной ставке и на более длительный срок, чем она могла бы это сделать в банке, поскольку большая часть банков не предоставляют долгосрочные кредиты по фиксированной ставке.

Корпоративные облигации котируются в пунктах и восьмых долях пункта. К примеру, облигация номинала \$ 10 000 с котировкой 95 $\frac{6}{8}$ стоит \$ 9575. Поскольку каждая облигация должна быть оформлена в таможенных органах, чтобы отражать заинтересованность как выпускающей организации, так и инвестора, то корпоративные облигации не стандартизированы. Держатели облигаций, предоставляя ссуду выпускающей организации, с юридической точки зрения являются кредиторами этой организации, а не собственниками (некоторого капитала) подобно держателям акций.

27.3.1 Отзывные и продаваемые облигации

Держатель отзывной облигации продает выпускающей организации опцион (т.е. право) на покупку облигации в промежутке времени, начинающемся с момента, когда она впервые может быть отозвана, и продолжающемся до даты погашения. Позицию держателя облигации, следовательно, можно представить в виде:

$$\left(\begin{array}{c} \text{длинная позиция} \\ \text{по отзывной облигации} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{длинная позиция} \\ \text{по неотзывной облигации} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{продажа} \\ \text{опциона колл} \end{array} \right).$$

Если же охарактеризовать ее в терминах цены, то получим:

$$\left(\begin{array}{c} \text{цена отзывной} \\ \text{облигации} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{цена неотзывной} \\ \text{облигации} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{цена опциона} \\ \text{колл} \end{array} \right). \quad (27.1)$$

Выпускающей организации может быть дано право отозвать облигацию при первой дате отзыва и в любое время после него (**непрерывный отзыв**) или при первой дате отзыва и при всех последующих купонных выплатах (**дискретный отзыв**). Цена опциона колл может также меняться в зависимости от времени. Как правило, существует начальный период, когда

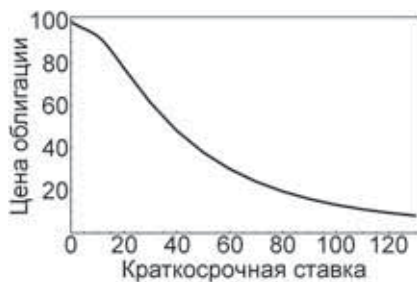


Рис. 27.4. Сжатие цены отзывных облигаций. Пятилетняя 10 % облигация, отзываемая по номиналу, оценивается с помощью модели КИР.

отзывать облигацию нельзя, но после него отзывать можно, причем цена отзыва убывает к номиналу на протяжении оставшегося срока ее жизни [329]. Возьмем в качестве примера облигацию с 20 годами до погашения и отзываемую через 5 лет по цене 106. Держатель облигации фактически занимает длинную позицию по гипотетической 20-летней неотзывной облигации и короткую по опциону колл, дающему выпускающей организации право отозвать облигацию через 5 лет по цене в 106.

Выпускающая организация отзовет облигацию, если доходность по аналогичной облигации на рынке для нового выпуска с вычетом расходов на выпуск и налогов окажется меньше текущей купонной ставки выпуска. Решение же об исполнении опциона зависит от будущих выплат по облигации в предположении, что она не отзывается. Цена отзывной облигации, если она отзывается, остается примерно равной цене ее отзыва, если процентные ставки низки, и феномен этот известен под названием **сжатие цены**. Объясняется это тем, что в такой ситуации весьма вероятно, что облигация будет отозвана (см. рис. 27.4).

Держатель **продаваемой облигации** (или отдаваемой) имеет право продать облигацию выпускающей организации по оговоренной цене и в определенное время [238, 536]. Позиция держателя продаваемой облигации может быть описана следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c} \text{длинная позиция по} \\ \text{отдаваемой облигации} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{длинная позиция по} \\ \text{неотдаваемой облигации} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{длинная позиция} \\ \text{по опциону пут} \end{array} \right).$$

Цена отдаваемой облигации, следовательно, выражается в виде

$$\left(\begin{array}{c} \text{цена отдаваемой} \\ \text{облигации} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{цена неотдаваемой} \\ \text{облигации} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{цена} \\ \text{опциона пут} \end{array} \right).$$

Но облигация может быть одновременно отзывной и продаваемой. И если обе эти функции исполняются по номиналу и в одно и то же время, то такая облигация обычно называется **растяжимой облигацией** [371].

27.3.2 Облигации с использованием погасительного фонда

Возвращение основной суммы с помощью регулярных выплат, по облигации, использующей погасительный фонд, растягивается на многие годы. Для возвращения требуемой части непогашенной суммы можно использовать два метода. Выпускающая организация может либо закупить требуемое количество облигаций на открытом рынке и передать их доверенному лицу, либо она может отозвать нужное количество

облигаций по номиналу, выбирая их частями и наудачу. Выбор метода зависит от существующих процентных ставок. Если ставки высокие, то выпускающая организация пожелает удовлетворить требования погасительного фонда с помощью покупки на рынке. Если же ставки низки, то будет выбран отзыв по номиналу. Если данный выпуск снабжен обеими функциями, отзыва и погасительного фонда, то бывают ситуации, в которых оптимальным решением будут отзыв лишь части выпуска. Почти все выпуски облигаций с использованием погасительного фонда имеют и функцию отзыва [848].

Упражнение 27.3.1. Очертите контуры метода для оценки стоимости отзывной облигации при условии использования погасительного фонда.

27.3.3 Конвертируемые облигации (КО)

Держателю КО дается право приобрести акции выпустившей ее компании при выполнении особых условий. В контракте КО точно определяются либо конверсионное отношение, либо **цена конверсии**. Напомним, что конверсионное отношение определяет число акций, получаемых при конверсии. Это отношение всегда корректируется пропорционально расщеплению акций и получаемым по ним дивидендам. С другой стороны, конверсионное отношение можно выразить через цену конверсии в виде

$$\text{цена конверсии} \equiv \frac{\text{номинальная стоимость КО}}{\text{конверсионное отношение}}.$$

Таким образом, эта цена представляет стоимость одной акции при конверсии. Право же на конверсию может распространяться на весь срок жизни облигации или только на некоторую его часть. Как правило КО придаются и другие функции, причем наиболее распространенными среди них являются право выпускающей организации отозвать или продать (отдать) выпуск [328]. На исполнение опциона (такой функции) обычно накладываются условия: например, чтобы КО могла быть отозвана, цена акции должна превышать цену конверсии на определенную величину (некоторую премию). Контракт может содержать и так называемый **пункт переустановки**, предписывающий полагать цену конверсии равной цене акции, если эта последняя меньше цены конверсии на момент переустановки [221].

Стоимость конверсии, напоминаем, равна стоимости КО при условии, что облигация конвертируется немедленно, а именно:

стоимость конверсии =

$$= \text{рыночная цена акции} \times \text{конверсионное отношение}. \quad (27.2)$$

На рынке она называется также **паритетом** (но см. упр. 27.3.3). А рыночная цена КО должна быть не меньше стоимости ее конверсии плюс **базовая стоимость**, т. е. стоимость облигации без права на конверсию. Цена, которую инвестор реально платит за акцию, если сначала покупается

КО, а затем конвертируется, называется **рыночной ценой конверсии**:

$$\text{рыночная цена конверсии} \equiv \frac{\text{рыночная цена КО}}{\text{конверсионное отношение}}.$$

Поскольку рыночная цена конверсии не может быть меньше рыночной цены акции, то держатель облигации платит за акцию премию в размере

$$\text{рыночная цена конверсии} - \text{рыночная цена акции}.$$

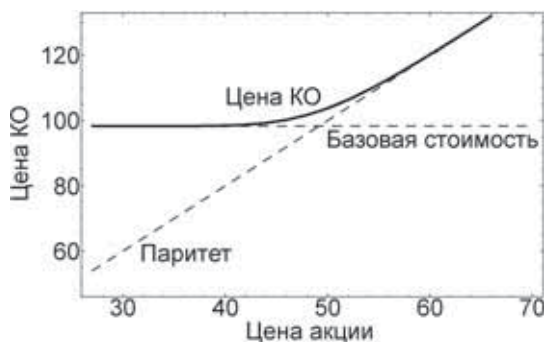
Премия обычно выражается в виде процента от рыночной цены акции.

Пример 27.3.1. У КО с номиналом \$ 10 000 и ценой конверсии в \$ 80 конверсионное отношение равно $10\,000/80 = 125$. При условии, что котируемая цена КО равна 103, цена покупки оказывается равной $1,03 \times 10\,000 = 10\,300$ долларам. При текущей цене акции в \$ 78 премия на акцию составляет величину $10\,300/125 - 78 = 4,4$ доллара. $\triangleleft$

КО имеют свойства как облигаций, так и акций. Если цена акции настолько низка, что базовая стоимость намного больше стоимости конверсии, то КО ведет себя подобно облигации с фиксированной ставкой. С другой стороны, если цена акции настолько высока, что стоимость конверсии намного больше, чем базовая стоимость, то КО продается как инструмент-аналог обыкновенной акции. Между этими крайними случаями, КО продается как гибридная ЦБ. Обе стоимости, как базовая, так и паритет, для цены КО играют роль пола, делая ее поведение похожим на график стоимости опциона колл (см. рис. 27.5).

Но проще оценивать стоимость КО на *по-акционной основе*, т.е. исходя из гипотетической КО, которая может быть конвертируема в *одну акцию*. Конечно, реальная цена будет равна цене одной акции, умноженной на конверсионное отношение. В качестве разумного первого приближения предположим, что процентные ставки постоянны [847]. Тогда для оценки стоимости КО можно использовать алгоритм биномиального дерева для Американских опционов, подобный тому, который приведен на рис. 9.17, для чего нужно лишь изменить функцию выплаты. При погашении выбор будет между ценой конверсии плюс купон или ценой акции, в то время как перед погашением выбор будет между КО и акцией. Алгоритм приведен на рис. 27.6. Меры чувствительности также можно рассчитать с его помощью (см. гл. 10). Многие свойства опцио-

Рис. 27.5. Цена КО по сравнению с ценой акции. Обе стоимости, как базовая, так и паритет, представляют пол. У этой конкретной КО конверсионное отношение равно 2, а цена конверсии — \$ 50. График похож на график рис. 7.3 для опционов колл на акцию.



Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости конвертируемой облигации при акции, по которой выплачивается известная дивидендная доходность:

```

ввод:  $S, P, \sigma, t, n, \delta$  ( $1 > \delta > 0$ ),  $m, r, c$ ;
действительные числа  $R, p, u, d, C[0..n], v$ ;
целые  $i, j$ ;
 $R := e^{r(t/n)}$ ;
 $u := e^{\sigma\sqrt{t/n}}$ ;  $d := e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$ ;
 $p := (R - d)/(u - d) =$ ;
для ( $i = 0$  до  $n$ ) {  $C[i] := \max(Su^{n-i}d^i(1 - \delta)^m, P + c)$ ; }
для ( $j = n - 1$  вниз до  $0$ ) {
  для ( $i = 0$  до  $j$ ) {
    если [ период  $(j, j + 1)$  содержит момент невыплаты дивидендов ]
      {  $m := m - 1$ ; }
     $v := (p \times C[i] + (1 - p) \times C[i + 1])/R$ ; // Обратная индукция.
    если [ период  $[j, j + 1)$  содержит момент оплаты купона ] {  $v := v + c$ ; }
     $C[i] := \max(Su^{j-i}d^i(1 - \delta)^m, v)$ ;
  }
}
вывод  $C[0]$ ; // На по-акционной основе

```

Рис. 27.6. Алгоритм биномиального дерева для КО на акцию, по которой оплачивается дивидендная доходность. S — текущая цена акции, m хранит общее число дивидендных невыплат до момента истечения срока включительно, который наступит через t лет, δ — дивидендная доходность при каждой выплате дивидендов наличными, c — купонная выплата на акцию, а P — цена конверсии. Заметим, что цена конверсии дана на по-акционной основе. Разбиение должно быть таким мелким, чтобы моменты оплаты купонов и невыплаты дивидендов были разделены хотя бы одним периодом.

нов на обычную акцию продолжают выполняться и для КО. Например, большая волатильность цены акции увеличивает стоимость КО.

Упражнение 27.3.2. Покажите с помощью арбитражных соображений, что КО должна продаваться по цене, не меньшей стоимости ее конверсии.

Упражнение 27.3.3. Можете ли вы найти недостаток у формулы (27.2)?

Упражнение 27.3.4. Докажите, что во многом как и у Американских опционов колл, облигацию невыгодно конвертировать, если дивиденды наличными по акции не выплачиваются, а процентная ставка остается постоянной.

Упражнение 27.3.5. Объясните тот факт, что в биномиальной модели оценки стоимости КО из рис. 27.6 цена КО сходится к цене акции при увеличении цены акции.

Упражнение 27.3.6. Подобно воррантам КО может быть конвертируема в недавно выпущенные акции; в действительности при определенных предположениях они оказываются эквивалентными (см. упр. 11.1.10 (2)).

На по-акционной основе цена конверсии плюс заключительная купонная выплата ведут себя очень похоже на цену исполнения. Но в отличие от ситуации с воррантами исполнение опциона конверсии не требует оплаты «цены исполнения». Выведите соотношение по оценке стоимости между стоимостью Европейского ворранта и КО с опционом конверсии Европейского типа. Предположите, что выпускающая организация не выплачивает дивидендов и не признает деления акций.

Задание по программированию 27.3.7. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 27.6.

27.3.4 Банкноты

У банкноты с плавающей ставкой купонные выплаты связаны с конкретной процентной ставкой, такой как ставка LIBOR или доходность по ЦБ Казначейства. Процентная ставка, которую оплачивает заемщик, регулярно пересматривается. Например, ставка может пересматриваться каждые 6 месяцев и принимать значение текущей ставки ВК плюс 100 базисных пунктов. Среди банкнот с плавающей ставкой встречаются банкноты, имеющие функцию отзыва, введенную фирмой, и функцию конверсии, которая позволяет инвестору превратить ее в банкноту с фиксированной ставкой. В дополнение к сказанному купонная ставка может иметь пол или шапку. Встречается и функция возвращения, при которой держатель может погасить свои капиталовложения по номиналу в конкретные даты оплаты купона или после заранее определенной даты. Конечно, если спрэд отсутствует, то банкнота с плавающей ставкой в дни пересмотра ставок будет продаваться по номиналу.

Структурные банкноты являются ЦБ, при выпуске которых выпускающая организация не только продает банкноту, но и одновременно входит в соглашение по свопу или в сделку с производной ЦБ, чтобы устранить ее подверженность к риску невыполнения особых условий данной банкноты [237]. Каждая структурная банкнота наполнена неповторимыми функциями, отражающими предпочтения инвестора. Рассмотрим инвестора, который считает, что кривая доходности будет становиться плоской. ЦБ, призванная отражать эту точку зрения, могла бы связать свои купонные платежи с формой кривой доходности. Таким образом, купоны банкноты могут пересматриваться раз в полгода в соответствии со ставкой, которая зависит от спрэда между доходностями 30-летней и 2-летней ЦБ Казначейства.

27.4 Методы оценки стоимости

Несколько способов оценки стоимости корпоративных облигаций были упомянуты ранее: наихудшая доходность, доходность до отзыва, доходность до отзыва по номиналу, спрэд доходности или статический спрэд. В этом же пункте рассматриваются другие подходы.

27.4.1 Методика определения доходности фиксированного денежного потока

В методике определения доходности статического денежного потока доходность до погашения облигации сравнивается с доходностью существующей в настоящее время ЦБ Казначейства близкого срока погашения. Разница представляет собой спрэд доходности. Поскольку при определении такой доходности должны быть сделаны определенные предположения о будущем денежном потоке, то она называется также доходностью (статического) денежного потока. С этой методикой связаны и две очевидные проблемы. Во-первых, такие доходности ничего не говорят о временной структуре процентных ставок. И, во-вторых, волатильность процентной ставки может искажать денежный поток облигаций с вложенными опционами.

Упражнение 27.4.1. Предположим, что верна какая-нибудь стохастическая модель краткосрочной ставки с дискретным временем. И рассмотрим рисковую бескупонку корпорации, которая в настоящее время не является «банкротом». Если эта компания становится банкротом, то она остается в этом состоянии до момента погашения облигации, когда инвестор получит ноль долларов. Пусть p_i означает риск-нейтральную вероятность того, что выполнение обязательств по облигации прекратится в момент i при условии, что этого не случилось ранее; величины p_i зависят лишь от времени, но не от краткосрочной ставки. Докажите, что

$$\frac{\text{цена корпоративной } n\text{-периодной бескупонки}}{\text{цена } n\text{-периодной бескупонки Казначейства}} = \prod_{i=1}^n p_i.$$

Этот результат обобщает равенство (5.6) в так называемом статическом мире. Для получения p_i можно использовать алгоритм, приведенный на рис. 5.9.

27.4.2 Методология опционной оценки стоимости

Стоимость вложенного опциона представляет собой разницу в цене между облигацией с функцией опциона и в остальном такой же облигацией, но без этой функции. Такой взгляд приводит к возникновению методологии опционной оценки стоимости, в соответствии с которой ЦБ с фиксированной доходностью и некоторой вложенной функцией опциона разбивается на опцион и компоненту, свободную от него. Как следует из равенства (27.1), отзывная облигация представляет собой пример подобного рода. Рассмотрим, например, купонную облигацию с датой погашения в июне 2015 г. и отзываемую в июне 2012 г. по цене 102. Держатель этой облигации на 1 апреля 2000 г. в действительности владеет неотзывной облигацией с погашением через 15 лет и 2 месяца и занимает короткую позицию по опциону колл, который дает выпускающей организации право отозвать 3-летний денежный поток, начинающийся 1 июня 2012 г. за цену исполнения 102.

В методологии опционной оценки стоимости для оценки цены опциона применяют какую-нибудь конкретную схему оценки стоимости опциона,

такую, как модель Блэка—Шоулса из п. 24.7. Алгоритм биномиального дерева из рис. 9.13 для Американских опционов можно модифицировать для оценки стоимости вложенного опциона колл. После того, как стоимость опциона получена, определяемая в соответствии с ней (т.е. **индуцированная**) **цена неотзывной облигации** рассчитывается как сумма цен отзывной облигации и опциона колл. Наконец, **доходность с учетом опциона** рассчитывается как доходность, при которой приведенное значение (ПЗ) денежного потока гипотетической неотзывной облигации оказывается равным этой «индуцированной» цене. Говорят, что отзывная облигация оценена правильно, если ее доходность с учетом опциона равна доходности «эквивалентной» неотзывной облигации. О ней же говорят, что она дорогая (переоценена), если ее доходность с учетом опциона меньше, и дешевая (недооценена), если ее доходность с учетом опциона выше [325, 330].

В этой методологии есть несколько недостатков. Скажем, как показано в п. 24.7, при оценке стоимости ЦБ с фиксированной доходностью модель Блэка—Шоулса нельзя признать удовлетворительной. И может не оказаться образца, с которым можно было бы сравнить доходность с учетом опциона, чтобы получить спред доходности. Наконец, при такой методологии не учитывается форма кривой доходности, а она влияет на стоимость всех ЦБ, чувствительных к процентной ставке [329].

Упражнение 27.4.2. Объясните, почему когда процентные ставки поднимаются, цена отзывной облигации не падает так же сильно, как и цена ее неотзывной компоненты.

Упражнение 27.4.3. Для облигаций с вложенными опционами, такие традиционные меры дюрации, как модифицированная дюрация, теряют свою уместность в силу неопределенности денежного потока. Дюрация же отзывной облигации после корректировки на опцион колл обычно называется **дюрацией с учетом опциона (ДУО)** и определяется равенством

$$\text{ДУО}_o \equiv -\frac{\partial \text{цена}_o}{\partial y} / \text{цена}_o$$

(индекс «о» обозначает функцию отзыва). Выпуклость отзывной облигации после корректировки на опцион колл обычно упоминается как **выпуклость с учетом опциона (ВУО)** и определяется равенством

$$\text{ВУО}_o \equiv -\frac{\partial^2 \text{цена}_o}{\partial y^2} / \text{цена}_o.$$

1) Докажите, что

$$\text{ДУО}_o = (\text{цена}_{\text{но}} / \text{цена}_o) \times \text{дюрация}_{\text{но}} \times (1 - \Delta),$$

где $\Delta \equiv \partial (\text{цена опциона колл}) / \partial \text{цена}_{\text{но}}$ представляет дельта вложенного опциона колл (индекс «но» обозначает «без отзыва»).

2) Покажите, что

$$\text{ВУО}_o = \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o} \times [\text{выпуклость}_{\text{но}} \times (1 - \Delta) - \text{цена}_{\text{но}} \times \Gamma \times (\text{дюрация}_{\text{но}})^2],$$

где $\Gamma \equiv \partial^2 (\text{цена опциона колл}) / (\partial \text{цена}_{\text{но}})^2$ есть гамма вложенного опциона колл.

27.4.3 Методология спреда с учетом опциона

Заключительная методология называется **спред, учитывающий опцию (СУО)*** [34, 323]. Этот популярный подход принимает во внимание свойства вложенных опционов у ЦБ с фиксированной доходностью и пытается справиться с трудностями, которые встретились в предыдущих подходах. В отличие от рассмотренных ранее методов, при анализе СУО не пытаются предсказать дату погашения облигации. Для иллюстрации основных его соображений используем биномиальное дерево процентной ставки из гл. 23. Обобщение на другие модели не составит труда. Если же говорить точнее, то в качестве основы для наших численных расчетов мы используем откалиброванное биномиальное дерево процентной ставки из рис. 23.8 и отзывные облигации. Напоминаем, что спред определяется как приращение (доходности) у каждой краткосрочной ставки на дереве. Он измеряет ту величину, на которую доходность (рисковой) облигации превышает безрисковую доходность. Метод СУО обобщает идею спреда на облигации с неопределенным денежным потоком.

При использовании СУО процедура расчета модельной цены в основном та же, что при определении стоимости облигаций без вложенных опционов за исключением того, что на этот раз в каждом узле следует рассматривать исполнение опциона. Если ПЗ *будущего* денежного потока, определяемого с помощью обратной индукции для каждого узла превосходит цену опциона колл, то этот опцион будет исполнен и минимальная цена опциона колл превратится в стоимость облигации. Обычно это и происходит, когда процентные ставки низки.

Рассмотрим 3-летнюю отзывную облигацию с рыночной ценой в 99,696 и ежегодной купонной ставкой 5%. Функция отзыва представляет собой дискретный отзыв по номиналу, который может быть исполнен в любой из моментов оплаты купона. Если функция отзыва исполняется, то все будущие купонные выплаты, которые по расписанию должны были пройти после даты отзыва отменяются, а в момент отзыва выплачивается номинал плюс купонная выплата этого момента. Мы хотим получить СУО, связанный с наблюдаемой ценой облигации в 99,696. На рис. 27.7 СУО оказывается равным 50 базисным пунктам, которые прибавляются ко всем краткосрочным ставкам. Как показано на рис. 23.14, стоимость той же облигации без опции отзыва оказалась бы равной 100,569 при том же СУО. Как и следовало ожидать, опцион колл (т. е. функция отзыва) уменьшает стоимость облигации.

Алгоритм поиска СУО для отзывных облигаций приведен на рис. 27.8. Наряду с отзывными облигациями анализ СУО можно применить и к другим корпоративным облигационным структурам. Общий порядок действий в этих случаях представлен ниже.

*) Английское слово option переводится на русский язык двояко: либо как «опцион», либо как выбор, дополнительная функция или опция, которая может быть у конкретной ЦБ, как здесь. Но возможны ошибки в переводе и читатель должен это иметь в виду. Полезно предупредить читателя и о другом. Ниже под сокращением СУО иногда понимается методология, а иногда и сам спред, или разница в доходности между ЦБ, имеющей дополнительную функцию (например, отзыва) и не имеющей ее. — Прим. перев.

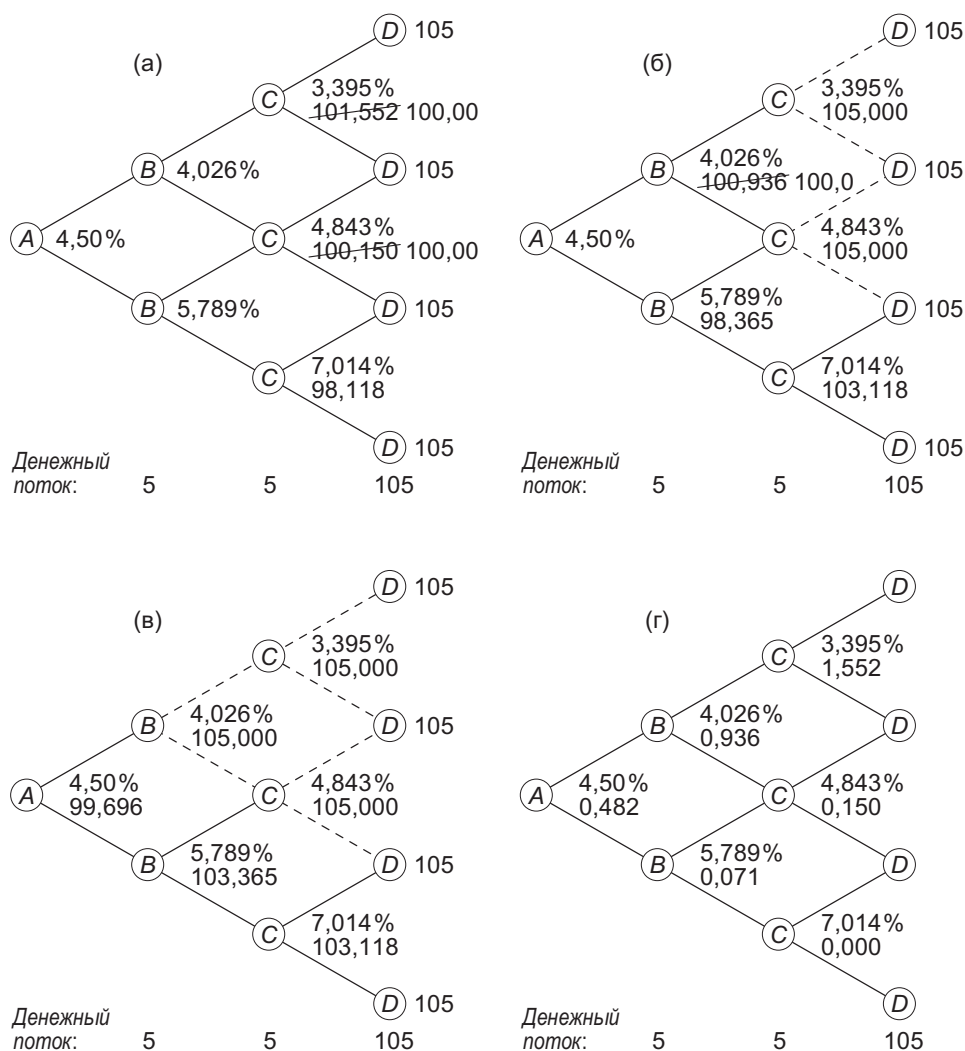


Рис. 27.7. Вычисление СУО для отзывных облигаций. Деревья цен построены для 3-летней отзывной облигации, по которой выплачивается ежегодная купонная ставка 5%. Функция отзыва представляет дискретный отзыв по номиналу (100), который можно исполнить в любой из моментов оплаты купона. Базовое биномиальное дерево процентной ставки получено из рис. 23.8 добавлением 50 базисных пунктов ко всем краткосрочным ставкам. Пунктирные линии указывают на досрочное исполнение. (а) Величины ПЗ рассчитаны в узлах С. Цены свыше 100 заменены на 100 из-за исполнения опциона. (б) ПЗ в узлах В рассчитываются после добавления 5 к ценам в узлах С. И опять, цены свыше 100 заменяются на 100. (в) Шаги в (б) повторите для узла А. Цена в каждом узле есть ПЗ оставшегося денежного потока. Поскольку модельная цена равна рыночной, 99,696, то СУО равен 0,5%. (г) Рассчитайте стоимость опциона (эта часть неправильна; см. текст).

Алгоритм для расчета СУО у отзывных облигаций:

```

ввод:  $P$ ,  $n$ ,  $cr[n]$ ,  $r[1..n]$ ,  $C[0..n]$ ,  $v[1..n]$ ,  $\varepsilon$ ;
действительные числа  $P[1..n+1]$ ,  $s$ ;
целые  $i$ ,  $j$ ;
 $s := 0$ ; // Начальная догадка
 $P[1] := \infty$ ;
пока [  $|P[1] - P| > \varepsilon$  ] {
    для ( $i = 1$  до  $n + 1$ ) {  $P[i] := C[n]$ ; } // Инициализация
    для ( $i = n$  вниз до 1) { // Пройтись по столбцу в обратном направлении
        для ( $j = 1$  до  $i$ ) { // Обратная индукция
             $P[j] := C[i - 1] + \min \left( cr[i - 1], \frac{P[j] + P[j + 1]}{2 \times (1 + r[i] \times v[i]^{j-1} + s)} \right)$ ;
            выбрать текущее значение  $s$ ;
        }
    }
}
вывод  $s$ ;

```

Рис. 27.8. Алгоритм для расчета СУО у отзывных облигаций. Обозначения: P — рыночная цена, $cr[i]$ — цена опциона колл i периодов спустя ($cr[i] = \infty$, если облигация неотзывная), $r[i]$ — ставка основной линии периода i , $C[i]$ содержит денежное поступление точно i периодов спустя (или, что эквивалентно, в конце $(i - 1)$ -го периода), $v[i]$ — мультипликативное отношение для ставок периода j , а n — число периодов. Все числа относятся к периоду. Заметим, что купонная выплата момента отзыва выплачивается независимо от того, будет отозвана облигация или нет. Для отдаваемых облигаций 1) $\min()$ следует заменить на $\max()$ и 2) заменить цены опциона колл в $cr[]$ на цены опциона пут, а также 3) положить $cr[i] = -\infty$, если облигация не отдается.

1. Оценить кривую спот-ставок.
2. Откалибровать модель процентной ставки.
3. Сформулировать правила исполнения вложенных опционов.
4. Прибавить СУО ко краткосрочным ставкам на дереве.
5. Рассчитать модельную цену.
6. Последовательно повторить пп. 4 и 5, меняя СУО до тех пор, пока модельная цена не сравняется с рыночной.

Существует большой выбор алгоритмов для поиска корня. Простейший из них метод деления пополам подвести не может. Метод же Ньютона—Рафсона сходится быстрее, но при определенных значениях СУО неприменим в силу недифференцируемости. При желании познакомиться с другими вариантами алгоритмов см. пп. 4.9, 4.10 и [727].

Упражнение 27.4.4. Объясните, почему в методологии СУО не предполагается наличие паралельных сдвигов у временной структуры.

Упражнение 27.4.5. Объясните, почему СУО у отзывной облигации уменьшается при увеличении волатильности процентной ставки, если остальные условия не меняются.

Упражнение 27.4.6. Как ведет себя СУО у отдаваемой облигации

- 1) когда рыночная цена уменьшается, а остальные элементы равны и

2) если купонная ставка уменьшается, при тех же остальных параметрах и рыночной цене, равной номиналу?

Упражнение 27.4.7. Мотивируйте тот факт, что при использовании моделирования по методу Монте-Карло для оценки стоимости отзывных (отдаваемых) облигаций ведет к недооценке (соответственно, переоценке) их стоимости.

Задание по программированию 27.4.8. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 27.8 с помощью метода дифференциального дерева, который опирается на метод Ньютона—Рафсона.

Задание по программированию 27.4.9. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 27.8 с помощью метода хорд.

Задание по программированию 27.4.10 Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 27.8 с помощью метода Риддерса.

Оценка стоимости вложенных опционов и доходности с учетом опций. В отличие от явной оценки стоимости вложенного опциона колл в методологии оценки стоимости опциона, при анализе СУО цена опциона оказывается побочным продуктом. И рассчитывается она следующим образом. Во-первых, вытекающая из проведенных рассуждений цена неотзывной облигации является ПЗ денежного потока облигации после добавления СУО ко всем краткосрочным ставкам на дереве. Поэтому стоимость вложенного опциона колл определяется вычитанием рыночной цены отзывной облигации из индуцированной (найденной) цены неотзывной облигации.

При объяснении вычисления стоимости вложенного опциона ниже будем ссылаться на рис. 27.7 (г). В узлах *C* внутренняя стоимость опциона колл равна нулю или разнице цен базовой облигации и отзыва, если она больше нуля. Скажем, в верхнем узле *C* внутренняя стоимость равна

$$\max(0, 101,552 - 100) = 1,552.$$

Аналогично, внутренняя стоимость в третьем узле равна нулю, поскольку опцион не исполняется. В узлах *B* мы находим ПЗ стоимости опциона в узлах *C* и считаем стоимостью опциона большее из двух чисел: внутренней стоимости в данном узле *B* и ПЗ стоимости опциона в последующих узлах *C*. В верхнем узле *B*, например, внутренняя стоимость опциона равна 0,936, поскольку он исполняется. А ПЗ стоимости опциона в двух последующих узлах *C* равно

$$\frac{1,552 + 0,150}{2 \times 1,04026} = 0,818.$$

Следовательно, стоимость опциона равна 0,936. И аналогично, стоимость опциона в нижнем узле *B* равна

$$\frac{0,150}{2 \times 1,05789} = 0,071.$$

В конечном счете стоимость опциона оказывается равной

$$\frac{0,936 + 0,071}{2 \times 1,045} = 0,482.$$

Вытекающая из этих рассуждений цена базовой облигации при фиксированной ставке поэтому равна $99,696 + 0,482 = 100,178$. Однако она не может быть такой. Разве не должна цена равняться 100,569, т.е. цене той же самой облигации, но без опции отзыва, как было найдено по рис. 23.14 и при том же СУО в 50 базисных пунктов? И разве не должна стоимость вложенного опциона, определяемая по формуле (27.1), равняться $100,569 - 99,696 = 0,873$ вместо 0,482? В самом деле, способ получения величины 0,482 предполагал, что базовая облигация является отзывной. Поэтому величина 100,178 является ценой облигации, которая не свободна от опций, как мы того и хотели.

Напомним, что доходность с учетом опциона (или опции) представляет собой процентную ставку, при которой ПЗ денежного потока облигации равняется вычисленной цене гипотетической неотзывной облигации. Поскольку у этой неотзывной облигации с найденной ценой в 100,56 до погашения 3 года и по ней оплачиваются 5% ежегодные купоны, то доходность с учетом опций равна 4,792% ежегодного начисления.

Упражнение 27.4.11. Исправьте рис. 27.7 (г).

Дюрация и выпуклость, полученные с помощью анализа СУО. Анализ СУО можно использовать для того, чтобы понять как под влиянием изменений процентных ставок меняются цены. Это делается прежде всего изменением краткосрочной ставки на небольшую величину Δr , скажем, плюс 10 базисных пунктов. Затем дерево процентной ставки пересматривается, чтобы выяснить новую краткосрочную ставку (например, Δr добавляется к каждой краткосрочной ставке на дереве процентной ставки в модели Хо—Ли). Далее, сохраняя СУО постоянным, вычисляем новую модельную цену P_+ . Наконец, рыночную цену P_0 и новую модельную цену используем для оценки реальной дюрации $(P_0 - P_+)/ (P_0 \Delta r)$, по формуле (4.6) [325, 848]. Эта дюрация называется **дюрацией СУО** [55, 330]. Реальная же выпуклость требует несколько больших вычислений, поскольку она использует и модельную цену P_- , которая получается при уменьшении краткосрочной ставки на малую величину Δr . В результате в силу (4.16) искомая дюрация оказывается равной $(P_+ + P_- - 2 \times P_0) / (P_0 (\Delta r)^2)$. При многофакторных моделях процентной ставки, вышеописанную процедуру следует повторить для каждого фактора отдельно.

Популярный альтернативный поход состоит в том, чтобы прибавить величину Δr ко всей кривой спот-ставок и затем откалибровать модель процентной ставки с той же волатильностью. Остальные вычисления аналогичны [36, 329, 429]. Уточнение движений временной структуры, не соответствующее используемой модели процентной ставки, вне всяких сомнений, теоретически не оправдано. Однако этот метод легко применять; и, кроме того, чтобы делать что-то другое, нужно иметь большое доверие к используемой модели [731].

Доходности за период владения. Доходность за период владения (ДПВ) оценивает доходность облигации на протяжении периода владения. Как известно, накопленное значение (НЗ) F денежного потока облигации к концу ее срока состоит из НЗ всех процентных выплат и погашений, а,

следовательно, включает в себя проценты от реинвестирования, и также включает НЗ будущей цены. Поэтому средняя ежемесячная доходность может быть записана в виде*)

$$(F/P)^{1/k} - 1;$$

P — стоимость облигации, а k — число месяцев периода. Чтобы рассчитать указанную доходность, нужно представлять динамику как процентной ставки, так и ставок реинвестирования. Анализ по системе СУО можно легко объединить с анализом ДПВ. Прежде всего, мы создаем для периода владения несколько фиксированных сценариев изменения процентной ставки. Затем рассчитываем ДПВ для каждого из этих сценариев, предполагая, что СУО остается постоянным в конце срока. И эта методология оказывается лучше, чем просто сравнение СУО у двух ЦБ.

Упражнение 27.4.12. Предположим, что кривая существующих спот-ставок плоская, а начисление процентов непрерывное. Докажите, что для неосновной облигации без дополнительных функций любое откалиброванное дерево процентной ставки будет приводить к спрэду, который равняется спрэду доходности. Спрэдом доходности называется разница между доходностями до погашения у основных и неосновных облигаций. А спрэд — это дополнительная доходность выше краткосрочной ставки на дереве в смысле п. 23.3.1.

27.5 Дюрации ключевых ставок

Хотя дюрация и играет существенную роль при определении подверженности процентной ставки к риску, но у нее есть много недостатков. Например, предполагаемый сдвиг кривой доходности обычно нереалистичен. Кроме того, если оказывается желательным подчеркнуть чувствительность ценных бумаг к изменению ставки для разных сроков погашения, то вместо одного единственного числа требуется целый вектор из дюраций. Для удовлетворения подобных потребностей Хо ввел [453] так называемые дюрации ключевых ставок, которые проявили себя эффективным и «обладающим интуицией» инструментом по управлению риском [260, 390, 455].

Идея состоит в том, чтобы превратить эффективную дюрацию в вектор из дюраций, называемых дюрациями ключевых ставок. Это разложение измеряет чувствительность к различным сегментам кривой доходности и так, что когда дюрации ключевых ставок сложить, то получится величина, приближенно равная исходной эффективной дюрации. Ценные бумаги с одинаковой эффективной дюрацией могут иметь весьма отличающиеся дюрации ключевых ставок. Указывая на сегменты кривой

*) Это выражение напоминает формулу $i^{(k)}/k = (1+i)^{1/k} - 1$, в которой i — ежегодная ставка процента, а $i^{(k)}$ — эквивалентная ей ежегодная ставка процента k — кратного начисления. Только сейчас роль года исполняет период, а $1+i = F/P$. Поэтому следует иметь в виду, что выписанная формула справедлива при k -кратном начислении процентов за период. — Прим. перев.

доходности, которые влияют на стоимость ценной бумаги больше всего, дюрации ключевых ставок отделяют риски друг от друга.

Чтобы определить дюрации ключевых ставок, мы начнем со множества из 11 основных ставок: 3-месячной и 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25 и 30-летних. Возможен и другой выбор. И пусть $d(i)$ обозначает величину изменения у i -й ключевой ставки. Влияние ключевой ставки на другие ставки убывает *линейно*, достигая нуля при смежных ключевых ставках и далее. Конечно, первую и последнюю из ключевых ставок следует рассматривать отдельно. См. рис. 27.9, на котором величина $t(i)$ обозначает срок действия i -й ключевой ставки. Изменение любой ключевой ставки приводит к смещению всей кривой спот-ставок, «сделанному на заказ» (или выбранному), и называемому **базисным сдвигом ключевой ставки**. Соответствующая дюрация ключевой ставки определяется выражением $(P_0 - P_+)/[P_0 d(i)]$. Цена P_+ в нем рассчитывается следующим образом. Полученный на заказ сдвиг кривой спот-ставок, определяемый базисным сдвигом ключевой ставки, используем для получения новой кривой спот-ставок, которая в свою очередь будет использована для калибровки модели процентной ставки. После этого оценим стоимость ценной бумаги, причем с тем же СУО, если потребуется. Полученные в результате 11 дюрации и будут дюрациями ключевых ставок.

Пример 27.5.1. Увеличим 10-летнюю ключевую ставку на 10 базисных пунктов. Поскольку 10-летнюю ключевую ставку и следующую ключевую ставку справа от нее, 15-летнюю ставку «разделяют» 5 лет, то эффект от изменения 10-летней ключевой ставки на протяжении этих лет уменьшается на $10/5 = 2$ базисных пункта в год. Поэтому 11-летняя ставка увеличивается на 8 базисных пунктов, 12-летняя — на 6 и т.д. При этом 15-летняя ставка и все последующие, с большими сроками, остаются неизменными. Но изменение 10-летней ключевой ставки также влияет на ставки меньших, чем 10 лет сроков. Так, поскольку 10-летнюю клю-

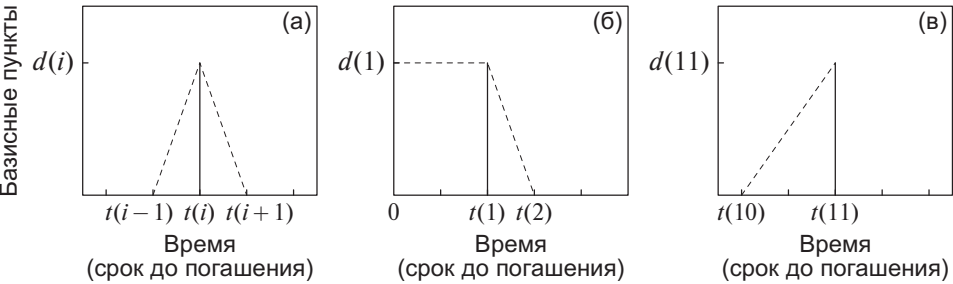


Рис. 27.9. Движения временной структуры, используемые в дюрациях ключевых ставок. Увеличение на $d(i)$ базисных пунктов (а) i -й ключевой ставки, $2 \leq i \leq 10$, (б) первой ключевой ставки и (в) последней, одиннадцатой ключевой ставки. Заметим, что $t(1) = 0,25$ и $t(11) = 30$. Возможны и другие варианты. Например, случай (б) можно составить из двух частей, первая из которых, лежащая между 0 и $t(1)$, являлась бы зеркальным отражением (в), а вторая, с центром в $t(1)$ была бы аналогом треугольника в (а) [848].

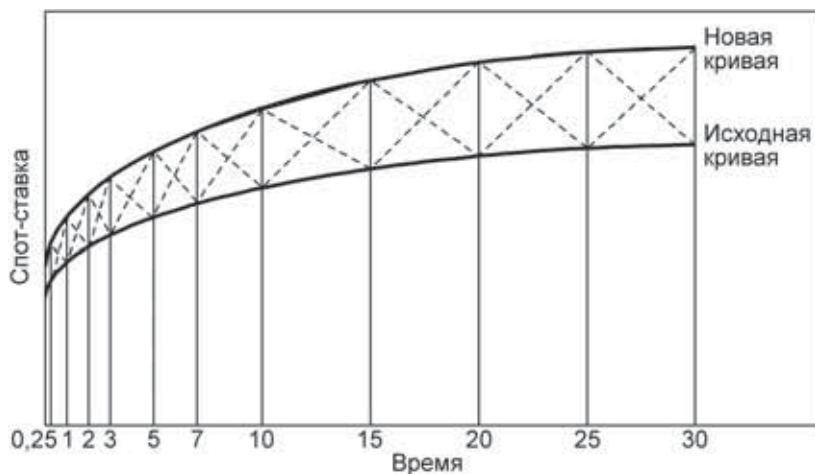


Рис. 27.10. Линейная интерполяция сдвига временной структуры. Приближение для новой кривой спот-ставок получается, когда 11 базисных сдвигов ключевых ставок прибавляются к исходной кривой спот-ставок. Хотя совпадение новой кривой и приближенной кривой гарантируется лишь при ключевых ставках, но они оказываются весьма близкими друг к другу и в других точках.

чевую ставку и находящуюся слева от нее 7-летнюю ключевую ставку «разделяют» 3 года, то эффект от изменения 10-летней ключевой ставки уменьшается на $10/3 = 3,333$ базисных пункта в год. Следовательно, 9-летняя ставка увеличивается на $10 - 3,333 = 6,667$ базисных пункта, 8,5-летняя ставка увеличивается на $10 - 1,5 \times 3,333 = 5,0005$ базисных пункта и т. д. Ну а 7-летняя ставка и все ставки меньших сроков не меняются.

Сумма дюраций ключевых ставок может приближенно равняться дюрации по отношению произвольному заранее заданному сдвигу кривой спот-ставок, и объясняется это следующим образом. Опишем этот заданный (или сделанный на заказ) сдвиг функцией $s(t)$, $0 \leq t \leq 30$. Тогда функция $s(t)$ оказывается линейно приближенной суммой базисных сдвигов ключевых ставок, если определить их равенствами $d(i) \equiv s(t(i))$, $i = 1, 2, \dots, 11$, для 11 ключевых ставок (см. рис. 27.10). Поэтому следует ожидать, что дюрация по отношению к $s(t)$ грубо будет равна сумме дюраций ключевых ставок.

Одна из проблем с дюрациями ключевых ставок состоит в том, что базисные сдвиги ключевых ставок не зависят от модели, используемой для оценки стоимости. Другая связана с тем, что базисные сдвиги ключевых ставок могут привести к отрицательным форвардным ставкам.

Дополнительная литература

О неправильной оценке стоимости отзывных облигаций Казначейства США говорится в [152], а больше информации по ЦБ Казначейства, индексированным для защиты от инфляции, можно найти в [777].

Цены ЦБ Казначейства США чутко реагируют на поступление самой различной общественно-доступной информации по экономике, и в особенности по уровню занятости, Индексу цен производителей и объявлениям запланированных ставок федеральных фондов [358]. В то же время представляется, что реальные изменения процентных ставок серьезного влияния на движение цен облигаций или акций не оказывают [146]. Больше информации по облигациям с вложенными опционами имеется в [328, 712, 837, 889], а с критикой теоретических разработок для ситуаций с вложенными опционами можно познакомиться в [372]. Познакомиться с хеджированием при помощи опционов процентной ставки можно по [117], а с **облигационными свопами** — по [317, 328, 799]. Одно из экспериментальных исследований политики отзыва обнаружило много несоответствий с теорией [553]. Корпорации выпускают конвертируемые облигации (КО) по разным причинам [559]. Скажем, КО могут служить альтернативой рискованным капиталовложениям [599]. В [21, 562, 651, 762, 880] есть много информации по самой методике СУО, в [218] — по предложениям, выходящим за рамки СУО и в [198] — по различным версиям СУО. Критика этой методологии приведена в [349]. По кредитным рискам можно обратиться к [481, 513, 535, 583], а по **кредитным производным инструментам**, которые защищают инвесторов от неплатежеспособности или падения рейтинга — к [253, 254, 398].

Причины, приводящие к накоплению государственного долга, простираются далеко за пределы «войн и восстаний» [414]. Нечестная игра вокруг национального долга свойственна многим государствам и продолжается на протяжении всей истории. Адам Смит (1723—1790) верил, что такие долги «в конце концов вероятно разорят все большие нации в Европе». Его также беспокоило «притворное погашение долгов», которое прикрывало банкротство государства [808]. Монтескье поддерживал использование погасительных фондов «для поддержания общественного доверия» [676]. Дж. С. Милл (1806—1873) утверждал, что перенос процентных платежей является «серьезным пороком» [665].

Примечание

1. Ее номер CUSIP есть 9128272M3. Всем ценным бумагам США, появившимся после 1970 г. в виде записи в книге или в форме сертификата присвоен девятизначный **номер CUSIP**. Сокращение CUSIP идет от названия Committee on Uniform Securities Identification Procedure и переводится как «Комитет по проведению единообразной идентификации ценных бумаг». Система присвоения номера CUSIP, предложенная Ассоциацией Американских Банков, в 1989 г. была расширена и теперь включает в себя иностранные ценные бумаги, которые идентифицируются девятизначной международной системой присвоения номера CUSIP [355].

28 Ценные бумаги, обеспеченные закладными. Введение

Всякий, кто глуп настолько, что обещает взвалить на себя ответственность за чужие долги, заслуживает того, чтобы и его собственность исполняла роль залога при оплате долга.

Proverbs 27:13

Ценная бумага, обеспеченная закладными (ЦБЗ) (mortgage-backed security = MBS), представляет собой облигацию с обеспечением в виде неделимой доли собственности, отвечающей некоторому комплекту закладных. Эти ЦБЗ традиционно характеризует высокая доходность, они представлены в широком ассортименте и отличаются высоким качеством кредита и ликвидностью [432]. Рынок закладных проявил чрезвычайную изобретательность в построении новых продуктов [54]. А сложность этих продуктов и опция (функция, право на привлечение) предоплаты способствовали развитию и использованию продвинутых моделей и высокой технологии в области программного обеспечения. В действительности рынок закладных, вероятно, достаточно эффективно не мог бы и функционировать без этого [659]. Хотя наше внимание и будет сконцентрировано в основном на закладных по месту жительства, но используемые базовые принципы вполне можно применить и к другим типам активов.

28.1 Введение

Закладная — это ссуда, в которой гарантией возврата денег служит (или выступает в качестве залога) недвижимая собственность. Кредитор — **кредитор по закладной** — может прервать погашение ссуды, наложив арест на собственность, если заемщик — **заемщик по закладной** — оказывается неплатежеспособен, т.е. оказывается не в состоянии выполнить контрактные обязательства. Залогом при выпуске ЦБЗ служит весь комплект ссуд по закладным. Денежный поток по закладным, входящим в этот комплект, естественно сказывается на денежном потоке данных ЦБЗ. Есть три основных типа ЦБЗ: **переводные ценные бумаги на закладных (ПЦБЗ)** (mortgage pass-through security = MPTS)*) или просто «переводные», **обязательство по закладным, исполняющим роль залога (ОЗЗ)** (collateralized mortgage obligation =

*) Вообще говоря, «переводные ЦБ» представляют собой сгруппированные в пул долговые обязательства, оформленные в виде акций, по которым доход от должников через посредников переходит к инвесторам. Наиболее распространенным типом «переводных» являются «переводные ЦБ на закладных», обычно гарантируемые правительством. В них погашающие выплаты и проценты собственников домов «переводятся» из исходного банка через Правительственное агентство инвесторам без оплаты этой услуги. — Прим. перев.

Существующая задолженность по закладным (в млн. \$)						
	1994	1995	1996	1997	1998	1999
<i>Общая задолженность</i>	4 392 794	4 603 981	4 877 536	5 211 286	5 736 638	6 387 651
<i>По владельцам:</i>						
<i>Коммерческие банки</i>	1 012 711	1 090 189	1 145 389	1 245 315	1 337 217	1 495 717
<i>Сберегательные учреждения</i>	596 191	596 763	628 335	631 826	643 957	668 634
<i>Компании по страхованию жизни</i>	210 904	213 137	208 162	206 840	213 640	229 333
<i>Федеральные агентства</i>	315 580	308 757	295 192	286 167	292 636	320 105
<i>Пулы закладных/трасты</i>	1 730 004	1 863 210	2 040 848	2 239 350	2 589 764	2 954 836
<i>Физические лица/прочие</i>	527 404	531 926	559 609	601 788	659 425	719 026

Рис. 28.1. Существующая задолженность по закладным 1994—1999 гг. Источник: Federal Reserve Bulletin.

= СМО*) и **разделенные**)** ценные бумаги на закладных (РЦБЗ) (stripped mortgage-backed security = SMBS).

На рынке долговых обязательств сектор закладных является самым большим и заметно превосходящим остальные его составляющие (см. таблицу на рис. 28.1). Сам же рынок закладных концептуально делится на первичный рынок, называемый также **порождающим рынком**, и вторичный рынок, на котором собственно и торгуют закладными. Вторичный рынок включает в себя рынок ссуд, которые не превращаются в ценные бумаги и называются **первичными ссудами**, и рынок ЦБЗ.

Для многих инвесторов индивидуальные закладные непривлекательны. Прежде всего потому, что требуют больших капиталовложений, часто в сотни тысяч долларов США или больше. Кроме того, многим инвесторам не хватает средств и знаний для определения, т. е. оценки имеющихся кредитных рисков. Более того, традиционную закладную отличает фиксированная ставка, постоянные и регулярные выплаты, в которых доли сумм **погашения и процентов (ПиП)** (Principal and Interest = P&I) меняются каждый месяц, что приводит к головной боли при составлении отчетов. Наконец, уровень предоплаты в них зависит от множества различных факторов, что делает размер и моменты внесения погашающих сумм непредсказуемыми.

Ликвидного рынка индивидуальных закладных не существовало до тех пор, пока в 1970 г. ипотечные учреждения не предприняли переоформление своих пакетов закладных в ценные бумаги. Индивидуальные неликвидные закладные после этого превратились в хорошо подготов-

*) Облигация, обеспеченная закладными и подразделяющая пулы закладных на классы различных сроков погашения, называемых «слоями». По слоям выплачиваются различные ставки процента, а сроки погашения у них варьируются от нескольких месяцев до 20 лет. В виде компенсации за более низкую доходность инвесторы получают по ним более высокую надежность в сравнении с надежностью стандартных ЦБЗ. Обычно ОЗЗ поддерживаются правительством и имеют рейтинг AAA. — Прим. перев.

**) В практике брокерных домов обычным является разделение облигации на части «тело», т. е. погашающие ссуду выплаты, и «купоны», т. е. процентные платежи, которыми они затем торгуют как различными бескупонными облигациями. — Прим. перев.

ленные к рыночным условиям ценные бумаги, которые стало легче анализировать и продавать-покупать. Сегодня финансовые посредники скупают закладные и объединяют их в общий пул (фонд). Доли от этого фонда затем продаются инвесторам. Сами же доли неделимой собственности, сопровождающей ссуду и фактически исполняющей роль обеспечения ценных бумаг (или залога), называются **сертификатами участия (СУ)** (Participation Certificate = PC). Посредник получает выплаты по закладным от собственников домов или обслуживающих организаций и передает их инвесторам. Посредник же гарантирует, что оплатит инвесторам все ПиП в случае банкротства. Причем этим соглашением некоторые из вышеупомянутых проблем решаются или упрощаются. Скажем, размер минимального капиталовложения уменьшается. Кредитный риск владельцев домов гарантиями посредника по сути устраняется. И как следствие кредитная прочность СУ с точки зрения инвестора оценивается не по владельцу дома и собственности, а по посреднику.

28.2 Банковская деятельность, связанная с закладными

Первого кредитора называют **создателем закладных**. В этой роли могут выступать «экономные» банковские учреждения*), коммерческие банки, банкиры по закладным, компании по страхованию жизни или пенсионные фонды. Создатель новых закладных имеет возможность извлекать из них доход тремя способами. Он может использовать закладную в роли капиталовложения, а также продать ее инвестору или «проводнику». В роли **проводника** могут выступать либо кредитные агентства, спонсируемые на федеральном уровне, либо частные компании, которые объединяют закладные в пулы. Наконец, он может использовать закладную в качестве залога при выпуске ценной бумаги. В этом случае закладная становится элементом фонда, который служит залогом (обеспечением) ценной бумаги — т. е. она превращается в ценную бумагу.

Для борьбы с неплатежеспособностью закладные часто требуется страховать. Наряду с частными страховщиками по закладным для заемщиков с высоким рейтингом есть и следующие три федеральные агентства США: Федеральная Администрация по жилому сектору (ФАЖ; Federal Housing Administration = FHA), Департамент по делам ветеранов (ДВ; Department of Veterans Affairs = VA) и Обслуживание сельского жилья (ОСЖ; Rural Housing Service = RHS) [327]. Ссуды, которые не застрахованы или по ним нет гарантий от ФАЖ, ДВ или ОСЖ, называются **традиционными ссудами**. С другой стороны, те ссуды, которые оформлены в соответствии с правилами продажи или конверсии в ЦБЗ, выпущенными и гарантируемыми двумя кредитными агентствами, спонсируемыми на федеральном уровне, называются **согласованными заклад-**

*) Эти учреждения (thrifts = thrift institutions) создавались как депозитарии для вкладов потребителей. Сейчас же наиболее распространенными их формами являются Ассоциации сбережений и ссуд, а также Сберегательные банки. — Прим. перев.

ными. Этими двумя агентствами являются Федеральная Национальная Ассоциация по закладным (ФНАЗ или «Фанни Маэ»; Federal National Mortgage Association=FNMA или «Fannie Mae») и Федеральная Корпорация по закладным для покупки дома (ФКПД или «Фредди Мак»; Federal Home Loan Mortgage Corporation=FHLMC или «Freddie Mac»). Оба в настоящее время представляют собой государственные компании. Банкиры по закладным оформляют для продажи также те ссуды, которые застрахованы ФАЖ или гарантированы ДВ, в форме «переводных Джинни Маэ». Слова «Джинни Маэ» представляют Правительственную Национальную Ассоциацию по закладным (ПНАЗ; Government National Mortgage Association=GNMA). Те ЦБЗ, которые выпущены Фанни Маэ или Фредди Маком, вначале продаются банковскими фирмами по закладным непосредственно дилерам по ценным бумагам. Ссуды по закладным от ФАЖ, ДВ и ОСЖ оформляются для продажи как переводные ценные бумаги, гарантированные Джинни Маэ, и также сначала продаются дилерам по ценным бумагам. Традиционные (или стандартные) ссуды, по величине превосходящие максимально возможный размер, чтобы быть согласованными, называются **jumbo loans** = **джамбо ссудами**, т.е. «большими и неуклюжими».

Закладную требуется обслуживать. Денежные средства, состоящие из погашения, процентов и оплаты резервного фонда для целей налогообложения и страхования, собираются от заемщиков. Налоги и страховые премии выплачиваются, а ПиП распределяются по инвесторам ссуд. Выпускающая организация часто должна оплачивать суммы ПиП, даже если они еще не были собраны, и называется это **обслуживанием ЦБЗ** [298]. Ведение отчетности и ежемесячные официальные сообщения также являются элементами обслуживания. **Плата же за обслуживание** взимается в виде процента от части ссуды, оставшейся непогашенной на начало каждого месяца. Если смотреть на вещи с точки зрения заемщика, то она составляет часть доли его выплат по закладной, которые идут на

Информация по ссуде:	
Баланс:	
Остаток непогашенной ссуды на 10.03.97	\$ 155 520,31
Резервная сумма (escrow) на 10.03.97	\$ 3 015,82
Характеристика оплаты:	
Процентная ставка	7,12500 %
Погашение и Проценты	\$ 1 702,96
Оплата резервной суммы	\$ 700,32
Общая выплата	\$ 2 403,28
Год до даты (year-to-date):	
Проценты	\$ 8 514,63
Налоги	\$ 5 665,60
Погашение	\$ 6 817,07

Рис. 28.2. Типичная ежемесячная информация по закладной*.

* 1) Денежная сумма «escrow» находится у третьей стороны до полного выполнения условий контракта; 2) «year-to-date» — это промежуток времени от начала календарного года до рассматриваемой даты. — Прим. перев.

проценты. Поэтому ежемесячные выплаты по залладной состоят из трех частей: плата за обслуживание, проценты за вычетом этой платы и доли погашения, которая должна быть оплачена в данный момент. Существует вторичный рынок прав на обслуживание. Денежный поток по этим правам неопределен из-за предоплаты. В таблице на рис. 28.2 приведена типичная ежемесячная информация по оплате залладной.

28.3 Агентства и процесс превращения залладных в ценные бумаги

Существование вторичного рынка является ключевым для обеспечения ликвидности залладных. Чтобы подстегнуть рост этого рынка Конгресс США создал Правительственные агентства. Средством же способствующим этой ликвидности было создание ценных бумаг, обеспеченных комплектами залладных и гарантируемых этими агентствами. Увеличение же ликвидности и уменьшение кредитных рисков привело к созданию продуктов, предлагающих самые разнообразные сочетания отношения риск/доходность. В свою очередь эти продукты делают саму идею участвовать в работе рынка залладных привлекательной для инвесторов (см. таблицу на рис. 28.3).

Превращение залладных в ценные бумаги началось в феврале 1970 г. с выпуска пула № 1 Джинни Маэ, т.е. «переводных» залладных. Взрывной же рост рынка пришел позднее, в конце 1981 г., когда Фанни Маэ и Фредди Мак начали реализовывать свои программы по обмену залладных. Эти разработки позволяли держателям залладных — главным образом, «экономным» банковским учреждениям — продавать их залладные агентствам в обмен на «переводные» ценные бумаги, гарантируемые этими агентствами и обеспеченные теми же залладными. Разработки, подобные этим имеют и глубокие социальные последствия. Например, они снижают стоимость финансирования покупки дома.

Среди трех федеральных агентств, связанных с домовладением, Джинни Маэ, Фредди Мак и Фанни Маэ, только Джинни Маэ является правительственной корпорацией из Департамента Домовладения и Городского Развития (Department of Housing and Urban Development = HUD)¹. Ее гарантии поэтому пользуются полным доверием Казначейства США. Гарантируемые таким образом ЦБЗ воспринимаются как имеющие нулевой риск неплатежеспособности. Но Джинни Маэ в своих программах гарантирует лишь те ссуды, которые застрахованы или гарантируются правительством, в то время как Фредди Мак и Фанни Маэ представляют собой предприятия, спонсируемые правительством, которые в своих программах используют главным образом традиционные залладные. Ценные бумаги, предлагаемые Джинни Маэ, Фредди Маком и Фанни Маэ обычно так и называются: «Джинни Маэ», «Фредди Мак» и «Фанни Маэ», соответственно.

Гарантии агентств бывают двух видов. Один из них гарантирует *своевременную* оплату Пип. Благодаря этой гарантии положенные Пип будут

оплачены даже если некоторые из банков заемщиков по закладным не оплатили во-время ежемесячный взнос по закладным, если и вообще выплачивали. «Переводные» с такой формой гарантии называются **полностью модифицированными переводными**. Например, Джинни Маэ либо использует излишки своих наличных, либо занимает деньги в Казначействе, если выплаты домовладельца запаздывают. Все ЦБЗ Джинни Маэ являются полностью модифицированными переводными. Второй тип гарантирует своевременную выплату процентов, а в отношении погашения гарантируется внесение соответствующей суммы до конца некоторого периода, скажем в течение года. Переводные с такой формой гарантии считаются просто **модифицированными переводными**. С точки зрения инвестора вышеуказанные гарантии переводят состояние неплатежеспособности в предоплату.

Хотя Фанни Маэ и Фредди Мак покупают только согласованные (стандартные) закладные, но частные проводники покупают как согласованные, так и несогласованные закладные. Пребывание же в состоянии **несогласованности** не приводит к большему кредитному риску. Без явных

Суммарная стоимость непогашенных ЦБЗ у агентств (в млрд. \$)

	GNMA	FNMA	FHLMC	Всего		GNMA	FNMA	FHLMC	Всего
1980	93,9	—	17,0	110,9	1990	403,6	299,8	321,0	1024,4
1981	105,8	0,7	19,9	126,4	1991	425,3	372,0	363,2	1160,5
1982	118,9	14,4	43,0	176,3	1992	419,3	445,0	409,2	1273,5
1983	159,8	25,1	59,4	244,3	1993	414,0	495,5	440,1	1349,6
1984	180,0	36,2	73,2	289,4	1994	450,9	530,3	460,7	1441,9
1985	212,1	55,0	105,0	372,1	1995	472,3	583,0	515,1	1570,4
1986	262,7	97,2	174,5	534,4	1996	506,2	650,7	554,3	1711,2
1987	315,8	140,0	216,3	672,1	1997	536,8	709,6	579,4	1825,8
1988	340,5	178,3	231,1	749,9	1998	537,4	834,5	646,5	2018,4
1989	369,9	228,2	278,2	876,3	1999	582,0	960,9	749,1	2292,0

Выпуск ЦБЗ по агентствам (в млрд. \$)

	GNMA	FNMA	FHLMC	Всего		GNMA	FNMA	FHLMC	Всего
1980	20,6	—	2,5	23,1	1990	64,4	96,7	73,8	234,9
1981	14,3	0,7	3,5	18,5	1991	62,6	112,9	92,5	268,0
1982	16,0	14,0	24,2	54,2	1992	81,9	194,0	179,2	455,2
1983	50,7	13,3	21,4	85,4	1993	138,0	221,4	208,7	568,1
1984	28,1	13,5	20,5	62,1	1994	111,2	130,6	117,1	359,0
1985	46,0	23,6	41,5	111,1	1995	72,9	110,5	85,9	269,2
1986	101,4	60,6	102,4	264,4	1996	100,9	149,9	119,7	370,5
1987	94,9	63,2	75,0	233,1	1997	104,3	149,4	114,3	368,0
1988	55,2	54,9	39,8	149,9	1998	150,2	326,1	250,6	726,9
1989	57,1	69,8	73,5	200,4	1999	152,8	300,7	233,0	686,5

Рис. 28.3. ЦБЗ агентств, 1980—1999 гг. Источник: Ассоциация государственных ценных бумаг (Public Securities Association).

или неявных правительственных гарантий по базовым ссудам, так называемые переводные **частного типа** или **условные переводные**, которые появились в начале 1977 г., получают высокий кредитный рейтинг при помощи так называемой техники «подстегивания» **кредитного рейтинга***).

У традиционных залладных ставка фиксирована. Но рекордно высокие фиксированные ставки по залладным в начале 1980 г. привели к развитию залладных с корректируемой ставкой (ЗКС; adjustable-rate mortgages = = ARM), которые впервые появились на рынке в конце 1983 г. Эти ЗКС привлекательны по многим причинам. Во-первых, начальная ставка как правило на несколько процентных пунктов ниже ставок залладных с фиксированной ставкой. Поэтому она называется «**дразнящей**» ставкой. Поскольку же надежность покупателя дома при его покупке под залладную характеризуется именно по начальной ставке, то ЗКС позволяет большему числу граждан осуществить покупку дома в рассрочку. Говоря по-другому, с помощью ЗКС покупатель дома может получить большую ссуду. Во-вторых, используемый для коррекции ставки индекс обычно привязывается не только к доступному, но и общепризнанному индексу. А это заметно упрощает оценку стоимости и хеджирование. В-третьих, корректируемая процентная ставка, используемая в ЗКС, ограничена сверху, что спасает заемщика под залладную от шока при каждой выплате по ссуде в течение длительных периодов подъема процентных ставок. В-четвертых, ЗКС представляет собой привлекательное капиталовложение для таких организаций, торгующих большими объемами ценных бумаг, как экономные банковские учреждения или Ассоциация сбережений и ссуд, поскольку ЗКС подходит к их обязательствам с меняющейся ставкой лучше (см. по этому поводу п. 4.2.3). Естественно, ЗКС проигрывает по сравнению с залладными с фиксированной ставкой в те периоды, когда фиксированные ставки по залладным относительно низки.

Финансирование с помощью ЗКС уменьшает чувствительность индустрии домовладения к колебаниям процентных ставок, поскольку заемщики могут выбрать между залладными с фиксированной и корректируемой ставками, исходя из существующего уровня этих ставок. Переводные ЦБЗ, обеспеченные ЗКС, были введены Фанни Маэ в 1984 г.

28.4 Ценные бумаги, обеспеченные залладными

В простейшем типе ЦБЗ, называемых ПЦБЗ, выплаты по базовым залладным переходят от держателя залладной к обслуживающему агентству, и после вычета комиссионных распределяются им среди держателей ценных бумаг на пропорциональной основе (см. рис. 28.4). Это означает, что владелец сертификата в \$ 25 000 из пула в \$ 1 млн. имеет

*) Эта техника используется создателями долговых обязательств для повышения кредитного рейтинга своих предложений и тем самым понижения связанной с ними процентной ставки. Скажем, муниципалитет может застраховать свои облигации в одной из таких известных страховых компаний как «Американская Корпорация по страхованию муниципальных облигаций» и тем самым повысить кредитный рейтинг облигации до уровня AAA. — Прим. перев.

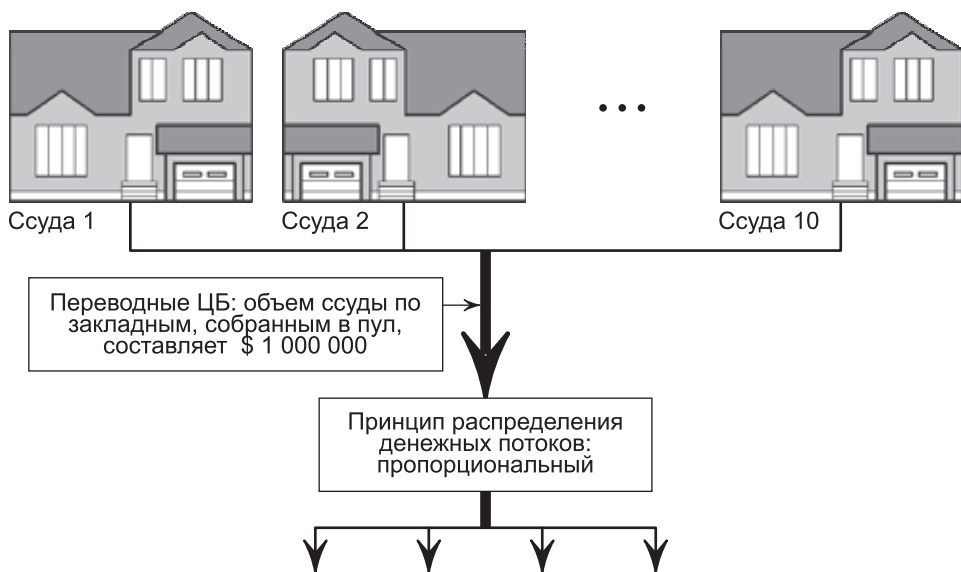


Рис. 28.4. Переводные ЦБ по закладным.

право на $2\frac{1}{2}\%$ денежного потока, выплачиваемого заемщиками по закладным. В силу большей приспособленности к процессу купли/продажи переводные легче продать, чем индивидуальные ссуды.

Но переводные все-таки подвергают инвестора риску полной предоплаты, связанной с базовыми закладными. С точки зрения перспектив отношения активы/обязательства этот риск нежелателен. И, чтобы как-то бороться с неопределенностью предоплаты, в июне 1983 г. Корпорацией Фредди Мак с помощью тогда первых Бостонских (облигаций) были созданы ОЗЗ (т.е. обязательства по закладным в роли залога). В отличие от переводных ценных бумаг на закладных, у которых был один единственный срок погашения и которые обеспечивались индивидуальными закладными, ОЗЗ характеризуется *целым комплектом* сроков погашения и представляет собой долговые инструменты *разных* классов, обеспеченные переводными ценными бумагами, РЦБЗ и стандартными ссудами. Сам же процесс использования переводных и РЦБЗ для построения ОЗЗ называется **повторным превращением в ценные бумаги**. Совокупный риск предоплаты в этом случае делится между классами облигаций, называемых **классами** или **слоями**². Возвращение сумм, взятых в кредит, возможное либо по расписанию или в виде предоплаты, распределяется между классами на приоритетной основе так, чтобы риск предоплаты перераспределить между слоями неравным образом.

В **структуре последовательной оплаты по слоям**, например, погашение и предоплата в классе *A* осуществляется раньше погашения и предоплаты в классе *B*, которые в свою очередь производятся раньше погашений и предоплаты в классе *C* и т.д. Таким образом, у каждого слоя возникает свой реальный срок погашения. Более того, каждый слой может даже

Суммарный объем непогашенных ОЗЗ агентств (в млрд. \$)									
	GNMA	FNMA	FHLMC	Всего		GNMA	FNMA	FHLMC	Всего
1987	—	0,9	—	0,9	1994	—	315,0	263,7	578,7
1988	—	11,6	10,9	22,5	1995	—	294,0	247,0	540,9
1989	—	47,6	47,6	95,2	1996	—	283,4	237,6	521,0
1990	—	104,3	83,4	187,7	1997	17,5	328,6	233,6	579,7
1991	—	193,3	43,0	336,3	1998	29,0	311,4	260,3	600,8
1992	—	276,9	217,0	494,0	1999	52,5	293,6	316,1	662,1
1993	—	323,4	264,1	587,6					

Выпуск агентствами обязательств по залладным с залогом (в млрд. \$)									
	GNMA	FNMA	FHLMC	Всего		GNMA	FNMA	FHLMC	Всего
1987	—	0,9	—	0,9	1994	3,1	56,3	73,1	132,6
1988	—	11,2	13,0	24,2	1995	1,9	8,2	15,4	25,4
1989	—	37,6	39,8	77,3	1996	9,5	26,6	34,1	70,2
1990	—	60,9	40,5	101,4	1997	7,9	74,8	84,4	167,0
1991	—	101,8	72,0	173,8	1998	13,6	76,3	135,2	225,1
1992	—	154,8	131,3	286,1	1999	29,6	50,6	119,6	199,7
1993	—	168,0	143,3	311,3					

Рис. 28.5. ОЗЗ агентств за 1987—1999 гг. Источник: Ассоциация государственных ценных бумаг (Public Securities Association).

иметь свою купонную ставку. А сами ОЗЗ были первой успешной попыткой преобразовать денежный поток по залладным в такую форму ценных бумаг, которая привлекала бы инвесторов самого разного профиля (см. таблицу на рис. 28.5).

Пример 28.4.1. Рассмотрим двухслойную ОЗЗ с последовательной оплатой по слоям и обеспеченную залладными на сумму \$ 1 000 000 с 12 % купонной ставкой*) и 6 месяцами до погашения. Пример разбиения (погашающего ссуду) денежного потока по слоям с нулевой предоплатой и отсутствием платы за обслуживание приведен в таблице на рис. 28.6. Расчет можно провести сначала для колонок «Всего», в соответствии с традиционной схемой погашения, и лишь затем распределить указанные в них суммы по слоям. Заметим, что в слое *A* все платежи (т. е. проценты и погашение) заканчиваются после четвертого месяца, а в слое *B* собственно погашение начинается с конца четвертого месяца. ◁

Пример 28.4.2 (продолжение примера 28.4.1). Если предоплата имеет место, то вычисления слегка усложняются. Предположим, что **ежемесячное сокращение остатка** (ЕСО; single monthly mortality = SMM) составляет 5 % и это означает, что сумма предоплаты равна 5 % от остатка ссуды, оставшегося непогашенным. Тогда ссуда, оставшаяся непогашенной на конец *i*-го месяца *после* предоплаты будет равна непогашенной ссуде на конец этого месяца, рассчитанной по традиционной схеме погашения в соответствии с формулой (3.8) (т. е. приведенной в правой колонке

*) Имеется в виду ежегодная ставка ежемесячного начисления процентов. — Прим. перев.

таблицы на рис. 28.6), умноженной на величину $(0,95)^i$. И если эта операция проделана для всех месяцев, то процентная выплата по каждому месяцу составит 1 % от ссуды, оставшейся непогашенной после предыдущего месяца. А сумма предоплаты будет равна оставшейся непогашенной ссуде, умноженной на величину $0,05/0,95$ (знаменатель 0,95 означает, что имеется в виду ссуда, оставшаяся непогашенной до предоплаты). В таблице на рис. 28.7 приведен соответствующий денежный поток по той же двухслойной ОЗЗ при 5 % ЕСО. К примеру, совокупная сумма погашения в этой таблице за первый месяц, \$ 204 421, может быть получена следующим образом. Оставшаяся непогашенной плановая ссуда в соответствии с таблицей на рис. 28.6 равна \$ 837 452. Поэтому оставшаяся непогашенной ссуда в рассматриваемой ситуации определяется равенством $837\,452 \times 0,95 = 795\,579$, что и приводит к тому, что общая сумма погашения за первый месяц оказывается равной $1\,000\,000 - 795\,579 = 204\,421$. Поскольку у слоя *В* осталась непогашенной сумма \$ 500 000, то все \$ 204 421 отнесены на слой *А*. Сумма же предоплаты при этом составля-

Месяц	Проценты			Погашение			Ссуда, оставшаяся непогашенной		
	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего
							500 000	500 000	1 000 000
1	5 000	5 000	10 000	162 548	0	162 548	337 452	500 000	837 452
2	3 375	5 000	8 375	164 173	0	164 173	173 279	500 000	673 279
3	1 733	5 000	6 733	165 815	0	165 815	7 464	500 000	507 464
4	75	5 000	5 075	7 464	160 009	167 473	0	339 991	339 991
5	0	3 400	3 400	0	169 148	169 148	0	170 843	170 843
6	0	1 708	1 708	0	170 843	170 843	0	0	0
Всего:	10 183	25 108	35 291	500 000	500 000	1 000 000			

Рис. 28.6. Денежный поток по ОЗЗ без предоплаты. Совокупная ежемесячная выплата равна \$ 172 548. В строке *i*-го месяца — выплаты этого месяца.

Месяц	Проценты			Погашение			Ссуда, оставшаяся непогашенной		
	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего	<i>A</i>	<i>B</i>	Всего
							500 000	500 000	1 000 000
1	5 000	5 000	10 000	204 421	0	204 421	295 579	500 000	795 579
2	2 956	5 000	7 956	187 946	0	187 946	107 633	500 000	607 633
3	1 076	5 000	6 076	107 633	64 915	172 548	435 085	435 085	870 170
4	0	4 351	4 351	0	158 163	158 163	0	276 922	276 922
5	0	2 769	2 769	0	144 730	144 730	0	132 192	132 192
6	0	1 322	1 322	0	132 192	132 192	0	0	0
Всего:	9 032	23 442	32 474	500 000	500 000	1 000 000			

Рис. 28.7. Денежный поток по ОЗЗ с предоплатой. Числа в строке *i*-го месяца указывают выплаты этого месяца.

ет величину $837\,452 \times 5\% = 41\,873$ (альтернативный вариант записи этой суммы: $795\,579 \times 0,05/0,95$). Отметим, что слой *A* «уходит на покой» через 3 месяца, а слой *B* начинается погашение с конца третьего месяца. <

Разделенные ЦБЗ появились в феврале 1987 г., когда Фанни Маэ выпустила свои Долговые обязательства № 1 под таким названием: РЦБЗ. В этих ценных бумагах ПиП были разделены на полосы ПОГ (только ПОГашение) и ПРО (только ПРОценты). В сценариях примеров 28.4.1 и 28.4.2 полоса ПРО отмечала все процентные выплаты в колонке «Проценты/Всего», а полоса ПОГ содержала все погашающие выплаты в колонке «Погашение основной суммы/Всего». Эти новые инструменты позволяли инвесторам лучше использовать предсказуемые изменения процентных ставок. Поскольку в роли залога для РЦБЗ выступают переводные ценные бумаги, то этот вариант ценных бумаг дает еще один пример их повторного превращения в ценные бумаги. Отметим, что ОЗЗ и РЦБЗ обычно называются **производными ЦБЗ**.

Упражнение 28.4.1. Повторите вычисления примера 28.4.2 при 3 % ЕСО.

28.5 Программы федеральных агентств по ценным бумагам, обеспеченным залладными

28.5.1 Правительственная Национальная Ассоциация по залладным («Джинни Маэ»)

Ценные бумаги с гарантией от Джинни Маэ называются ЦБЗ. Джинни Маэ выпускает свои ЦБЗ по одной из двух программ, ПНАЗ I (начатой в 1970 г.) и ПНАЗ II (появившейся в 1983 г.). Эти две программы отличаются характером залога у переводных ЦБ. Например, в ПНАЗ I требуется, чтобы все ссуды у залладных пула были более-менее однородными [297]. При этом ЦБЗ по ПНАЗ I выпускаются с ежегодной купонной ставкой, которая на 0,50 % меньше купонной ставки по базовому залладным в связи с гарантиями и вознаграждением за обслуживание. Ценные бумаги, обеспеченные залладными с **корректируемыми выплатами (ЗКВ; adjustable-payment mortgages = APM)** выпускаются по программе ПНАЗ II.

Организация, выпускающая ценные бумаги Джинни Маэ, каждый месяц переводит все полагающиеся по графику выплаты ПиП по базовым залладным держателям ценных бумаг, даже если ей от некоторых заемщиков по залладным собрать выплаты не удалось. Она также переводит им любые дополнительные предоплаты основной суммы, в связи с договоренностью о досрочном погашении. И если выпускающая организация не выполняет свои ежемесячные обязательства, то Джинни Маэ берет на себя ответственность за своевременную выплату ПиП.

Упражнение 28.5.1. Даже без предоплаты ежемесячные плановые выплаты держателям ЦБЗ незначительно, но растут со временем. Почему?

28.5.2 Федеральная Корпорация по закладным для покупки дома («Фредди Мак»)

Фредди Мак появилась 24 июля 1970 г. как корпорация, созданная по указу правительства. Она стала государственной корпорацией наподобие Фанни Маэ в 1989 г. Фредди Мак ищет способы увеличения ликвидности и доступности кредита на рынке традиционных закладных, создавая и поддерживая для них вторичный рынок. Выпуск переводных ценных бумаг начался в 1971 г., когда традиционные закладные впервые превратили в ценные бумаги с гарантиями федерального агентства. Его переводные ценные бумаги по закладным называют СУ. В отличие от переводных Джинни Маэ в переводных Фредди Мака гарантируется лишь оплата погашения, причем без точного указания времени. Осенью 1990 г. Фредди Мак выпустил свои золотые СУ, по которым предусматриваются более серьезные гарантии: все золотые СУ являются полностью модифицированными переводными. Ценным бумагам Фредди Мака не оказывается полная поддержка Правительства США. Однако доверие к его ценным бумагам воспринимается как равное доверию к ценным бумагам, выпущенным агентствами Правительства США (статус «агентства США»).

Фредди Мак помимо СУ выпускает также ОЗЗ и РЦБЗ. У всех ОЗЗ Фредди Мака полугодовые выплаты, совсем как у облигаций. В качестве обеспечения они используют также лишь закладные с фиксированной ставкой и гарантированный погасительный фонд для создания минимального размера предоплаты погашения.

28.5.3 Федеральная Национальная Ассоциация по закладным («Фанни Маэ»)

Созданная в 1938 г. Фанни Маэ является старейшим из трех агентств и одной из крупнейших корпораций в Соединенных Штатах, если говорить об активах (\$ 575 млрд. к концу 1999 г.). Программу переводных ценных бумаг по закладным она ввела в 1981 г. Переводные ценные бумаги, выпущенные Фанни Маэ, называются ЦБЗ. Фанни Маэ гарантирует своевременную оплату как погашения, так и процентов по своим ЦБЗ независимо от того, удалось ли собрать выплаты от заемщиков по закладным или нет. Гарантии касаются и погашения основных сумм в случае досрочного погашения или предоплаты; другими словами, ее ценные бумаги являются полностью модифицированными переводными ценными бумагами. Хотя обязательства Фанни Маэ и не подкреплены полным доверием Правительства США, на рынках кредита они имеют статус «агентства США».

28.6 Предоплата

Функция предоплаты выделяет ЦБЗ из ряда других ценных бумаг с фиксированной доходностью. Исполнение подобных функций у большинства ценных бумаг предполагается «рациональным» в том

смысле, что само исполнение реализуется лишь тогда, когда это выгодно. Но этот тип «рациональности» ослабляется, когда дело касается решения собственника дома заплатить вперед. Например, даже когда существующая ставка по залоговой, называемая **текущий купон**, превосходит ставку по ссуде у залоговой, в некоторых ссудах предоплата сохраняется.

Риск предоплаты связан с неопределенностью величин и ритма выплат, погашающих основную сумму в пуле залоговых, которые служат обеспечением данной ценной бумаги. Этот риск можно подразделить на **риск сжатия** и **риск расширения**. Риском сжатия называется риск того, что суммы предоплаты придется реинвестировать по более низкой ставке, чем купонная ставка, если процентные ставки будут убывать. Риск расширения связан с замедлением выплат по предоплате при увеличении процентных ставок, и это заставляет инвестора скорее «добиваться» более низкой купонной ставки ценной бумаги, чем более высокой рыночной ставки. Предоплата может быть полной или частичной; первая называется **ликвидацией**, а вторая — **сокращением**. Однако, предоплата не всегда приводит к потерям (см. упр. 28.6.1). Так, владелец переводной ценной бумаги подвергается общему риску предоплаты, связанному с базовым пулом ссуд по залоговому, в то время как ОЗЗ строится так, чтобы перераспределить этот риск среди инвесторов.

Наряду с риском предоплаты инвесторы по залоговым подвергаются по меньшей мере трем другим рискам: риску процентной ставки, кредитному риску и риску ликвидности. Риск процентной ставки присутствует у любой ценной бумаги с фиксированной доходностью. Кредитный риск — это риск потерь от невыполнения обязательств. Он почти отсутствует у залоговых, застрахованных ФАЖ и с гарантией от ДВ. Что же касается залоговых, застрахованных частным образом, то их риск определяется кредитным рейтингом компании, которая застраховала залоговую. Риском же ликвидности называется риск потерь при необходимости быстро продать капиталовложение.

Упражнение 28.6.1. Существуют причины, увеличивающие сумму предоплаты и определяемые тем, что более низкие процентные ставки приводят к увеличению дохода по переводным ценным бумагам по залоговым, если они были куплены со скидкой. Каковы они?

28.6.1 Причины и характеристики

У предоплаты есть по меньшей мере пять компонент [4, 433].

1. **Продажа дома («смена владельца»).** Продажа дома обычно ведет к предоплате по залоговой, поскольку полностью выплачивается ссуда, оставшаяся непогашенной. Причем этот **обусловленный продажей** пункт договора применим к большей части традиционных (стандартных) ссуд. Исключение составляют залоговые от ФАЖ/ДВ, которые относятся к категории **принимающих ответственность** и это означает, что покупатель берет существующую ссуду под свою ответственность.

2. **Рефинансирование***). Заемщики по закладной в принципе могут оплатить свои закладные на дом по более низкой ставке. Эта компонента предоплаты наиболее волатильна и составляет ее основную часть в случае, когда выплаты по предоплате являются очень большими.

3. **Невыполнение обязательств.** Этот тип предоплаты возникает в связи с лишением права выкупа закладной и последующей ее ликвидацией. Но его относительный вклад в предоплату в большинстве случаев минимален.

4. **Сокращение.** Эта компонента предоплаты связана с дополнительными выплатами сверх установленных графиком, т. е. «сокращение» относится к погашению основной суммы и уменьшает срок погашения ссуд с фиксированной ставкой. Их вклад в предоплату минимален.

5. **Полная оплата (ликвидация).** Есть данные, свидетельствующие о том, что многие заемщики по закладным оплачивают свои закладные полностью, если они очень **давние** и оставшаяся непогашенной часть ссуды мала. Полная оплата может быть связана и с природными катаклизмами. Но этот фактор играет заметную роль только для очень старых ссуд.

У предоплаты есть определенные характеристики [504]. Она обычно увеличивается с возрастом закладной — сначала с возрастающей скоростью, а затем с убывающей. Она выше весной и летом и ниже осенью и зимой. Она зависит от географического местоположения базовой собственности. Предоплата увеличивается в случае падения процентных ставок, но с временным запаздыванием. Если предоплата была высокой в течение некоторого времени в силу высоких ставок рефинансирования, то в дальнейшем проявляется тенденция к их убыванию. Возможно, владельцы домов, которые не используют предоплату даже когда ставки низки длительное время, вообще не прибегают к предоплате.

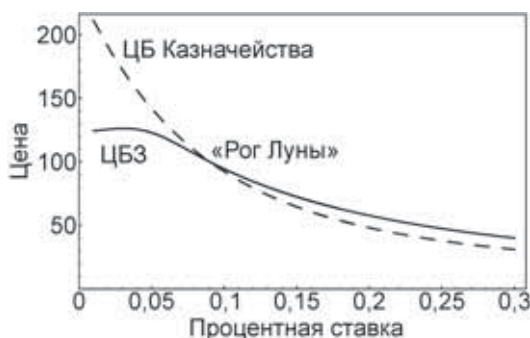


Рис. 28.8. Стоимость ЦБЗ в сравнении с ЦБ Казначейства. Обе ЦБ являются 15-летними с 9 % купонной ставкой в смысле доходности, эквивалентной залоговой ставке. Сегмент выше 100 относится к ЦБ, продаваемым с премией, а сегмент ниже 100 — к продаваемым со скидкой. Сжатие цены происходит, если доходность падает ниже некоторого уровня. Представляет эту точку «Рог Луны».

На рис. 28.8 приведен типичный вид кривых, показывающих зависимость цены от доходности для ценных бумаг Казначейства и переводных ценных бумаг. При падении доходности и превышении ценой переводных некоторого уровня, эта цена становится плоской и затем несколько убывает.

*) Под термином «refinancing» обычно подразумевается 1) замена старых долговых обязательств на новые или 2) погашение существующих обязательств по облигации с помощью выпуска новой ЦБ. В обоих случаях это делается с целью уменьшить процентную ставку, увеличить срок погашения или то и другое вместе. — Прим. перев.

Это явление называется сжатием цены у ЦБЗ, продаваемых с премией. Оно демонстрирует отрицательную выпуклость у таких ценных бумаг.

Упражнение 28.6.2. При условии, что с рефинансированием связаны некоторые фиксированные расходы, владеец какой из ценных бумаг на залладных будет стремиться к более быстрой предоплате, обеспеченной 15-летними залладными или 30-летними?

28.6.2 Анализ побудительных стимулов к рефинансированию

Рассмотрим ссуду со ставкой по залладной r_o на срок в n месяцев. И пусть оговоренная ежемесячная выплата по первоначальной ссуде равна C . В момент рефинансирования ставка по залладной для новой n -месячной ссуды равна r_n , и уже были выплачены a ежемесячных выплат. Обе ставки r_o и r_n являются ставками месяца.

В соответствии с (3.8) величина ссуды, оставшейся непогашенной на момент рефинансирования, записывается в виде

$$C \frac{1 - (1 + r_o)^{-n+a}}{r_o}. \quad (28.1)$$

С другой стороны, приведенное значение (ПЗ) будущего денежного потока по первоначальной ссуде и по текущей ставке r_n равно

$$\sum_{i=1}^{n-a} C(1 + r_n)^{-i} = C \frac{1 - (1 + r_n)^{-n+a}}{r_n}.$$

Следовательно, чистая денежная экономия составит величину

$$C \frac{1 - (1 + r_n)^{-n+a}}{r_n} - C \frac{1 - (1 + r_o)^{-n+a}}{r_o}. \quad (28.2)$$

А чтобы получить долю, которую эта экономия составит по отношению ко всей непогашенной ссуде, нужно последнюю разность разделить на выражение (28.1):

$$\frac{r_o}{r_n} \cdot \frac{1 - (1 + r_n)^{-n+a}}{1 - (1 + r_o)^{-n+a}} - 1.$$

Для ссуд, погашение которых начато недавно, предыдущее выражение грубо можно записать в виде

$$\frac{r_o}{r_n} - 1. \quad (28.3)$$

Таким образом, приведенное эвристическое соображение для измерения стимулов к рефинансированию подсказывает использовать скорее *отношение* ставок по ссуде, чем их *разницу* [433].

Упражнение 28.6.3. Целесообразно ли экономически рефинансировать залладную, если ставки не менялись?

Упражнение 28.6.4. Рассмотрим ситуацию, в которой заемщик по залладной каждые a месяцев рефинансирует свои выплаты и каждый

раз с помощью n -месячной ссуды. Покажите, что ежемесячная выплата после i -го рефинансирования оказывается равной величине

$$B \times \left[\frac{(1+r)^n - (1+r)^a}{(1+r)^n - 1} \right]^i \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

где B — взятая ссуда, а r — постоянная месячная ставка по закладной.

Упражнение 28.6.5. Какое рефинансирование приносит больше выгоды: переводящее 8 % ссуду в 6 % ссуду или 11,5 % ссуду в 9,5 % ссуду?

Дополнительная литература

В этой главе дается обзор рынков закладных, учреждений, говорится о процессе превращения закладных в ценные бумаги и различных продуктах на основе закладных. Обращайтесь к [54, 323, 325, 330, 331, 432, 469, 698, 799] за более подробной информацией по основам закладных и в особенности к [54] в отношении истории рынка ЦБЗ. Книги [320, 324, 328] также являются богатыми источниками информации. О других отличиях между переводными ценными бумагами Фредди Мака и Джонни Маэ можно почитать в [54, табл. 3.1] и [432, экспонат 24-3]. Тот факт, что превращение в ценные бумаги уменьшает ставки по закладной не является бесспорным [404].

Примечания

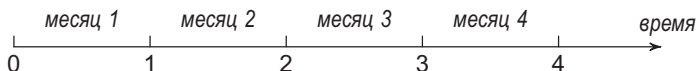
1. Фанни Маэ сначала была правительственным агентством, прежде чем она была продана государству в 1968 г.

2. *Tranche* является французским синонимом слова «slice = слой».

29 Анализ ценных бумаг, обеспеченных закладными

Ну хорошо, если вы не можете точно измерять, то измеряйте как-нибудь.
Франк Г. Найт (1885—1972)

В сравнении с другими ценными бумагами с фиксированной доходностью ценные бумаги, обеспеченные закладными (ЦБЗ), уникальны в двух отношениях. Во-первых, их денежный поток состоит из ПОГАШЕНИЯ и ПРОЦЕНТОВ (ПиП). Во-вторых, этот денежный поток может меняться из-за предоплаты по базовым закладным. В этой главе основное внимание уделяется денежному потоку ЦБЗ и оценке их стоимости. Причем, рассматривая этот денежный поток, мы будем использовать следующую ось времени:



Поскольку выплаты по закладной делаются в конце периода, то выплата месяца i происходит в момент времени i , т.е. в конце месяца i . При этом конец любого месяца отождествляется с началом следующего месяца.

29.1 Анализ денежного потока

Обычную закладную отличает фиксированный срок погашения, фиксированная процентная ставка и фиксированная ежемесячная выплата. На рис. 29.1 представлен график выплаты ПиП для 30-летней и 6 % закладной*) при величине ссуды в \$ 100 000. На рис. 29.2 показано, как величина непогашенной ссуды уменьшается со временем. В первые годы ПиП, а точнее говоря, очередная выплата по ссуде в основном состоит из процентов. Затем постепенно ее большую часть со временем начинает составлять погашение. Однако общая выплата ПиП остается одной и той же в каждом месяце, чем и объясняется термин *плоская* оплата. Аналогичная картина отличает выплаты ПиП и в пуле закладных, если предоплата и плата за обслуживание отсутствуют.

Из п. 3.3 мы знаем, что величина ссуды, оставшейся непогашенной после k -й выплаты

$$B_k = C \frac{1 - (1 + r/m)^{-n+k}}{r/m}, \quad (29.1)$$

где C представляет собой размер выплаты ПиП по графику для n -периодной закладной, по которой делается m выплат в год (одну за пери-

*) Здесь и ниже имеется в виду, что 6 % = $i^{(12)}$, т.е. ставка по закладной является ежегодной ставкой ежемесячного начисления процентов. — Прим. перев.

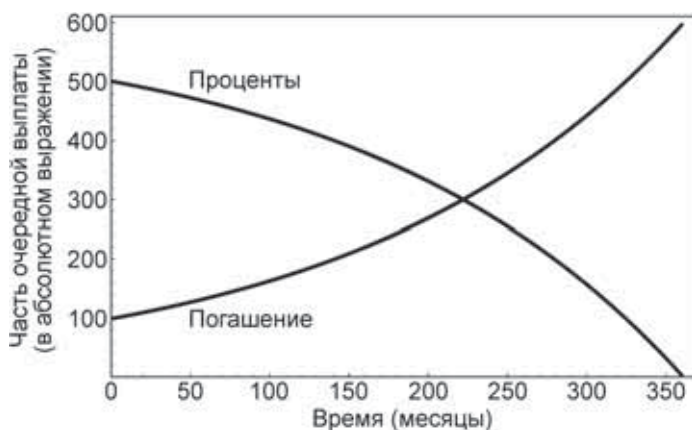


Рис. 29.1. Оплата ПИП по графику. Составлен он для 30-летней 6 % закладной и величине ссуды $B_0 = 100\,000$; на вертикальной оси часть (в абсолютном выражении) очередной выплаты, кстати, примерно равной 600, которая идет на оплату процентов или погашения.

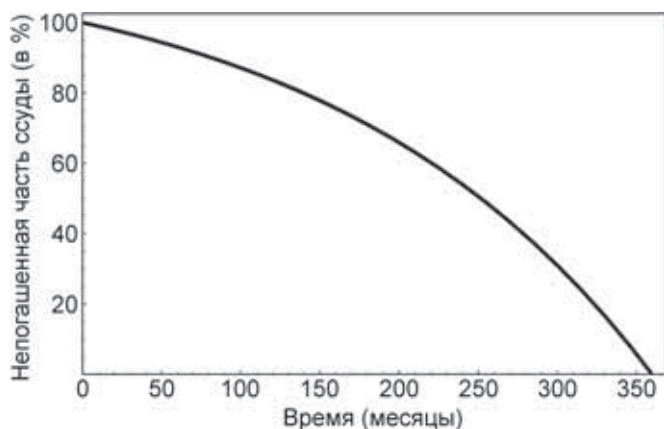


Рис. 29.2. Изменение остатка непогашенной ссуды со временем. Изображена зависимость доли в %, которую непогашенная часть ссуды составляет по отношению к номиналу, от числа сделанных выплат.

од) и r является ежегодной ставкой по закладной*). У закладных $m = 12$. Оставшуюся непогашенной после k -й выплаты часть ссуды можно представить в виде доли от взятой ссуды следующим образом:

$$\beta_k \equiv \frac{B_k}{B_0} = 1 - \frac{(1+r/m)^k - 1}{(1+r/m)^n - 1} = \frac{(1+r/m)^n - (1+r/m)^k}{(1+r/m)^n - 1}. \quad (29.2)$$

Правильность этого выражения подтверждает очевидное равенство $\beta_0 = 1$. А оставшуюся же непогашенной после k -й выплаты часть ссуды можно

*) Точнее, ежегодной ставкой m -кратного начисления процентов. — Прим. перев.

просто записать в виде

$$B_k \equiv \beta_k \times B,$$

где $B = B_0$ — величина взятой ссуды*).

Пусть термин **коэффициент** обозначает долю, которую оставшаяся непогашенной часть ссуды составляет от самой ссуды, и выражается десятичной дробью [729]. Тогда величина β_k представляет собой ежемесячный коэффициент при отсутствии предоплаты. Называют его также **коэффициентом амортизации**. Если же идея коэффициента применяется к пулу залоговых, то используется название **коэффициент оплаты у пула** или просто **коэффициент пула** [298].

Пример 29.1.1 Величина непогашенной ссуды у 15-летней залоговой с 9 % ставкой по залоговой после 54 месяцев составляет величину

$$B_{54} = \frac{[1 + (0,09/12)]^{180} - [1 + (0,09/12)]^{54}}{[1 + (0,09/12)]^{180} - 1} \times B = 0,824866 \times B.$$

Другими словами, после 54 месяцев непогашенной остается примерно 82,49 % взятой ссуды.

По принципу классического погашения часть t -й выплаты, которая идет на проценты, определяется равенством

$$I_t \equiv B_{t-1} \times \frac{r}{m} = B \times \frac{r}{m} \times \frac{(1 + r/m)^n - (1 + r/m)^{t-1}}{(1 + r/m)^n - 1}.$$

Часть же t -й ежемесячной выплаты, которая идет на погашение,

$$P_t \equiv B_{t-1} - B_t = B \times \frac{(r/m)(1 + r/m)^{t-1}}{(1 + r/m)^n - 1}. \quad (29.3)$$

Общая же выплата ПиП за месяц t , $P_t + I_t$, следовательно, равна

$$(B_{t-1} - B_t) + B_{t-1} \times \frac{r}{m} = B \times \left[\frac{(r/m)(1 + r/m)^n}{(1 + r/m)^n - 1} \right], \quad (29.4)$$

т.е. действительно ее величина постоянна и не зависит от t . Дробь внутри скобок, называемая **коэффициентом оплаты** или **коэффициентом ренты**, при $m = 12$ представляет собой ежемесячную плату за каждый доллар ссуды по залоговой.

Пример 29.1.2. У залоговой из примера 3.3.1 ежемесячная выплата в силу (29.4) равна

$$250\,000 \times \frac{(0,08/12) \times [1 + (0,08/12)]^{180}}{[1 + (0,08/12)]^{180} - 1} = 2389,13$$

в полном соответствии с числом, приведенным там.

Упражнение 29.1.1. Выведите формулу (29.4) из равенства (3.6).

*) Отметим, что размер самой выплаты C на рис. 29.1 определяется из равенства $B_0 = C \times \frac{1 - (1 + r/m)^{-n}}{r/m}$ (конечно, при $n = 360$, $m = 12$, $r = 0,06^{(12)}$), а изображенные два графика представляют функции $y = I_x$, $y = P_x$, где $P_k = B_{k-1} - B_k$, $I_k = B_{k-1}r/m$ (ось x — ось абсцисс, а классический принцип начисления процентов см. ниже), $P_k + I_k \equiv C$. — Прим. перев.

Упражнение 29.1.2. Рассмотрим две закладные с одинаковыми остатками непогашенной ссуды, но разными ставками по закладной. Покажите, что непогашенные части ссуд у них после следующей ежемесячной выплаты будут отличаться; точнее говоря, закладная с более низкой ставкой погашаться будет быстрее.

29.1.1 Оценка стоимости закладных с корректируемой ставкой

Обратимся теперь к оценке стоимости ЗКС, как интересно-му приложению теории оценки стоимости производных инструментов и проведенного выше анализа. Рассмотрим 3-летнюю ЗКС с процентной ставкой, которая на 1 % превосходит ставку у 1-летних ВК в начале года. Этот 1 % называется **маржой**. Предположим для простоты, что у этой ЗКС выплаты не ежемесячные, а ежегодные. И пусть ставки ВК изменяются по биномиальному закону, отмеченному на рис. 29.3 жирными цифрами, а риск-нейтральная вероятность равна 0,5. Во сколько же обойдется ЗКС выпускающей организации?

Каждая новая купонная ставка в момент ее пересмотра определяет уровень ежемесячных выплат для всех месяцев до следующей даты пересмотра, причем таким же образом, как если бы ЗКС была ссудой с этой новой фиксированной ставкой и датой погашения ЗКС. Отсюда вытекает, например, что при дереве процентной ставки из рис. 29.3 ссуда, оставшаяся непогашенной у нашей 3-летней ЗКС к концу 2-го года при сценарии $A \rightarrow B \rightarrow E$ будет отличаться от ссуды, оставшейся непогашенной при сценарии $A \rightarrow C \rightarrow E$ (см. упр. 29.1.2). Эта зависимость от траектории при построении алгоритма заставляет быть осторожным, чтобы избежать экспоненциальной сложности.

Идея состоит в том, чтобы с каждым узлом биномиального дерева связать ежегодную выплату на \$ 1 взятой ссуды по закладной, начавшейся в этом узле и заканчивающейся в конце года 3 — другими словами, связать коэффициент оплаты [546]. В узле *B*, например, годовой коэффициент оплаты можно рассчитать по формуле (29.4) с $r = 0,04526$, $m = 1$,

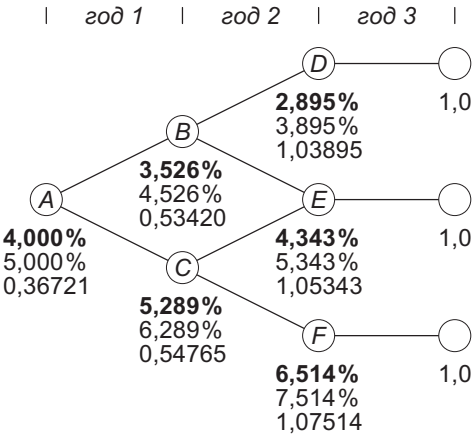


Рис. 29.3. Коэффициенты оплаты у ЗКС при стохастических процентных ставках. К каждому узлу отнесены ставка ВК, ставка по закладной (которая на 1 % больше ставки ВК) и коэффициент оплаты по закладной, срок действия которой начинается в этом узле и заканчивается в конце года 3 (основанный, конечно, на ставке закладной этого узла). Краткосрочные ставки взяты из рис. 23.8.

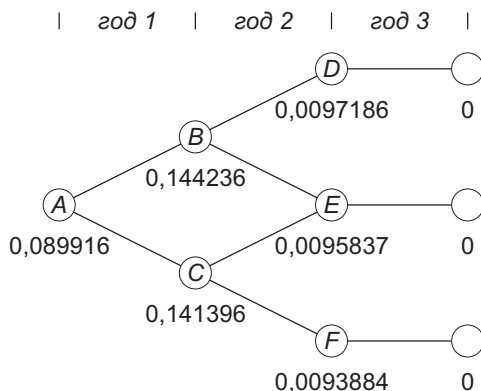


Рис. 29.4. Обратная индукция для оценки стоимости ЗКС.

$n = 2$ и получить

$$\frac{0,04526 \times (1,04526)^2}{(1,04526)^2 - 1} = 0,53420.$$

Коэффициенты оплаты для других узлов рис. 29.3 находятся аналогично.

А теперь применим обратную индукцию, чтобы оценить стоимость ЗКС (см. рис. 29.4). В каждом узле дерева подсчитана чистая стоимость ЗКС на сумму в \$1, начинающейся в этом узле и заканчивающейся в конце года три. Например, в заключительных узлах стоимость равна нулю, поскольку ЗКС оплачивается немедленно. В узле *D* стоимость равна

$$\frac{1,03895}{1,02895} - 1 = 0,0097186,$$

и величина эта всего лишь представляет приведенную прибыль (ПП) от выплаты в 1,03895 следующего года (заметим, что в *D* выпускающая организация берет ссуду \$1). Стоимости в узлах *E* и *F* могут быть рассчитаны подобным же образом. Но в узле *B* мы сначала определяем величину ссуды, оставшейся непогашенной после выплаты 1-го года, как разность

$$1 - (0,53420 - 0,04526) = 0,51106,$$

поскольку в выплате \$0,53420 на долю процентов приходится \$0,04526. В следующем году выпускающая организация получит на \$0,01 больше ставки векселя Казначейства (ВК), а стоимость закладной с корректируемой ставкой (ЗКС) там будет равна либо \$0,0097186, либо \$0,0095837 на \$1, причем каждое значение с вероятностью 0,5. Поэтому стоимость ЗКС в узле *B* есть

$$\frac{0,51106 \times (0,0097186 + 0,0095837)/2 + 0,01}{1,03526} = 0,0144236.$$

Стоимости в узлах *C* и *A* определяются с помощью аналогичных равенств

$$\frac{[1 - (0,54765 - 0,06289)] \times (0,0095837 + 0,0093884)/2 + 0,01}{1,05289} = 0,0141396,$$

$$\frac{[1 - (0,36721 - 0,05)] \times (0,0144236 + 0,0141396)/2 + 0,01}{1,04} = 0,0189916,$$

соответственно. Тем самым, стоимость ЗКС для выпускающей органи-

зации равна \$0,0189916 на \$1 ссуды. Полный же алгоритм представлен на рис. 29.5. Вышеприведенная идея **масштабирования** находит широкое применение при оценке стоимости некоторых классов ЦБ, зависящих от траектории [449, 546].

Ставки у ЗКС обычно связаны с такими общественно доступными индексами, как ставка LIBOR, ставка Казначейства определенного срока погашения (ставка CMT = constant maturity Treasury rate) и Индекс стоимости капиталовложений (ИСК; Cost of Funds Index = COFI). Ставки CMT основаны на ежедневной кривой доходности CMT, получаемой Федеральным резервным банком Нью-Йорка и еженедельно публикуемой в *Сборнике статистических сообщений* Н.15 Федеральной Резервной системы [525]. Индексы стоимости капиталовложений для «экономных» сберегательных учреждений (thrifts) рассчитываются на основе ежемесячных взвешенных средних ставок для этих учреждений. Наиболее популярным индексом стоимости капиталовложений является ИСК Федерального Совета Банков для предоставления ссуды под покупку дома в 11-м районе (11th Federal Home Loan Bank Board District COFI) [325, 330, 820].

Если купоны у ЗКС отражают текущие рыночные ставки в полном объеме и мгновенно, то ценные бумаги по ЗКС будут оцениваться близко к номиналу и рефинансирование будет происходить редко. В действительности корректировка во многих отношениях несовершенна. Так, чтобы определить новый купон, в момент пересмотра к выбранному индексу добавляется маржа. Также у ЗКС часто используются **шапки для**

Алгоритм для оценки стоимости ЗКС:

действительные числа $P[0..n-1]$, f , p ;

целые i , j ;

для ($j=0$ до $n-1$) { // Узлы момента $n-1$

$f := 1 + r[n-1][j] + s$; // (3.4) с $n=1$

$P[j] := f / (1 + r[n-1][j]) - 1$;

}

для ($i=n-2$ вниз до 0) { // Узлы момента i

для ($j=0$ до i) {

$f := (r[i][j] + s)(1 + r[i][j] + s)^{n-i} \times ((1 + r[i][j] + s)^{n-i} - 1)^{-1}$; // См. (3.4)

$p := 1 - (f - r[i][j] - s)$;

$P[j] := (p \times (P[j] + P[j+1]) \times 0,5 + s) \times (1 + r[i][j])^{-1}$;

}

}

вывод $P[0]$;

Рис. 29.5. Алгоритм для оценки стоимости ЗКС. Обозначения: $r[i][j]$ является $(j+1)$ -й ставкой ВК для периода $i+1$, у ЗКС есть n периодов до погашения, s — маржа, в f хранятся коэффициенты оплаты, а p содержит суммы, остающиеся непогашенными. Все ставки относятся к периоду. Вообще же говоря, плавающая ставка может быть основана на k -периодной ставке Казначейства плюс некоторый спред. В этом случае для моделирования k -периодных спот-ставок в каждом узле можно использовать задание по программированию 29.1.3.

периодических ставок, которые ограничивают величину, на которую купонная ставка может увеличиться или уменьшиться в момент пересмотра. У них также есть **шапки** и **полы** для срока жизни. Чтобы привлечь заемщиков кредиторы по залоговому обычно предлагают в качестве начальной ставку ниже рыночной (так называемую «дразнящую» ставку). **Интервал между датами пересмотра**, т.е. период времени между корректировками купонной ставки у ЗКС, нередко бывает годовым, а это недостаточно часто. Отметим, что все эти условия можно легко вставить в алгоритм оценки стоимости, приведенный на рис. 29.5.

Задание по программированию 29.1.3. При данном n -периодном биномиальном дереве краткосрочной ставки постройте алгоритм для получения k -периодных спот-ставок в узлах дерева со скоростью $O(kn^2)$. Это дерево должно отражать динамику изменения k -периодной спот-ставки.

Задание по программированию 29.1.4. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 29.5. И пусть среди входных данных будут биномиальное дерево ставок по ВК и ставка по залоговой, представляемая как ставка ВК плюс некоторый спред.

Задание по программированию 29.1.5. Рассмотрим СИА со схемой погашения, которая зависит только от существующей k -периодной процентной спот-ставки. Денежный поток этого свопа зависит лишь от остатка непогашенной ссуды и существующей k -периодной спот-ставки. Постройте эффективный алгоритм для оценки стоимости этого свопа по биномиальному дереву краткосрочной ставки.

29.1.2 Выражая скорости предоплаты

Денежный поток производного инструмента на основе залоговых определяется по денежному потоку пула залоговых. Единственным и наиболее важным фактором, усложняющим попытку получить этот денежный поток, является непредсказуемость предоплаты. Напомним, что предоплата представляет собой погашение взятой ссуды сверх того, что запланировано по графику погашения*). Нам нужно лишь сравнить коэффициент амортизации β , у пула с имеющимся коэффициентом амортизации, чтобы определить, производится ли предоплата, или нет. Величина, на которую рассматриваемый коэффициент будет превосходить коэффициент амортизации и представляет величину предоплаты.

Ежемесячное сокращение остатка (ЕСО). Значение ЕСО ω означает, что предоплата будет составлять ω % от намеченного по графику остатка ссуды в конце месяца. Другими словами, ЕСО представляет собой долю в процентах от остатка непогашенной ссуды на конец месяца, которая будет выплачена в виде предоплаты за этот месяц. Предположим, что

*) Русское слово «предоплата» является буквальным переводом английского слова «prepayment», но плохо отражает его смысл. Под ним понимаются любые выплаты, которые ускоряют погашение кредита, т.е. являются дополнительными по сравнению с выбранной схемой погашения и вовсе не обязаны производиться перед погашением или в начале него, как это может быть понято из русского аналога. — Прим. перев.

величина ссуды, оставшейся непогашенной у некоторой ЦБЗ в начале месяца равна \$ 50 000, ЕСО составляет 0,5 %, а намеченная сумма погашения за этот месяц равна \$ 70. Тогда величина предоплаты за данный месяц будет составлять $0,005 \times (50\,000 - 70) \approx 250$ долларов. И если та же скорость ежемесячной предоплаты s поддерживается с момента выпуска пула, то ссуда, оставшаяся непогашенной в конце месяца i будет равна $B_i \times (1 - s/100)^i$. Причем формула эта справедлива даже, если не оговаривать, что скорость предоплаты должна лежать между 0 % и 100 %.

Пример 29.1.3. Возьмем закладную из примера 29.1.1. Ее коэффициент амортизации после 54 месяцев составляет величину 0,824866. Если же реальный коэффициент равен 0,8, то ЕСО в начальном периоде в 54 месяца оказывается равным

$$100 \times \left[1 - \left(\frac{0,8}{0,824866} \right)^{1/54} \right] = 0,0566677.$$

Другими словами, каждый месяц в виде предоплаты выплачивается примерно 0,057 % от ссуды, оставшейся непогашенной.

Условная скорость предоплаты (УСП). Условная скорость предоплаты представляет собой ежегодный эквивалент ЕСО в следующем смысле*):

$$u = 100 \times \left[1 - \left(1 - \frac{v}{100} \right)^{12} \right];$$

здесь u = УСП, v = ЕСО. И наоборот,

$$v = 100 \times \left[1 - \left(1 - \frac{u}{100} \right)^{1/12} \right].$$

Например, ЕСО в 0,0566677 из примера 29.1.3 эквивалентна УСП

$$100 \times \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{0,0566677}{100} \right)^{12} \right] \right\} = 0,677897.$$

Тем самым примерно 0,68 % от ссуды, оставшейся непогашенной, выплачивается в виде предоплаты ежегодно. На рис. 29.6 приведены несколько вариантов денежного потока ПиП, соответствующих различным скоростям предоплаты. Заметим, что при ускоренной предоплате денежный поток из погашений по времени сдвигается вперед.

Ассоциация Государственных Ценных Бумаг. В 1985 г. Ассоциация Государственных Ценных Бумаг (АГЦБ) стандартизировала модель предоплаты. Стандарт АГЦБ задается в виде последовательности месячных УСП, которая отражает рост УСП в зависимости от возраста ссуды [619]. Стандарт АГЦБ характеризуют следующие скорости предоплаты: в первый месяц УСП равна 0,2 %, после чего она увеличивается на 0,2 % в месяц до тех пор, пока не достигнет величины 6 % в год на 30-м месяце и затем в оставшиеся годы держится на этом уровне (в то время, когда АГЦБ предложила свой стандарт, типичной скоростью предоплаты у «взрослой» 30-летней ПНАЗ была ~ 6 % УСП [260]). Вышеупомянутый

*) Это равенство напоминает связь ежегодной ставки дисконта d с эквивалентной ей ставкой дисконта d_k периода длины $1/k$: $1 - d = (1 - d_k)^k$. — Прим. перев.

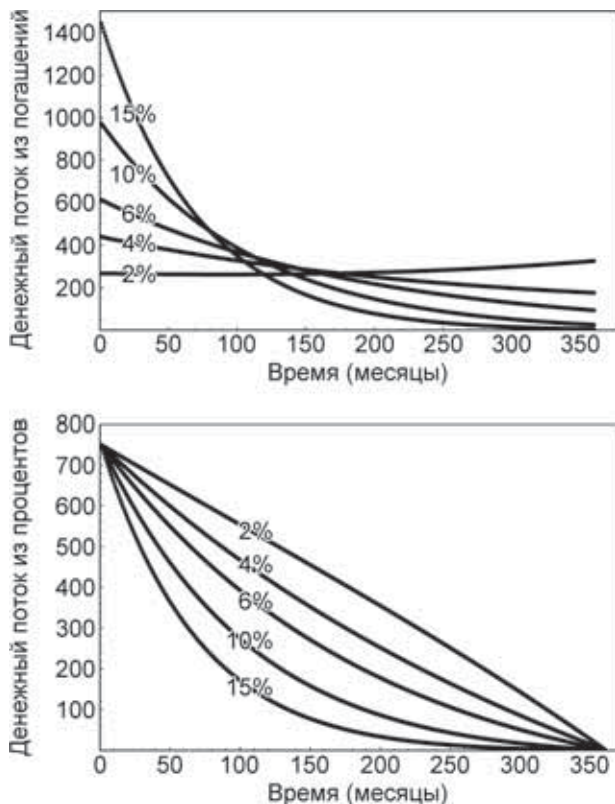


Рис. 29.6. Денежный поток из погашений (сверху) и процентов (снизу) при различных УСП. У 6% закладной на погашение ссуды в \$ 100 000 отводится 30 лет.

основной вариант (стандарт) скоростей предоплаты АГЦБ называется также **100 АГЦБ**. Другие скорости выражаются в виде некоторой доли стандарта АГЦБ. Например, 50 АГЦБ означает одну вторую от УСП АГЦБ, 150 АГЦБ означает полторы УСП АГЦБ и т.д. Говоря точнее, если обозначить относительный уровень условных скоростей предоплаты через Q АГЦБ, то для него скорости предоплаты можно записать в следующем виде ($Q = 100$ для стандарта):

$$u(m) = \frac{Q}{100} \begin{cases} 0,2 \% \times m, & \text{если } m \leq 30, \\ 6 \%, & \text{если } m > 30, \end{cases} \quad (29.5)$$

где через m обозначен возраст пула в месяцах.

Иллюстрацией к этой формуле служит рис. 29.7, а на рис. 29.8 представлен вид денежных потоков при 50 и 100 АГЦБ. И, наоборот*),

$$Q = 100 u(m) \begin{cases} 1/0,2 \times m, & \text{если } m \leq 30, \\ 1/6, & \text{если } m > 30. \end{cases}$$

Алгоритм преобразования АГЦБ в ЕСО приведен на рис. 29.9.

*) Отметим, что эта формула скорее служит для проверки правильности всего ритма предоплаты стандартного варианта АГЦБ, называемого 100 АГЦБ, чем для определения величины Q , поскольку для этого должно быть достаточно взято какое-либо конкретное значение m , а не все возможные 360. — Прим. перев.

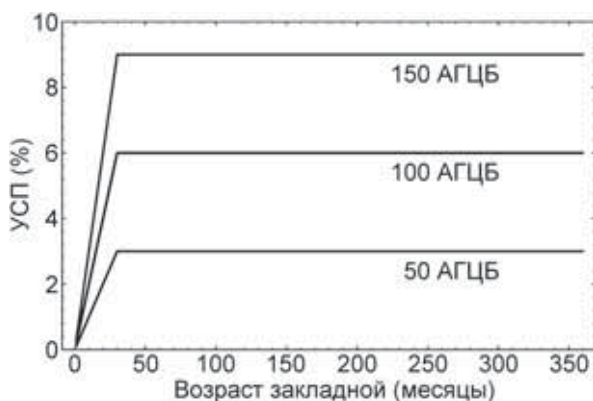


Рис. 29.7. Возможные скорости предоплаты у АГЦБ.

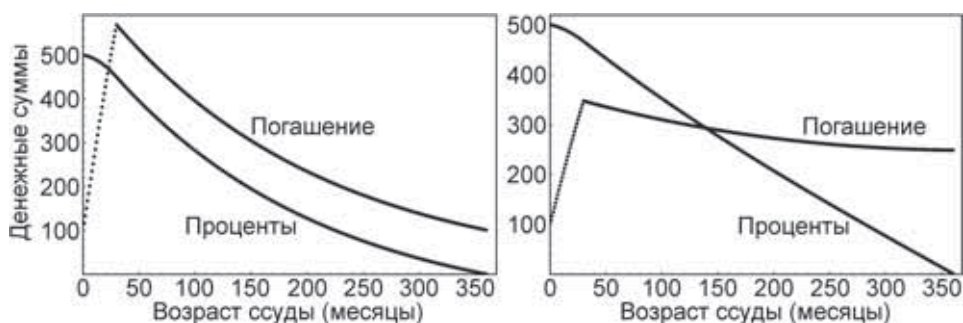


Рис. 29.8. Выплаты ПИП при 100 АГЦБ (слева) и 50 АГЦБ (справа). У 6 % закладной на погашение ссуды в \$ 100 000 отводится 30 лет.

Алгоритм преобразования уровня Q АГЦБ в ЕСО:

ввод: n , АГЦБ, возраст;
 действительные числа ЕСО[1 .. n], УСП;
 целые i ;
 АГЦБ := АГЦБ/100;
 для ($i = 1$ до n) {
 если [$i + \text{возраст} \leq 30$] { УСП := $0,2 \times (i + \text{возраст}) \times \text{УСП}/100$; }
 в противном случае { УСП := $6,0 \times \text{АГЦБ}/100$; }
 ЕСО[i] := $1 - (1 - \text{АГЦБ} \times \text{УСП})^{1/12}$;
 }
 вывод ЕСО[];

Рис. 29.9. Преобразование уровня Q АГЦБ в ЕСО. У пула есть еще n ежемесячных поступлений, скорость предоплаты определяется значением Q АГЦБ, возраст — число месяцев с момента начала пула. В ЕСО[] в виде десятичной дроби хранится вектор предоплаты, i -я компонента которого обозначает ЕСО в течение месяца i , начиная с настоящего времени.

Переход от уровня Q АГЦБ к УСП/ЕСО требует знания возраста пула. Так, при скорости предоплаты 150 АГЦБ оказывается, что УСП равна $0,2\% \times 2 \times (150/100) = 0,6\%$, если пул появился 2 месяца назад и $6\% \times 1,5 = 9\%$, если возраст пула превосходит 30 месяцев.

Упражнение 29.1.6. Рассмотрим следующие уровни Q АГЦБ:

Месяц (m)	6	12	18	24	30	36
АГЦБ (Q)	100	130	154	230	135	125

Рассчитайте соответствующие им значения УСП $u(m)$.

Упражнение 29.1.7. Действительно ли ЕСО в предположении 200 АГЦБ в два раза больше ЕСО в предположении 100 АГЦБ?

29.1.3 Вектор предоплаты и анализ денежного потока

Несмотря на то, что с помощью уровня АГЦБ пытаются охарактеризовать, хотя и грубо, как предоплата меняется в зависимости от возраста, но сам это уровень следует рассматривать скорее как рыночную договоренность, чем как модель. Для описания же ежемесячной скорости предоплаты в зависимости от времени вместо одного единственного уровня АГЦБ следует использовать вектор чисел АГЦБ, порожденный выбранной моделью предоплаты. Ежемесячный же денежный поток можно получить уже после этого.

Аналогично, УСП также скорее следует рассматривать как уровень скорости предоплаты, чем как модель. И если у нас есть единственное число УСП, представляющее истинную скорость предоплаты, то такое число по очевидным причинам следует называть **постоянной скоростью предоплаты**. Но эта простая модель не отражает такой экспериментально установленный факт, что у пулов с новыми ссудами предоплата обычно идет с меньшей скоростью, чем у давно возникших пулов. Поэтому, как и в случае с уровнями АГЦБ, следует предпочесть вектор УСП. На практике с вектором УСП или ЕСО легче работать, чем с вектором АГЦБ, поскольку здесь нет зависимости от возраста пула. Но в любом случае вектор УСП можно всегда превратить в эквивалентный вектор уровней АГЦБ и наоборот.

Чтобы оценить стоимость ЦБЗ, мы уточняем ее денежный поток, т.е. периодические взносы ПиП в предположении, что выбран некоторый уровень предоплаты, задаваемый вектором предоплаты. Цена по счету после этого полагается равной величине $\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{\omega-1+i}}$, где C_i — поступления момента i , n — **средневзвешенный срок погашения (ССП)**¹, r — ставка дисконта, а ω — доля периода от момента совершения сделки до первой выплаты ПиП. Показатель СПП является средневзвешенным оставшимся сроком действия для залладных, оставшихся в пуле, причем весом для каждой залладной является остаток непогашенной в ней ссуды. Величина же r , при которой вышеуказанное выражение равняется рыночной цене, называется **(статической) доходностью денежного потока**. А индуцированное

значение АГЦБ является тем единственным уровнем предоплаты АГЦБ, который приводит к той же доходности денежного потока.

Ценные бумаги на заледных котируются точно так же, как банкноты и облигации Казначейства США. Так, например, цена 94-05 означает 94_{5/32} % от номинала. Одна шестидесят четвертая процента обозначается с помощью индекса «+» у цены. Поэтому цена 94-05+ реально представляет 94_{11/64} % от номинала.

Поток наличных. Каждая выплата состоит из погашения, процентов и предоплаты. Пусть $\bar{B}_k$ обозначает реально оставшуюся непогашенной часть ссуды на момент k (в месяцах). При условии, что на момент $i-1$ остаток непогашенной ссуды известен (а равен он $\bar{B}_{i-1}$), элементы ПИП момента i можно записать в виде

$$\bar{P}_i \equiv \bar{B}_{i-1} \left(\frac{\beta_{i-1} - \beta_i}{\beta_{i-1}} \right) = \bar{B}_{i-1} \frac{r/m}{(1+r/m)^{n-i+1} - 1}, \quad (29.6)$$

$$\bar{T}_i \equiv \bar{B}_{i-1} \frac{r - \alpha}{m}, \quad (29.7)$$

где величина α представляет **спред обслуживания** (т. е. является ставкой, соответствующей комиссионным за обслуживание), который на самом деле учитывает и комиссионные за гарантию. Величина предоплаты момента i записывается в виде

$$R_i = \bar{B}_{i-1} \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} \times v_i,$$

где v_i означает скорость предоплаты в месяце i . И если общая сумма погашения в пуле равна $\bar{P}_i + R_i$, то остаток непогашенной ссуды после момента i составляет величину

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} - \bar{P}_i - R_i = \bar{B}_{i-1} \left[1 - \left(\frac{\beta_{i-1} - \beta_i}{\beta_{i-1}} \right) - \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} \times v_i \right] = \frac{\bar{B}_{i-1} \times \beta_i \times (1 - v_i)}{\beta_{i-1}}. \quad (29.8)$$

А из этого рекуррентного соотношения (29.8) вытекает, что

$$\bar{B}_i = B_i \times \prod_{j=1}^i (1 - v_j). \quad (29.9)$$

Положим $b_i \equiv \prod_{j=1}^i (1 - v_j)$. Тогда выплачиваемые по расписанию ПИП записываются в виде

$$\bar{P}_i = b_{i-1} P_i, \quad \bar{T}_i = b_{i-1} I'_i, \quad (29.10)$$

где $I'_i \equiv B_{i-1} \times (r - \alpha)/m$ — процентная часть выплаты по расписанию. Следовательно, все, что нужно знать для расчета результирующего денежного потока, сводится к исходному запланированному денежному потоку и величинам b_i , которые определяются по вектору предоплаты. Отметим, что если комиссионных за обслуживание нет (т. е. $\alpha = 0$), то планируемая ежемесячная выплата до предоплаты за месяц i оказывается равной

$$\bar{P}_i + \bar{T}_i = b_{i-1} (P_i + I_i) = b_{i-1} C, \quad (29.11)$$

Рис. 29.10. Денежный поток у пула закладных при наличии предоплаты. Показатель ЕСО представляет вектор предоплаты, а ставка по закладной r является ежемесячной. У пула есть n ежемесячных поступлений, а его непогашенная ссуда равна \$1. В ячейке B хранятся остатки непогашенной ссуды, в P — часть выплаты, идущая на погашение (и предоплату), в $\bar{T}$ — процентная часть выплаты, а в R — предоплата. Расчет предоплаты идет по схеме упр. 29.1.9 (1).

Денежный поток у пула закладных с предоплатой:

ввод: n, r ($r > 0$), $ECO[1..n]$; действительные числа $B[0..n]$, $P[1..n]$, $\bar{T}[1..n]$, $R[1..n]$, b ; целые i ;
 $b := 1$;
 $B[0] := 1$;
 для ($i = 1$ до n) {
 $b := b \times (1 - ECO[i])$; // См. (3.9)
 $B[i] := b \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^i}{(1+r)^n - 1}$; // См. (3.2)
 $P[i] := B[i - 1] - B[i]$;
 $\bar{T}[i] := B[i - 1] \times r$; // См. (3.7)
 $R[i] := B[i] \times ECO[i] / (1 - ECO[i])$;
 }
 вывод $B[]$, $P[]$, $\bar{T}[]$, $R[]$;

где C — ежемесячная выплата, рассчитываемая по величине взятой ссуды. На рис. 29.10 приведен алгоритм линейного времени для получения денежного потока у пула закладных.

Чтобы получить **ставку перевода**, нужно из грубого **средневзвешенного купона (СВК)** у суммарных ПиП по закладным вычесть комиссионные за обслуживание и гарантию. Показатель СВК представляет собой средневзвешенное всех ставок у закладных пула, причем весом для каждой закладной является остаток непогашенной ссуды. Спрэд обслуживания для ЦБЗ представляет комиссионные как за гарантию, так и собственно за обслуживание. Например, у ЦБЗ Джинни Маэ из 10,5 % ставки перевода на все обслуживание идет 0,50 %, из которых 0,44 % удерживаются обслуживающей фирмой и 0,06 % направляются Джинни Маэ. Числом, наиболее заметным для инвестора, является ставка перевода, но амортизация ПиП есть функция грубой ставки по закладным отдельных ссуд, составляющих пул.

Упражнение 29.1.8. Покажите, что расчетная ежемесячная выплата по закладной за месяц i равна

$$\bar{B}_{i-1} \frac{(r/m)(1+r/m)^{n-i+1}}{(1+r/m)^{n-i+1} - 1}.$$

Упражнение 29.1.9. Проверьте, что

1) $R_i = \bar{B}_i[v_i/(1-v_i)]$ и что

2) реальная часть выплаты, которая идет на погашение, $\bar{P}_i + R_i$, составляет величину $b_{i-1}(P_i + B_i \times v_i)$ (а не $b_i P_i$).

Упражнение 29.1.10. Проверьте правильность выражений (29.9) и (29.10).

Упражнение 29.1.11. Выведите цепочку равенств (29.11), используя формулы (29.2) и (29.4).

Упражнение 29.1.12. Найдите ПЗ полос ПОГ и ПРО, исходя из текущей купонной ставки по закладным при постоянном ЕСО и нулевом спреде обслуживания.

Упражнение 29.1.13. Покажите, что стоимость переводных ценных бумаг, обеспеченных традиционными закладными со ставкой, равной рыночной доходности, оценивается по номиналу независимо от предоплаты. Предположите, что либо спред обслуживания равен нулю, либо что ставка перевода равна рыночной доходности (тем самым стоимость переводных ценных бумаг, оцениваемых по номиналу, мало зависит от изменений в скорости предоплаты).

Задание по программированию 29.1.14. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 29.10.

29.1.4 Оценка стоимости ОЗЗ с последовательной оплатой

Рассмотрим трехслойную ОЗЗ с последовательной оплатой и обеспеченную закладными на сумму в \$ 3 000 000 с 12 % купоном и 6 месяцами до погашения. Три слоя называются *A*, *B* и *Z*. Во всех трех слоях одна и та же купонная ставка 12 %. Слой *Z* состоит из **Z-облигаций***). По *Z*-облигациям выплаты не производятся до тех пор, пока другие слои не будут «обслужены». Хотя у *Z*-облигаций и есть явная купонная ставка, но причитающиеся проценты накапливаются и добавляются к непогашенной ссуде этого слоя. По этой причине *Z*-облигации называются также **облигациями с накоплением**)** или **облигациями роста**. Когда же выплаты наличными по *Z*-облигациям начинают выплачиваться, они становятся обычными «переводными» инструментами.

Предположим, что получающиеся в результате ежемесячные процентные ставки равны 1 %, 0,9 %, 1,1 %, 1,2 %, 1,1 %, и 1,0 %. Предположим также, что показатели ЕСО таковы: 5 %, 6 %, 5 %, 4 %, 5 %, и 6 %. И мы хотим рассчитать денежный поток и справедливую цену каждого слоя.

Мы можем рассчитать денежный поток пула, привлекая алгоритм из рис. 29.10 с $n=6$, $r=0,01$ и элементами $\text{ЕСО} = [0,05, 0,06, 0,05, 0,04, 0,05, 0,06]$. После этого можно получить денежные потоки для каждого слоя, как и остатки непогашенной ссуды, размещая денежный поток из ПиП пула в соответствии со структурой ОЗЗ. Распределение это представлено в таблице на рис. 29.11. Отметим, что взятая ссуда по слою *Z* растет на 1 % в месяц до тех пор, пока остальные слои не будут изъяты из обращения. До этого момента проценты, положенные по слою *Z*, используются для изъятия из обращения ссуд по слоям *A* и *B*. Например, проценты в сумме \$ 10 000, причитающиеся по слою *Z* за первый месяц, направляются в слой *A*, уменьшая оставшуюся непогашенной ссуду слоя *A* с \$ 386 737 до \$ 376 737 и увеличивая непогашенную ссуду для слоя *Z* с \$ 1 000 000 до \$ 1 010 000. В конце месяца 4 сумма процентов, направ-

*) Известны также под названием облигаций с нулевым купоном или бескупонных ценных бумаг (zero-coupon bonds или zero-coupon securities). — Прим. перев.

**) Accrual bonds: так называются облигации, по которым регулярные процентные платежи не производятся, и потому проценты накапливаются до момента погашения. — Прим. перев.

Месяц	1	2	3	4	5	6
Процентная ставка	1,0 %	0,9 %	1,1 %	1,2 %	1,1 %	1,0 %
ЕКО	5,0 %	6,0 %	5,0 %	4,0 %	5,0 %	6,0 %
Непогашенная ссуда (B_i)						
	3 000 000	2 386 737	1 803 711	1 291 516	830 675	396 533
A	1 000 000	376 737	0	0	0	0
B	1 000 000	1 000 000	783 611	261 215	0	0
Z	1 000 000	1 010 000	1 020 100	1 030 301	830 675	396 533
Проценты ($\bar{T}_i$)						
	30 000	23 867	18 037	12 915	8 307	3 965
A	20 000	3 767	0	0	0	0
B	10 000	20 100	18 037	2 612	0	0
Z	0	0	0	10 303	8 307	3 965
Погашение						
	613 263	583 026	512 195	460 841	434 142	396 534
A	613 263	376 737	0	0	0	0
B	0	206 289	512 195	261 215	0	0
Z	0	0	0	199 626	434 142	396 534

Рис. 29.11. Денежный поток ОЗЗ. Числа в колонке месяца i представляют выплаты i -го месяца. В строках «Проценты» и «Погашение» указываются элементы ПиП пула, а также дается их распределение по отдельным слоям. Процентные выплаты можно использовать для получения частей выплат, идущих на погашение по слоям A , B и Z . Z -облигации, таким образом, защищают ранние слои от риска расширения.

ляемых в слой Z , \$ 10 303, в точности совпадает с суммой, определяемой по оставшейся непогашенной ссуде слоя Z в \$ 1 030 301 (т.е. равной 1 % от нее). Стоимость же слоев можно оценить следующим образом:

$$\text{слой } A = \frac{20\,000 + 613\,263}{1,01} + \frac{3767 + 376\,737}{1,01 \times 1,009} = 1\,000\,369,$$

$$\begin{aligned} \text{слой } B = \frac{10\,000 + 0}{1,01} + \frac{20\,100 + 206\,289}{1,01 \times 1,009} + \frac{18\,037 + 512\,195}{1,01 \times 1,009 \times 1,011} + \\ + \frac{2612 + 261\,215}{1,01 \times 1,009 \times 1,011 \times 1,012} = 999\,719, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{слой } Z = \frac{10\,303 + 199\,626}{1,01 \times 1,009 \times 1,011 \times 1,012} + \frac{8307 + 434\,142}{1,01 \times 1,009 \times 1,011 \times 1,012 \times 1,011} + \\ + \frac{3965 + 396\,534}{1,01 \times 1,009 \times 1,011 \times 1,012 \times 1,011 \times 1,01} = 997\,238. \end{aligned}$$

Полная теоретическая стоимость этой ОЗЗ равна \$ 2 997 326, т.е. немного меньше ее номинального значения в \$ 3 000 000. Алгоритм по определению вышеуказанных элементов приведен на рис. 29.12.

Мы видели, что как только траектория процентной ставки и вектор предоплаты для этой траектории становятся известны, то появляется возможность рассчитать не только денежный поток ОЗЗ, но и ее стоимость. К сожалению, остаток непогашенной ссуды у ОЗЗ в условиях

предоплаты, как и в случае ЗКС, зависит от траектории. Скажем, маловероятно, что если за периодом высоких ставок последует их падение на текущий уровень, то это приведет к тому же остатку непогашенной ссуды, что и в случае, когда период низких ставок будет предшествовать их подъему на текущий уровень. А это означает, что если мы попытаемся оценить стоимость 30-летней ОЗЗ с помощью биномиальной модели процентной ставки, то придется рассматривать $2^{360} \approx 2,35 \times 10^{108}$ траекторий! И как следствие, придется признать наиболее подходящим вычислительным методом моделирование по методу Монте-Карло. Работает же он следующим образом. Сначала моделируется одна траектория процентной

Генератор денежного потока последовательной ОЗЗ:

```

ввод:  $n, r$  ( $r > 0$ ),  $ECO[1..n]$ ,  $B_0[1..4]$ ;
действительные числа  $B[0..n]$ ,  $P[1..n]$ ,  $\bar{T}[1..n]$ , // Денежный поток пула
 $B[1..4][0..n]$ ,  $P[1..4][1..n]$ ,  $\bar{T}[1..4][1..n]$ ,  $P, I$ ;
целые  $i, j$ ;
Используйте алгоритм рис. 29.10 для получения  $B[0..n]$ ,  $P[1..n]$ ,  $\bar{T}[1..n]$ ;
для ( $j = 1$  до 4) {  $B[j][0] := B_0[j]$ ; } // Взятые ссуды
для ( $i = 1$  до  $n$ ) { // Месяц  $i$ 
 $P := P[i]$ ;  $I := \bar{T}[i]$ ; // ПиП пула за месяц  $i$ 
для ( $j = 1$  до 3) { // Слои  $A, B, C$ 
 $\bar{T}[j][i] := B[j][i-1] \times r$ ; // Положенные проценты по слою  $j$ 
 $I := I - \bar{T}[j][i]$ ;
если [ $B[j][i-1] \leq P$ ] { // Изымайте его из обращения
 $P := P - B[j][i-1]$ ;  $P[j][i] := B[j][i-1]$ ;  $B[j][i] := 0$ ;
} в противном случае {
 $B[j][i] := B[j][i-1] - P$ ;  $P[j][i] := P$ ;  $P := 0$ ;
}
}
для ( $j = 1$  до 3) { // Проценты в качестве предоплаты для  $A, B, C$ 
если [ $B[j][i] \leq I$ ] { // Изымайте его из обращения
 $\bar{T}[j][i] := \bar{T}[j][i] + B[j][i]$ ;  $I := I - B[j][i]$ ;  $B[j][i] := 0$ ;
} в противном случае {
 $B[j][i] := B[j][i] - I$ ;  $\bar{T}[j][i] := \bar{T}[j][i] + I$ ;  $I := 0$ ;
}
}
// Слой  $Z$ 
 $\bar{T}[4][i] := I$ ;  $P[4][i] := P$ ;  $B[4][i] := B[4][i-1] \times (1+r) - P - I$ ;
}
вывод  $B[ ][ ]$ ,  $P[ ][ ]$ ,  $\bar{T}[ ][ ]$ ;

```

Рис. 29.12. Генератор денежного потока последовательной ОЗЗ. Показатель ЕСО представляет собой вектор предоплаты, а ставка закладной r является ставкой месяца. У пула n ежемесячных поступлений, а взятая по нему ссуда предполагается равной \$1. В ячейке B хранятся остатки непогашенной ссуды, P представляет часть выплаты, идущую на погашение (включая предоплату), а $\bar{T}$ — на проценты. Слой 1 означает слой A , слой 2 — это слой B и т.д. В ячейке B_0 хранятся исходные ссуды отдельных слоев или доли \$1.

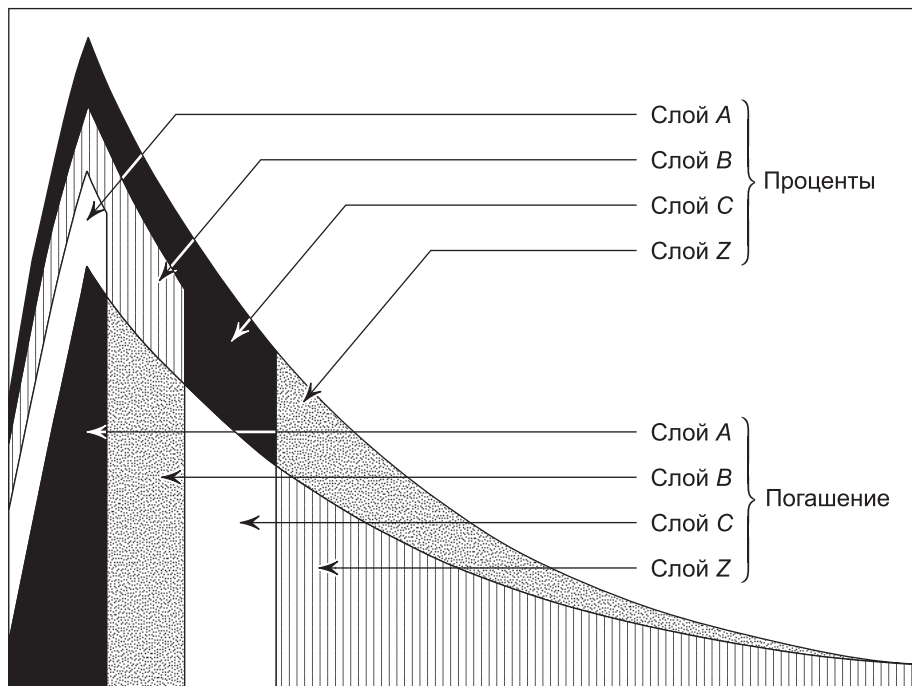
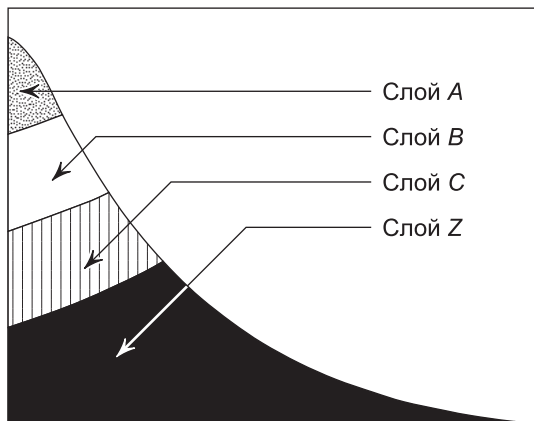


Рис. 29.13. Денежный поток четырехслойной последовательной ОЗЗ. Ставка по закладной равна 6%, реальная скорость предоплаты 150 АГЦБ, а исходная сумма в каждом слое одна и та же; на горизонтальной оси — время до погашения.

Рис. 29.14. Остатки непогашенной ссуды у четырехслойной последовательной ОЗЗ. Структура данной ОЗЗ идентична структуре, приведенной на рис. 29.13. Непогашенная часть ссуды по слою Z растет до тех пор, пока этот слой не станет слоем текущей оплаты; на горизонтальной оси время, оставшееся до погашения ОЗЗ.



ставки. Исходя из этой траектории и используя модель предоплаты мы получаем три денежных потока: из погашений, процентов и предоплаты. После этого можно будет получить денежные потоки отдельных слоев и, следовательно, их приведенные значения (ПЗ). Остается применить описанную процедуру для многих сценариев процентной ставки и в заключение получить среднее имеющихся ПЗ.

Упражнение 29.1.15. Рассчитайте ежемесячные величины предоплаты для случая таблицы на рис. 29.11.

Задание по программированию 29.1.16. Реализуйте алгоритм, представленный на рис. 29.12 для получения денежного потока четырехслойной ОЗЗ с последовательной оплатой и слоем Z . Предположите, что в каждом слое используется купонная ставка, совпадающая с базовой ставкой по закладным пула. На рис. 29.13 и 29.14 изображены денежные потоки и последовательность из непогашенных ссуд для одной из таких ОЗЗ.

29.1.5 Средневзвешенный срок жизни

Средневзвешенный срок жизни (ССЖ) у ЦБЗ определяется как среднее число лет, которые каждый доллар из неоплаченной ссуды по всем закладным остается неоплаченным. Он рассчитывается по формуле

$$M \equiv \frac{\sum_{i=1}^m iP_i}{12 \times P},$$

в которой $M = \text{ССЖ}$, m — оставшийся срок до полного погашения в месяцах, P_i — сумма, погашаемая через i месяцев, а P представляет часть ссуды, оставшейся непогашенной на настоящий момент². Иллюстрацией к сказанному служит рис. 29.15. Обычно, чем больше ожидаемая скорость предоплаты, тем короче средний срок жизни. При данном статическом векторе предоплаты показатель ССЖ возрастает вместе с купонными ставками, поскольку в этом случае большую долю выплаты в первые годы составят проценты, а это отдалит полное погашение ссуды. Индуцированный уровень АГЦБ иногда определяется как тот единственный уровень предоплаты АГЦБ, который приведет к тому же ССЖ, что и статический вектор предоплаты.

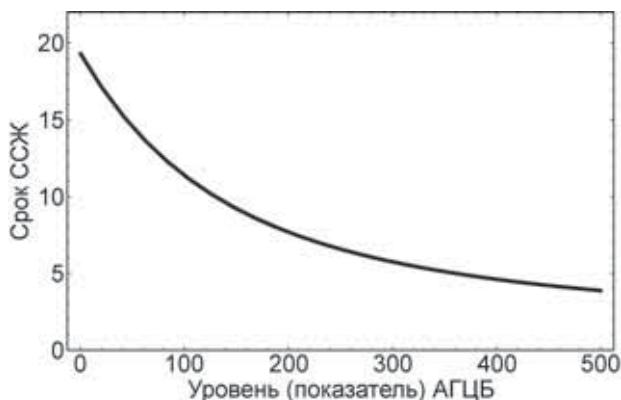


Рис. 29.15. Срок ССЖ при различных показателях АГЦБ. Базовые закладные отличаются 30 лет до погашения и 6 % купонная ставка.

29.2 Моделирование предоплаты по закладным

Уровень процентной ставки является наиболее важным фактором, оказывающим влияние на скорость предоплаты. Обычно ускоренная предоплата в ЦБЗ начинает использоваться с некоторой задержкой после того, как существующая ставка по закладной станет меньше СВК на 200 базисных пунктов. Событие это известно под названием **порог рефинансирования**. Скорость предоплаты сначала быстро увеличивается, а затем стремится «выгореть» и успокоиться на меньшей скорости. Но в последующем, если ставки снова упадут ниже порога рефинансирования, то это уже не приведет к такому же результату. Дело в том, что со временем в пуле остаются те заемщики по закладной, которые не прибегают к рефинансированию ни при каких обстоятельствах, и потому чувствительность пула к процентной ставке падает. Следующим по важности фактором, побуждающим к рефинансированию, является размер ссуды, поскольку денежные накопления пропорциональны ему [4].

Заметное влияние на предоплату оказывает и возраст пула. Ставки рефинансирования как правило меньше для новых ссуд, чем для старых. Изменения процентной ставки и другие человеческие факторы в первые годы жизни пула оказывают незначительное влияние на скорость предоплаты. Впоследствии же на жизни пула начинают сказываться те факторы, которые могут привести к более высокой скорости предоплаты, скажем такие, как продажа дома. Само же это увеличение скорости предоплаты с возрастом устанавливается на некотором устойчивом уровне. Но следует и добавить, что при наличии достаточных стимулов к рефинансированию скорость предоплаты может резко возрасти даже у новых ссуд.

Рефинансирование не единственная причина, позволяющая ускорять предоплату при падении процентных ставок. Более низкие процентные ставки делают покупку дома более доступной операцией и могут включить в этот процесс покупок и дома больших размеров. Однако, в общем и целом очень высокая скорость предоплаты прежде всего обязана рефинансированию, а не изменениям в структуре покупок домов.

При моделировании предоплаты вместо ставки перевода управляющим фактором является СВК. Начнем с того, что ЦБЗ с одной и той же ставкой перевода могут иметь разные СВК, что почти наверняка ведет к различным характеристикам предоплаты. Эти СВК также могут меняться со временем, поскольку при отсутствии предоплаты закладные с меньшими купонами погашаются быстрее, чем с большими (см. упр. 29.1.2). А это заставляет СВК расти со временем. Однако при наличии предоплаты у закладных с более высокими купонами и большая скорость предоплаты, что заставляет СВК пула убывать со временем.

У каждого типа закладной (застрахованной правительством, традиционной и т.д.) своя манера предоплаты. Представляется, например, что переводные ценные бумаги Фредди Мака и Фанни Маэ погашаются дольше, чем переводные Джинни Маэ, а ставки предоплаты для 15-летних переводных закладных обычно превосходят ставки у 30-летних переводных, примерно с теми же купонами [54, 325].

Из проведенного выше анализа вытекает, что при построении модели предоплаты нужно учитывать по меньшей мере следующие факторы: текущие и прошлые процентные ставки, состояние экономики (в особенности рынок домовладения), СВК, текущую купонную ставку, возраст и размер ссуды, тип пула и агентства, месяц года и «выгорание»^{*)}. Хотя мы и обсуждали проблему скорости предоплаты на уровне пула, но модель при получении денежного потока для пула может принимать во внимание и нюансы индивидуальных ссуд, если такая информация доступна и выгода от ее использования перевешивает стоимость соответствующих расходов [4, 259]. О долгосрочном среднем планируемых скоростей обычно говорят как о планируемом векторе предоплаты модели. Этими наметками могут быть взвешенное среднее планируемых скоростей, та единственная скорость, которая приводит к тому же средневзвешенному сроку жизни, что и вектор (скоростей) или единственная скорость, при которой возникает та же доходность, что и от вектора [433].

Полоса ПОГ покупается со скидкой. Поскольку ее денежный поток погашается по номиналу, то доход от него в долларах представляет собой просто разницу между номиналом и ценой покупки. И чем быстрее этот доход в долларах реализуется, тем доходность будет выше. Тем самым для полосы ПОГ предоплата оказывается выгодной. При падении ставок по закладным не только ускоряется предоплата, но и по более низкой ставке дисконтируется денежный поток; а, следовательно, стоимость полосы ПОГ растет. Противоположное происходит при возрастании ставок по закладным (см. рис. 29.16). В результате можно сказать, что у полосы ПОГ положительная дюрация и «ей» хорошо на бычьих рынках.

У полосы ПРО, наоборот, номинал отсутствует. Поэтому любая предоплата уменьшает остаток непогашенной ссуды у пула и, соответственно, уменьшаются положенные проценты. Когда ставки по закладным падают и предоплата ускоряется, стоимость полосы ПРО обычно убывает даже несмотря на то, что денежный поток будет дисконтироваться по более низкой ставке. Если же ставки по закладным растут, то денежный поток улучшается. Однако, вне некоторого порога стоимость ПРО будет уменьшаться из-за более высоких ставок дисконтирования (см. рис. 29.17). А, следовательно, стоимость ПРО меняется в том же направлении, что и изменение ставок по закладным в определенных областях (другими словами, у нее отрицательная дюрация). В отличие от большинства ЦБ с фиксированной доходностью, полоса ПРО лучше «чувствует себя» на медвежьих рынках.

Ценные бумаги РЦБЗ чрезвычайно чувствительны к изменениям в скорости предоплаты (см. упр. 29.2.2). Эти ценные бумаги часто комбинируются с другими типами ценных бумаг для изменения характеристик доходности. Например, поскольку полоса ПОГ «буйно расцветает» при увеличении скорости предоплаты, то она является великолепным хеджем

^{*)} Английское слово *burnout* переводиться может, скажем, как «прекращение горения (ракетного двигателя)», а здесь имеется в виду момент прекращения поступления прибыли, необлагаемой налогом, т. е. момент, когда доход от капиталовложений становится налогооблагаемым — Прим. перев.

Рис. 29.16. Стоимость денежного потока из погашений (ПОГ).



Рис. 29.17. Стоимость денежного потока из процентов (ПРО). На изменение процентных ставок денежные потоки ПОГ и ПРО реагируют несимметрично.



от тех ЦБЗ, чья цена делается плоской или убывает при ускорении предоплаты, в то время как полоса ПРО может прохеджировать риск процентной ставки у ценных бумаг с положительной дюрацией.

Упражнение 29.2.1. Разделим всех заемщиков на тех, кто проводит рефинансирование быстро и тех, кто медленно (возможна и более тонкая классификация). Предполагается, что «медленные рефинансеры» реагируют на побудительные стимулы по рефинансированию с более высокой скоростью, чем «быстрые». Опишите, как в этом подходе моделируется «выгорание» (burnout — т. е. происходит погашение).

Упражнение 29.2.2. Покажите, используя упр. 29.1.12, что цены частей ПОГ и ПРО чрезвычайно чувствительны к скорости предоплаты.

Упражнение 29.2.3. Фирмы, которые получают доход от обслуживания закладных, могут рассматриваться как занимающие длинную позицию по полосе ПРО. Почему?

29.3 Дюрация и выпуклость

Для оценки стоимости переводных ценных бумаг дюрация более важна, чем показатель ССЖ, который измеряет время до окончания денежного потока из погашений [247, 619]. На рис. 29.18 представлена дюрация по Маклэю (ДМ) для переводных ценных бумаг в зависимости от условий предоплаты. Показатель ДМ, полученный при статическом

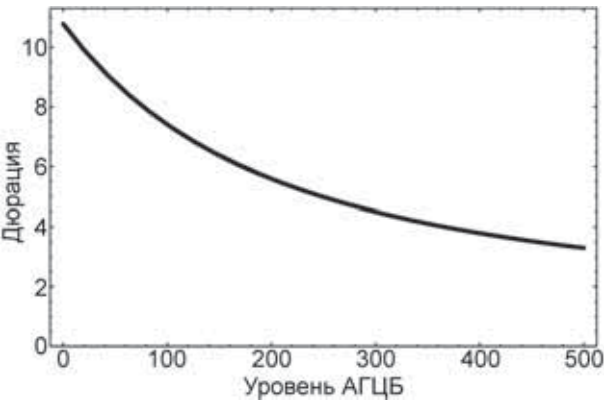


Рис. 29.18. Дюрация по Мак-лэу в зависимости от уровня АГЦБ. Предполагается, что купонная ставка и рыночная доходность равны 6 %. Срок погашения у базовых закладных составляет 30 лет.

векторе предоплаты, который не меняется при изменении доходности, называется также **статической дюрацией** или **дюрацией денежного потока**.

Предполагается, что дюрация показывает, как изменение доходности влияет на цену, т. е. что имеет место соотношение

$$\Delta P \approx -D \times \Delta i, \tag{29.12}$$

где ΔP — изменение цены в процентах, D — эффективная дюрация, а Δi — изменение доходности. Это соотношение (29.12) имеет очевидные приложения в хеджировании. Однако, статическая дюрация для этой цели не подходит, поскольку денежный поток у ЦБЗ зависит от существующей доходности. Наиболее подходящей мерой волатильности цены является эффективная дюрация

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx \frac{P_- - P_+}{P_0(y_+ - y_-)},$$

где P_0 — текущая цена, P_- представляет цену в случае уменьшения доходности на Δy , а P_+ — в случае увеличения доходности на Δy , y — первоначальная доходность, $y_+ \equiv y + \Delta y$, а $y_- \equiv y - \Delta y$. На рис. 29.19 изображена

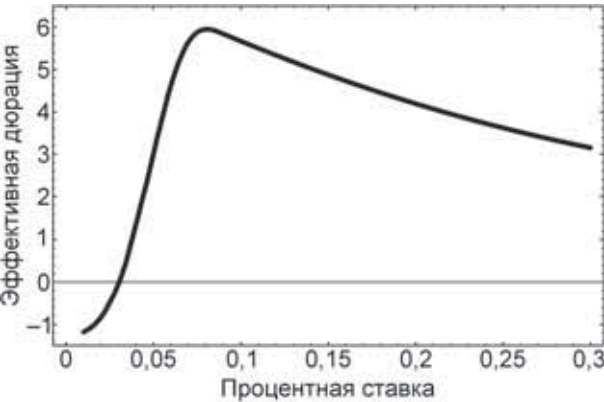


Рис. 29.19. Эффективная дюрация для ЦБЗ из рис. 28.8.

эффективная дюрация одной из ЦБЗ. Из него вытекает, к примеру, что при ставке 9 % эффективная дюрация приблизительно равна 6; т.е. 1 % изменение доходности приведет к изменению цены грубо на 6 %. Цены P_+ и P_- часто сами являются ожидаемыми значениями и рассчитываются с помощью моделирования. Для сокращения расчетного времени величины $\partial P/\partial y$ можно использовать выражение $(P_- - P_0)/(P_0 \Delta y)$, либо $(P_0 - P_+)/ (P_0 \Delta y)$, поскольку в таком случае потребуются вычислять лишь какую-либо одну из величин P_- или P_+ .

Аналогично, выпуклость $\partial^2 P/\partial y^2$ можно заменить на приближенно равную ей эффективную выпуклость:

$$\frac{P_+ + P_- - 2 \times P_0}{P_0 [(y_+ - y_-)/2]^2}.$$

Иллюстрацией к ней служит рис. 29.20. С помощью выпуклости можно попытаться улучшить формулу первого порядка (29.12), добавляя в нее слагаемое второго порядка:

$$\Delta P \approx -D \times \Delta i + \frac{1}{2} \times V (\Delta i)^2,$$

где V — выпуклость. По рис. 28.8 видно, что цена ЦБЗ возрастает с убывающей скоростью при возрастании доходности, если эта доходность находится ниже рога луны из-за ускорения предоплаты и в этой точке она начинает убывать. Эта отрицательная выпуклость очевидна и по рис. 29.20. Следовательно, даже если ДМ, которая всегда положительна, будет приемлемой при текущем купоне и умеренно дисконтной ЦБЗ, то она не будет подходить для ЦБЗ, оцененным с премией.

Упражнение 29.3.1. Предположим, что ЦБЗ оценивается исходя из предположения, что предоплаты не будет до окончания 12-го года, и в этот момент пул будет оплачен полностью. Эта манера называется **концепция ФАД 12-летнего периода, предшествующего оплате**. Объясните, почему ЦБЗ оцениваемые с премией переоцениваются, а дисконтные ЦБЗ недооцениваются, если предоплата происходит ранее 12-го года

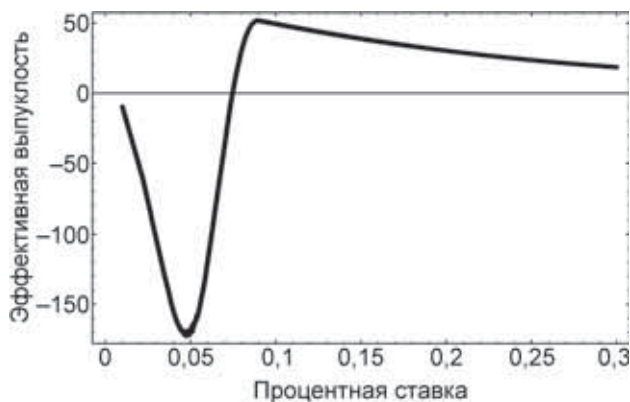


Рис. 29.20. Эффективная выпуклость для ЦБЗ из рис. 28.8.

(исследования показали, что средний срок жизни пула намного меньше 12 лет [577]).

Упражнение 29.3.2. Выражение $\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n iC_i(1+y)^{-(i+1)}$ для модифицированной дюрации не может быть отрицательным для переводных ценных бумаг. С другой стороны, эффективная дюрация, которая дает приближение для модифицированной дюрации, может быть отрицательной, как показано на рис. 29.19. Почему?

Упражнение 29.3.3. Хеджер занимает длинную позицию по ЦБЗ и хеджирует ее, занимая короткую позицию по облигации Казначейства (ОК). Дайте оценку этой стратегии.

Упражнение 29.3.4. Рассмотрим опционы на форварды по переводным закладным. Объясните, почему модель Блэка имеет тенденцию переоценивать стоимость опциона колл и недооценивать стоимость опциона пут.

29.4 Методология оценки стоимости

Оценка стоимости закладных включает в себя моделирование неопределенного денежного потока и расчет его приведенного значения (ПЗ). Как и в п. 27.4, тремя основными подходами к оценке стоимости ЦБЗ являются определение доходности статического денежного потока, моделирование опции и СУО. Поскольку оценка их стоимости является больше технической операцией и больше, чем в случае других ценных бумаг с фиксированной доходностью, зависит от конкретного намерения не учитывать такие моменты, как риск предоплаты, качество кредита и ликвидность, то стоимость ЦБЗ оценивается со значительным спрэдом по отношению к ценным бумагам Казначейства и корпоративным облигациям.

29.4.1 Методология доходности статического денежного потока

Напоминаем, если внутренняя доходность (ВД) рассчитывается, исходя из предположения постоянного уровня предоплаты на протяжении всей жизни ценной бумаги, то в результате получается доходность статического денежного потока. Методология доходности статического денежного потока сравнивает доходность денежного потока у ЦБЗ с доходностью «сравнимых» облигаций. Для этих целей не годится использовать заявленный срок до погашения ЦБЗ из-за предоплаты. Вместо этого можно использовать либо ДМ, либо показатель ССЖ при тех же предположениях относительно предоплаты.

Хотя эта методология и является простой в использовании, но она проливает мало света на относительную стоимость ЦБЗ. Помимо статичности ее отличают и другие недостатки: 1) может статься, что прогнозируемый денежный поток не удастся реинвестировать по его доходности, 2) возможно, что владелец ЦБЗ не будет держать ее у себя до последней

даты оплаты, а 3) реальная манера предоплаты с большой вероятностью будет отличаться от предположенной.

Методология статического спреда выходит за рамки доходности денежного потока, поскольку использует кривую доходности Казначейства. Статический спред по отношению к ценным бумагам Казначейства — это спред, при котором ПЗ прогнозируемого денежного потока у ЦБЗ, если оно получается дисконтированием по спот-ставке плюс спред, равняется ее рыночной цене (просмотрите еще раз п. 5.4).

29.4.2 Методология оценки стоимости опциона

Фактически во всех ссудах под закладную владелец дома имеет право вести предоплату как и когда угодно. Владелец дома в действительности имеет опцион (право) на отзыв закладной. Совокупность этих прав по предоплате по существу представляет собой вложенный опцион колл у переводных ценных бумаг. Поскольку владелец дома имеет право отозвать пропорциональную долю пула, то инвестор в ЦБЗ занимает короткую позицию по вложенному опциону колл; следовательно,

$$P_c = P_n - C,$$

если P_c — цена переводной ценной бумаги, P_n — цена неотзывной переводной ценной бумаги и C — цена вложенного опциона колл. В соответствии с методологией оценки стоимости опциона сначала при помощи модели оценки стоимости опциона оценивается стоимость опциона. И уже затем рыночная стоимость неотзывных переводных ценных бумаг оценивается с помощью равенства

$$P_n = P_c + C.$$

В конце концов предыдущая цена используется для расчета доходности по этой теоретической облигации, по которой нет предоплаты. Эта доходность называется доходностью с учетом опциона.

Критику методологии оценки стоимости опциона мы провели в п. 27.4.2. Здесь у нее обнаруживаются и другие недостатки. Опционы предоплаты часто исполняются «нерационально». Более того, возможно частичное исполнение, поскольку владелец дома может оплатить часть ссуды в качестве предоплаты; и возникает не один, а много опционов, по одному на владельца дома. Наконец, оценка стоимости опциона становится очень сложной для облигаций ОЗЗ.

29.4.3 Методология спреда, учитывающего опцион

В методологии СУО имеется четыре основные части [382]. Первой компонентой является модель процентной ставки. Имеется и модель предоплаты, которую следует выделить как самую важную компоненту. Хотя эта модель предоплаты может быть как детерминированной,

так и случайной, существуют экспериментальные данные, показывающие, что детерминированные модели, являющиеся точными в среднем, оказываются достаточно хорошими для переводных ценных бумаг, полос ПРО и ПОГ [428, 433]. Третью компоненту представляет **генератор денежного потока**. Сначала он рассчитывает текущие купонные ставки для траекторий процентной ставки, которые предоставляет модель процентной ставки. Затем генерирует денежный поток ПиП для пула, а также распределяет его по индивидуальным ценным бумагам, исходя из модели предоплаты и такой информации о ценных бумагах, как правила ОЗЗ. Отметим, что один и тот же денежный поток пула управляет многими ценными бумагами. Наконец, с помощью программы решения уравнения вычисляется значение СУО. Поскольку же используются несколько траекторий процентной ставки, то при этом рассчитываются и многие другие статистики. Общая структура этой методологии представлена на рис. 29.21.

Общую формулу для оценки стоимости неопределенного денежного потока можно записать в виде

$$ПЗ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N \text{ векторов } r^*} \frac{C_n^*}{(1+r_1^*)(1+r_2^*) \dots (1+r_n^*)}, \quad (29.13)$$

где r^* обозначает риск-нейтральную траекторию процентной ставки, в которой компонента r_i^* обозначает однопериодную ставку периода i , а C_n^* представляет поступление момента n в рассматриваемом сценарии. Усреднение же проводится по большому числу сценариев, распределение которых совпадает с динамикой процентной ставки. Среднее по сценариям должно также совпадать с кривой текущих спот-ставок, т. е.

$$\frac{1}{(1+f_1)(1+f_2) \dots (1+f_n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N \text{ векторов } r^*} \frac{1}{(1+r_1^*)(1+r_2^*) \dots (1+r_n^*)},$$

$n = 1, 2, \dots$, где f_i — вытекающие из расчетов форвардные ставки.

Оценка стоимости ЦБЗ по методу Монте-Карло тесно связана с соотношением (29.13). Модель процентной ставки случайным образом генерирует множество риск-нейтральных траекторий. Затем для каждой траектории генерируется денежный поток. В заключение вычисляется то значение спреда s , при котором усреднение и дисконтирование этих денежных потоков приводит к рыночной цене:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N \text{ векторов } r^*} \frac{C_n^*}{(1+r_1^*+s)(1+r_2^*+s) \dots (1+r_n^*+s)}.$$

Этот спред s и есть СУО. Вытекающая отсюда стоимость вложенного опциона рассчитывается затем по формуле

$$C = S - S_c,$$

где C — стоимость опциона, S — статический спред и S_c — СУО. Обычная



Рис. 29.21. Схема расчета СУО для ЦБЗ. Компоненты в нежирных прямоугольниках определяются внешней информацией.

альтернатива сводится сначала к усреднению денежного потока и затем к определению СУО как такого значения спреда, при котором полученное среднее совпадает с рыночной ценой. Хотя этот подход и более эффективен, но обычно он приводит к другому значению спреда.

Вычисление СУО требует много времени. И большая часть этого времени падает на генерацию денежного потока. Так получается потому, что в соответствии с правилами распределение денежного потока в ОЗЗ может оказаться сколь угодно сложным. И эта сложность требует специальной **структуры данных** при разработке программ. Затем вычислительная стоимость умножается на число запусков программы моделирования по методу Монте-Карло.

Можно считать, что показатель СУО измеряет премию за риск, а точнее за принятие систематического риска на рынке залладных.

В этой интерпретации методология СУО отождествляет капиталовложения с наилучшими возможностями дополнительных доходов. Устанавливаемая статистически, модель предоплаты будет всегда устаревать и предоставлять лишь грубый прогноз будущих условий. Следовательно, альтернативная интерпретация сводится к тому, что никакой премии за риск не существует: из того, что значение СУО оказывается ненулевым вытекает лишь, что рынок на самом деле «выбрасывает» другой набор предположений о предоплате [34]. Эта точка зрения предполагает, что нужно исследовать предположения о предоплате, индуцированные рассматриваемой ситуацией [188].

Упражнение 29.4.1. Мотивируйте, что СУО с нулевой волатильностью процентной ставки, называемый **СУО с нулевой волатильностью**, соответствует статическому спреду.

Задание по программированию 29.4.2. Реализуйте вычисление СУО для четырехслойной последовательной ОЗЗ в модели БДТ. Предположите, что показатель ЕСО является постоянным.

Дюрация и выпуклость. Эффективную*) дюрацию и выпуклость можно рассчитать, если СУО поддерживается на постоянном уровне. Получающиеся в результате величины называются дюрацией СУО и **выпуклостью СУО**, соответственно [323, 325]. Дюрации ключевых ставок, введенные в п. 27.5 и вычисляемые подобно дюрации СУО, более всего полезны при идентификации сегментов кривой доходности, которые больше всего влияют на стоимость ЦБЗ [260]. Отметим, что дюрация СУО по меньшей мере в два раза дороже СУО в смысле затрачиваемого вычислительного времени, поскольку одно из чисел P_+ и P_- следует вычислять с помощью моделирования. Выпуклость же СУО в три раза дороже, поскольку в этом случае рассчитывать с помощью моделирования придется оба числа P_+ и P_- .

Под риском предоплаты может иметься в виду риск того, что рыночная цена отразит предположения о предоплате, отличные от использованных в модели. Интересной мерой риска предоплаты является **дюрация предоплаты**. Она представляет собой изменение цены в процентах при СУО, поддерживаемом на постоянном уровне, соответствующее заданному отклонению скорости предоплаты в процентах от некоторого базового и прогнозируемого уровня (см. упр. 29.2.2) [198, 328, 433, 815].

Доходности за период владения (ДПВ). Показатель ДПВ оценивает относительную привлекательность ЦБЗ на протяжении периода владения. Накопленное значение (НЗ), т.е. стоимость ЦБЗ, в конце периода

*) На протяжении всей книги мы видели, что английское слово *effective* относится к различным показателям, но есть лишь два варианта его перевода. Так, оно может означать приближенное выражение для имеющейся теоретической формулы (см., например, п. 29.3). Если же оно используется по отношению к ежегодной периодической ставке процента $i^{(k)}$, то означает эквивалентную ей ежегодную ставку процента i . В обоих случаях можно сказать, что слово «эффективный» означает реально или чаще используемый показатель (ежегодная ставка процента i чаще используется, поскольку удобна для сравнения). — Прим. перев.

состоит из приведенной на этот момент стоимости $\Pi\P$, а, следовательно, процентов от реинвестирования и прогнозируемой на этот момент рыночной цены. Усредненная же месячная доходность определяется выражением

$$(F/P)^{1/n} - 1,$$

где F — НЗ, P — рыночная стоимость ЦБЗ и n — число в начале периода месяцев в периоде владения. Чтобы рассчитать эту доходность, требуется знать предположения о предоплате, ставки реинвестирования и динамику процентных ставок. Причем все эти предположения не являются независимыми.

Расчет СУО можно объединить с анализом ДПВ. Для этого сначала создается несколько статических сценариев процентной ставки и предоплаты для периода владения. Предположения о предоплате делаются в форме вектора предоплаты. Затем вычисляется значение ДПВ для каждого сценария в предположении, что СУО остается неизменным к концу периода.

Дополнительная литература

Больше информации по ЦБЗ можно найти в [54, 55, 260, 330, 829], об оценке стоимости ЦБЗ можно почитать в [54, 55, 124, 259, 260, 276, 297, 323, 325, 330, 595, 619, 649, 788, 789, 818, 896], анализ СУО представлен в [134, 188, 197, 198, 438, 454], а оценка стоимости ЦБЗ по методу Монте-Карло — в [142, 715]. Моделирование по методу Монте-Карло обычно приводит к несмещенным оценкам [478]. Применение техники уменьшения дисперсии и квазиметодов Монте-Карло из гл. 18 может упростить вычисления [197, 354]. Параллельное проведение вычислений для заметного увеличения их эффективности было убедительно продемонстрировано в [601, 794, 892, 893]. Дополнительную информацию по мерам дюрации можно найти в [33, 258, 272, 394, 429, 504, 889]. Многие подходы к понятию доходности обсуждаются в [406]. О моделях предоплаты говорится в [118, 220, 268, 361, 411, 430, 431, 433, 540], исторический очерк приведен в [260], а о первых моделях говорится в [296]. Факторы, используемые при моделировании предоплаты, рассмотрены в [54, 330, 430, 433]. Концепция ФАД о 12-летнем периоде оплаты до погашения обсуждается в [54, 363]. Для оценки стоимости ЦБЗ могут оказаться полезными двухфакторные модели, поскольку предоплата становится все более зависимой от долгосрочных ставок [456]. О предоплате мультисемейства ЦБЗ можно прочесть в [316], а об экспериментальном анализе предоплаты — [203, 742, 864]. Моделирование момента «выгорания» обсуждается в [199]. Однако волны рефинансирований 1991—1993 гг. зародили некоторые сомнения в идее выгорания [433]. По хеджированию ЦБЗ можно проконсультироваться по [524], а по опционам на ЦБЗ — по [460]. Показатель ИСК одиннадцатого округа проанализирован в [347, 684], а ставки СМТ сравниваются с текущей доходностью в [525].

Примечания

1. Также известные под названием **средневзвешенный оставшийся срок до погашения** (weighted average remaining maturity = WARM).

2. При вычислении ССЖ следует учесть и **сроки оплаты**: 14 (реально) или 45 дней (по контракту) для GNMA I, 19 (реально) и 50 дней (по контракту) для GNMA II, 24 (реально) и 55 дней (по контракту) для ЦБЗ Фанни Маэ, 44 (реально) и 75 дней (по контракту) для непозолоченных СУ Фредди Мак и 14 (реально) и 45 дней (по контракту) для позолоченных СУ Фредди Мак. Под **сроком оплаты по контракту** имеется в виду число дней между первым днем месяца и датой, когда представитель обслуживающей организации реально вручит ПиП инвестору [54, 330].

30 **Облигации, обеспеченные закладными**

Капитал можно воспринимать лишь как движение, а не как нечто в состоянии покоя.

Карл Маркс (1818—1883), *Капитал*

Взаимные фонды объединяют различные финансовые активы в портфель и выпускают определенный тип ценных бумаг, представляющих его. Облигации из класса ОЗЗ обращают этот процесс, представляя собой множество разнообразных ценных бумаг, обеспеченных относительно однородным портфелем активов [660]. В этой главе дается обзор ОЗЗ. Налоговое оформление ОЗЗ обычно проводится на условиях свода правил от 1986 г. под названием «Проводник капиталовложений, связанных с закладными под реальную собственность» (Real Estate Mortgage Investment Conduit = REMIC). Поэтому ОЗЗ часто фигурируют под именем **REMIC's = Ремиксы** [162, 469].

30.1 **Введение**

Сложность и запутанность ОЗЗ связана с введением правил оплаты различного типа на приоритетной основе. В ОЗЗ первого поколения, называемых ОЗЗ с последовательной оплатой, все классы облигаций должны были погашаться последовательно. У ОЗЗ с последовательной оплатой и большим количеством слоев каждому слою соответствует очень узкое окно для денежных поступлений. А чтобы еще больше уменьшить риск предоплаты были введены слои с четким графиком погашения ссуды. Называются они **плановыми облигациями**. К примеру, облигации, в которых график оплаты гарантируется, если реальная скорость предоплаты лежит в определенном диапазоне, известны под названием облигации из **класса запланированного погашения (ЗПК)**. Эти ЗПК впервые появились в августе 1986 г. [141]. В то время как ЗПК предлагает защиту против обоих рисков, сжатия и расширения, некоторые инвесторы могут пожелать иметь защиту лишь от одного из этих рисков. Для них был создан класс облигаций, известный под названием **класса целевого погашения (ЦПК)**.

Плановые облигации подвергают некоторые классы ОЗЗ меньшему риску предоплаты. Однако это может произойти лишь если перенаправленный риск предоплаты будет поглощаться в как можно большей степени другими классами, называемыми **облигации поддержки** или **облигации-спутники**. Облигации поддержки являются необходимым побочным продуктом при создании плановых слоев.

Пропорциональные облигации представляют пример наслаивания другого типа. Денежный поток из погашений в этих облигациях делится

пропорционально, но у таких облигаций могут быть другие правила оплаты процентов. Предположим, что СВК залоговых ценных бумаг*) равен 10 %, слой *B1* принимает на себя 40 % всей суммы, а слой *B2* — 60 %. Тогда при условии пропорциональной структуры для *B1* и *B2* можно подобрать много различных вариантов оплаты процентов, лишь бы процентные выплаты были неотрицательными и СВК не превышал 10 %. Купонные ставки даже могут быть плавающими. Одним из возможных вариантов будет иметь купон в 5 % для *B1* и 13,33 % для *B2*. Таким образом, были созданы облигации с купонами, которые оказывались меньше или больше, чем купоны исходных залоговых ценных бумаг. Облигации типа *B1* называются **синтетическими дисконтными ценными бумагами**, а типа *B2* — **синтетическими ценными бумагами с премией**. Экстремальным случаем будет, если по слою *B1* будут получать 99 % погашения и иметь 5 % купон, а по *B2* — получать только 1 % погашения и иметь 505 % купон. В действительности, полосы ПРО первого поколения приняли форму *B2* в июле 1986 г. [55].

У ПРО бывает либо **номинальная сумма** погашения, либо значимая сумма. Номинальная сумма представляет реальную сумму погашения, которая будет оплачена. «Номинальной» же она называется потому, что является очень маленькой, и это заставляет вводить чрезвычайно высокую купонную ставку. Именно такой случай и представляет вышеуказанный класс *B2* с 505 % купоном. Значимая сумма, наоборот, представляет сумму, на которую начисляются проценты. Владелец полосы ПРО не имеет права собственности ни на какую значимую сумму. И как только значимая сумма погашения окажется нулевой, никаких дальнейших выплат по ПРО сделано не будет.

30.2 Слои с плавающей ставкой

Одну из форм пропорциональных облигаций представляют «поплавки» и «обратные поплавки», чьи объединенные купоны не должны превосходить купон у залога. Поплавков — это класс, купонная ставка которого меняется так, как меняется выбранная ставка, а обратный поплавок представляет класс, купонная ставка которого меняется в направлении, противоположном изменениям выбранной ставки-ориентира. Если купон у обратного поплавка меняется на величину в x раз большую величины изменения выбранной ставки, то этот множитель x называется его **наклоном**. Поскольку проценты идут от закладных с фиксированной ставкой, то у поплавков на купон должна быть шапка. И аналогично, у купона обратного поплавка должен быть пол. Классы с плавающей ставкой были созданы в сентябре 1986 г.

*) Здесь под залогом (collateral) имеют в виду одну из безличных форм ЦБ, таких например, как полис страхования жизни или акции, исполняющие роль обеспечения для банковской ссуды. В определенном смысле такие безличные ЦБ воспринимаются скорее как вторичные ЦБ, а не первичные, как гарантия. — Прим. перев.

Предположим, что сумма погашения поплавка равна P_f , а обратного поплавка — P_i . Положим $\omega_f \equiv P_f/(P_f + P_i)$ и $\omega_i \equiv P_i/(P_f + P_i)$. Чтобы рассматриваемая структура была самоподдерживающей, купонные ставки поплавка c_f и обратного поплавка c_i должны удовлетворять равенству $\omega_f \times c_f + \omega_i \times c_i = c$, в котором c есть СВК, или

$$c_i = \frac{c - \omega_f \times c_f}{\omega_i}.$$

Ясно, что наклон в этом случае равен ω_f/ω_i . Чтобы исключить ситуацию, при которой купон у обратного поплавка становится отрицательным, шапка для поплавка должна быть меньше c/ω_f . В действительности же шапки C и полы F связаны равенством

$$F = \frac{c - \omega_f \times C}{\omega_i}.$$

Пример 30.2.1. Рассмотрим некоторое количество ОЗЗ, среди которых есть поплавок с исходной суммой \$ 64 млн. и обратный поплавок с суммой погашения в \$ 16 млн. Пусть купонная ставка у класса с плавающей ставкой (т.е. поплавка) есть $\text{LIBOR} + 0,65$, а у обратного поплавка — $42,4 - 4 \times \text{LIBOR}$. Наклон, таким образом, равен 4. А СВК для этих двух классов равен

$$\frac{64}{80} \times c_f + \frac{16}{80} \times c_i = 9 \%,$$

независимо от уровня ставки LIBOR. Следовательно, купонная ставка по базовым залоговым ценным бумагам, 9 %, сможет поддержать совокупные процентные платежи, которые должны пройти по этим двум классам. И если мы установим для обратного поплавка пол на уровне 0 %, то шапка у поплавка должна быть равна 11,25 %.

Другим вариантом ОЗЗ с плавающей ставкой является **суперпоплавок**, введенный в 1987 г. В обычном классе с плавающей ставкой купонная ставка двигается вверх или вниз точно так же, как и выбранная ставка, при ограничениях в виде шапок и полов. Купонная же ставка суперпоплавка меняется на величину, в несколько раз большую изменения ориентирной ставки, таким образом, умножая любые изменения значений этой ставки. Слои суперпоплавка являются медвежьими, поскольку их стоимость, вообще говоря, увеличивается при подъеме процентных ставок.

Предположим, что исходная ставка LIBOR равна 7 %, а купонная ставка суперпоплавка определяется формулой:

(исходная LIBOR — 40 базисных пунктов) + $2 \times$ (изменение ставки LIBOR).

В нижеследующей таблице показано, как суперпоплавок меняет свою купонную ставку в соответствии с изменениями ставки LIBOR. Для сравнения приведены и ставки обычного поплавка, меняющиеся как

ставка LIBOR плюс 50 базисных пунктов.

Изменение LIBOR (базисные пункты)	−300	−200	−100	0	+100	+200	+300
Суперпоплавков	0,6	2,6	4,6	6,6	8,6	10,6	12,6
Обычный поплавков	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5

Суперпоплавков приносит значительно более высокую доходность, чем традиционный, обычный поплавков, когда процентные ставки растут, и заметно более низкую доходность, когда процентные ставки падают или остаются неизменными. Мы можем убедиться в этом с помощью вышеприведенной таблицы, отмечая спред по сравнению со ставкой LIBOR у ставок двух типов поплавков в следующей таблице:

Изменение LIBOR (базисные пункты)	−300	−200	−100	0	+100	+200	+300
Суперпоплавков	−340	−240	−140	−40	60	160	260
Обычный поплавков	50	50	50	50	50	50	50

Упражнение 30.2.1. Повторите вычисления в тексте, используя следующую формулу:

$$(\text{исходная LIBOR} - 50 \text{ базисных очков}) + 1,5 \times (\text{изменение ставки LIBOR}).$$

Упражнение 30.2.2. Мотивируйте мнение, что максимальная купонная ставка, которая может выплачиваться по поплавку, выше той, которая была бы возможна без использования обратного поплавка.

30.3 Облигации ЗПК

Облигации ЗПК*), возможно, являются наиболее важной инновацией на рынке ОЗЗ [141]. Они были созданы при вычислении денежного потока у залоговых ценных бумаг при использовании двух скоростей предоплаты, быстрой и медленной. Рассмотрим ЗПК в полосе предоплат от 100 АГЦБ (нижний воротник) до 300 АГЦБ (верхний воротник). На рис. 30.1 показано погашение исходной суммы по двум воротникам. Отметим, что погашающие выплаты при сценарии с более высокой скоростью больше при первых годах и меньше при последних. Затемненная поверхность представляет график погашения, который гарантируется при любых возможных скоростях погашения между 100 % и 300 % АГЦБ. Этот график получается как минимум из двух графиков погашения, при нижнем и верхнем воротниках, соответственно. Называется этот график **графиком ЗПК**. На рис. 30.2 представлен генератор

*) Облигации из класса запланированного погашения являются одним из слоев в некоторых ОЗЗ, которые отличаются от других классов ОЗЗ в следующем: 1) у них есть расписание погашения с погасительным фондом, которое соблюдается пока скорость предоплаты по базовым закладным остается внутри широкого диапазона скоростей и 2) их способность производить погашение не подчинена другим классам. Таким образом, облигации ЗПК имеют гарантированный поток погашения всегда, за исключением особых ситуаций и потому они продаются с премией по сравнению с традиционными ОЗЗ. — Прим. перев.

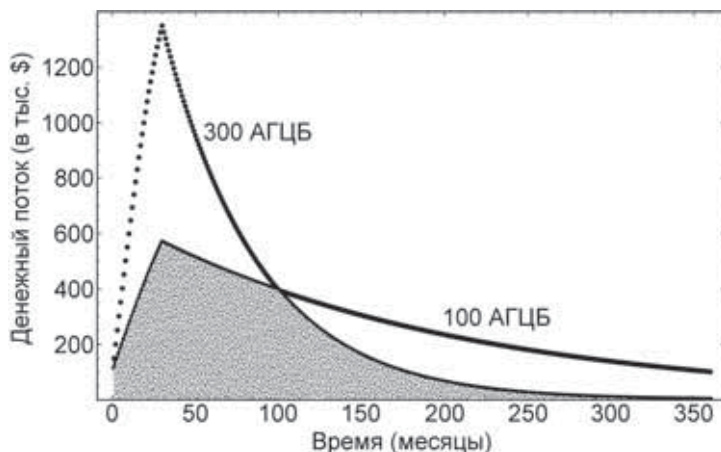


Рис. 30.1. График ЗПК. Базовыми являются 30-летние закладные с совокупной величиной ссуды в \$ 100 000 000 и купонной ставкой в 6 %. График ЗПК определяется погашающими выплатами при скоростях предоплаты 100 и 300 АГЦБ.

(линейного времени) денежного потока простой ОЗЗ, содержащей облигацию ЗПК и облигацию поддержки.

Строгое соблюдение графика погашения ЗПК отличается своей неукоснительностью от всех других облигаций. Следовательно, денежный поток облигаций из ЗПК известен до тех пор, пока поддерживающие его облигации не будут погашены полностью. Когда же это случится, зависит в большой степени от структуры ОЗЗ, таких ее элементов, как приоритеты и относительные размеры классов ЗПК и других облигаций. Например, относительно маленький ЗПК тяжелее разбить, чем большой ЗПК, при прочих равных условиях.

Если реальная скорость предоплаты составляет 150 АГЦБ, то схема погашения облигации ЗПК напоминает график ЗПК. Денежный поток поддерживающей облигации «плавает вокруг» денежного потока облигации ЗПК (см. рис. 30.3). Денежный поток не является ни последовательным, ни пропорциональным; в действительности облигация поддержки оплачивается *одновременно* с облигацией ЗПК. Поскольку погашающие выплаты могут выплачиваться в одно и то же время по разным классам, то структуры с облигациями ЗПК называются **ОЗЗ с одновременной оплатой**. При более низкой скорости предоплаты в 100 АГЦБ поток из погашений в первые годы у ОЗЗ значительно меньше. А поскольку основной поток погашения в первые годы идет на облигацию ЗПК, то погашающие выплаты по облигации поддержки откладываются и срок ее погашения расширяется. Однако процентных выплат по облигации поддержки выплачивается больше.

Если предоплата сдвигается вне полосы ЗПК, то соблюсти график погашения ЗПК, возможно, не получится. При скорости в 400 АГЦБ, например, денежный поток по облигации поддержки ускоряется. После того, как облигация поддержки оплачивается полностью, все оставши-

Генератор денежного потока ЗПК:

ввод: n, r ($r > 0$), $ECO[1..n]$, $АГЦБ_u$, $АГЦБ_l$, $B_o[0..1]$;
 действительные числа $P[1..n]$, $\bar{T}[1..n]$; // ДП пула
 действительные числа $ECO[1..n]$, $B[0..1][0..n]$, $P[0..1][1..n]$, $\bar{T}[0..1][1..n]$, P , I ;
 целые i ;
 вызвать алгоритм рис. 29.10 с $ECO[1..n]$ для $P[1..n]$ и $\bar{T}[1..n]$; // ДП пула
 вызвать алгоритм рис. 29.9 для $ECO[1..n]$ на основе $АГЦБ_u$;
 вызвать алгоритм рис. 29.10 с $ECO[1..n]$
 и разместить поток из погашений в $P[0][1..n]$;
 вызвать алгоритм рис. 29.9 для $ECO[1..n]$ на основе $АГЦБ_l$;
 вызвать алгоритм рис. 29.10 с $ECO[1..n]$
 и разместить поток из погашений в $P[1][1..n]$;
 для ($i = 1$ до n) { $P[0][i] := \min(P[0][i], P[1][i])$; }
 Нормировать элементы $P[0][1..n]$ так, чтобы сумма n элементов была равна 1;
 // График ЗПК по отношению к одному доллару исходной суммы
 $B[0][0] := B_o[0]$; $B[1][0] := B_o[1]$; // Исходные суммы
 для ($i = 1$ до n) { // Месяц i
 $P := P[i]$; $I := \bar{T}[i]$; // ПиП пула за месяц i
 $P[1][i] := \min(0, P - B_o[0] \times P[0][i], B[1][i-1])$;
 $B[1][i] := B[1][i-1] - P[1][i]$;
 $\bar{T}[1][i] := B[1][i-1] \times r$; // С облигацией поддержки закончено
 $P := P - P[1][i]$;
 $P[0][i] := P$;
 $B[0][i] := B[0][i-1] - P$;
 $\bar{T}[0][i] := I - \bar{T}[1][i]$; // С облигацией ЗПК закончено
 }
 вывод $B[\quad][\quad]$, $P[\quad][\quad]$, $\bar{T}[\quad][\quad]$;

Рис. 30.2. Генератор денежного потока ЗПК. В ячейке $ECO[\quad]$ хранятся реальные скорости предоплаты, скорости $АГЦБ_u$ и $АГЦБ_l$ формируют полосу ЗПК, а ставка по закладной r является ежемесячной. У пула есть n ежемесячных выплат, и предполагается, что его исходная сумма равна \$1. В ячейке B_o хранятся исходные значения взятых сумм по индивидуальным облигациям, в виде долей \$1; в частности, облигация 0 есть облигация ЗПК, облигация 1 является облигацией поддержки, и $B_o[0] + B_o[1] = 1$. В ячейке B хранятся остатки непогашенных ссуд, в P содержатся доли погашения (включая предоплату), а в $\bar{T}$ — оплата процентов. По соглашению ОЗЗ состоит из одного слоя ЗПК и одного слоя поддержки.

еся погашающие выплаты идут на облигации ЗПК, сокращая ее срок жизни. Для иллюстрации этого замечания служит рис. 30.4. Облигация поддержки таким образом, поглощает часть риска сжатия. И аналогично, если реальная скорость предоплаты упадет ниже нижнего воротника, то в последующие периоды облигации ЗПК имеют преимущество по оплате погашения. Это уменьшает риск расширения, который опять-таки поглощается облигацией поддержки.

Полоса ЗПК гарантирует, что если предоплата будет проходить с одной и той же постоянной скоростью из указанной полосы и останется в ней, то график погашения ЗПК будет соблюден. Однако этот график

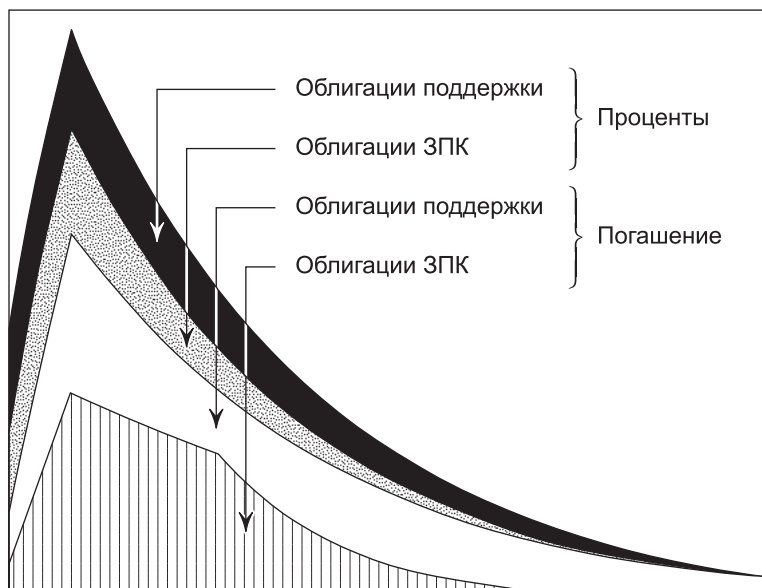


Рис. 30.3. Денежный поток облигации ЗПК при скорости 150 АГЦБ. Ставка по закладной равна 6 %, полоса ЗПК в пределах от 100 АГЦБ до 300 АГЦБ, а действительная скорость предоплаты равна 150 АГЦБ.

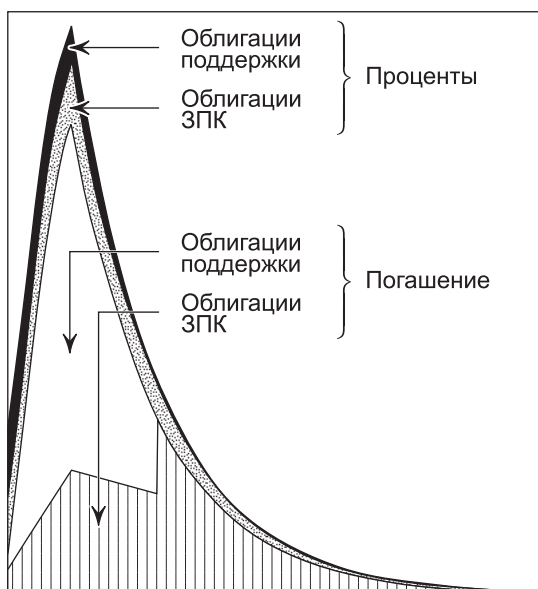


Рис. 30.4. Денежный поток облигации ЗПК при 400 АГЦБ. Ставка по закладной равна 6 %, полоса ЗПК в пределах от 100 АГЦБ до 300 АГЦБ, а действительная скорость предоплаты равна 400 АГЦБ.

может и не соблюдаться, даже если скорости предоплаты у залоговых ценных бумаг со временем меняются внутри полосы. Это происходит потому, что полоса, которая гарантирует соблюдение первоначального графика погашения ЗПК может расширяться и сжиматься, в зависимости от реальной предоплаты. Этот эффект известен под названием **снос ЗПК**.

Облигации ЗПК могут быть последовательно разделены с тем, чтобы образовать более узкие «структуры оплаты». Эти **последовательные ЗПК** сужают диапазон лет, в которые собственно и просходит погашение. Иллюстрацией к этому замечанию служит рис.30.5. Хотя все его облигации принадлежат одной и той же полосе, но реальный диапазон скоростей, в которых их графики будут соблюдаться может отличаться. Мы можем взять облигацию ОЗЗ и еще больше структурировать ее. Например, последовательные ЗПК можно разбить с использованием пропорциональной структуры, чтобы создать ЗПК с большим и маленьким купонами. Но можно также заменить второй слой в четырехслойной (ABCD) последовательной ОЗЗ на класс ЗПК, в котором погашение начинается, скажем, с четвертого года. Отметим, что слой С может начать принимать предоплату, которая окажется излишком по сравнению с графиком облигации ЗПК. И этот слой может даже быть погашен раньше слоя В.

Чтобы уменьшить риск предоплаты, денежный поток у самих облигаций поддержки также может быть разбит на части разной срочности.

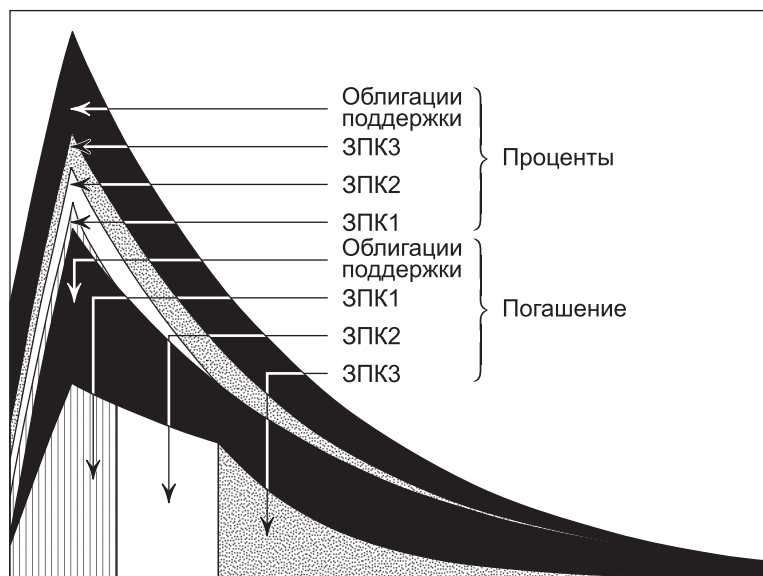


Рис. 30.5. Денежный поток последовательных облигаций ЗПК. Ставка по закладной равна 6%, полоса ЗПК в пределах от 100 АГЦБ до 300 АГЦБ, а действительная скорость предоплаты равна 150 АГЦБ. У трех классов облигаций ЗПК исходные погашаемые суммы одинаковы.

Облигации поддержки с графиком погашения, называемые также **облигации ЗПК II**, поддерживаются другими облигациями поддержки, но уже без графика. Облигации ЗПК в структуре, в которой присутствуют облигации уровня ЗПК II, называются облигациями ЗПК I.

Задание по программированию 30.3.1. Реализуйте генератор денежного потока, представленный на рис. 30.2.

Задание по программированию 30.3.2. Реализуйте генератор денежного потока для последовательных облигаций ЗПК.

30.4 Облигации ЦПК

Созданные в 1986 г., облигации ЦПК*), совсем как облигации ЗПК, имеют преимущество перед другими классами облигаций, у которых отсутствует график погашения номинала. Однако облигациям ЗПК присвоен более высокий приоритет, чем облигациям ЦПК. У облигаций ЦПК есть стандартные темпы предоплаты АГЦБ, при которых выполнение графика погашения гарантируется. Если темп предоплаты превышает заданный, то излишек сначала переносится на облигацию поддержки. Однако, если темп предоплаты меньше заданного, то срок погашения облигаций ЦПК удлиняется. Таким образом, облигации ЦПК предназначены для защиты против риска сжатия, но не от риска расширения.

30.5 Полосы ОЗЗ

Произвольный класс в структуре ОЗЗ может представлять собой **полосу ОЗЗ**. Полоса ОЗЗ, возникающая при отделении из облигаций ОЗЗ полосы ПРО, называется **облигации ПРО**. К примеру, такой механизм отделения создает **обратную ПРО** из обратного поплавка и **ЗПК ПРО** из облигации ЗПК. Облигации ПРО понижают величину купона у слоя ОЗЗ. Некоторые люди облигации ПРО называют **ПРОВками**, чтобы отличить их от полос ПРО, создаваемых из всех закладных залога. Класс ПОГ, который не является ни ЗПК, ни ЦПК, называется **супер ПОГ**. Подобно полосе ПОГ, такие облигации покупаются с заметной скидкой по отношению к номиналу и погашаются по номиналу. Когда при уменьшении процентных ставок предоплата ускоряется, то это приводит к «супер» эффективности, с чем и связано их название.

*) Облигации из класса целевого погашения (targeted amortization class = ТАС) были предложены как некоторый класс слоев какой-то ОЗЗ. С одной стороны, они похожи на облигации ЗПК в том, что в отличие от стандартных ОЗЗ, у них предусмотрен погасительный фонд. Однако, с другой стороны, они существенно отличаются от облигаций ЗПК. Так, если погашение в последних гарантируется, если скорости предоплаты по базовым закладным не выходят из некоторой полосы скоростей, то в расписании ЦПК предусмотрена лишь одна скорость предоплаты. При других же скоростях может случиться излишек погашения или его «недобор». В результате стабильность денежного потока у ЦПК выше, чем в классе стандартных ОЗЗ, но ниже, чем у облигаций ЗПК. Соответственно все эти облигации и торгуются на рынке. — Прим. перев.

30.6 Остатки

Все ОЗЗ содержат остаточные проценты, составленные из дополнительных денежных потоков от закладных залога плюс доходы от реинвестирования погашающих и процентных выплат, а также издержек. Этот дополнительный денежный поток называется **остатки ОЗЗ**. Остатки возникают отчасти потому, что кредитно-рейтинговые агентства для предоставления кредитного рейтинга AAA требуют, чтобы ОЗЗ были «сверх» обеспеченными: денежные потоки должны быть достаточными для того, чтобы выполнить все обязательства при любом сценарии предоплаты.

Другим источником остаточных сумм является доход от реинвестирования. Обычно имеется определенный промежуток времени между моментом получения выплат по залоговым ценным бумагам и моментом времени, когда они вручаются владельцам облигаций ОЗЗ. Например, если по закладной обеспечения (залоговых ценных бумаг) выплаты поступают ежемесячно, то у большинства ОЗЗ они выплачиваются ежеквартально или раз в полгода. Доверенное лицо поэтому имеет возможность реинвестировать денежный поток пула до наступления моментов распределения. Чтобы не усложнять расчет средств, необходимых для выполнения взятых обязательств, рейтинговые агентства требуют, чтобы доверенные лица выбирали относительно невысокую ставку реинвестирования. Но доверенные лица ОЗЗ оказываются способными реинвестировать по более высоким ставкам, и возникающая разница как раз и приводит к таким остаткам.

Дополнительная литература

С углубленным анализом ОЗЗ можно познакомиться по [14, 54, 161, 260, 325, 439, 758].

ЧАСТЬ VII

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ

31 Современная портфельная теория

В главе 31 обсуждается теория и практика управления портфелем. В частности, в ней представлена современная портфельная теория и ее следствие — модель оценки стоимости финансовых активов CAPM, рассмотрены арбитражная теория оценки стоимости АРТ и сравнительно недавно (примерно с 1980 г.) появившийся квантильный подход, называемый «Стоимость под риском» (CnP; Value at Risk = VaR).

Оказывается, что действительно важные и значительные гипотезы возникают из «предположений», которые являются чрезвычайно далеким от реальности описанием действительности.

Милтон Фридман,

Методология позитивной экономики

Эта глава начинается с изложения **теории среднего и дисперсии**, предназначенной для выбора портфеля. Сама теория представляет собой доступную схему количественной оценки риска и доходности при обмене активов. Затем мы исследуем структуру цен активов в состоянии равновесия. В результате познакомимся со знаменитой моделью оценки стоимости финансовых активов **CAPM (Capital Asset Pricing Model;** произносится «кап-м»). Модель CAPM является фундаментальной количественной моделью для измерения риска ценных бумаг. Но будут представлены и альтернативные модели оценки стоимости активов, основанные на факторном анализе. В заключение же речь пойдет о практически важной идее «стоимости под риском» (CnP; Value at Risk = VaR), используемой для управления риском актива.

31.1 Анализ риска и доходности с помощью среднего и дисперсии

Риск — это возможность того, что ожидаемая доходность не будет реализована. А в качестве меры риска¹ мы выбираем стандартное отклонение доходности актива. Для портфельного анализа такой выбор является стандартным. Хотя он и не лишен недостатков, а следовательно, и критических оценок, но у него есть и привлекательные статистические свойства. Считается, что инвесторы предпочитают более высокие ожидаемые доходности и выбирают дисперсии поменьше.

Предположим, что есть n активов со случайными доходностями $r_1, r_2, \dots, r_n$. И пусть ожидаемыми доходностями являются величины $\bar{r}_i \equiv E r_i$. Если из этих n активов сформировать портфель, используя веса $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (ω_i — доля стоимости актива i в общей стоимости всего портфеля), то доходностью такого портфеля будет величина

$$r = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n$$

со средним $\bar{r} = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i$ и дисперсией

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2,$$

где σ_i^2 представляет дисперсию случайной величины (с.в.) r_i , а σ_{ij} — ковариацию с.в. r_i и r_j . Отметим, что $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

Совокупный риск портфеля, если он измеряется дисперсией, состоит из 1) **систематического риска** $\sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$, связанного с корреляцией между доходностями активов портфеля и 2) **специального** или **несистематического риска** $\sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2$, связанного только с индивидуальными дисперсиями активов. Произвольная схема взвешивания $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ с условием $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ отвечает конкретному портфелю, если же в ней есть отрицательные веса, то это означает короткую продажу по соответствующему активу. Чтобы исключить ее, можно добавить условия $\omega_i \geq 0$. Портфель $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top$, который удовлетворяет всем оговоренным условиям, называется **допустимым или достижимым портфелем**.

Интересно отметить, что если доходности² активов некоррелированы, т. е. $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j$, то дисперсия доходности портфеля уменьшается до нуля при увеличении n при условии, что портфель хорошо диверсифицирован. Например, если $\omega_i = 1/n$, то

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2} \leq \frac{\sigma_{\max}^2}{n},$$

где $\sigma_{\max} \equiv \max_i \sigma_i$. Это свидетельствует о пользе диверсификации*). Однако диверсификация имеет свои пределы, если доходности активов коррелированы. Чтобы убедиться в этом предположим, что 1) все доходности имеют одинаковую дисперсию s^2 , 2) коэффициент корреляции доходностей является постоянной величиной z и потому $\sigma_{ij} = zs^2$ при $i \neq j$ и 3) $\omega_i = 1/n$. Тогда дисперсия доходности портфеля r равна

$$\sigma^2 = \sum_{i \neq j} \frac{zs^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{s^2}{n^2} = n(n-1) \frac{zs^2}{n^2} + \frac{s^2}{n} = zs^2 + (1-z) \frac{s^2}{n},$$

а эта величина не может оказаться меньше средней ковариации zs^2 .

Эти два примера показывают, что специальный и систематический риски при увеличении числа активов, включенных в портфель, ведут себя по-разному. Вообще говоря, если число активов в портфеле увеличивается и он оказывается хорошо диверсифицированным, то его специальный риск стремится к нулю, в то время как его систематический

*) Буквальный смысл английского слова diversification по отношению к портфелю из активов такой: получение портфеля, состоящего из как можно более «разнородных» активов. Не совсем понятно почему, но в английской литературе смысл этого слова часто смешивают с целью диверсификации, а она также проста: уменьшение риска портфеля. Скажем, добиться этого уменьшения можно, составляя портфель из активов, принадлежащих к разным категориям капиталовложений (акции, облигации, инструменты денежного рынка, драгоценные металлы и т.д.), разным отраслям промышленности или принадлежащих одному «взаимному фонду» с его широким диапазоном используемых акций. С математической же точки зрения основными способами диверсификации (в смысле уменьшения специального и, следовательно, общего риска) являются 1) увеличение числа входящих в портфель некоррелированных активов и 2) включение в портфель отрицательно коррелированных активов и побольше. Именно эффективность первого способа и была проиллюстрирована выше. — Прим. перев.

риск сходится к среднему всех ковариаций для всех пар активов портфеля. Марковиц назвал этот эффект **законом средней ковариации** [644]. Следовательно, систематический риск при диверсификации *не* исчезает.

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости, в которой горизонтальная ось представляет стандартное отклонение, а вертикальная — среднее значение доходности актива. Называется она **диаграммой среднего-стандартного отклонения**. Любой допустимый портфель со средней доходностью $\bar{r}$ и стандартным отклонением σ может быть представлен на этой диаграмме в виде точки $(\sigma, \bar{r})$. Она представляет **возможную комбинацию среднего и стандартного отклонения**. Множество допустимых точек образует **допустимое множество***). Вообще говоря, множество допустимых точек представляет собой некоторую сплошную область на плоскости, выпуклую слева. Таким образом, отрезок прямой линии, соединяющий любые две точки этого множества не пересекает его левую границу. Для заданного уровня средней доходности допустимая точка с наименьшей дисперсией является соответствующей точкой левой границы. Левая граница допустимого множества называется поэтому **множеством точек с минимальными дисперсиями**, а точка из этого множества, соответствующая наименьшей дисперсии, является **точкой с наименьшей дисперсией (ТНД)** (minimum-variance point = MVP). Большая часть инвесторов при заданном среднем значении обязательно выберет портфель с минимальной дисперсией. Такие инвесторы испытывают отвращение к риску, поскольку они стремятся минимизировать риск, измеряемый стандартным отклонением. И аналогично, большая часть инвесторов выберет портфель с наибольшим значением среднего при заданном уровне стандартного отклонения (т.е. максимально возможная точка на заданной вертикальной прямой). А следовательно, представлять интерес будет лишь подмножество множества точек с минимальными дисперсиями, лежащих выше ТНД. Достижимая комбинация среднего и стандартного отклонения является **эффективной**, если не найдется достижимых комбинаций с большим средним и не большей дисперсией, или с меньшей дисперсией при не большем среднем. Множество эффективных комбинаций называется **эффективной границей**, а соответствующие портфели — **эффективными портфелями**. См. рис. 31.1.

Приведем теперь математическую формулировку задачи по определению портфеля с минимальной дисперсией при заданном среднем

*) Выше внимательный читатель мог заметить, что слово «портфель» имеет двойной смысл. Однако полезно понимать, что для рассматриваемой теории это естественное свойство. В самом деле, с одной стороны, портфель — это вектор долей общей стоимости портфеля, потраченных инвестором на отдельные активы портфеля. Т.е. портфель является точкой в n -мерном пространстве, а допустимые портфели определяются условиями на эти доли, и, значит, представляют подмножество в нем. С другой стороны, в качестве инструмента для сравнения любых активов в данной портфельной теории выбирается двумерный вектор из его «оценок», т.е. среднего и среднеквадратического отклонения его доходности, как случайной величины. Но любой портфель является активом и потому его также можно представлять точкой так называемой «критериальной плоскости» его оценок. Тем самым, чтобы сравнивать портфели из допустимого множества в $\mathbb{R}^n$ нужно перейти к его образу на критериальной плоскости. — Прим. перев.

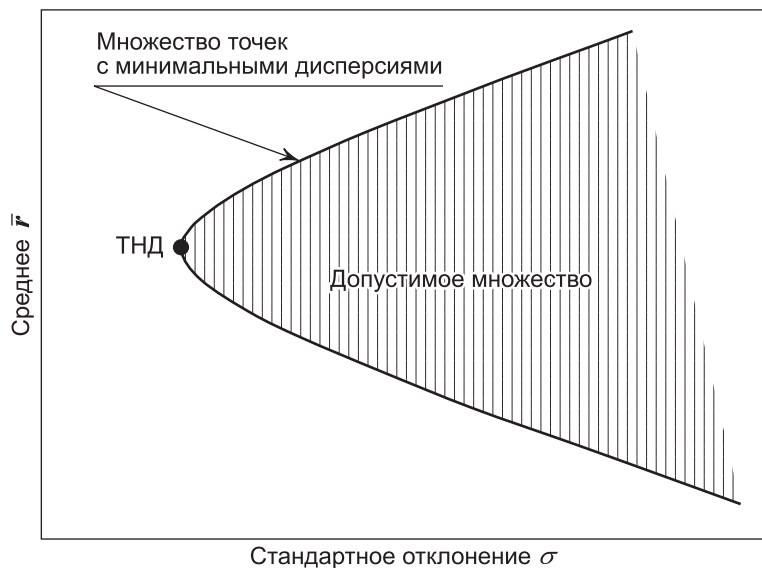


Рис. 31.1. Множества точек с минимальными дисперсиями, а также допустимых и эффективных. Точки во множестве с минимальными дисперсиями (лежащих выше точки ТНД) образуют эффективную границу, которая называется также **эффективным множеством**. Если короткие продажи не разрешены, то допустимое множество ограничено, поскольку его средние лежат в интервале $[\min_i \bar{r}_i, \max_i \bar{r}_i]$, а стандартные отклонения — в интервале $[0, \max_i \sigma_i]$ (см. упр. 31.1.3).

значении $\bar{r}$, которая принадлежит Марковицу и появилась в 1952 г. [641]. Ее можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Короткая продажа может быть исключена, если к имеющимся ограничениям добавить условие $\omega_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (множитель $1/2$ перед дисперсией упростит в дальнейшем анализ этой задачи). Приведенная выше **проблема Марковица** является задачей квадратичного программирования. Ее можно отнести к однопериодной теории капиталовложений, которая уточняет взаимоотношения между средним и дисперсией доходности³.

Проблему Марковица можно решить следующим образом. Вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^*$, являющийся решением проблемы Марковица, и два

*) Этот вектор будет эффективным портфелем, если его средняя доходность $g(\omega) \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i \geq g(\omega_m) = r_0$ где ω_m — вектор, на котором достигается минимум дисперсии $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$ при условии $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, т. е. портфель, соответствующий ТНД. — Прим. перев.

множителя Лагранжа λ и μ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Таким образом, имеем $n+2$ уравнений с $n+2$ неизвестными: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \lambda, \mu$. Поскольку уравнения линейны, то их легко можно решить (см. алгоритм на рис. 19.2). Если же целью является получение наибольшей средней доходности при заданном уровне дисперсии σ_p^2 , то возникает иная формулировка проблемы:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

И для ее решения потребуется использовать довольно сложную технику решения задач квадратичного программирования.

При рассмотрении проблематики со средними и дисперсиями можно придти к удивительным выводам. Предположим, что в наличии есть два $(n+2)$ -мерных решения вышеуказанной системы из $n+2$ линейных уравнений: 1) $(\omega_1, \lambda_1, \mu_1)$ с ожидаемой доходностью $\bar{r}_1$ и 2) $(\omega_2, \lambda_2, \mu_2)$ с ожидаемой доходностью $\bar{r}_2$. Прямая подстановка показывает, что векторы $(\alpha \omega_1 + (1-\alpha) \omega_2, \alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2, \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2)$ также представляют решение этой системы из $n+2$ уравнений, если в ней используется ожидаемая доходность $\alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha) \bar{r}_2$. Таким образом, комбинированному портфелю $\alpha \omega_1 + (1-\alpha) \omega_2$ также соответствует точка во множестве минимальных дисперсий. Чтобы использовать этот результат предположим, что ω_1 и ω_2 являются двумя различными портфелями, которым во множестве минимальных дисперсий соответствуют различные точки. Тогда, поскольку параметр α меняется в интервале $-\infty < \alpha < \infty$, то портфели, определяемые равенством $\alpha \omega_1 + (1-\alpha) \omega_2$, будут пробегать все множество минимальных дисперсий. И, в частности, если ω_1 и ω_2 являются эффективными портфелями, то они будут порождать все остальные эффективные портфели. Это утверждение называется **теоремой двух капиталовложений**. Поэтому все инвесторы, разыскивающие эффективные портфели, могли бы рассматривать инвестиции лишь в комбинацию этих двух пакетов акций (т.е. капиталовложений), вместо вложения денег в индивидуальные акции. Этот вывод основывается среди прочего на предположениях, что каждый инвестор интересуется лишь средними и дисперсиями, что каждый из них одинаковым образом оценивает параметры (средние, дисперсии и ковариации), что короткая продажа разрешена, а также, что рассматривать вашу ситуацию как однопериодную возможно.

Упражнение 31.1.1. Запишите задачу определения портфеля с минимальной дисперсией и заданной средней доходностью в матричной форме.

Упражнение 31.1.2. Постройте портфель с нулевым риском из двух активов с полной отрицательной корреляцией и в ситуации без коротких продаж.

Упражнение 31.1.3. Пусть $C \equiv (\sigma_{ij})$ — положительно определенная матрица.

1) Докажите, что величина $\max_i \sigma_{ii}$ является максимальным значением функции $\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$ при ограничениях $\sum_i \omega_i = 1$ и $\omega_i \geq 0$.

2) Что можно сказать о минимальном значении этой же функции при тех же ограничениях? Можно предполагать, что суммы элементов всех строк матрицы C^{-1} неотрицательны.

Упражнение 31.1.4. Пусть $P(t)$ обозначает цену актива в момент t . Определим величину $r(T) \equiv (P(T)/P(0)) - 1$ как доходность за период владения в периоде длины T , а величину $r_c(T) \equiv \ln(P(T)/P(0))$ как соответствующую ей доходность непрерывного начисления за тот же период. Выведите соотношения между средним и дисперсией с.в. $r(T)$ и $r_c(T)$ в предположении, что цены активов логнормально распределены.

Упражнение 31.1.5. Рассмотрим портфель P из n активов, стоимость каждого из которых описывается независимыми процессами геометрического броуновского движения с одинаковыми средним и дисперсией, $dS_i/S_i = \mu dt + \sigma dW_i$. Вес каждого актива в портфеле одинаков и равен $1/n$. Покажите, что ожидаемая доходность такого портфеля $E(\ln(P(t)/P(0)))/t$ превосходит ожидаемую доходность любого индивидуального актива $E(\ln(S_i(t)/S_i(0)))/t$ на величину $(1 - 1/n)\sigma^2/2$ (таким образом, волатильность не является синонимом риска).

31.1.1 Использование безрискового актива

Доходность безрискового актива совершенно определенная; ее волатильность равна нулю. Ковариация безрисковой доходности с доходностью любого рискованного актива, таким образом, равна нулю. Присутствие безрискового актива в портфеле означает кредитование или заимствование денежных сумм по безрисковой ставке: кредитование означает длинную позицию по активу, а заимствование — короткую. Ясно, что безрисковый актив должен быть бескупонной облигацией со сроком погашения, совпадающим с периодом вложения денег в портфель.

Если безрисковый актив в портфеле присутствует, то форма допустимого множества меняется весьма заметно. Пусть r_f означает безрисковую доходность. Начнем с допустимого множества, определяемого *рискованными* активами. Затем для каждого портфеля из этого множества, скажем портфеля A , образуем комбинацию с безрисковым активом. Получаемые комбинации составят бесконечный луч, исходящий из безрисковой точки $(0, r_f)$ и проходящий через рискованый портфель A (рис. 31.2). Подобный луч имеется для каждого такого портфеля из допустимого множества. Совокупность таких лучей образует допустимое множество треугольного типа. Если заимствование безрискового актива не разрешается, то мы можем присоединить к исходному допустимому множеству лишь отрезок прямой между безрисковым активом и точкой-активом в первоначальном допустимом множестве, но не можем продлить эту линию дальше. Включение этих отрезков прямых ведет к образованию допустимого множества

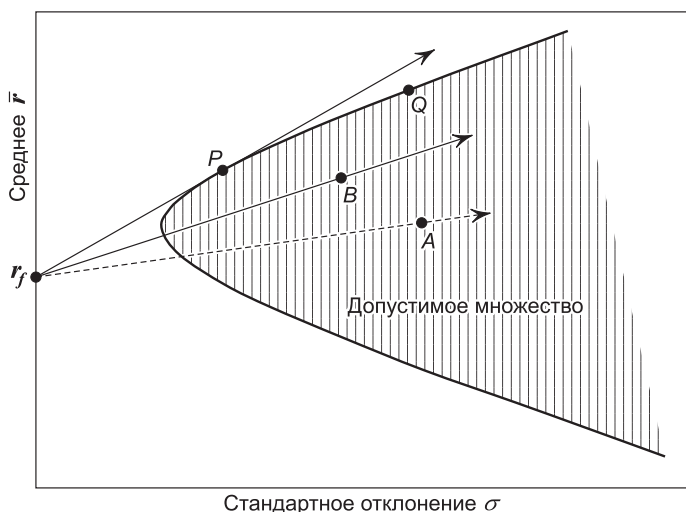


Рис. 31.2. Эффективная граница для ситуации с безрисковым кредитованием и заимствованием. Криволинейный треугольник представляет допустимое множество, определенное по рисковым активам. Отрезок прямой между точками r_f и A состоит из комбинаций портфеля A и кредитования, т.е. покупки безрискового актива в некотором объеме, в то время как часть этой прямой вне точки A состоит из портфеля A и заимствования, т.е. из включения в портфель безрискового актива, взятого в долг. Уравнение этой прямой имеет вид $y = r_f + ((\bar{r}_A - r_f)/\sigma_A)\sigma$. Но то же самое верно в отношении любого рискового портфеля, скажем, B , P и Q . Луч, проходящий через касательный портфель P и определяет эффективную границу.

с прямолинейной «передней» частью и округлым верхом: см. кривую, отмеченную символами r_f , P , Q на рис. 31.2. Отметим, что инвесторы, у которых есть некоторое количество безрискового актива, оставшиеся деньги вкладывают в касательный портфель P , как самый лучший для себя вариант, и потому соответствующий портфель оказывается на отрезке прямой, соединяющем точки $(0, r_f)$ и P .

Особый портфель, обозначаемый через P на рис. 31.2, представляет точку касания допустимого множества и луча, выходящего из точки $(0, r_f)$. Если возможно не только кредитование, но и заимствование безрискового актива, то эффективной границей будет весь этот луч*). A , значит, любой эффективный портфель можно представить в виде линейной комбинации точки P и безрискового актива, т.е. точки $(0, r_f)$. Таким образом, мы «доказали» **теорему одного капиталовложения** Тобина, которая утверждает, что существует единственный комплект рисковых активов, такой, что любой эффективный портфель можно представить как комбинацию этого комплекта и безрискового актива.

*) Конечно, если обе ставки, кредитования и заимствования, одинаковы и равны r_f . А как известно, ставка по займу обычно больше ставки по кредиту, т.е. скажем, давать банку деньги в долг приходится по меньшей ставке, чем брать. — Прим. перев.

Определить точку касания P с вычислительной точки зрения несложно. При любой точке $(\sigma, \bar{r})$ из допустимого множества, определяемого с помощью рисковых активов, мы можем провести прямую линию через эту точку и безрисковый актив, как на рис.31.2. Ее наклон, очевидно, равен $\theta \equiv (\bar{r} - r_f)/\sigma$, и эта величина имеет финансовую интерпретацию: она представляет дополнительную доходность на единицу риска. Касательный портфель является допустимым портфелем, на котором параметр θ принимает максимально возможное значение. Присвоим веса $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ n рисковым активам таким образом, чтобы $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Вес безрискового актива в касательном портфеле равен нулю. Как следствие, и учитывая, что $\bar{r} - r_f = \sum_{i=1}^n \omega_i (\bar{r}_i - r_f)$ получаем, что

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (\bar{r}_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j}}.$$

Если далее производные функции θ по всем ω_j приравнять нулю, то получим уравнения

$$\lambda \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \omega_i = \bar{r}_j - r_f, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

в которых $\lambda \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i (\bar{r}_i - r_f) / \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j \right) = (\bar{r} - r_f) / \sigma^2$. Проводя замены $v_i = \lambda \omega_i$ при всех i можно упростить запись полученной системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{ij} v_i = \bar{r}_j - r_f, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (31.1)$$

Решая ее, находим сначала величины v_i , а затем ω_i , полагая $\omega_i = v_i / \left(\sum_{j=1}^n v_j \right)$.

Отрицательные ω_i означают, что актив с номером i нужно продавать из короткой позиции.

Если безрисковое кредитование и заимствование не разрешается, то вся эффективная граница может быть определена из решения системы (31.1) при всех возможных безрисковых ставках, поскольку эффективный портфель является касательным портфелем для какого-то луча, выходящего из *некоторого* безрискового актива (взгляните еще раз на рис.31.2). Однако есть путь и получше. Заметим, что величины v_i линейны относительно r_f ; другими словами, $v_i = c_i + d_i r_f$ при некоторых постоянных c_i и d_i . Найдти эти величины c_i и d_i можно, разрешая систему (31.1) относительно v_i при двух различных значениях r_f , скажем r'_f и r''_f . Полученные решения v'_i и v''_i будут соответствовать двум различным эффективным портфелям. А затем решаем уравнения

$$v'_i = c_i + d_i r'_f, \quad v''_i = c_i + d_i r''_f$$

относительно переменных c_i и d_i при всех i . Считая величину r_f пере-

менной и меняя ее, мы сможем определить всю границу. Т. е. получится именно так, как утверждает теорема о двух капиталовложениях, что двух эффективных портфелей достаточно, чтобы определить всю границу.

Упражнение 31.1.6. Что в теореме об одном капиталовложении говорилось бы об объемах сделок?

31.1.2 Альтернативные модели по выбору эффективного портфеля

В модели Блэка на выбор портфеля накладывается одно единственное условие $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. В стандартной же модели по выбору портфеля*) короткие продажи запрещены и потому ограничения таковы:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ограничения на суммы, которые могут быть вложены в произвольную ценную бумагу (ЦБ) могут возникать в силу каких-то положений закона или выбранной тактики. Чтобы их учесть, можно дополнить стандартную модель верхними границами:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \omega_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В модели Тобина—Шарпа—Линтнера портфели выбираются исходя из ограничений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Переменная ω_{n+1} здесь представляет сумму, отданную в кредит (или взятую займы, если величина ω_{n+1} отрицательна). Конечно, при этом ковариации $\sigma_{n+1,i}$ равны нулю при всех $i = 1, 2, \dots, n+1$. Ограниченное заимствование может быть промоделировано добавлением ограничения $\omega_{n+1} \leq u_{n+1}$. В общей же модели выбора портфеля портфель называется допустимым, если он удовлетворяет ограничениям

$$A\omega = b, \quad \omega \geq 0,$$

где A — произвольная матрица размерности $m \times n$, а b — некоторый m -мерный вектор [642].

Упражнение 31.1.7. Две модели выбора портфеля строго эквивалентны, если у них одно и то же множество возможных комбинаций «среднее — стандартное отклонение». Докажите, что любая модель, в которой нет условия неотрицательности компонент вектора ω , является строго эквивалентной некоторой общей модели по выбору портфеля, в которой эти ограничения накладываются.

*) Эту модель еще называют моделью Марковица. — Прим. перев.

31.2 Модель оценки стоимости финансовых активов

Представим себе мир, в котором все инвесторы оптимизируют свои портфели в смысле среднего-дисперсии и разделяют одинаковые ожидания в отношении ожидаемых доходностей, дисперсий и ковариаций. Предположим также, что операционные издержки равны нулю. По теореме одного капиталовложения каждый инвестор будет использовать некоторое количество безрискового актива и один и тот же портфель из рискованных активов. Поскольку все рискованные активы должны у кого-то находиться, то отсюда немедленно вытекает, что каждый инвестор владеет **рыночным портфелем** в состоянии равновесия, причем независимо от степени своего отвращения к риску. Рыночный портфель, который состоит из всех *рисковых* активов, является эффективным (см. упр. 31.2.1)⁴.

При условии, что рыночный портфель является единственным эффективным комплектом из рискованных активов, эффективная граница состоит из единственной прямой линии, исходящей из безрисковой точки и проходящей через рыночный портфель. Для определения эффективной границы никаких сложных вычислений не потребуется. Линия эта называется **рыночной линией капитала** (Capital Market Line = CML), и представляет она зависимость между ожидаемой доходностью и риском для эффективных портфелей (см. рис. 31.3). Цены должны оказываться такими, чтобы эффективные активы и портфели лежали на этой прямой.

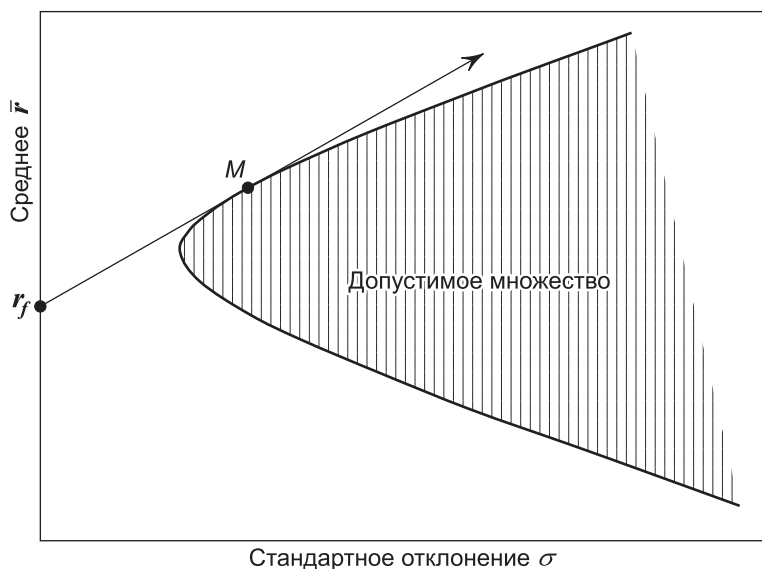


Рис. 31.3. Рыночная линия капитала. Точка M означает рыночный портфель. Точки внутри криволинейного треугольника представляют допустимое множество, определяемое рискованными активами. Инвесторы могут выбирать уровень риска, изменяя долю, которую безрисковый актив составляет в их портфеле; например, риск можно увеличить, включая в портфель отрицательное количество безрискового актива.

Индивидуальные же рисковые ЦБ и неэффективные портфели, наоборот, должны лежать ниже этой линии. Это и есть знаменитая Модель оценки стоимости финансовых активов САРМ Шарпа [796], предложенная им в 1964 г.)⁵, которую затем независимо открыли Линтнер [605] и Моссин [680]. Эта модель имеет фундаментальное значение для оценки стоимости рисковых активов в положении равновесия.

Рыночная линия капитала утверждает, что

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma,$$

где $\bar{r}_M$ и σ_M являются ожидаемым значением и стандартным отклонением рыночной доходности, а $\bar{r}$ и σ являются ожидаемым значением и стандартным отклонением доходности любого эффективного актива. Заметим, что, если риск увеличивается, то ожидаемая доходность также должна увеличиваться. Наклон рыночной линии капитала составляет величину $(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M$, которая называется **рыночной ценой риска**. Она показывает насколько ожидаемая доходность эффективного портфеля должна увеличиться, если стандартное отклонение этой доходности возрастет на одну единицу. Рыночная цена риска известна также под названием **отношение Шарпа** [798].

Рыночная линия капитала связывает ожидаемую доходность эффективного портфеля с его стандартным отклонением, но она не показывает как ожидаемая доходность отдельного актива связана с его индивидуальным риском. Эта связь приводится в следующей теореме.

Теорема 31.2.1. *Если рыночный портфель M эффективен, то ожидаемая доходность $\bar{r}_j$ любого актива j удовлетворяет равенству $\bar{r}_j - r_f = \beta_j(\bar{r}_M - r_f)$, в котором $\beta_j \equiv \sigma_{j,M}/\sigma_M^2$ и $\sigma_{j,M} \equiv \text{Cov}(r_j, r_M)$.*

Величина β_j называется **бета** актива. Бета актива — это все, что нужно знать о характеристиках его риска. Значение $\bar{r}_j - r_f$ является ожидаемой дополнительной доходностью актива i . Она представляет ту величину, на которую ожидаемая доходность превзойдет безрисковую ставку. И аналогично, величина $\bar{r}_M - r_f$ представляет ожидаемую дополнительную доходность рыночного портфеля. Модель САРМ утверждает, что ожидаемая дополнительная доходность актива пропорциональна ожидаемой дополнительной доходности рыночного портфеля, причем коэффициентом пропорциональности является бета. Именно бета, а не волатильность, является мерой риска ценной бумаги, а метод завоевания рынка сводится к принятию большего риска, т.е. к выбору большей бета. В таблице на рис. 31.4 приведены значения бета для некоторых корпораций США. Мы можем оценить бета, исследуя регрессию (зависимость) дополнительной доходности актива относительно дополнительной доходности рынка.

Формула модели САРМ из теоремы 31.2.1 представляет собой линейную зависимость между бета и ожидаемой доходностью любого актива, независимо от того, является ли он эффективным или нет. Если эту зависимость представить на диаграмме бета—ожидаемая доходность (т.е. в прямоугольной системе координат, в которой горизонтальную ось про-

Рис. 31.4. Коэффициент бета некоторых корпораций США. В 2002 г. произошло слияние компаний America Online и Time-Warner. Источник: бюллетень Standard & Poor's от 8 мая 2000 г.

Компания	Бета	Компания	Бета
America Online	2,43	Intel	1,03
AT&T	0,82	Merck	0,87
Citigroup	1,68	Microsoft	1,49
General Motors	1,01	Sun Micro.	1,19
IBM	1,07	Wal-Mart	1,20

бегают параметр бета, а вертикальную — ожидаемая доходность), то соответствующая прямая будет называться **рыночной линией ценной бумаги**. Всем активам отвечает какая-то точка рыночной линии ценной бумаги; в частности, рынку отвечает значение $\beta = 1$.

По существу та же аргументация остается в силе, даже если безрисковый актив отсутствует (см. упр. 31.2.12). Роль безрисковой доходности в этом случае исполняет точка пересечения оси ординат, т. е. оси ожидаемой доходности, прямой линией из рис. 31.3.

Упражнение 31.2.1. Проверьте, что рыночный портфель эффективен.

Упражнение 31.2.2. Докажите формулу из теоремы 31.2.1, представляющую рыночную линию ценной бумаги.

31.2.1 Дополнительные сведения о модели CAPM

Бета портфеля определяется как взвешенное среднее бета отдельных активов данного портфеля. А именно, предположим, что в портфеле присутствует n активов с весами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Доходность такого портфеля есть $r \equiv \sum_i \omega_i r_i$. Поэтому $\text{Cov}(r, r_M) = \sum_i \omega_i \sigma_{i,M}$. А отсюда немедленно вытекает, что бета портфеля равна $\sum_i \omega_i \beta_i$.

Запишем доходность актива i в виде

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i, \quad (31.2)$$

где $E\varepsilon_i = 0$ в силу CAPM*). И найдем ковариацию с. в. r_i и r_M , используя равенство (31.2):

$$\sigma_{i,M} = \beta_i \sigma_M^2 + \text{Cov}(\varepsilon_i, r_M) = \sigma_{i,M} + \text{Cov}(\varepsilon_i, r_M).$$

Следовательно, $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_M) = 0$. Кроме того, если из равенства (31.2) вычесть его математическое ожидание (т. е. рыночную линию ЦБ), возвести в квадрат и взять математическое ожидание, то получим, что

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + D\varepsilon_i. \quad (31.3)$$

Важно отметить, что тем самым совокупный риск σ_i^2 разбивается на две части. Первая из них, $\beta_i^2 \sigma_M^2$, представляет систематический риск. Этот риск, связанный с риском рынка в целом, называется также **рыночным**

*) Имеется в виду рыночная линия ценной бумаги из теоремы 31.2.1. Равенство же (31.2) представляет собой частный случай так называемой рыночной модели (market model), т. е. равенства $r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i$. — Прим. перев.

риском. Его нельзя уменьшить с помощью диверсификации, поскольку каждый актив с ненулевой бета содержит в себе этот риск. Второе слабое, $D\epsilon_i$ представляет специальный риск. Этот риск некоррелирован с рынком и может быть уменьшен с помощью диверсификации. Только систематический риск имеет какое-то отношение к доходности.

Рассмотрим актив на рыночной линии капитала с коэффициентом бета, равным β и ожидаемой доходностью, равной $\bar{r} = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)$. Этот актив, который является эффективным, должен быть эквивалентным некоторой комбинации рыночного портфеля и безрискового актива. Следовательно, его стандартное отклонение равно $\beta\sigma_M$, из чего вытекает, что у него есть только систематический риск, но нет специального риска в силу (31.3). Рассмотрим далее другой актив с тем же бета β . В соответствии с CAPM его ожидаемая доходность должна быть равна $\bar{r}$. Однако, если у него есть специальный риск, то он не будет принадлежать рыночной линии капитала. Таким образом, специальный риск представляет расстояние, на котором портфель находится ниже рыночной линии капитала.

Хотя и формулируемая в терминах ожидаемых доходностей, модель CAPM может быть использована и для оценки стоимости. Предположим, что некоторый актив куплен по известной цене P и позднее продан по цене Q . Доходность от такой сделки будет равна $r \equiv (Q - P)/P$. Но в соответствии с CAPM ($\bar{Q} = EQ$)

$$\frac{\bar{Q} - P}{P} = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f),$$

где величина β и есть бета актива. Разрешая это уравнение относительно P получаем, что

$$P = \frac{\bar{Q}}{1 + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)}. \quad (31.4)$$

А, следовательно, модель CAPM можно использовать для того, чтобы понять, является ли цена акции «справедливой». Отметим, что процентная ставка с учетом риска равна $r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)$, а не r_f .

Уравнение (31.4) может принять и еще одну удобную форму. Значение бета можно записать в виде

$$\beta = \frac{\text{Cov}(r, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{Cov}((Q/P) - 1, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{Cov}(Q, r_M)}{P\sigma_M^2}.$$

Подставляя это значение в формулу для оценки стоимости (31.4) и преобразуя полученное выражение получаем, что

$$1 = \frac{\bar{Q}}{P(1 + r_f) + \text{Cov}(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M^2}.$$

Определяя отсюда P , приходим к равенству

$$P = \frac{1}{1 + r_f} \left\{ \bar{Q} - \frac{\text{Cov}(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2} \right\}, \quad (31.5)$$

которое показывает, что именно ковариация актива с рынком имеет отношение к оценке стоимости.

Упражнение 31.2.3. В отношении актива, некоррелированного с рынком (т.е. с нулевым бета), CAPM утверждает, что его ожидаемая доходность совпадает с безрисковой ставкой, даже если этот актив и очень рискован, поскольку имеет большое стандартное отклонение. Почему?

Упражнение 31.2.4. Если у актива отрицательное бета, то модель CAPM утверждает, что его ожидаемая доходность должна быть меньше безрисковой ставки, даже если этот актив и очень рискован, поскольку имеет большое стандартное отклонение. Почему? Например, в гл. 24 мы видели, что полосы ПРО «зарабатывают» меньше безрисковой ставки, несмотря на свою высокую рискованность.

Упражнение 31.2.5. Почему все портфели с одинаковой ожидаемой доходностью, но с различными полными рисками должны попасть в одну и ту же точку на рыночной линии ценной бумаги?

Упражнение 31.2.6. 1) Проверьте, что формула (31.4) для оценки стоимости линейна (т.е. цена суммы двух активов равна сумме их цен, а цена составного актива является такой же составной функцией цен элементов).

2) Выведите те же утверждения из принципа безарбитражности.

31.2.2 Страхование портфеля

Страхование портфеля является торговой стратегией, которая защищает портфель от падений рынка, но не лишает его возможности участвовать в его работе, когда она «оживляется» — словом, представляет собой защитный пут [772]. Использование опционов пут для защиты портфеля от падения (его стоимости) ниже определенного уровня является простым примером *статического* страхования портфеля. Альтернативами статическим схемам можно считать динамические стратегии, которые создают искусственные опционы из акций и облигаций. Динамические стратегии, однако, связаны со значительными операционными издержками. В сравнении с базовыми активами, фьючерсами можно торговать при заметно более низких операционных издержках, добываясь желаемой смеси рисковых и безрисковых активов⁶.

Пусть значение индекса обозначено через S и стоимость любого опциона пут определяется произведением $\$100$ на индекс. Рассмотрим диверсифицированный портфель с бета, равным β . Тогда, если для каждой суммы из портфеля, равной $100 \times S$ долларам, покупается один опцион пут с ценой исполнения X , то стоимость портфеля будет защищена от падения индекса ниже пола X . Наша цель состоит в том, чтобы реализовать этот защитный пут. Если же более конкретно, то чтобы защитить каждый доллар из портфеля от падения его цены ниже W в момент T , мы покупаем β контрактов по опциону пут для каждой суммы в $100 \times S$ долларов из портфеля. Отметим, что общее число купленных опционов пут будет равно величине $\beta V / (S \times 100)$, где V — текущая стоимость портфеля. Цена исполнения X совпадает со значением индекса, когда стоимость портфеля достигает величины W .

Пусть r — процентная ставка, а q — дивидендная доходность. Предположим, что индекс принимает значение S_T в момент T . Дополнительная

доходность по индексу сверх безрисковой ставки равна $(S_T - S)/S + q - r$, а дополнительная доходность портфеля сверх безрисковой ставки есть величина $\beta((S_T - S)/S + q - r)$. Доходность портфеля, следовательно, равна $\beta[(S_T - S)/S + q - r] + r$, а увеличение стоимости портфеля без учета дивидендов есть $\beta[(S_T - S)/S + q - r] + r - q$. Следовательно, стоимость портфеля на доллар исходной суммы равна

$$1 + \beta \left(\frac{S_T - S}{S} + q - r \right) + r - q = \beta \frac{S_T}{S} + (\beta - 1)(q - r - 1). \quad (31.6)$$

Выберем X равным такому S_T , при котором выражение (31.6) станет равным W ; другими словами, положим

$$X = [W + (q - r - 1)(1 - \beta)] \frac{S}{\beta}.$$

В силу (31.6) стоимость портфеля меньше W на $\beta(\Delta S/S)$ тогда и только тогда, когда значение индекса меньше X на $\beta(\Delta S/S)(S/\beta) = \Delta S$. Исполнение опциона, следовательно, приводит к поступлению соответствующей денежной суммы

$$\beta \frac{\Delta S}{100 \times S} \times 100 = \beta \frac{\Delta S}{S}.$$

Стоимость стратегии равна $P\beta V/(S \times 100)$, где P означает премию по опциону пут с ценой исполнения X .

Ясно, что более высокая цена исполнения обеспечивает более высокий пол в WV долларов по более высокой цене. Это взаимное урегулирование стоимости страхования и уровня защиты является типичным при любом страховании. У совокупной стоимости пол равен

$$WV - \frac{P\beta V}{S \times 100}.$$

Пример 31.2.2. Начнем со значений $S = 1000$, $\beta = 1,5$, $q = 0,02$ и $r = 0,07$ при периоде в 1 год. Мы имеем следующие соотношения между значением индекса и стоимостью портфеля на доллар первоначальной стоимости.

<i>Значение индекса через год</i>	1200	1100	1000	900	800
<i>Стоимость портфеля через год</i>	1,275	1,125	0,975	0,825	0,675

Например, если начальная стоимость портфеля равна \$1 млн., а застрахованная стоимость составляет \$0,825 млн., то следует купить $(1,5 \times 1\,000\,000)/(100 \times 1000) = 15$ контрактов на опционы пут с ценой исполнения в 900. $\triangleleft$

Упражнение 31.2.7. Просчитайте ситуацию примера 31.2.2 для значений $S = 1000$, $\beta = 2$, $q = 0,01$ и $r = 0,05$.

Упражнение 31.2.8. Рассмотрим портфель стоимостью, равной \$1000 умноженным на значение индекса S&P 500 и с бета, равной 1,0 про-

тив индекса. Объясните, почему покупка 10 индексных опционов пут с ценой исполнения 1000 страхует от падения стоимости портфеля ниже \$1 000 000.

Упражнение 31.2.9. Менеджер взаимного фонда считает, что рынок останется относительно спокойным в ближайшем будущем и выписывает покрытый индексный опцион колл. Проанализируйте его, следуя тем же соображениям, что были использованы в случае защитного пута.

Упражнение 31.2.10. Банк предлагает следующий финансовый продукт менеджеру взаимного фонда, планирующего купить в ближайшем будущем определенные акции. Если цена акции будет выше \$50, то менеджер купит ее за \$50. Если же цена упадет ниже \$40, то менеджер купит ее за \$40. Ну а если цена окажется между этими границами, то покупка состоится по текущей цене. Охарактеризуйте лежащие в основе такой сделки опционы.

31.2.3 Критические замечания

Стреляйте в этих консультантов, торгующих моделью CAPM в розницу.
Людовик Лавенштайн [620]

Хотя модель CAPM широко используется на практике [592], но многие из ее предположений противоречат друг другу. В ней предполагается, что либо доходности активов распределены нормально, либо что функции полезности квадратичны. Более того, в ней считается, что инвесторов беспокоят лишь среднее и дисперсия доходности, из чего следует, что для них «риск» повышения или понижения доходности одинаково неприятен. В действительности же, строго говоря, доходности портфеля не являются нормально распределенными, представляется также, что инвесторы различают между верхними и нижними рисками. В теории используются нереалистичные предположения, скажем, что каждому доступна одна и та же информация о доходностях всех активов и их ковариациях. Но даже если бы такое предположение и было правильным, было бы нелегко получить точные данные. Как правило, дисперсии и ковариации можно оценить достаточно точно, но не ожидаемые доходности (см. пример 20.1.1). К несчастью ошибки в определении средних имеют более важное значение, чем ошибки в дисперсиях, а ошибки в определении дисперсий более значимы, чем ошибки в ковариациях [204]. Предположение о том, что все инвесторы делают капиталовложения на один и тот же срок, также редко выполняется на практике.

В модели CAPM предполагается, что все активы можно купить и продать на рынке. Причем среди активов есть не только ценные бумаги, но и реальная собственность, наличные и даже человеческий капитал. Поскольку рыночный портфель трудно определить, то в реальной жизни в качестве рыночного портфеля используются его заменители [799]. При этом плохо то, что различные варианты приближенного рыночного портфеля приводят к различным параметрам бета у одной и той же ценной бумаги (см. упр. 31.2.12). Наконец, представляется,

что единственный фактор риска не является достаточным для описания «перекрестной зоны» ожидаемых доходов [145, 336, 424, 635, 636, 666].

Упражнение 31.2.11. Почему 1-летние прогнозы аналитика по ценным бумагам хуже, чем 5-летние?

Упражнение 31.2.12. Докажите, что использование произвольного эффективного портфеля из рисковых активов в качестве приближения к рыночному портфелю приведет к линейной связи между ожидаемыми доходностями и коэффициентами бета, совсем как в случае CAPM.

31.3 Факторные модели

В теории средних и дисперсий требуется оценивать много параметров: n ожидаемых доходностей активов и $n(n+1)/2$ их ковариаций. Но к счастью доходности активов часто можно объяснить с помощью намного меньшего числа базовых источников случайности, называемых факторами. Соответствующие факторные модели как раз и описывают связи между факторами и отдельными доходностями. В этом разделе представлена факторная модель процесса получения дохода для оценки стоимости активов, называемая **арбитражная теория оценки стоимости** (Arbitrage Pricing Theory = APT).

31.3.1 Однофакторные модели

Начнем с однофакторных моделей. Предположим, что имеется n активов с доходностями $r_1, r_2, \dots, r_n$. И есть один фактор f , который представляет из себя некоторую с.в. подобную доходности от индекса акции за период ее владения. Причем эти доходности и фактор связаны равенствами

$$r_i = a_i + b_i f + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

в которых a_i и b_i — некоторые постоянные. Величины b_i являются «нагрузками по фактору» или **бета фактора**, которые измеряют чувствительность доходности к фактору. Без потери общности положим $E\varepsilon_i = 0$. Предположим также, что с.в. ε_i некоррелированы с f : $\text{Cov}(f, \varepsilon_i) = 0$. И будем считать кроме того, что они некоррелированы друг с другом, т.е. $E\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ при $i \neq j$ ⁷. Таким образом, любая связь между доходностями активов возникает от их общей реакции на фактор. Дисперсию величины ε_i обозначим через $\sigma_{\varepsilon_i}^2$, а дисперсию f через σ_f^2 . Всего получится $3n+2$ параметров: $a_i, b_i, \sigma_{\varepsilon_i}^2, \bar{f} = Ef$ и σ_f^2 . И они удовлетворяют следующим, просто получаемым соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= a_i + b_i \bar{f}, \quad \sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2, \\ \text{Cov}(r_i, r_j) &= b_i b_j \sigma_f^2, \quad i \neq j, \quad b_i = \text{Cov}(r_i, f) / \sigma_f^2. \end{aligned}$$

Вышеуказанная простая матрица ковариации позволяет строить эффективные алгоритмы для решения проблемы выбора портфеля в п. 31.1.1 [317]. Однофакторная модель принадлежит Шарпу [795].

Доходность портфеля можно проанализировать аналогично. Рассмотрим портфель с весами ω_i . Его доходность, очевидно, равна

$$r = a + bf + \varepsilon,$$

где $a \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i a_i$, $b \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i b_i$ и $\varepsilon \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i$. Бета портфеля b поэтому является средним от бета базовых активов b_i (вспомните закон средней ковариации). Легко проверить также, что $E\varepsilon = 0$, $\text{Cov}(f, \varepsilon) = 0$ и $D\varepsilon = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2$. Наконец, как и в (31.3), дисперсия r равна

$$\sigma^2 = b^2 \sigma_f^2 + D\varepsilon.$$

В совокупном риске здесь систематическую часть представляет $b^2 \sigma_f^2$. Систематический риск, который определяется слагаемыми $b_i f$, исходит от фактора f , который влияет на каждый актив и, следовательно, присутствует даже в диверсифицированном портфеле. Слагаемое $D\varepsilon$ представляет специальный риск. Этот риск, связанный со слагаемыми ε_i , можно уменьшить до нуля с помощью диверсификации. Он называется также **диверсифицируемым риском**.

Упражнение 31.3.1. Предположим, что единственным фактором f является рыночная доходность r_M . Запишем процессы получения дохода в виде $r_i - r_f = \alpha_i + b_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i$. И пусть, как и обычно $E\varepsilon_i = 0$ и с.в. ε_i некоррелированы с доходностью рынка. Покажите, что как и в CAPM $b_i = \text{Cov}(r_i, r_M) / D r_M$.

31.3.2 Многофакторные модели

Пусть теперь есть два фактора f_1 и f_2 , а доходность актива i записывается в виде

$$r_i = a_i + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \varepsilon_i.$$

Как и в п. 31.3.1 предположим, что $E\varepsilon_i = 0$ и что с.в. ε_i некоррелирована как с факторами, так и с ε_j при $j \neq i$. Тогда формулы для ожидаемых доходностей и ковариаций будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= a_i + b_{i1}\bar{f}_1 + b_{i2}\bar{f}_2, & \sigma_i^2 &= b_{i1}^2 \sigma_{f_1}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{f_2}^2 + 2b_{i1}b_{i2} \text{Cov}(f_1, f_2) + \sigma_{\varepsilon_i}^2, \\ \text{Cov}(r_i, r_j) &= b_{i1}b_{j1} \sigma_{f_1}^2 + b_{i2}b_{j2} \sigma_{f_2}^2 + (b_{i1}b_{j2} + b_{j1}b_{i2}) \text{Cov}(f_1, f_2), & i &\neq j. \end{aligned}$$

Но в рассматриваемой ситуации справедливы и равенства

$$\text{Cov}(r_i, f_1) = b_{i1} \sigma_{f_1}^2 + b_{i2} \text{Cov}(f_1, f_2), \quad \text{Cov}(r_i, f_2) = b_{i2} \sigma_{f_2}^2 + b_{i1} \text{Cov}(f_1, f_2),$$

с помощью которых можно найти величины b_{i1} и b_{i2} . Факторные модели с большим числом факторов являются простыми обобщениями этого случая. Для акций США может потребоваться от 3 до 15 факторов [623].

Упражнение 31.3.2. Опишите процедуру преобразования множества факторов, коррелированных между собой, во множество некоррелированных факторов, с которыми легче «работать».

31.3.3 Арбитражная теория оценки стоимости АРТ

Структура факторной модели приводит и к альтернативной теории оценки стоимости активов, а именно к модели АРТ Росса, которая является теорией о равновесии в факторных моделях [765]. В АРТ не требуется, чтобы инвесторы оценивали портфели на основании средних и дисперсий. Не требуется и квадратичной функции полезности. Вместо этого 1) структура среднего и дисперсии заменяется на факторную модель для доходностей и предполагается, что 2) инвесторы предпочитают больший доход меньшему в случае, когда он постоянен, а также, что 3) «пространство» активов является «большим».

Рассмотрим сначала конкретный случай, в котором доходности подчиняются следующей однофакторной модели:

$$r_i = a_i + b_i f.$$

В этой факторной модели отсутствует ошибка и потому неопределенность, связанная с доходностью, целиком объясняется неопределенностью фактора f . Интересно, что значения величин a_i и b_i должны быть связаны, если арбитражные возможности исключаются. Вот аргументация. Рассмотрим два актива i и j таких, что $b_i \neq b_j$. И образуем портфель с весами $\omega_i \equiv \omega$ для актива i и $\omega_j \equiv 1 - \omega$ для актива j . Его доходность равна

$$r = \omega a_i + (1 - \omega) a_j + (\omega b_i + (1 - \omega) b_j) f.$$

Если выбрать $\omega = b_j / (b_j - b_i)$, то коэффициент перед f окажется равным нулю, а доходность r — величине

$$\lambda_0 \equiv \frac{a_i b_j - a_j b_i}{b_j - b_i}.$$

Этот портфель является безрисковым, поскольку равенство для r не содержит случайных величин. И если безрисковый актив существует, то $\lambda_0 = r_f$. Но даже если безрисковый актив не существует, то все портфели, построенные независимо от f должны иметь одинаковую доходность λ_0 . В этом случае $\lambda_0(b_j - b_i) = a_i b_j - a_j b_i$, что можно записать в виде

$$\frac{a_j - \lambda_0}{b_j} = \frac{a_i - \lambda_0}{b_i}.$$

И так как это соотношение выполняется при всех i и j , то существует постоянная c такая, что

$$\frac{a_i - \lambda_0}{b_i} = c$$

при всех i ⁸. Таким образом, параметры a_i и b_i связаны между собой равенством $a_i = \lambda_0 + b_i c$. Ожидаемая доходность актива i в этом случае равна

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f} = \lambda_0 + b_i c + b_i \bar{f} = \lambda_0 + b_i \lambda_1, \quad (31.7)$$

где $\lambda_1 \equiv c + \bar{f}$. И мы видим, что как только постоянные λ_0 и λ_1 становятся известны, то ожидаемая доходность актива целиком определяется фактором b_i . Проведенный выше анализ можно обобщить (см. упр. 31.3.4).

Теорема 31.3.1. Пусть имеется n активов, чьи доходности зависят от $m < n$ факторов и определяются уравнениями $r_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij}f_j$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда существуют такие постоянные $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, что $\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij}\lambda_j$, $i = 1, 2, \dots, n$. Величина λ_i называется рыночной ценой риска, связанного с фактором f_i или просто **ценой фактора**.

Рассмотрим далее общую многофакторную модель с необъясняемой ошибкой,

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij}f_j + \varepsilon_i,$$

где $E\varepsilon_i = 0$ и $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \equiv E\varepsilon_i^2$. Как и ранее предполагается, что ε_i некоррелирует с факторами и с необъясненными ошибками других активов. Образует портфель с весами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, такими, что $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Тогда доходность портфеля будет равна

$$r = a + \sum_{j=1}^m b_j f_j + \varepsilon,$$

где $a \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i a_i$, $b_j \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i b_{ij}$ и $\varepsilon \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i$. Пусть $\sigma_{\varepsilon_i} \leq S$ при некоторой постоянной S при всех i . И предположим, что портфель *хорошо диверсифицирован* в том смысле, что $\omega_i \leq W/n$ при некоторой постоянной W при всех i — т.е. ни один актив в портфеле не выделяется. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$D\varepsilon = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n W^2 S^2 = \frac{W^2 S^2}{n} \rightarrow 0.$$

Учитывая и равенство $E\varepsilon = 0$ можно сказать, что необъясненная ошибка ε для хорошо диверсифицированного портфеля, состоящего из очень большого числа активов, приближенно равна нулю⁹.

При доказательстве теоремы 31.3.1 был использован безрисковый портфель в смысле нулевой чувствительности ко всем факторам. Только что мы показали, что портфель остается безрисковым и при более общих моделях до тех пор, пока он является хорошо диверсифицированным. Существование безрискового и хорошо диверсифицированного портфеля достаточно для того, чтобы обобщить теорему 31.3.1 на более общие модели (см. упр. 31.3.5).

Модели АРТ и САРМ непосредственно сравнить трудно. Дело в том, из выполнения предположений какой-то одной из моделей не следует выполнение предположений другой. В модели САРМ делаются строгие предположения о вероятностном распределении доходностей активов, функциях полезности доверенного лица или то и другое. В модели АРТ, с другой стороны, делаются сильные предположения о доходностях активов в положении равновесия. Однако, поскольку АРТ не уточняет сами факторы (они в ней произвольны), то САРМ можно согласовать с АРТ и наоборот. Рассмотрим, например, двухфакторную модель

$r_i = a_i + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \varepsilon_i$. Тогда в случае модели АРТ $\bar{r}_i = r_f + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2$. Пусть у портфеля j ($j = 1, 2$) ожидаемая доходность равна $\lambda_j + r_f$, а значение бета есть β_{f_j} . Ясно, что единственным источником риска у портфеля j является фактор f_j . Но в модели САРМ утверждается, что*) $\lambda_j = \beta_{f_j}(\bar{r}_M - r_f)$. Поэтому

$$\bar{r}_i = r_f + b_{i1}\beta_{f_1}(\bar{r}_M - r_f) + b_{i2}\beta_{f_2}(\bar{r}_M - r_f) = r_f + (b_{i1}\beta_{f_1} + b_{i2}\beta_{f_2})(\bar{r}_M - r_f).$$

Таким образом, бета портфеля является взвешенной суммой бета базовых факторов с использованием бета активов (портфелей) в качестве весов. А предположение о том, что бета, отвечающие разным факторам отличаются, связано с тем, что у разных активов свои показатели бета.

Упражнение 31.3.3. Что произойдет с λ_1 из однофакторной модели АРТ, если модель САРМ имеет место?

Упражнение 31.3.4. Докажите теорему 31.3.1.

Упражнение 31.3.5. Завершите обоснование модели АРТ при более общих факторных моделях.

31.4 Стоимость под риском

Всякий, кто полагался на так называемые модели стоимости под риском, был распят.

Экономист, 1999 г. [309]

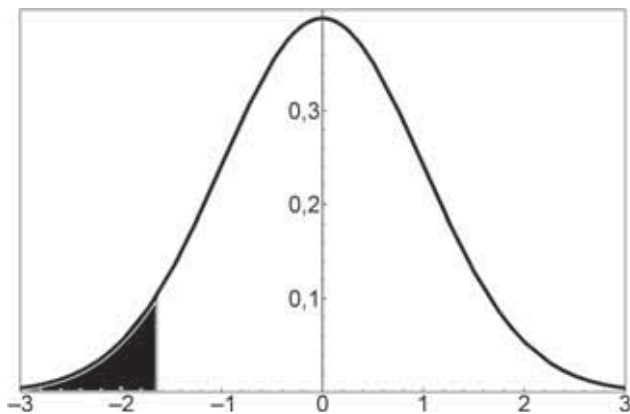
Появившиеся в 1983 г. модели стоимости под риском (СпР; Value at Risk = VaR) представляют собой попытку предоставить главному управляющему одно число, которое суммирует совокупный риск портфеля из финансовых активов. Вычисление этого числа СпР нацелено на получение высказывания вида: «мы на $c\%$ уверены, что не потеряем более V долларов за последующие t дней». Неизвестное V и есть СпР портфеля. Эта величина СпР, следовательно, является оценкой с заданным доверительным уровнем, оценкой того, насколько сильно стоимость моего портфеля может упасть за фиксированный промежуток времени, т. е.

$$P\{\Delta W \leq -V\} = 1 - c,$$

где ΔW — изменение стоимости портфеля за данный промежуток времени, а c — доверительный уровень (см. рис. 31.5). Значение СпР обычно вычисляется в предположении, что рыночные условия «нормальны» в том смысле, что такие катастрофические рыночные условия как обвал

*) Поскольку в ней справедливо равенство $\lambda_j + r_f = r_f + \beta_{f_j}(\bar{r}_M - r_f)$. Отметим также, что если сравнивать не предположения моделей, а возникающие в них формулы для определения средних доходностей интересующих нас активов, то можно сказать, что САРМ является частным случаем модели АРТ, в которой один, причем конкретный фактор: доходность рыночного портфеля. Точнее говоря, если под САРМ понимать рыночную линию ценной бумаги из теоремы 31.2.1, как это обычно и делается, т. е. равенство $\bar{r}_j = r_f + \beta_j(\bar{r}_M - r_f)$, то видно, что тем самым мы получаем даже равенство (31.7) модели АРТ, не говоря уже о равенствах из теоремы 31.3.1. — Прим. перев.

Рис. 31.5. Доверительный уровень и СпР. График представляет доверительный уровень 95 % у стандартного нормального распределения; затемненная область под функцией плотности составляет 5 % от всей площади под плотностью. Правый конец этой области соответствует точке $-1,64485$ по горизонтальной оси.



рынка, не рассматриваются. Этот показатель стал широко использоваться казначеями корпораций, управляющими фондов, а также финансовыми учреждениями.

В целях измерения достаточности банковского капитала Банк по Международным Сделкам (БМС; Bank for International Settlements = BIS) вводит доверительный уровень $c = 0,99$ и промежуток времени в $m = 10$ (дней) [293]. Другое интересное приложение возникает при оценке стоимости капиталовложений. Здесь риск рассматривается с точки зрения воздействия будущих изменений на величину всеобщей стоимости под риском, т. е. *приращение* СпР, и мы все-таки предпринимаем инвестиции, если приращение СпР достаточно невелико по сравнению с ожидаемой доходностью [283].

Предположим, что доходности нормально распределены и не зависят от текущего дня¹⁰. И рассмотрим сначала один актив. Предположим, что текущая цена акции равна $S_0 = S$, а дневная волатильность ее доходности $\Delta S/S$ равна σ . Поскольку промежуток времени m обычно невелик, то предположим, что ожидаемое изменение цены акции равно нулю, а волатильность доходности за m дней равна $\sigma\sqrt{m}$. Точнее говоря, предположим, что нас интересует изменение цены акции $S_m - S_0$ за m дней и оно может быть представлено в виде

$$S_m - S_0 = S_0 \sum_{l=1}^m \xi_l = N(0, S^2 \sigma^2 m),$$

где независимые с. в. $\xi_l = N(0, \sigma^2)$ — доходности l -го дня по отношению к исходной текущей цене S_0 . Таким образом, стандартное отклонение приращения цены акции за этот временной промежуток составляет величину $S\sigma\sqrt{m}$, уравнение СпР имеет вид

$$P\{S_m - S_0 \leq -V(c)\} = 1 - c,$$

а его решение $V(c) = \Phi^{-1}(c) S\sigma\sqrt{m}$, где $\Phi(\cdot)$ есть функция распределения стандартного нормального распределения (см. таблицу на рис. 31.6).

В самом деле, пусть $\zeta_b = N(0, b^2)$. Тогда, очевидно,

$$P\{\zeta_1 < -a\} = 1 - c \Leftrightarrow P\{\zeta_1 < a\} = c \Leftrightarrow \Phi(a) = c \Leftrightarrow a = \Phi^{-1}(c),$$

и остается заметить, что $P\{\zeta_1 < a\} = P\{\zeta_b < ab\}$ при любых $a > 0$, $b > 0$.

Доверительный уровень (с)	Число стандартных отклонений
95 %	1,64485
96 %	1,75069
97 %	1,88079
98 %	2,05375
99 %	2,32635

Рис. 31.6. Доверительные уровни и стандартные отклонения от среднего. В таблице приведены доверительные уровни и соответствующие им числа стандартных отклонений от среднего в случае, когда случайная величина стандартно нормально распределена.

Указанные соображения позволяют легко преобразовать одну величину СпР или доверительный уровень в другие величины и соответствующие им доверительные уровни. Например, соотношение между 99 % СпР и 95 % СпР можно записать в виде

$$V(95\%) = V(99\%) \times (1,645/2,326).$$

Конечно, если оба СпР относятся к одному и тому же промежутку времени. Аналогично, дисперсия m -дневной доходности должна быть в m раз больше дисперсии 1-дневной доходности. Таким образом, m -дневная величина СпР равна произведению $\sqrt{m}$ на 1-дневную СпР, которая также называется **дневная выручка под риском**. Если же m нельзя назвать малым, то следует рассматривать ожидаемую ежегодную доходность μ . В этом случае из СпР вычитается снос $S\mu m/T$, если число торговых дней в году равно T .

Рассмотрим далее портфель из активов. Причем на этот раз под портфелем будем понимать не вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, компонента ω_i которого представляет долю общей стоимости портфеля, которую составляет i -й актив, а вектор абсолютных стоимостей входящих в портфель активов, скажем, $S(l) = (S_1(l), \dots, S_n(l))$, где l — момент времени, к которому относятся стоимости, $l = 1, 2, \dots, m$. Предположим также, что нас интересует приращение стоимости портфеля за m дней, т.е. величина $\sum_1^n (S_i(m) - S_i(0))$, причем в предположении, что приращения этой стоимости за каждый из этих дней независимы, одинаковы и описываются выражением (скажем, за первый день) $\sum_1^n ((S_i(1) - S_i(0))) = \sum_1^n S_i(0)\xi_i$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = N(0, \Sigma)$. Иными словами, приращение стоимости является линейной комбинацией нормально распределенных с.в. с матрицей ковариации Σ .

Нетрудно видеть тогда, что если нас интересует СпР из равенства

$$P\left\{\sum_1^n (S_i(m) - S_i(0)) \leq V(c)\right\} = 1 - c,$$

то соответствующее значение СпР можно записать в виде

$$\Phi^{-1}(c)\sqrt{m}\sqrt{\sum_i \sum_j S_i S_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}},$$

если $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$. Отметим, что этот способ вычисления СпР называется **подход с дисперсией и ковариацией** [518]. Он был популярно изложен Дж. П. Морганом в «Метрике риска» в 1994 г.

Методология дисперсии и ковариации может не сработать, если в портфеле есть производные инструменты, поскольку доходность производного инструмента может не быть нормально распределенной даже если базовый актив распределен именно так. Тем не менее, если предполагается, что изменения в стоимости базового актива будут очень малы, поскольку, скажем, рассматриваемый временной промежуток невелик, то чувствительность производного инструмента к изменениям стоимости базового актива можно аппроксимировать с помощью дельта производного инструмента следующим образом. Рассмотрим портфель с ценой P из производных инструментов и единственного базового актива стоимостью S . Напомним, что дельта портфеля δ измеряет чувствительность его цены к S , или приближенно величину $\Delta P / \Delta S$. Стандартное отклонение распределения портфеля оказывается равным $\delta S \sigma \sqrt{m}$, а потому его СпР есть $\Phi^{-1}(c) \delta S \sigma \sqrt{m}$. В общем случае, когда имеется много базовых активов, то СпР портфеля, содержащего опционы, становится равным величине

$$\Phi^{-1}(c) \sqrt{m} \sqrt{\sum_i \sum_j \delta_i \delta_j S_i S_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}},$$

где δ_i обозначает дельту портфеля по отношению к активу i , а S_i — стоимость актива i . Эта схема вычислений называется **подходом с дельта** [527, 878]. В этом подходе с дельта производный инструмент при вычислении СпР по существу рассматривается как дельта единиц его базового актива. Это не совсем лишено смысла, поскольку такая эквивалентность имеет место для каждого мгновения. Однако такое решение оказывается спорным, если m увеличивается.

Прежде, чем использовать цены активов, при вычислении СпР обычно опираются не ограниченное число базовых рыночных параметров, которые отвечают за большую часть изменений в стоимости портфеля [603]. Как упоминалось в п.31.3.1, это сильно уменьшает сложности, связанные с вычислением матрицы ковариаций, поскольку в этом случае нужны лишь ковариации между рыночными переменными. Типичными же рыночными переменными являются доходности или цены облигаций, обменные курсы и рыночная доходность. Базовый инструмент в этом случае ассоциируется с каждой рыночной переменной. А ЦБ аппроксимируется некоторым портфелем из этих базовых инструментов. Наконец, ее СпР сводится к СпР этих базовых инструментов.

Упражнение 31.4.1. Какова СпР для фьючерсного контракта на акцию?

Упражнение 31.4.2. Если цена акции удовлетворяет уравнению $dS = S\mu dt + S\sigma dW$, то чему равна ее СпР τ лет спустя при доверительном уровне c ?

31.4.1 Моделирование

Моделирование по методу Монте-Карло является общим подходом, используемым для оценки СпР, и особенно в случае производных инструментов [571]. При его реализации стоимость портфеля рассчиты-

Расчет СпР по методу Монте-Карло:

ввод: $\bar{p}$, c , n , $C[0..n-1][0..n-1]$, $S[0..n-1]$, $\mu[0..n-1]$, Δt , m , N ;
действительные числа $S[0..m][0..n-1]$, $y[0..n-1]$, $dW[0..n-1]$,
 $P[0..n-1][0..n-1]$, $p[0..N-1]$, $\xi()$; // $\xi() \sim N(0, 1)$
целые i , j , k ;
Пусть P определяется из равенства $C = PP^T$; // См. рис. 19.4
для ($j=0$ до $n-1$) { $S[0][j] := S[j]$; }
для ($k=0$ до $N-1$) {
 для ($i=1$ до m) {
 для ($j=0$ до $n-1$) { $y[j] := \xi() \times \sqrt{\Delta t}$; }
 $dW := Py$;
 для ($j=0$ до $n-1$) { $S[i][j] := S[i-1][j] \times ((1 + \mu[j]) \times \Delta t + \sqrt{C[j][j]} \times dW[j])$; }
 }
 Рассчитать стоимость портфеля в конце $p[k]$;
}
Расставить величины $p[0]$, $p[1]$, ..., $p[N-1]$ в неубывающем порядке;
вывод $\bar{p} - p[(1-c)N-1]$;

Рис. 31.7. Расчет СпР по методу Монте-Карло. Ожидаемые доходности $\mu[]$ и ковариации являются ежегодными. Имеется n активов, начальная стоимость портфеля обозначена через $\bar{p}$, c — доверительный уровень, C — матрица ковариаций эквивалентных ежегодных доходностей активов, m — число дней до окончания срока действия портфеля, число копий обозначено через N , а в ячейке $S[]$ хранятся начальные цены активов. Напомним, что равенство $C = PP^T$ является разложением Холецкого матрицы C . Стоимости портфеля в момент окончания вычисляются и хранятся в ячейке $p[]$. При этом нам нужно использовать модели оценки стоимости и мы предполагаем, что раннее исполнение в течение периода невозможно. После классификации в качестве выхода получаем соответствующую долю в процентах.

вается для многих выборочных траекторий и значение СпР определяется, исходя из распределения этих стоимостей. На рис. 31.7 приведен алгоритм для вычисления СпР в случае, когда цены n активов описываются следующими броуновскими движениями:

$$\frac{dS_j}{S_j} = \mu_j dt + \sigma_j dW_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где n факторов dW_j коррелированы. Как и всегда следует использовать *реальные* доходности, а не риск-нейтральные. При коротких временных промежутках это в большинстве случаев не играет особой роли. На практике, чтобы сэкономить вычислительное время, акцию с бета, равным β приравнивают к положению, в β раз большему значению индекса. Конечно, при таком подходе игнорируется специальный риск акции. Соответствующий метод моделирования, называемый **историческим моделированием**, использует прошлые данные [518]. Он идентичен моделированию по методу Монте-Карло, за исключением того, что выборочные траектории строятся на основе прошлых данных так, как если бы они стали повторяться в будущем.

Грубое моделирование по методу Монте-Карло неэффективно, когда число факторов велико. К счастью, факторный анализ и анализ главных компонент часто может уменьшить число факторов, нужных для моделирования [2, 509]. Пусть C обозначает матрицу ковариаций n факторов $dW_1, dW_2, \dots, dW_n$. Пусть $u_i \equiv (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ni})^\top$ — собственные векторы матрицы C и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — соответствующие положительные собственные значения. Поэтому $\lambda_i u_i = C u_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Напомним, что каждое собственное значение показывает насколько большая доля изменчивости данных объясняется соответствующим ему собственным вектором. По теореме разложения Шура можно предполагать, что собственные векторы ортогональны друг к другу. Нормируем собственные векторы таким образом, чтобы выполнялось равенство $|u_i|^2 = \lambda_i$ и положим

$$dZ_j \equiv \lambda_j^{-1} \sum_{k=1}^n u_{kj} dW_k.$$

Из вышесказанного вытекает, что

$$dW_i = \sum_{k=1}^n u_{ik} dZ_k,$$

где $dZ_k dZ_j = 0$ при $j \neq k$ и $dZ_k dZ_k = dt$ (см. упр. 31.4.3 (3)). Если выборочный анализ показывает, что все главные компоненты кроме первых m малы, то

$$dW_i \approx \sum_{k=1}^m u_{ik} dZ_k.$$

Как следствие, процессы, определяющие цены активов можно считать приближенно заданными равенствами

$$\frac{dS_j}{S_j} \approx \mu_j dt + \sigma_j \sum_{k=1}^m u_{jk} dZ_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

в которых остаются лишь m ортогональных факторов $dZ_1, dZ_2, \dots, dZ_m$.

Упражнение 31.4.3. Докажите, что

- 1) $C = PP^\top$, где i -й столбец матрицы P есть собственный вектор u_i ,
- 2) $P^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})P^\top$,
- 3) $P(dZ_1, dZ_2, \dots, dZ_n)^\top = (dW_1, dW_2, \dots, dW_n)^\top$, и
- 4) $P^\top P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

31.4.2 Критические замечания

Показатель СпР основывается на определенных предположениях, которые несовместимы с результатами наблюдений. Во многих случаях предполагается, что доходности активов нормально распределены. Это очень сильно упрощает вычисления, но несовместимо с опытными данными, в соответствии с которыми получается, что у распределений многих доходностей тяжелые хвосты, причем оба, левый и правый, а также как при дневном промежутке, так и при месячном. Экстремальные события поэтому на практике должны происходить со значительно большей вероятностью, чем это вытекает из предположения нормальности

[857]. Стандартной мерой тяжести хвоста является эксцесс. Скачки цены и стохастическую волатильность можно использовать для генерации тяжелых хвостов (см., например, упр.20.2.1) [293]. Но, хотя дневные рыночные доходности не являются нормально распределенными [743], при больших периодах, скажем в 3 месяца, доходности вполне близки к нормально распределенным [592].

Метод вычислений СпР зависит от длины временного промежутка. Метод, приводящий к хорошим результатам в случае короткого промежутка может не подходить для ситуаций с длинным промежутком. Метод расчета СпР зависит также от типа актива. Для портфелей, которые содержат производные инструменты, могут потребоваться методы, заметно отличающиеся от тех, которые используются для анализа портфелей из акций [464].

Способность количественно оценить подверженность риску в виде числа представляет собой единственное и наиболее важное преимущество показателя СпР. Однако этот показатель чрезвычайно сильно зависит от значений параметров, типа данных, предположений и методологии. Поэтому, хотя он и должен составлять часть программы эффективного управления риском, но все-таки СпР недостаточен для того, чтобы контролировать риск [61, 464]. С другой стороны, он становится необходимым для количественной оценки величины потерь, которые могут произойти в результате событий, менее вероятных, чем анализируемые при стандартном расчете СпР. Процедуры, используемые для количественной оценки потенциальной подверженности к потерям при таких специальных обстоятельствах называются **критериями стресса** [571]. Критерии стресса измеряют потери, которые могут произойти, если некоторое множество факторов окажутся задействованными под влиянием внешних обстоятельств.

31.4.3 СпР для ЦБ с фиксированной доходностью

В отличие от цен акций цены облигаций «стремятся» двигаться в одном направлении вместе, поскольку многое в этом движении носит систематический характер, ведь общим фактором для них является процентная ставка. По этой причине управление портфелем из облигаций не требует, чтобы портфель был хорошо диверсифицирован. Вместо этого несколько облигаций различных сроков погашения обычно могут прохеджировать изменение стоимости произвольной облигации или портфеля из облигаций [91].

Для количественной оценки подверженности процентной ставки к изменениям у портфелей и ценных бумаг с фиксированной доходностью использовались дюрация (см. п.4.2) и дюрация ключевой ставки (см. п.27.5). Методология СпР также может опираться на дюрацию. Если S обозначает начальную доходность инструмента с фиксированной доходностью и дюрацией D , то СпР для длинной позиции по инструменту равна $1,645 \times \sigma SD$ при 95 % доверительном уровне. Как и ранее для анализа СпР требуется представлять параметры *реальной* динамики

временной структуры. При определении СпР с помощью моделирования факторный анализ проводится обычно до реального моделирования [804]. Представляется, что три ортогональные фактора при этом окажутся достаточными (см. п. 19.2.5).

Подход с дисперсией и ковариацией при вычислении СпР оказывается более сложным [470, 720]. Во-первых, для каждой облигации следует получить «эквивалентный» портфель из стандартных бескупонных облигаций (это называется **отображением денежного потока**). Затем для построения 95 %-го доверительного интервала для долларовой доходности используются историческая волатильность спот-ставок и коэффициенты корреляции между ними. Однако такой подход сложно применять к ценным бумагам с вложенными опционами.

Дополнительная литература

В 1952 г. Марковиц и Рой независимо друг от друга опубликовали свои работы, которые ознаменовали начало эры современной портфельной теории [642, 644]. Приведенное изложение современной портфельной теории позаимствовано из [317, 623]. Общий подход к изложению проблематики, основанной на среднем и дисперсии можно найти в [643]. С дополнительной информацией по бета можно познакомиться по [82, 174, 403, 760, 862], а с понятиями ожидаемой доходности и риска — по [81, 332, 399]. В рамках современной портфельной теории могут рассматриваться и проблемы реальной недвижимости [389, 407]. О применимости современной портфельной теории в Японии говорится в [28]. Одной из причин в пользу выбора стандартного отклонения в качестве меры риска является просто тот факт, что с ним легче работать, чем с другими показателями [799]. Интересная теория из области экспериментальной психологии, **теория перспективы** утверждает, что инвестор значительно более чувствителен к уменьшению богатства, чем к его увеличению, что называется **отвращением к потерям** [533, 534]. Чтобы извлечь выгоду из такого поведенческого «смещения», можно использовать спрэды [180]. С подходами, лежащими за рамками анализа средних и дисперсий, можно познакомиться по [592].

Об усовершенствовании понятия функции полезности говорится в [826]. Теория оптимизации обсуждается в [278, 687]. Дополнительная информация по страхованию портфеля имеется в [346, 470, 567, 646, 693]. По оценке эффективности капиталовложений можно проконсультироваться по [317, 623, 673]; представляется, что у взаимных фондов совместные и согласованные действия отсутствуют [634]. Материал по таким вариантам анализа ценных бумаг, как технический и фундаментальный анализ, имеется в [96, 360, 799], а по согласованию действий на рынках — в [132].

Проблеме СпР у производных инструментов посвящена монография [314], о СпР в ситуациях, когда доходности не являются нормально распределенными, можно почитать в [484, 691, 720, 771], об управлении

СпР с помощью опционов пут говорится в [8], а о СпР для ценных бумаг с фиксированной доходностью — в [293, 390, 464, 484, 720, 804, 857]. Для коррекции коэффициента асимметрии у распределения при вычислении СпР полезно использовать **разложение Корниша—Фишера** [470, 522].

Примечания

1. Иногда в качестве меры риска мы используем для удобства дисперсию доходности.

2. Слова «rate of return» и «return» часто заменяют друг друга в ситуациях, когда речь идет об одном периоде (соответственно в русском переводе используется одно слово «доходность»).

3. Докторская диссертация Марковица сначала была провалена Фридманом на том основании, что «Это не математика, это не экономика и это даже не управление коммерческой деятельностью», см. [64, с. 60].

4. Индекс S&P 500 часто используется в качестве приближения для рыночного портфеля. **Индексные фонды** — это взаимные фонды, которые пытаются продублировать какой-то рыночный индекс акций. Появившийся в 1975 г. под названием Vanguard Index Trust фонд Индекса Вангард 500 оказался первым индексным взаимным фондом. Впоследствии он перешел на индекс S&P 500 и стал самым большим взаимным фондом в апреле 2000 г.

5. Шарп послал свою статью в 1962 г. в финансовый журнал *Journal of Finance*, но она была сразу же отклонена [64, с. 194].

6. Чтобы добиться нужной ликвидности, динамические стратегии полагаются на рынок. Крах 1987 г. и кризис в России и LTCM от 1998 г. продемонстрировали, что такая ликвидность может оказаться недоступной в моменты чрезвычайных ситуаций на рынке [308, 654]. Когда цены начали падать во время краха 1987 г., страховщики портфелей продавали фьючерсы на индексы акций. И эта активность на фьючерсном рынке привела к большим продажам на рынке наличных, поскольку продавцы программ попытались уловить арбитражный спред между фьючерсным и денежным рынками. Дальнейшее падение цен привело к большим продажам у страховщиков портфелей и т. д. [567, 647].

7. В модели CAPM не требуется, чтобы ошибки ε_i были некоррелированы; см. уравнение (31.2).

8. Подобная аргументация используется и в уравнениях (15.12) и (24.10).

9. Неравенство Чебышева из упр. 13.3.10 (2) заменяет интуицию.

10. Слово «return» («доходность») означает изменение цены ΔS или простую доходность $\Delta S/S$. Это согласуется со стохастическим дифференциальным уравнением $\Delta S = S\mu\Delta t + S\sigma\sqrt{\Delta t}\xi$, когда Δt мало.

ЧАСТЬ VIII

ДОПОЛНЕНИЕ

32 Програмное обеспечение

33 Решения к упражнениям и заданиям по программированию

34 Русские и английские сокращения

35 Некоторые из основных понятий современной финансовой теории

Последняя часть содержит сведения о доступном программном обеспечении, тесно связанным с книгой (глава 32), решения к упражнениям и заданиям по программированию, предлагавшимся в главах 2—31 (глава 33), список русских и английских сокращений (глава 34), а также толкование некоторых из основных понятий современной финансовой теории (глава 35).

32 Программное обеспечение

Проверяй все. Придерживайся хорошего.

I Thessalonians 5:21

32.1 Программирование в сети

Программное обеспечение для книги сконцентрировано в Интернете в том смысле, что для его использования требуется иметь лишь достаточно современное просматривающее сеть устройство (броузер). Программное обеспечение передается пользователю при нажатии кнопки; никакой установки оборудования не требуется. По мере усовершенствования программного обеспечения страница в сети *The Capitals* будет отражать этот процесс. Эта новая манера распространения программного обеспечения превосходит традиционный способ передачи программного обеспечения с каждой книгой, когда оно записывается на гибкий диск или CD-ROM [705].

Сеть обещает стать платформой, которая будет независима от операционных систем компьютеров и другого оборудования. Это означает, что программа или документ, написанный на языке HTML (Hypertext Markup Language [167]), может быть использована везде, а ее (его) автор освобождается от заботы о потенциально бесконечном числе компьютерных систем, которые могут получить доступ к коду. Что же касается настоящего момента, то эти надежды пока еще реализованы не полностью. Отметим для начала, что один и тот же документ или та же программа часто приводят к различному поведению просматривающих устройств различных компаний или даже просматривающих устройств одной семьи, если они принадлежат к разным версиям. Просматривающие устройства могут выполнять только часть из стандартного набора операций плюс несколько нестандартных приемов. Дополнительные сложности представляют различные версии языка Java, сопровождающего просматривающее устройство, и систем Windows, используемых операционными системами. К счастью в большинстве случаев эти проблемы не являются существенными или их можно избежать, повышая уровень просматривающего устройства и не используя его нестандартные свойства.

32.2 Использование программного обеспечения на странице *The Capitals*

Откройте страницу *The Capitals* по адресу

www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/capitals.html.

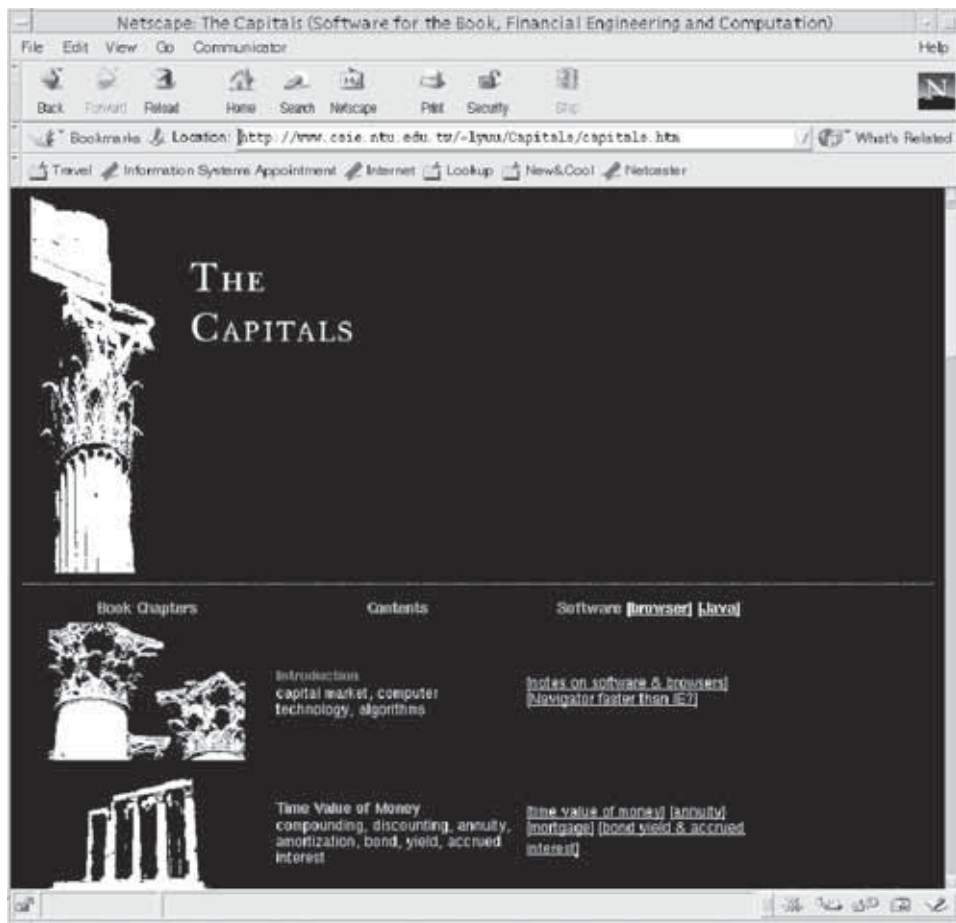


Рис. 32.1. Страница The Capitals. Эта страница открывается браузером Netscape в окружении Unix. Ее внешний вид может зависеть от браузера и может быть изменен с помощью переустановки браузера.

Характерный для нее вид приведен на рис.32.1. Затем вызовите какую-нибудь программу, чтобы она заработала. Например, нажмите на кнопку «закладная», чтобы появилась картинка калькулятора из рис. 32.2. Можно решить многие финансовые проблемы, используя две или более программ одновременно. Например, можно задействовать программу «спот-ставки и форвардные ставки купонных облигаций» для расчета спот-ставок. Затем скопируйте эти ставки в программу «оценщик последовательной ОЗЗ (вектор)» для оценки стоимости ОЗЗ. В качестве другого примера рассмотрим оценку стоимости слоев ОЗЗ за 10 лет до погашения. Мы можем включить программу «оценщик последовательной ОЗЗ (вектор)» для получения остатков непогашенных ссуд по слоям на этот момент. А затем вставить полученные числа в качестве исходных сумм в программу «оценщик последовательной ОЗЗ (вектор)» на 10 оставшихся лет.

Некоторые программы можно применять в ситуациях, которые первоначально не планировались. Например, программы ОЗЗ можно использовать для индивидуальных закладных, помещая всю основную сумму в первый слой; денежный поток по РЦБЗ можно представить в виде таблицы, получаемой с помощью программы «табулятор ПиП пула (вектор)», и т. д.

Чтобы программное обеспечение страницы *The Capitals* работало гладко, рекомендуется придерживаться следующих указаний.

- 1. Использовать Netscape Navigator версии 4.0 или выше, или Microsoft's Internet Explorer версии 4.0 или выше.
- 2. Сделать возможной работу языка программирования Java.
- 3. Использовать язык Java версии 1.1.4 или выше.

Для получения дополнительной информации проверьте «замечания к программному обеспечению и браузерам».

Программы на странице *The Capitals* написаны на языках JavaScript [357] и Java [356, 467]¹. Поскольку браузер (просматривающее устройство)

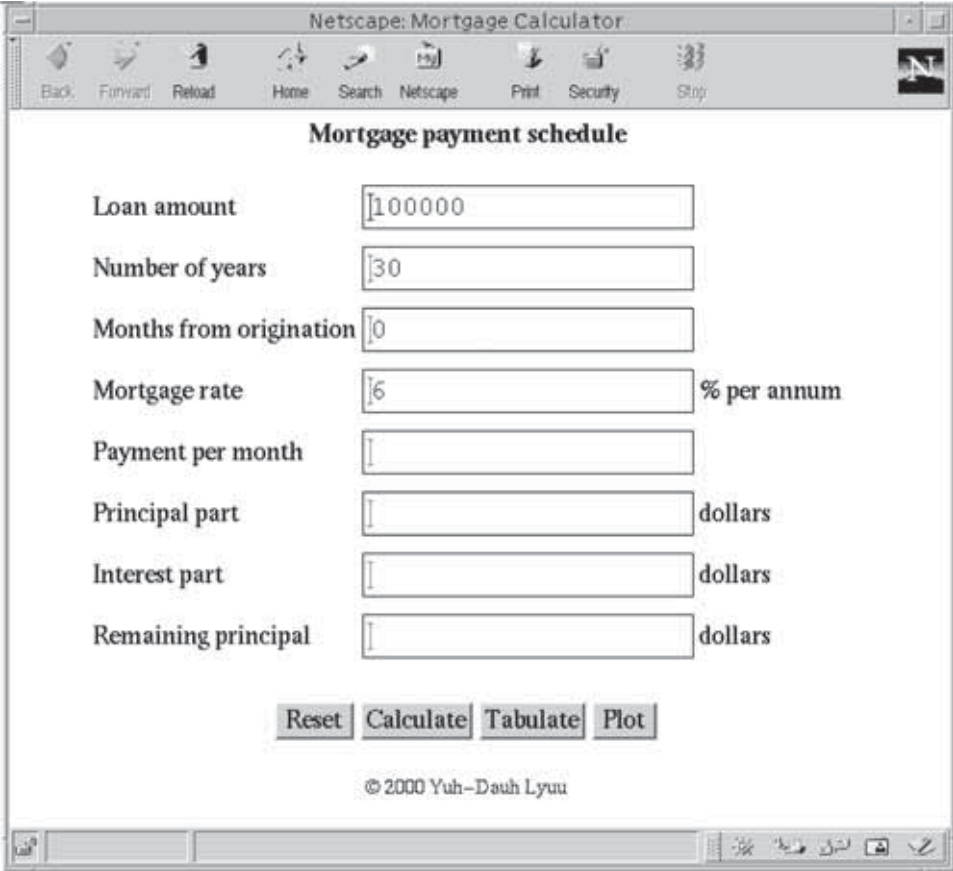


Рис. 32.2. Калькулятор по закладной.

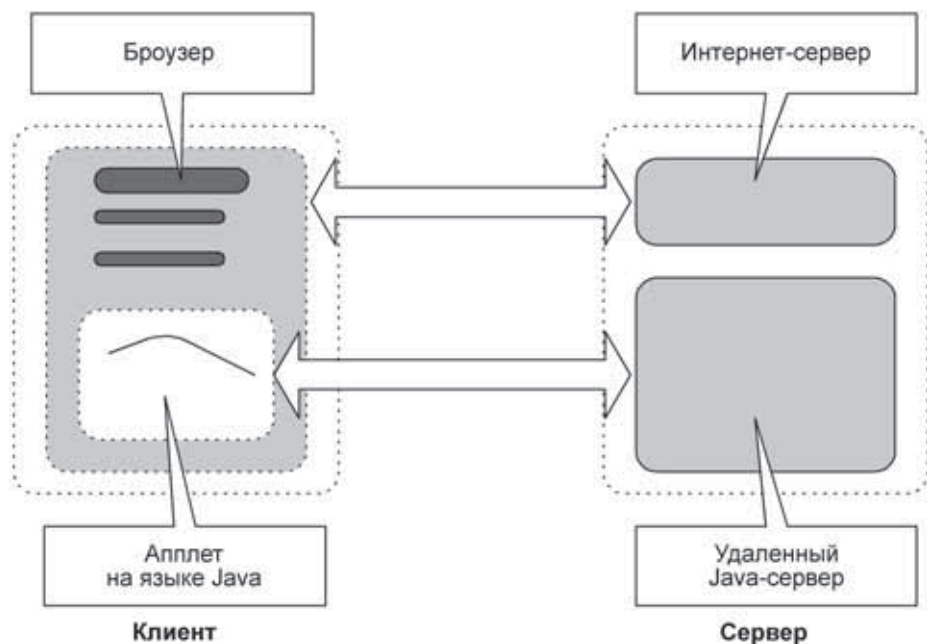


Рис. 32.3. Связка клиент/обслуживающее устройство с языком Java в сети. Язык программирования Java был впервые продемонстрирован компанией Sun в мае 1995 г. Он подавал большие надежды при создании систем программного обеспечения в цепи клиент/независимое обслуживающее устройство.

сети адаптирован именно к языку Java, оно соответственно интерпретирует информацию под него; пользовательские же системы взаимодействия и обработки ставятся на компьютер пользователя. Такая связка клиент/обслуживающее устройство более эффективна, чем передача реализации задач по расчету и взаимодействию для многих клиентов на обслуживающее устройство, что замедляло бы их выполнение для каждого из них. При этом негласно предполагается, что компьютер пользователя достаточно мощный, а доступ к сети достаточно быстрый [719]. Программы на языке Java, которые работают в просматривающем устройстве сети, называются **апплеты (Java applets)** (см. рис. 32.3) [264].

32.3 Другие темы

Для достижения значительно более высокой эффективности при решении некоторых задач с большим объемом вычислений можно воспользоваться преимуществом параллельного использования нескольких компьютеров. Хороший пример такого рода представляет оценка стоимости ЦБЗ по методу Монте-Карло. Эта работа разбивается на несколько задач, каждая из которых выполняется на своем компьютере, моделируя часть сценария изменения процентной ставки и рассчитывая среднюю цену. Найденная информация относительно средних цен затем

сопоставляется для получения общей средней цены. Отметим, что после того, как работа была разделена, никакой связи между этими задачами использовать не требуется вплоть до этапа объединения данных. При этом было получено хорошее увеличение скорости расчета [528, 601, 794, 892, 893]. И наоборот, решение задачи, которую нельзя разбить на части таким образом, чтобы ограничить объем передачи сообщений, а значит зависимость между задачами-частями, не может быть проведено достаточно эффективно [588].

Технология Интернета молода и быстро развивается. Пользователи и разработчики всегда были согласны вытерпеть много неприятностей, поскольку они являются свидетелями и участниками процесса, который обещает изменить манеру, в которой работает все общество. И если история развития автоиндустрии является в какой-то мере показательной, то этот процесс созревания технологии может занять несколько десятилетий. К счастью, благодаря усилиям и самоотверженности многих корпораций и компьютерных профессионалов, Интернет стал наиболее важной и легкой в использовании платформой для программного обеспечения.

Примечание

1. Языки JavaScript и Java отличаются, но у них похожий синтаксис.

Сейчас не осталось ничего такого, что можно было бы открыть в физике [1900].

Уильям Томсон (лорд Кельвин) (1824—1907)

33 Решения к упражнениям и заданиям по программированию

К главе 2

2.2.2. 1) Напомним, что $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$.

2) Нужно использовать тождество $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

3, 4) Следует использовать равенство $\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$.

5) Используйте формулу суммирования Эйлера [461, с.18]:

$$\int_a^{b+1} g(x) dx \leq \sum_{i=a}^b g(i) \leq \int_{a-1}^b g(x) dx.$$

К главе 3

3.1.1. Нужно показать, что функция $g(m) \equiv (1+r/m)^m$ возрастает по m при любом $r > 0$. Но для этого достаточно показать, что такой функцией является $g(m) \equiv (1+1/m)^m$. А это вытекает из того, что

$$g'(m) = g(m) \left[\ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{1+m} \right],$$

причем функция в скобках положительна, поскольку обращается в 0 при $m = \infty$, и ее производная по m отрицательна.

Другой подход состоит в том, чтобы разложить величины $g(m)$ и $g(m+1)$ по формуле бинома Ньютона, как функции от $x = 1/m$, (соответственно, $y = 1/(m+1)$) и сравнить слагаемые с одинаковыми степенями. Дело в том, что каждый член в $g(m+1)$, за исключением последнего, степени $m+1$ (которого нет в полиноме для $g(m)$), больше соответствующего слагаемого в $g(m)$. Вычисления в этом подходе не требуются и проводить.

3.1.2. Начисление является ежемесячным, т.е. проводится 12 раз в году. Убеждаемся в этом, замечая, что $18,70/12 = 1,5583$.

3.1.3. 1) Рост мощности компьютеров описывается функцией $(1,54)^n$, где n — количество лет, прошедших с 1987 г. Эквивалентная ставка непрерывного начисления процентов равна $0,4318 = \ln 1,54$. Поскольку объем памяти возрастал в 4 раза каждые 3 года, начиная с 1977 г., то его рост характеризует функция $4^{n/3} = (1,5874)^n$, где n — число лет, прошедших с 1977 г. Эквивалентная ставка непрерывного начисления равна $0,4621 = \ln 1,5874$.

2) Эта ставка равна $\left(\frac{500\,000}{300\,000} \right)^{1/4} - 1 \approx 0,136$. Данные взяты из [574].

3.2.1. ПЗ = $\sum_{i=0}^{nm-1} C \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{-i} = C \frac{1 - (1+r/m)^{-nm}}{r/m} \left(1 + \frac{r}{m} \right).$

3.3.1. Мы вывели равенство (3.8), «обращаясь к будущему». Но можно сделать это и «оглядываясь на прошлое». А именно: сразу после k -й выплаты оставшийся непогашенным капитал равняется стоимости исходного капитала за вычетом стоимости всех проведенных выплат, т.е. в точности то, что и утверждает формула. Если же выразить сказанное математически, то

$$C \frac{1 - (1+r/m)^{-nm}}{r/m} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k - \sum_{i=1}^k C \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{i-1} = \\ = C \frac{(1+r/m)^k - (1+r/m)^{-nm+k}}{r/m} - C \frac{1 - (1+r/m)^k}{r/m} = C \frac{1 - (1+r/m)^{-nm+k}}{r/m}.$$

3.3.2. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^n D e^{-i(r-x)} = \sum_{i=1}^n (D e^{ix}) e^{-ir}.$$

Комментарий в отношении закладных см. в [330, с. 120].

3.4.1. Используйте уравнение (3.11) с $y=0,0755$, $n=3$, $C_1=C_2=1000$, $C_3=1500$ и $P=3000$.

3.4.2. В силу (3.4) НЗ равно $C \times [(1+r)^n - 1]/r$. Поэтому, чтобы обеспечить доходность y , ПЗ должно быть равно величине $C[(1+r)^n - 1]/r \times (1+y)^{-n}$.

3.4.3. Приведенная прибыль по проекту A в этом случае равна \$2010,014, а по проекту B составляет \$1773,384. Таким образом, на этот раз выигрывает проект A .

3.4.4. Равенство (3.15) имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k^2}{3x_k^2 - 2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k}{3x_k - 2},$$

а искомая последовательность (приближений корня) такова: 1,5, 1,2, 1,05, 1,004348, 1,00003732. Последнее из них почти совпадает с корнем 1.

3.4.5. $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Поэтому $F'(\xi) = 0$.

3.4.6. См. рис. 3.5 [656].

3.4.8. Пусть $y_f(x)$ является решением уравнения $f(x, y) = 0$ при данном x . И, аналогично, пусть $y_g(x)$ — решение уравнения $g(x, y) = 0$ при данном x . Предположим, что y_f и y_g непрерывные функции. Тогда метод деления пополам применим к функции $\varphi(x) \equiv y_f(x) - y_g(x)$, если он начинается с таких точек x_1, x_2 , что $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$. Поступая таким образом, мы сводим двумерную проблему к стандартной одномерной задаче. Отметим, что $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $y_f(x) = y_g(x)$. К сожалению, этот метод не имеет очевидных обобщений на случай размерности $n > 2$. Кроме того, функции $y_f(x)$ и $y_g(x)$, возможно, придется находить с помощью численных методов. См. [447, с. 585].

3.5.1. В произвольный момент времени t (или, что то же самое) в интервале $[t, t + \Delta t)$ по ней выплачивается сумма $c\Delta t$ долларов, которая затем дисконтируется по ставке r , т.е. умножается на величину e^{-rt} [462].

3.5.2. Цена, которая гарантирует искомую доходность при отзыве через 5 лет, в соответствии с уравнением (3.18) равна

$$5 \frac{1 - [1 + (0,12/2)]^{-2,5}}{0,12/2} + \frac{100}{[1 + (0,12/2)]^{2,5}} = 92,6399.$$

Если же облигация сохраняется до погашения, то эта цена равна

$$5 \frac{1 - [1 + (0,12/2)]^{-2,10}}{0,12/2} + \frac{100}{[1 + (0,12/2)]^{2,10}} = 88,5301$$

долларам. Итак, при покупке за облигацию номинала 100 следует заплатить \$88,5301. Более строгий вывод, приводящий к тому же результату, заключается в следующем.

Выражение для цены при отзыве через n полугодий имеет вид $(250/3) + (50/3)(1,06)^{-n}$ и минимума оно достигает при $n = 20$.

3.5.3. Выражение для цены в этом случае имеет вид

$$P_3 = \sum_{i=1}^n \frac{C(1-T)}{(1+r)^i} + \frac{F - \max((F-P)T_G, 0)}{(1+r)^n} = \\ = C(1-T) \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + \frac{F - \max((F-P)T_G, 0)}{(1+r)^n}.$$

См. [827, с. 123].

3.5.4. 1) Поскольку $P = F(1+r)^{-n}$, то

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{F \ln(1+r)}{(1+r)^n}, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Fn}{(1+r)^{n+1}}.$$

2) При $r = 0,04$ и $n = 40$ мы имеем

$$\Delta P \approx -0,00817 \cdot F \cdot \Delta n, \quad \Delta P \approx -8,011 \cdot F \cdot \Delta r.$$

$$\text{3.5.5. } \sum_{i=1}^n \frac{Fr}{(1+r)^i} + \frac{F}{(1+r)^n} = F.$$

3.5.6. Интуитивно это должно быть так, поскольку накопленные проценты не дисконтируются, в отличие от следующей купонной выплаты, которую получит покупатель. С математической точки зрения

$$F + Fc(1-\omega) = \frac{Fc}{(1+r)^\omega} + \frac{Fc}{(1+r)^{\omega+1}} + \frac{Fc}{(1+r)^{\omega+2}} + \dots + \frac{Fc + F}{(1+r)^{\omega+n-1}}.$$

Но если $r \geq c$, то $1 + c(1-\omega) \leq \frac{1+r}{(1+r)^\omega}$, и можно показать, что это невозможно. Используя другой подход, достаточно заметить, что покупатель должен был бы заплатить сумму $Fc[(1+r)^{1-\omega} - 1]$ вместо $Fc(1-\omega)$, и доказать, что первое меньше второго.

3.5.7. Количество дней между моментом сделки и следующей купонной выплатой рассчитывается по формуле $30 + 31 + 1 = 62$. Поскольку число дней между купонными выплатами равно $30 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 1 = 184$, то накопленные проценты составляют сумму $100 \cdot (0,1/2) \cdot (184 - 62)/184 = 3,31522$. Доходность до погашения можно рассчитать по формуле (3.20), причем ПЗ в ней должно быть равно $111,3 + 3,31522 = 114,61522$, а остальные параметры принимают значения: $r = 0,03$, $m = 2$, $\omega = 62/180$, $c = 5$, $F = 100$.

3.5.9. Пусть P_0 — цена облигации в настоящий момент, а P_1 — цена через период, причем в момент сразу после оплаты купона. Нам нужно показать, что $(c + P_1 - P_0)/P_0 = y$. Без ограничения общности предположим, что номинал составляет \$1, а n — количество оставшихся выплат. Тогда, в силу (3.18)

$$P_0 = (c/y)[1 - (1+y)^{-n}] + (1+y)^{-n} = (c/y) + (1+y)^{-n}(1 - c/y),$$

$$P_1 = (c/y)[1 - (1+y)^{-(n-1)}] + (1+y)^{-(n-1)} = (c/y) + (1+y)^{-(n-1)}(1 - c/y).$$

Поэтому $P_1 - P_0 = (y - c)(1+y)^{-n}$ и, кроме того, $yP_0 = c + (y - c)(1+y)^{-n}$. Отсюда и следует, что $c + P_1 - P_0 = yP_0$.

К главе 4

4.1.2. Уравнение (4.1) можно записать в следующем виде:

$$-\frac{\partial P/\partial y}{P} = \frac{C\{- (n/y) + y^{-2}[(1+y)^{n+1} - (1+y)]\} + nF}{C[(1+y)^{n+1} - (1+y)]/y + F(1+y)} = \frac{CA(y) + nF}{CB(y) + F(1+y)}.$$

Поэтому, чтобы убедиться в том, что волатильность монотонно возрастает при убывании C (если $y > 0$), достаточно показать, что

$$\frac{A(y)}{B(y)} < \frac{nF}{F(1+y)} = \frac{n}{1+y}.$$

Для этого сначала можно убедиться в том, что

$$\frac{A(y)}{B(y)} - \frac{n}{1+y} = \frac{(1+y)^2[(1+y)^n - 1 - ny(1+y)^{n-1}]}{B(y)(1+y)}.$$

Но выражение в квадратных скобках неположительно, поскольку оно обнуляется при $y=0$ и его производная $-n(n-1)y(1+y)^{n-2} \leq 0$ (в действительности это выражение строго отрицательно при $n > 1$).

4.1.3. 1) Заметим, что

$$-\frac{\partial P/\partial y}{P} = \frac{1 - (1+y)^{-n}}{y},$$

т. е. является убывающей функцией y .

2) Если продифференцируем $-(\partial P/\partial y)/P$ по y и преобразуем, то получим

$$-(1+y) \left\{ \frac{\sum_i i^2 (1+y)^{-i} C_i}{\sum_i (1+y)^{-i} C_i} - \left[\frac{\sum_i i (1+y)^{-i} C_i}{\sum_i (1+y)^{-i} C_i} \right]^2 \right\}.$$

Выражение внутри фигурных скобок здесь имеет смысл дисперсии с. в. X с распределением:

$$P\{X=j\} = \frac{(1+y)^{-j} C_j}{\sum_i (1+y)^{-i} C_i}, \quad j \geq 1.$$

Поэтому оно должно быть положительным. А это означает, что $-(\partial P/\partial y)/P$ является убывающей функцией доходности. См. [547, с. 318].

4.2.1. Она равна 2,67 года.

4.2.2. Пусть D — модифицированная дюрация по ее первоначальному определению. Тогда мы должны убедиться в том, что

$$100 \cdot D \cdot \Delta r = D_{\%} \cdot \Delta r_{\%},$$

где $\Delta r_{\%}$ обозначает изменение ставки в процентах. Поскольку $\Delta r = \Delta r_{\%}/100$, то из вышеуказанного тождества вытекает, что $D_{\%} = D$.

4.2.3. Если денежный поток облигации представляет собой набор сумм C , $C, \dots, C+F$, то денежный поток по закладной — это последовательность из величин $M, M, \dots, M$. При этом из условий вытекает, что $M > C$. Таким образом, дюрация у облигации больше, поскольку ее денежный поток больше «сдвинут» к моменту окончания платежей. Математически же нужно показать, что

$$C \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i} + nF(1+y)^{-n} > M \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i},$$

если

$$C \sum_{i=1}^n (1+y)^{-i} + F(1+y)^{-n} = M \sum_{i=1}^n (1+y)^{-i}.$$

Но отсюда вытекает, что $M - C = F(1+y)^{-n} / \sum_{i=1}^n (1+y)^{-i}$. Поэтому

$$\begin{aligned} C \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i} + nF(1+y)^{-n} - M \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i} &= (C - M) \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i} + nF(1+y)^{-n} = \\ &= -\frac{F(1+y)^{-n}}{\sum_{i=1}^n (1+y)^{-i}} \sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i} + nF(1+y)^{-n} = \frac{F}{(1+y)^n} \left[n - \frac{\sum_{i=1}^n i(1+y)^{-i}}{\sum_{i=1}^n (1+y)^{-i}} \right] > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что рыночные цены двух инструментов могут несовпадать. Чтобы показать это, предположим, что рыночная цена облигации в $a > 0$ раз больше цены закладной.

Затем представим величину M в виде функции параметров C , F , y , n и a . И вставим это выражение в формулу для ДМ закладной.

4.2.4. Дюрация по Маклею равна величине $\sum_i \frac{iM}{(1+y)^i} / \sum_i \frac{M}{(1+y)^i}$, где ежемесячные выплаты M взаимно сокращаются и остается лишь проделать простые алгебраические преобразования. См. [348, с. 94].

4.2.6. Можно не проверять потому, что выпуклость аддитивна. Проверьте это с помощью уравнения (4.10) и заметьте, что оно выполняется до тех пор пока все элементы денежного потока неотрицательны.

4.2.7. Предположим опять, что сумма обязательства в момент m равна L . И, следовательно, его ПЗ равно $L/(1+y)^m$. Стоимость купонной облигации с равным ПЗ будет расти со временем и станет равной L в момент m . В действительности, нетрудно показать, что в любой момент времени ПЗ облигации вместе с денежной суммой, накопленной от реинвестирования купонных платежей в точности равняется ПЗ обязательства.

4.2.8. Преобразуем уравнение (4.8) следующим образом:

$$\frac{\partial \text{НЗ}}{\partial y} = (1+y)^{m-1} P \left[m + (1+y) \frac{\partial P / \partial y}{P} \right].$$

Если m меньше ДМ, то выражение в скобках отрицательно. Это означает, что НЗ убывает с ростом y . Аналогично можно рассмотреть и другие случаи.

4.2.9. Пусть Δy означает изменение ставки (за время Δt), которое может быть как положительным, так и отрицательным. В момент Δt ПЗ обязательства будет равно величине $L/(1+y-\Delta y)^{m-\Delta t}$, в то время как ПЗ денежного потока облигации с учетом реинвестирования процентов — величине $\sum_i C_i/(1+y-\Delta y)^{i-\Delta t}$. Нам требуется доказать, что

$$\frac{L}{(1+y-\Delta y)^{m-\Delta t}} < \sum_i \frac{C_i}{(1+y-\Delta y)^{i-\Delta t}}.$$

Сокращая множители $(1+y-\Delta y)^{\Delta t}$, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{L}{(1+y-\Delta y)^m} < \sum_i \frac{C_i}{(1+y-\Delta y)^i},$$

которое должно быть справедливым, поскольку в тексте книги показано, что любое мгновенное изменение процентной ставки поднимает стоимость облигации по сравнению со стоимостью обязательства в силу выпуклости. Заметьте, что этот вывод имеет место при любом $\Delta t < m$.

4.2.10. Ищем ω_1 и ω_2 , удовлетворяющие системе уравнений

$$\omega_1 + \omega_2 = 1, \quad \omega_1 + 4\omega_2 = 3.$$

Ответ: $\omega_1 = 1/3$, $\omega_2 = 2/3$. Поэтому $1/3$ рыночной стоимости портфеля следует вложить в облигацию 1, а $2/3$ -- в облигацию 2.

4.2.11. 1) Заметим, что

$$\begin{aligned} P(y') &= A_1 e^{a_1 y'} + A_2 e^{-a_2 y'} - L_t = A_1 e^{a_1 y'} + A_2 e^{-a_2 y'} - (A_1 e^{a_1 y} + A_2 e^{-a_2 y}) = \\ &= A_1 e^{a_1 y} \left[e^{a_1 (y' - y)} + \frac{a_1}{a_2} e^{-a_2 (y' - y)} - \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) \right], \end{aligned}$$

если учесть равенство $A_1 a_1 e^{a_1 y} - A_2 a_2 e^{-a_2 y} = 0$. Легко показать также, что

$$g(x) = e^{ax} + \frac{a}{b} e^{-bx} - \left(1 - \frac{a}{b} \right) > 0,$$

если $x \neq 0$. Поэтому выражение в квадратных скобках положительно при $y' \neq y$. См. [547, с. 406—407]. Но есть и более короткое доказательство. Скажем, легко видеть,

что

$$A_1 = \frac{a_2 e^{-a_1 y}}{a_1 + a_2} L_t > 0, \quad A_2 = \frac{a_1 e^{a_2 y}}{a_1 + a_2} L_t > 0.$$

Поэтому $P''(y) = A_1 a_1^2 e^{a_1 y} + A_2 a_2^2 e^{-a_2 y} > 0$.

2) Нетрудно видеть, что портфель с денежными поступлениями в моменты t_1, t_2, t_3 можно собрать таким, что он будет стоить больше, чем одна сумма, относящаяся к моменту $T < t_3$ после сдвига [496, с. 635].

4.2.12. Чтобы доказать, что правая часть уравнения (4.12) не больше j , продифференцируем ее по y и покажем, что первая производная меньше нуля. Иными словами, что эта правая часть убывает по y . Наконец, затем покажем, что она сближается с j при $y \rightarrow 0$. Альтернативный подход использует тот факт, что $(1+y)^{-j} \geq 1 - jy$. Еще для обоснования нашего факта можно использовать индукцию по j .

4.3.1. Пусть C — выпуклость в первоначальном смысле, а $C_{\%}$ — выпуклость в процентах. И нам нужно показать, что

$$100 \cdot C \cdot (\Delta r)^2 = C_{\%} \cdot (\Delta r_{\%})^2,$$

где $\Delta r_{\%}$ обозначает изменение ставки в процентах. Но это и означает, что $C_{\%} = C/100$, поскольку $\Delta r = \Delta r_{\%}/100$. См. [490, с. 29].

4.3.2. Нужно всего лишь использовать правило дифференцирования сложной функции. Напомним, что $R = -\partial P/\partial y$, а $C = (\partial^2 P/\partial y^2)(1/P)$. См. [547, с. 333].

4.3.4. С помощью уравнения (4.15) можно проверить, что выпуклость равна $\frac{CA(y) + n(n+1)y^3}{CB(y) + y^3(1+y)^2}$, где

$$A(y) = 2(1+y)^{n+2} - 2(1+y)^2 - 2ny(1+y) - n(n+1)y^2, \quad B(y) = y^2(1+y)^2[(1+y)^n - 1].$$

Поэтому, чтобы обосновать утверждение, достаточно показать, что $A(y)/B(y) < n \times \times (n+1)/(1+y)^2$, или, что эквивалентно (после упрощений),

$$G(y) = 2(1+y)^{n+1} - y^2 n(n+1)(1+y)^{n-1} - 2(1+y) - 2ny < 0.$$

Но легко показать, что $G(y)$ выпукла вверх при $y > 0$, поскольку $G''(y) < 0$ при $y > 0$. И, следовательно, функция

$$G'(y) = 2(n+1)(1+y)^n - 2yn(n+1)(1+y)^{n-1} - y^2(n-1)n(n+1)(1+y)^{n-2} - 2(1+n) < 0$$

отрицательна при $y > 0$, поскольку она убывает при $y > 0$ и $G'(0) = 0$. Но это и приводит к нужному выводу, так как $G(0) = 0$.

4.3.5. Мы приведем обоснование, использующее лишь элементарную математику. Предположим, что вселенная состоит из трех типов бескупонных облигаций ($n=3$). Заметим, что в силу упр. 4.3.3 $C_i = D_i(D_i+1)/(1+y)^2$. Поэтому выпуклость портфеля, которая является целевой функцией, может быть записана в следующем виде

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i C_i = (1+y)^{-2} \sum_{i=1}^3 \omega_i (D_i^2 + D_i) = (1+y)^{-2} \left(D + \sum_{i=1}^3 \omega_i D_i^2 \right).$$

И ясно, что ее можно заменить более простой функцией

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i D_i^2. \quad (33.1)$$

Нетрудно показать, что для различных $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$

$$\omega_i = \frac{D - D_j + (D_j - D_k)\omega_k}{D_i - D_j}, \quad \omega_j = \frac{D - D_i + (D_i - D_k)\omega_k}{D_j - D_i},$$

если использовать два имеющихся линейных ограничения. Поэтому остается лишь одна независимая переменная ω_k и целевая функция (33.1) превращается в новую

целевую функцию

$$\begin{aligned} & \frac{D - D_j + (D_j - D_k)\omega_k}{D_i - D_j} D_i^2 + \frac{D - D_i + (D_i - D_k)\omega_k}{D_j - D_i} D_j^2 + \omega_k D_k^2 = \\ & = \frac{(D - D_j)D_i^2 - (D - D_i)D_j^2}{D_i - D_j} + \omega_k \left[\frac{(D_j - D_k)D_i^2 - (D_i - D_k)D_j^2}{D_i - D_j} + D_k^2 \right] = \\ & = D(D_i + D_j) - D_i D_j + \omega_k (D_i D_j - D_k(D_i + D_j) + D_k^2) = \\ & = D^2 - (D - D_i)(D - D_j) + \omega_k (D_k - D_i)(D_k - D_j). \quad (33.2) \end{aligned}$$

Выражение (33.2) оказывается равным $D^2 - (D - D_1)(D - D_3)$, если положить $i = 1$, $k = 2$, $j = 3$ и $\omega_k = 0$. При этом можно подтвердить, что это подходящий выбор, поскольку $\omega_1 = (D - D_3)(D_1 - D_3) > 0$ и $\omega_3 = (D - D_1)(D_3 - D_1) > 0$, так как $D_1 < D < D_3$. Отметим, что это и означает, что у нас портфель-штанга.

Для проверки того, что не существует другого портфеля с такой же большой выпуклостью мы покажем, что выражение (33.2) действительно достигает максимума при $\omega_2 = 0$, следующим образом. В (33.2) мы должны выбрать $\omega_2 = 0$ для $k = 2$, поскольку $(D_2 - D_i)(D_2 - D_j) < 0$. Рассмотрим далее целевую функцию при $k \neq 2$. Начнем с $k = 3$. Без потери общности предположим, что $D_1 = D_i < D_j = D_2$. В этом случае из формул для ω_1 и ω_2 вытекает, что

$$\frac{D_2 - D}{D_2 - D_3} \leq \omega_3 \leq \frac{D_1 - D}{D_1 - D_3}.$$

Подставляя правое неравенство в (33.2), мы находим верхнюю оценку для этой целевой функции в виде

$$\begin{aligned} & D^2 - (D - D_1)(D - D_2) + \frac{D_1 - D}{D_1 - D_3} (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) = \\ & = D^2 - (D - D_1)(D - D_2) + (D - D_1)(D_3 - D_2) = D^2 - (D - D_1)(D - D_3). \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай $k = 1$, предполагая без потери общности, что $D_2 = D_i < D_j = D_3$. На этот раз формулы для ω_2 и ω_3 приводят к неравенствам

$$\frac{D_2 - D}{D_2 - D_1} \leq \omega_1 \leq \frac{D_3 - D}{D_3 - D_1}.$$

Подставляя правое из них в (33.2), мы получаем такую же верхнюю оценку для этой целевой функции:

$$\begin{aligned} & D^2 - (D - D_2)(D - D_3) + \frac{D_3 - D}{D_3 - D_1} (D_1 - D_2)(D_1 - D_3) = \\ & = D^2 - (D - D_2)(D - D_3) + (D - D_3)(D_1 - D_2) = D^2 - (D - D_1)(D - D_3). \end{aligned}$$

4.3.6. Пусть во вселенной существуют $n \geq 3$ типов бескупонных облигаций. Если в портфеле более чем два типа облигаций, то заменим в нем облигации с некоторой такой дюрацией D , $D_1 < D < D_n$, на портфель из двух облигаций с крайними дюрациями, D_1 и D_n , имеющий ту же дюрацию. В силу упр. 4.3.5 новый портфель будет иметь более высокую выпуклость. Повторяя этот шаг для каждой из таких облигаций, мы закончим этот процесс получением портфеля-штанги, состоящим только из облигаций с крайними дюрациями D_1 и D_n .

К главе 5

5.2.1. Поскольку $P = \sum_i C_i [1 + S(i)]^{-i}$, то

$$P \approx \sum_i \left\{ C_i(y) + \frac{\partial C_i(y)}{\partial y} [S(i) - y] \right\},$$

если в разложении каждого слагаемого $C_i[1 + S(i)]^{-i}$ в ряд Тейлора в точке y взять первые два члена. Сравнивая далее приближенное равенство с представлением цены в виде $P = \sum_i C_i(y)$, приходим к соотношению

$$\sum_i \frac{\partial C_i(y)}{\partial y} [S(i) - y] \approx 0.$$

После чего остается лишь переписать его иначе. См. [38, с. 23—24].

5.3.1. Записывая наше уравнение

$$100 = \sum_{i=1}^{19} \frac{8/2}{(1+0,1)^i} + \frac{8/2+100}{(1+S(20))^{20}}$$

в виде $66,54 = 104(1 + S(20))^{-20}$ и решая его, получим $S(20) = 2,258\%$.

5.4.1. См. алгоритм, представленный на рис. 33.1.

5.5.1. 1) Используем математическую индукцию, предполагая для начала, что $S(1) = y_1$; тем самым $S(1) \geq y_1$. Далее, из равенства (5.1) и определения доходности от погашения вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{C}{(1+y_k)^i} + \frac{C+F}{(1+y_k)^k} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{C}{(1+S(i))^i} + \frac{C+F}{(1+S(k))^k} = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{C}{(1+y_{k-1})^i} + \left\{ \frac{F}{(1+y_{k-1})^{k-1}} - \frac{F}{(1+S(k-1))^{k-1}} \right\} + \frac{C+F}{(1+S(k))^k}. \quad (33.3) \end{aligned}$$

Но $S(k-1) \geq y_{k-1}$ по предположению индукции, поэтому слагаемое внутри больших скобок неотрицательно. С другой стороны, из предположения нормальности кривой доходности следует, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{C}{(1+y_k)^i} < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{C}{(1+y_{k-1})^i}.$$

Определение статического спреда по методу Ньютона—Рафсона:

ввод: $n, C, P, S[1..n]$;

действительные числа спред, цена, ценаD;

целое k ;

спред := 0;

для ($k = 1$ до 10) {

цена := $\sum_{i=1}^n C/(1+S[i] + \text{спред})^i + 100/(1+S[n] + \text{спред})^n$;

если $[| \text{цена} - P | < 0,000001]$ вывод спред;

ценаD := $-\sum_{i=1}^n iC/(1+S[i] + \text{спред})^{i+1} - 100 \times n/(1+S[n] + \text{спред})^{n+1}$;

спред := спред - (спред - P)/ценаD;

}

Рис. 33.1. В ячейке P находится цена (в процентах от номинала) купонной облигации с погашением через n периодов, в C — купон облигации, выраженный в процентах от номинала периода, а $S[i]$ обозначает i -периодную спот-ставку.

Следовательно,

$$\frac{C+F}{(1+y_k)^k} > \frac{C+F}{(1+S(k))^k}$$

или, иными словами, $S(k) > y_k$. Что и требовалось.

2) Оба утверждения легко вытекают из равенства (33.3).

5.5.2. Предположим, что купонная ставка равна 100%, а $y_1=0,05$, $y_2=0,5$, $y_3=0,6$ и $n=3$. Тогда искомые спот-ставки будут равны: $S(1)=0,05$, $S(2)=0,82093$ и $S(3)=0,58753$.

5.5.3. 1) Предположение означает, что мы можем использовать уравнение (33.3) с $F=0$. В этом случае, упрощая его, получим

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{(1+y_k)^i} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1+S(i))^i}.$$

Допустим теперь от противного, что кривая спот-ставок имеет наклон вверх, но $y_{k-1} > y_k$. Тогда из предыдущего равенства вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(1+y_{k-1})^i} + \frac{1}{(1+y_k)^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(1+S(i))^i} + \frac{1}{(1+y_k)^k} < \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1+S(i))^i}.$$

Иными словами, получено противоречие, поскольку имеем $y_k > S(k)$.

2) Данная кривая доходности приводит к следующим спот-ставкам: $S(1)=0,1$, $S(2)=0,89242$ и $S(3)=0,5036$. Ясно, что они не возрастают.

5.6.1. $S(1)=0,03$, $S(2)=0,04020$, $S(3)=0,0454$, $f(1, 2)=0,0505$, $f(1, 3)=0,0532$ и $f(2, 3)=0,0558$.

5.6.2. Вложить один доллар на $b+c$ периодов под $(b+c)$ -периодную форвардную ставку конца a -го периода, это все равно, что сначала вложить один доллар на b периодов под b -периодную форвардную ставку конца a -го периода и затем реинвестировать полученный капитал на c периодов под c -периодную форвардную ставку конца периода $a+b$.

5.6.3. ПЗ \$1 момента T , или $d(T)=[1+S(T)]^{-T}$, это то же самое, что ПЗ $1+f(T, T+1)$ долларов момента $T+1$. Иными словами,

$$(1+f(T, T+1))d(T+1) = \frac{[1+S(T+1)]^{T+1}}{[1+S(T)]^T} [1+S(T+1)]^{-(T+1)} = d(T).$$

Но есть и более короткое доказательство:

$$f(T, T+1) = \frac{[1+S(T+1)]^{T+1}}{[1+S(T)]^T} - 1 = \frac{[1+S(T)]^{-T}}{[1+S(T+1)]^{-(T+1)}} - 1 = \frac{d(T)}{d(T+1)} - 1.$$

5.6.4. Десятилетняя спот-ставка равна 5,174%. Увеличим теперь цену облигации до \$60,6. Тогда 10-летняя спот-ставка окажется равной $2[(1/0,606)^{1/20} - 1] = 0,05072$. Изменение в процентах $\sim 1,97\%$. В соответствии с упр. 5.6.3 искомая форвардная ставка $f(19, 20) = 2[0,62/d(20) - 1]$. Множитель 2 превращает форвардную ставку периода в ежегодную ставку. Заметьте, что каждый год состоит из двух периодов. Простые вычисления показывают, что такая форвардная ставка изменит свое значение с 6,667% до 4,620%. На этот раз в процентном отношении изменение составит, следовательно, 30,7%!

5.6.5. Из цепочки (5.3) вытекает, что $f(j, j+1) > S(j+1) > S(j)$, если спот-ставки растут со временем. Аналогично, из (5.4) следует, что $f(j, j+1) < S(j+1) < S(j)$, если кривая спот-ставок убывает со временем. Наконец, $f(j, j+1) = S(j+1) = S(j)$, если кривая спот-ставок плоская. См. также [147, с. 40].

5.6.6. 1) В противном случае существуют арбитражные возможности. См. [198], [234, с. 385], [746, с. 526]. В нестабильной ситуации арбитражная логика не имеет

места: хотя мы и можем определить форвардную ставку, но не существует каких-либо априорных соображений о том, что какая-то будущая ставка должна быть известна сегодня наверняка.

2) Поскольку все они получаются из спот-ставок настоящего момента, относящихся к указанному периоду в соответствии с (1) [731, с. 165].

5.6.7. 1) Используя формулу (3.6), записываем уравнение для F в виде

$$1000 = \frac{27}{0,0255} \left[1 - \frac{1}{(1 + 0,0255)^{100}} \right] + \frac{F}{(1 + 0,0255)^{100}}.$$

Решая его получаем, что $F = 329,1686$.

2) Они эквивалентны, поскольку их денежные потоки полностью совпадают.

3) Опять используйте для проверки равенство (3.6). См. [302].

5.6.8. Вероятность дефолта равна $1 - (0,92/0,94) = 0,0213$. Форвардная вероятность дефолта f удовлетворяет уравнению $(1 - 0,0213)(1 - f) = (0,84/0,87)$. Из него получаем, что $f = 0,0135$.

5.6.9. Пусть $S(i)$ означает вероятность того, что корпорация переживет i периодов, а $d_c(\cdot)$ — дисконтирующий множитель у бескупонных облигаций корпорации.

1) По определению $d_c(i) = d(i)S(i)$.

2) Как и в упр. 5.6.3, $1 + f_c(i - 1, i) = d_c(i - 1)/d_c(i)$. Поэтому форвардная вероятность дефолта для i -го периода есть

$$\frac{S(i - 1) - S(i)}{S(i - 1)} = 1 - \frac{S(i)}{S(i - 1)} = 1 - \frac{d_c(i)d(i - 1)}{d_c(i - 1)d(i)} = 1 - \frac{1 + f(i - 1, i)}{1 + f_c(i - 1, i)} \approx f_c(i - 1, i) - f(i - 1, i).$$

См. [583, с. 96—97]. Форвардная вероятность дефолта называется также **ставкой риска** [846].

5.6.10. Форвардная ставка — это число f , удовлетворяющее равенству*) $e^{iS(i) + (j-i)f} = e^{jS(j)}$.

5.6.11.

Период (n)	Спот-ставка периода в %	Однопериодная форвардная ставка в %
1	2,00	
2	2,50	3,00
3	3,00	4,00
4	3,50	5,00
5	4,00	6,00

5.6.12. 1) Пусть $S(1) \rightarrow S(1) + \Delta u$ и, в общем случае, $S(i) \rightarrow S(i) + \Delta u/i$. Убедиться в том, что такое изменение спот-ставок годится, можно с помощью формулы (5.9).

2) В силу (5.5) цена n -периодной бескупонной облигации равна (в %)

$$[(1 + S(1))(1 + f(1, 2)) \dots (1 + f(n - 1, n))]^{-1}.$$

*) Но можно дать и другое объяснение. Пусть в непрерывном случае спот-ставка обозначается $\bar{S}(i)$, а форвардная — $\bar{f}(i, j)$. Тогда они связаны с обычными ставками $S(i)$ и $f(i, j)$ соотношениями

$$\bar{S}(i) = \ln(1 + S(i)), \quad \bar{f}(i, j) = \ln(1 + f(i, j)).$$

Следовательно, (5.9) вытекает из (5.2), поскольку

$$\bar{f}(i, j) = \frac{1}{j - i} \ln \left[\frac{(1 + S(j))^j}{(1 + S(i))^i} \right] = \frac{j\bar{S}(j) - i\bar{S}(i)}{j - i}.$$

Ну а (5.8) вытекает из очевидного соотношения

$$(1 + f(0, 1))(1 + f(1, 2)) \dots (1 + f(n - 1, n)) = (1 + S(n))^n.$$

Достаточно прологарифмировать обе его части. — Прим. перев.

По предположению ни одна из форвардных ставок в этой формуле не меняется, если изменится $S(1)$. Поэтому для бескупонных облигаций $-\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{1+S(1)}$. Но аналогичные рассуждения приводят к тому же уравнению и для купонных облигаций. См. [231, с. 53].

5.6.13. В рассматриваемой ситуации инвестор уверен, что \$1 к моменту j превратится в $1 + jS(j)$ долларов. Предположим, что некто вкладывает \$1 в безрисковые ценные бумаги на i периодов и затем, в момент i , вкладывает накопленный капитал в безрисковые ценные бумаги на следующие $j-i$ периодов ($j > i$). Возникающая тем самым $(j-i)$ -периодная форвардная ставка f момента i должна удовлетворять уравнению

$$(1 + iS(i))[1 + (j-i)f] = 1 + jS(j).$$

См. [731, с. 7].

5.7.1. По n -периодной бескупонной облигации можно получить $(1 + S(n))^{-n}$ сегодня и $(1 + S(k, n))^{-(n-k)}$ в момент k . Поэтому ее доходность (за k периодов) равна

$$\left\{ \frac{(1 + S(k, n))^{-(n-k)}}{(1 + S(n))^{-n}} \right\}^{1/k} - 1.$$

Если же форвардная ставка реализуется, то $S(k, n) = f(k, n)$ и потому $(1 + S(k, n))^{(n-k)} = \frac{(1 + S(n))^n}{(1 + S(k))^k}$. Подставляя это равенство в предыдущее и получаем искомый результат.

5.7.2. Используя равенство (5.14), получаем, что

$$E(1 + S(1)) E(1 + S(1, 2)) \dots E(1 + S(n-1, n)) = (1 + S(1))[1 + f(1, 2)] \dots [1 + f(n-1, n)].$$

Но в силу (5.5) правая часть этого равенства как раз равна $(1 + S(n))^n$.

5.7.3. 1) Равенство (5.16) можно записать в виде:

$$\frac{E(1 + S(1, n))^{-(n-1)}}{(1 + S(1))} = \frac{1}{(1 + S(n))^n}. \quad (33.4)$$

Поэтому ясно, что для получения искомого соотношения достаточно использовать равенство $(1 + S(1, n))^{n-1} = (1 + S(1, 2))(1 + S(2, 3)) \dots (1 + S(n-1, n))$.

2) Рассмотрим случай $n=2$. Теория локального оценивания в среднем утверждает, что $E(1 + S(1, 2))^{-1} = (1 + S(1))(1 + S(2))^{-2}$. Но в силу (5.5) и по теории несмещенного оценивания в среднем это выражение равно $(1 + f(1, 2))^{-1} = [E(1 + S(1, 2))]^{-1}$. Таким образом, $E(1 + S(1, 2))^{-1} = [E(1 + S(1, 2))]^{-1}$. А по неравенству Йенсена такое возможно лишь когда величина $S(1, 2)$ постоянна.

5.7.4. Если бы эти теории были согласованы, то из упр. 5.7.3 (1) вытекало бы, что

$$E(1 + S(1, 2)) \dots (1 + S(n-1, n)) E \left[\frac{1}{(1 + S(1, 2)) \dots (1 + S(n-1, n))} \right] = 1.$$

Но по неравенству Йенсена это невозможно (при наличии случайности).

5.7.5. По предположению $S(1) = S(2) = \dots = s$. Поэтому

$$ES(i, i+1) < f(i, i+1) = s = S(i) *).$$

5.8.1. 1) Предположим, что доходности до погашения изменяются одинаково, а сдвиг кривой спот-ставок параллелен. Мы покажем, что кривая спот-ставок является плоской. Рассмотрим ценные бумаги с денежными поступлениями $C_i \neq 0$ в моменты t_i , $i = 1, 2$. В этом случае по определению

$$\sum_{i=1}^2 C_i e^{-S(i)t_i} = \sum_{i=1}^2 C_i e^{-y t_i}. \quad (33.5)$$

*) В силу (5.2): $1 + f(i, i+1) = (1 + S(i+1))^{i+1} (1 + S(i))^{-i}$. — Прим. ред.

Предположим далее, что кривая спот-ставок сдвигается параллельно на величину $\Delta \neq 0$. Тогда доходность до погашения также должна измениться на Δ , поскольку, в частности, доходность до погашения t_1 -периодной бескупонной облигации является спот-ставкой периода длины t_1 (тем самым, между прочим, доказано и (2)). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^2 C_i e^{-(S(t_i)+\Delta)t_i} = \sum_{i=1}^2 C_i e^{-(y+\Delta)t_i}.$$

Из последних двух уравнений вытекает, что

$$C_1 e^{-\Delta t_1} [e^{-y t_1} - e^{-S(t_1)t_1}] = C_2 e^{-\Delta t_2} [e^{-S(t_2)t_2} - e^{-y t_2}]. \quad (33.6)$$

Но уравнение (33.6) переходит в уравнение (33.5) при $\Delta=0$. Поэтому оно не может выполняться при других значениях Δ , так как показатели роста $e^{-\Delta t_1}$ и $e^{-\Delta t_2}$ различны при $t_1 \neq t_2$, если только при всех i не выполняются равенства $y=S(t_i)$. Другое доказательство приведено в [496, теорема 1].

5.8.2. По предположению $1+S(1)+\Delta y \rightarrow 1+S(i)+\Delta y \frac{1+S(i)}{1+S(1)}$. Поэтому

$$-\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{C_i}{(1+S(i))^i} - \frac{C_i}{[(1+S(i))(1+\Delta y/(1+S(1)))^i]}}{\Delta y \sum_i \frac{C_i}{(1+S(i))^i}} = \frac{\sum_i \frac{i C_i}{(1+S(i))^i}}{(1+S(1)) \sum_i \frac{C_i}{(1+S(i))^i}}.$$

5.8.3. См. [424, с. 561].

К главе 6

6.1.1. См. [273, с. 196].

6.1.2. $EXY = E(E(XY|Y)) = E(YE(X|Y)) = E(YEX) = EX \cdot EY$. Поэтому в силу (6.3) $\text{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = 0$.

6.1.3. См. [75, с. 3].

6.1.4. К цели приведут простые преобразования [30, с. 10].

6.1.5. Просто вытекает из (6.11). См. также [147, с. 16].

6.1.6. См. [492, сс. 14–15].

6.2.1. См. [273, с. 463].

6.3.1. Исходным данным соответствует линия регрессии $0,75 + 0,32x$. Коэффициент определенности $R=0,966038$. С другой стороны, легко показать, используя формулу (6.18), что $r=0,982872$. Но $r^2=0,982872 \times 0,982872=0,966038$.

6.4.1. 1) Если выражение для Y возвести в квадрат и взять математическое ожидание от обеих частей, то получим

$$EY^2 = DX_2 + \alpha^2 + \beta^2 DX_1 - 2\beta \text{Cov}(X_1, X_2).$$

Таким образом, выбор $\beta = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{DX_1}$ минимизирует правую часть этого равенства по β и остается положить $\alpha=0$ (см. [642, с. 19]).

2) Это верно потому, что $\text{Cov}(X_1, Y)$ равна 0. В самом деле,

$$E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) - \beta E(X_1 - EX_1)^2 = \text{Cov}(X_1, X_2) - \beta DX_1 = 0.$$

6.4.2. Продифференцируем функцию (6.20) по $\bar{X}$ и приравняем производную к нулю. Тогда среднее и окажется точкой экстремума. Ну а чтобы убедиться в том, что в этой точке наша функция достигает минимума, проверим, что ее вторая производная равна $2n > 0$. См. [417, сс. 429–430].

6.4.3. 1) Запишем смещение $(X - a)^2$ в следующем виде

$$((X - EX) - (a - EX))^2 = (X - EX)^2 + 2(X - EX)(EX - a) + (EX - a)^2$$

и возьмем математическое ожидание от обеих частей полученного выражения: $E(X - a)^2 = DX + (EX - a)^2$. Легко видеть, что минимум правой части достигается при $a = EX$.

2) Условное математическое ожидание $E((X_k - a)^2 | X_1, \dots, X_{k-1})$ при любом a равно

$$\begin{aligned} E(X_k^2 | X_1, \dots, X_{k-1}) - 2aE(X_k | X_1, \dots, X_{k-1}) + a^2 = \\ = E((X_k - E(X_k | X_1, \dots, X_{k-1}))^2 | X_1, \dots, X_{k-1}) + (a - E(X_k | X_1, \dots, X_{k-1}))^2, \end{aligned}$$

и ясно, что минимум последнего выражения достигается при $a = E(X_k | X_1, \dots, X_{k-1})$. См. [413, с. 173].

К главе 7

7.4.1. Это пример бычьей и оборонительной стратегии.

7.4.2. Максимальную прибыль можно получить следующим образом. Начальные расходы составляют величину $\Pi_3(X) - P$. Если опцион не исполняется, то внесенные наличные вырастают до X , финальной выплаты, и потому искомая прибыль будет равна $X - (\Pi_3(X) - P)$.

7.4.3. Страхование основано на диверсификации риска: огонь не уничтожает все застрахованные дома одновременно. И, наоборот, если ситуация на рынке ухудшается, то все диверсифицированные портфели «клянут носом» одновременно. См. [64, с. 271].

7.4.4. 1) Один год спустя выплата, очевидно, составит $100 + \alpha \max(S - X, 0)$, где α — число купленных опционов колло. Это объясняется тем, что исходный капитал равен \$100, а вклад на финансовом рынке будет расти до \$100, гарантируя, таким образом, сохранность капитала.

2) Поскольку 90 % денег нужно вложить на финансовом рынке, а имеющаяся сумма 1 год спустя должна быть достаточной для исполнения опциона колл, мы должны гарантировать, чтобы $100 = 90(1 + r)$. Поэтому $r = 11\%$.

7.4.5. Рассмотрим спрэд-бабочку, чья стоимость равна $C_{X-\Delta X} - 2C_X + C_{X+\Delta X}$, а цены исполнения указаны в индексах. Площадь под терминальной выплатой по спрэду равняется $(1/2)(2\Delta X)\Delta X = (\Delta X)^2$, а сама стоимость спрэда $C_{X-\Delta X} - 2C_X + C_{X+\Delta X}$ к моменту истечения срока сближается с терминальной выплатой. Поэтому стоимость соответствующего условно-постоянного требования должна к этому моменту быть примерно равной величине

$$(C_{X-\Delta X} - 2C_X + C_{X+\Delta X})(\Delta X)^{-2},$$

чтобы площадь под ней на том же интервале $(X - \Delta X, X + \Delta X)$ примерно равнялась единице. Но при $\Delta X \rightarrow 0$ указанная величина, очевидно, стремится к $\partial^2 C / \partial X^2$. См. [157].

К главе 8

8.1.1. Нужно действовать от противного и занять короткую позицию по дорогим облигациям и длинную по дешевым.

8.1.2. Пусть вектор $p \in \mathbb{R}^n$ обозначает цены всех n ЦБ. Тогда одно из необходимых условий арбитражной свободы состоит в том, чтобы любой портфель из данных ЦБ имел неотрицательную рыночную стоимость, если в каждом состоянии у него неотрицательные выплаты; иными словами, $p^\top \gamma \geq 0$, если $D\gamma \geq 0$. Это утверждение называется **слабой арбитражной свободой** [289, с. 71]. Эквивалентную форму этого свойства можно получить с помощью **леммы Фаркаша** [67, 289, 581]. Другое необходимое условие арбитражной свободы состоит в том, что $p^\top \gamma > 0$, если $D\gamma > 0$, и оно

говорит о том, что у портфеля ЦБ должна быть положительная рыночная стоимость, если в каждом из состояний выплаты по нему положительны. Интересно отметить, что оба условия вместе эквивалентны существованию вектора $\theta > 0$, удовлетворяющего равенству $D^T \theta = p$. Этот важный результат называется **арбитражной теоремой**, а m компонент вектора θ **ценами состояний** [692, с. 39]. Выше запись $v > 0$ означала, что каждая компонента вектора v положительна, а $v \geq 0$ — что каждая компонента вектора v неотрицательна.

8.2.1. Нужно показать, что $\text{ПЗ}(X_2 - X_1) \geq C_{X_1} - C_{X_2}$, если $X_1 < X_2$. Предположим, что это не так. Тогда мы сможем получить арбитражную прибыль, покупая опцион по цене C_{X_2} и продавая по цене C_{X_1} , поскольку такая сделка может привести к положительной выплате. В самом деле, внесем на безрисковый счет в банке сумму $\text{ПЗ}(X_2 - X_1)$. Тогда в момент исполнения средств для покрытия выплат по опционам колл окажется достаточно, поскольку совокупная выплата будет равна, соответственно, при:

- 1) $S < X_1$: $X_2 - X_1 > 0$;
- 2) $X_1 \leq S < X_2$: $X_2 - X_1 - (S - X_1) = X_2 - S > 0$;
- 3) $X_2 \leq S$: $X_2 - X_1 - (X_2 - X_1) = 0$.

Другой вариант обоснования — использование паритета пут—колл:

$$C_{X_1} = P_{X_1} + S - \text{ПЗ}(X_1), \quad C_{X_2} = P_{X_2} + S - \text{ПЗ}(X_2).$$

В этом случае достаточно взять разницу и воспользоваться импликацией $X_1 < X_2 \rightarrow P_{X_1} \leq P_{X_2}$:

$$C_{X_1} - C_{X_2} = P_{X_1} - P_{X_2} - \text{ПЗ}(X_1) + \text{ПЗ}(X_2) \leq \text{ПЗ}(X_2 - X_1).$$

8.2.2. Если рассмотрим опцион пут, обеспеченный наличными, то сразу придем к неравенству $P \leq X$. В качестве альтернативы можно заметить, что поскольку в банк никто не будет вкладывать деньги, то процентную ставку можно считать нулевой, а $\text{ПЗ}(X) = X$. Но в этом случае применима лемма 8.2.4 и мы также получаем, что $P \leq X$.

8.3.1. 1) Паритет пут—колл подсказывает, что пороговое значение процентной ставки равно $r = 12,905\%$, поскольку при таком значении $95 \times e^{-r/3} = 3 + 94 - 6 = 91$. Но в рассматриваемой ситуации $r > 10\%$, поэтому $C - P > S - \text{ПЗ}(X)$. Таким образом, мы можем получить арбитражную прибыль, если продадим опцион колл, купим опцион пут, акцию и предоставим кредит на сумму $\text{ПЗ}(X)$.

2) Примените паритет пут—колл $\text{ПЗ}(X) = P + S - C$. См. [346].

8.3.2. Рассмотрим выплаты по следующим двум портфелям:

	Начальное вложение	Выплата в момент исполнения	
		$S_1 > X$	$S_1 \leq X$
Купить опцион колл	$-C$	$S_1 - X$	0
Продать облигацию	$-\text{ПЗ}(X)$	X	X
Всего	$-C - \text{ПЗ}(X)$	S_1	X
Купить акцию	$-S_0$	S_1	S_1

(S_0 и S_1 обозначают цену акции сейчас и в момент исполнения, соответственно). Таблица показывает, что первый портфель в любом случае стоит не меньше второго. А, следовательно, он не может стоить меньше, т.е. $C + \text{ПЗ}(X) \geq S_0$ (более простой способ — использовать паритет пут—колл). Что же касается Американских опционов колл на бездивидендные акции, то они не могут стоить меньше Европейских. См. [317, с. 577].

8.3.3. Неравенство $C \geq S - \text{ПЗ}(X)$ установлено при условии отсутствия арбитража. Очевидно, не всякая последовательность цен акций свободна от арбитража. Например, такой не является цена $S > \text{ПЗ}(X)$, поскольку в этом случае мы сможем занять короткую позицию по акции, вложить вырученные деньги в безрисковые облигации и в момент исполнения опциона закрыть короткую позицию с помощью суммы X , полученной от облигаций. Если требования по марже не учитывать, то это вполне возможно сделать в силу нашего предположения, что цена акции в момент исполнения меньше самой цены исполнения.

8.3.4. Рассмотрим следующий портфель: один короткий опцион колл, один длинный опцион пут, один сертификат акции, кредит на сумму $\text{ПЗ}(X)$ с погашением в момент τ , а также кредит на сумму $D^*d(t_1)$ с погашением в момент t_1 . Исходный денежный поток равен $C - P - S + \text{ПЗ}(X) + D^*d(t_1)$. Величина ссуды $D^*d(t_1)$ будет оплачена за счет дивидендов. В остальном рассуждение повторяет проведенное при установлении паритета пут—колл (8.1). См. [746, с. 148].

8.3.5. Опцион колл с шапкой эквивалентен длинному Европейскому опциону колл с ценой исполнения X и короткому Европейскому опциону колл с ценой исполнения H , т.е. вертикальному спреду [111].

8.3.6. Предположим, что платежная функция имеет вид

$$F(S) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } S < 0, \\ \alpha_i S + \beta_i, & \text{если } S_i \leq S < S_{i+1} \text{ при } 0 \leq i < n, \\ \alpha_n S + \beta_n, & \text{если } S_n \leq S \end{cases}$$

где $0 = S_0 < S_1 < \dots < S_n$ — точки изломов, равенства $\alpha_{i-1}S_i + \beta_{i-1} = \alpha_i S_i + \beta_i$ обеспечивают непрерывность платежной функции, а $\beta_0 = 0$ для того, чтобы она проходила через начало координат. Ясно также, что $F(0) = 0$ и $F(S_i) = \sum_{j=1}^i \alpha_{j-1}(S_j - S_{j-1})$ при $i > 0$.

В качестве обобщенного опциона можно использовать портфель из α_0 Европейских опционов колл с ценой исполнения $S_0 = 0$, $(\alpha_1 - \alpha_0)$ Европейских опционов колл с ценой исполнения S_1 , $(\alpha_2 - \alpha_1)$ Европейских опционов колл с ценой исполнения S_2 и т.д., все с одной и той же датой исполнения. Если цена акции S в этот момент оказывается между величинами S_i и S_{i+1} , то выплата по опциону равна

$$F(S) = F(S_i) + \alpha_i(S - S_i) = \sum_{j=1}^i \alpha_{j-1}(S_j - S_{j-1}) + \alpha_i(S - S_i).$$

Среди опционов пакета в деньгах заканчивают свой путь только те опционы, цена исполнения которых не превосходит S_i . При этом выплата по ним равна

$$\alpha_0(S - S_0) + \sum_{j=1}^i (\alpha_j - \alpha_{j-1})(S - S_j) = \alpha_i(S - S_i) + \sum_{j=1}^i \alpha_{j-1}(S_j - S_{j-1}),$$

т.е. такая же, как у обобщенного опциона.

Если платежная функция не проходит через начало координат, скажем, пересекает ось ординат в точке β , то в портфель следует добавить бескупонных облигаций с суммарным обязательством на момент исполнения, равным β . В общем же, когда в качестве платежной функции выбирается произвольная непрерывная функция, то можно использовать кусочно-линейную функцию с достаточным количеством точек излома, чтобы она приближала исходную функцию с достаточной точностью. См. [236, с. 371].

8.4.1. Из упр. 8.3.2 вытекает, что стоимость опциона не меньше $45 - 40 \times e^{-0.08/6} > > 45 - 40 = 5$ долларов на акцию. Поскольку акция считается переоцененной и нет дивидендов, то внутренняя стоимость опциона никогда не будет больше \$5. Более

того, при прочих равных условиях стоимость опциона колл уменьшается по мере приближения к моменту исполнения. Поэтому инвестору следует продать опцион.

8.4.2. Если кратко, то условие можно записать в виде $X - ПЗ(X) > D$. Выберем момент непосредственно перед выплатой дивидендов. Тогда, если владелец опциона колл исполняет его (в этот момент), то стоимость актива в его руках сразу после этого момента становится равной величине $S - X + D'$, где D' обозначает величину дивидендов, получаемых при «прохождении» момента выплаты. Заметим, что $D' \leq D$. С другой стороны, если владелец решает не исполнять опцион, то после выплаты дивидендов в его руках остается стоимость, по определению равная C . А в силу (8.2) мы заключаем, что

$$C \geq S - ПЗ(X) - (D - D') > S - X + D'.$$

Поэтому опцион колл лучше продать, чем исполнять его непосредственно перед выплатой дивидендов. Для доказательства искомого результата остается объединить проведенное рассуждение с теоремой 8.4.2. См. [236, с. 140].

8.4.3. Поскольку это хуже, чем исполнять опцион сразу после выплаты дивидендов. Если же более формально, то пусть S — цена акции непосредственно перед выплатой дивидендов, S' — сразу после нее, а D — величина дивидендов. Поскольку интервальная разница слишком коротка, то S' должно равняться величине $S - D$. Поэтому немедленное исполнение сразу после выплаты дивидендов принесет сумму $X - S' = X - S + D$, а исполнение непосредственно перед ней — $X - S$. Но проценты от владения суммой $X - S$ в течение такого короткого периода можно не учитывать. Поэтому предпочтительным является, очевидно, более позднее исполнение [236, с. 251].

8.4.4. Это неравенство говорит о том, что исполнение такого опциона сейчас и затем инвестирование выручки в безрисковые облигации приводит в конечном счете к сумме, большей X . Однако, из леммы 8.2.4 следует, что Американский опцион пут никогда не может стоить больше X . Поэтому лучше исполнить его.

8.4.5. 1) В противном случае стратегия покрытого колла гарантирует арбитражную прибыль.

2) Объедините (1) с паритетом пут—колл.

3) Лемма 8.2.4 утверждает, что $P \leq X$. Случай же $P < X$ не может реализоваться, поскольку это будет означать, что опцион пут продается по цене, меньшей его внутренней стоимости.

8.4.6. Предположим, что $C - P < S - X$. Тогда выписывайте опцион пут, покупайте опцион колл, занимайте короткую позицию по акции (этим и объясняется предположение отсутствия дивидендов) и помещайте сумму X на банковский счет. В этом случае суммарный денежный поток оказывается положительным. И если короткий опцион пут исполняется досрочно, то снимаете деньги с банковского счета и оплачиваете акцию, которую затем используете для закрытия короткой позиции. Тем самым обязательства по сделке будут выполнены, а оставшийся опцион колл принесет неотрицательный доход.

8.6.1. Хотя цена исполнения у них одна и та же, но выплата у портфеля из опционов больше, когда заключительные цены на акцию таковы, что некоторые, но не все, опционы пут оказываются в деньгах.

К главе 9

9.2.1. Предположим, что $R > u$. Тогда, занимая короткую позицию по акции и затем инвестируя выручку в безрисковые облигации на один период, мы получаем чистую арбитражную прибыль. Подобное рассуждение можно провести и для случая $d > R$.

9.2.2. Пусть P означает искомую текущую цену ценной бумаги B . Рассмотрим портфель, состоящий из одной единицы A и h единиц B , стоимостью в настоящий момент $100 + Ph$. Через период по нему можно будет получить $160 + (50 \times h)$ или $80 + (60 \times h)$. Выберем значение $h = 8$, чтобы обе эти суммы были равны 560. Заметим, что величина h здесь — это просто дельта, поскольку диапазон цен у A в конце периода равен $160 - 80 = 80$, а у B $60 - 50 = 10$, т. е. их отношение равно 8. Поскольку НЗ этого частного портфеля не является случайным, то его ПЗ должно быть равно $560/e^{0,1} = 506,71$. Отсюда получаем, что $P = (506,71 - 100)/8 \approx 50,84$. Приведенная выше методика, очевидно, носит общий характер.

9.2.4. Предположим, что $k > 0$ (другой случай симметричен). Занимаем короткую позицию с M/k опционами и используем выручку от их продажи для покупки $(M/k)h$ единиц акции и $(M/k)B$ долларов в безрисковых облигациях. Такая сделка приносит чистый доход в настоящем, равный

$$\frac{M}{k}(hS + B + k) - \frac{Mh}{k}S - \frac{MB}{k} = M$$

долларам. Обязательства же через период нулевые, поскольку если вынести за скобки множитель M/k , то занятая выше позиция сводится к покупке h единиц акции и B долларов в безрисковых облигациях, что вполне дублирует опцион. См. [289, с. 7].

9.2.5. Ожидаемая стоимость опциона колл в риск-нейтральной экономике через период равна $pC_u + (1-p)C_d$. После дисконтирования по безрисковой процентной ставке стоимость опциона колл в настоящий момент оказывается равной $\frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}$, что совпадает со значением $C = hS + B$ в соответствии с равенством (9.3).

9.2.6. Если $Su \leq X$, то $S - X < 0$, а $C = 0 > S - X$. Если же $X \leq Sd$, то

$$C = \frac{p(Su - X) + (1-p)(Sd - X)}{R} = S - \frac{X}{R} > S - X.$$

Наконец, если $Sd < X < Su$, то $C = p(Su - X)/R$, что превосходит величину $S - X$, поскольку

$$C = \frac{(R-d)(Su - X)}{R(u-d)} = \frac{Ru - ud}{Ru - Rd}S - \frac{R-d}{Ru - Rd}X > S - X.$$

См. [236, с. 173]. Более компактный вывод получится, если заметить, что в силу (9.4)

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R} \geq \frac{p(Su - X) + (1-p)(Sd - X)}{R} = S - \frac{X}{R} > S - X.$$

9.2.7. В справедливости этого факта легко убедиться по формуле (9.1) и в связи с полной аналогией при получении значений дельта для других узлов биномиального дерева.

9.2.8. Цена акции в риск-нейтральной экономике к моменту исполнения должна возрасти по безрисковой ставке до величины SR^n . Поскольку же $d < R < u$, то одновременно должно иметь место и соотношение $R \rightarrow u$. Поэтому, во-первых, из формулы вытекает, что $C = 0$, если $\text{ПЗ}(X) = XR^{-n} > S$. Это верно потому, что тогда $X > Su^n$ и, следовательно, опцион колл финиширует вне денег. С другой стороны, из формулы вытекает, что $C = S - \text{ПЗ}(X)$, если $\text{ПЗ}(X) \leq S$. А это оправдано потому, что заключительная выплата по опциону колл будет равна $SR^n - X$.

9.2.10. 1) Рассмотрим спред-бабочку с такими ценами исполнения X_L , X_M и X_H , что

$$Su^{i-1}d^{n-i+1} < X_L < Su^i d^{n-i}, \quad X_M = Su^i d^{n-i}, \quad Su^i d^{n-i} < X_H < Su^{i+1} d^{n-i-1},$$

но $2X_M - X_H - X_L = 0$. По этому портфелю выплачивается сумма $Su^i d^{n-i} - X_L$ долларов,

если цена акции становится равной $Su^i d^{n-i}$. Более того, выплата по нему равна нулю в любом другом случае. Наконец, чтобы выплачиваемая сумма могла равняться 1, т.е. чтобы $Su^i d^{n-i} - X_L = 1$, достаточно выбрать параметры S, u, d, n, i так, чтобы $Su^i d^{n-i}(1 - d/u) > 1$.

2) Утверждение выполняется, поскольку в непрерывной сделке опционы колл можно скопировать. Отметим, что стратегия непрерывной торговли, описанная в п.9.2.1, не требует, чтобы цена исполнения совпадала с одним из $n + 1$ значений для цены акции.

9.2.11. Чтобы величина p была риск-нейтральной вероятностью, обе ценные бумаги должны приносить ожидаемый доход, равный R , или должно быть

$$p = \frac{R - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{R - d_2}{u_2 - d_2}.$$

Но нетрудно так выбрать R, u_1, d_1, u_2 , и d_2 , что эти равенства не будут выполняться. См. [836, с. 91].

9.2.14. Ограниченная точность цифровых компьютеров заставляет вычислять и хранить вместо $b(j; n, p)$ величины $\ln b(j; n, p)$. А связанные с этим изменения в алгоритме сводятся к соотношениям:

$$\begin{aligned} b &:= \ln n! - \ln a! - \ln(n - a)! + a \times \ln p + (n - a) \times \ln(1 - p); \\ b &:= b + \ln p + \ln(n - j + 1) - \ln(1 - p) - \ln j; \\ C &:= C + e^b \times (D - X)/R; \end{aligned}$$

9.3.1. 1) Этот подход, предложенный Джэрроу и Раддом [690], отличается от рассмотренного в тексте в том, что в нем не устанавливается риск-нейтральная вероятность [346, с. 546]. См. также [346, сс. 103—104, 544], [289, с. 146] и [290, с. 197].

2) Теоретически выражение $p \equiv (R - d)/(u - d)$ для риск-нейтральной вероятности при новом выборе параметров u и d должно использоваться как того требует аргументация подобной сделки. В действительности же, из леммы 9.3.3 вытекает, что выражение для риск-нейтральной вероятности упростится в том смысле, что

$$\frac{e^{\sigma^2(\tau/n)/2} - e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}}{e^{\sigma\sqrt{\tau/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Однако, если мы рассматриваем экономику дискретного времени как приближение к ее непрерывному аналогу в пределе и нас интересует ее поведение лишь при $n \rightarrow \infty$, то в пределе должна использоваться либо p , либо $1/2$.

9.3.2. Нужно воспользоваться выражениями (9.15) при $n \rightarrow \infty$, асимптотическим соотношением $e^x \sim 1 + x + x^2/2, x \rightarrow 0$, и представлениями (9.12). В результате получим, что

$$\begin{aligned} E(S_{\Delta t} - S)/S &= E(e^{B_1} - 1) = \frac{1}{2} \left[e^{\sigma\sqrt{\tau/n}} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}} \right) + e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}} \right) \right] - 1 \sim \\ &\sim \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} + \sigma^2 \frac{\tau}{n} \right) \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}} \right) + \left(1 - \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} + \sigma^2 \frac{\tau}{n} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{n}} \right) \right] - 1 \sim \\ &\sim \frac{\tau}{n} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right). \end{aligned}$$

9.3.4. Заметим, что

$$p = \frac{\left[1 + \frac{r\tau}{n} + \left(\frac{r\tau}{n}\right)^2/2! + \dots\right] - \left[1 - \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} + \left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right)^2/2! - \dots\right]}{\left[1 + \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} + \left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right)^2/2! + \dots\right] - \left[1 - \sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}} + \left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right)^2/2! - \dots\right]}.$$

9.3.5. Вероятность того, что $S_\tau \geq X$ равна вероятности того, что $\ln(S_\tau/S) \geq \ln(X/S)$. Но из доказательства теоремы 9.3.4 вытекает, что это событие происходит с вероятностью

$$P\{B \geq \ln(X/S)\} \sim 1 - \Phi(-y) = \Phi(y) = \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}).$$

Для получения искомого результата остается умножить ее на ПЗ(1), т.е. на величину $e^{-r\tau}$. См. [495].

9.3.6. Паритет пут—колл утверждает, что $C - P = S - \text{ПЗ}(X)$. Поскольку правая часть в этом равенстве равна $S - Xe^{-r\tau}$, то предложенное утверждение очевидно.

9.3.7. Воспользуемся общей формулой для стоимости опциона колл $C = e^{-r\tau} \times \mathbb{E} \max(0, S_\tau - X)$, где математическое ожидание берется по распределению цены (с.в.) S_τ , а r — ежегодная ставка непрерывного начисления процентов.

По лемме 9.3.3 с.в. $B = \ln(S_\tau/S)$ асимптотически нормально распределена со средним $\mu\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$, причём $\mu = r - \sigma^2/2$. Но это означает, что величина S_τ имеет логнормальное распределение с параметрами $(\ln S + \mu\tau, \sigma^2\tau)$. С другой стороны, из упр. 6.1.6 вытекает, что для плотности $f(y) = (y\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\{-(\ln y - \mu)^2/2\sigma^2\}$ логнормального распределения с параметрами (μ, σ^2) имеем $\int_a^\infty y f(y) dy = e^{\mu + \sigma^2/2} \times \Phi\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma} + \sigma\right)$. И, кроме того, легко показать, что $\int_a^\infty f(y) dy = \Phi\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma}\right)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} C &= e^{-r\tau} \int_X^\infty \frac{y - X}{y\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(\ln y - \ln S - \mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} dy = \\ &= e^{-r\tau} \left\{ e^{\ln S + \mu\tau + \sigma^2\tau/2} \Phi\left(\frac{\ln S + \mu\tau - \ln X}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - X \Phi\left(\frac{\ln S + \mu\tau - \ln X}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) \right\} = \\ &= S \Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - X e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned}$$

9.3.8. 1) У этого выбора корректная средняя ставка прироста цены акции за период в том смысле, что $\mathbb{E}B_i \sim r\tau/n$, $n \rightarrow \infty$. В самом деле,

$$q \ln u + (1 - q) \ln d \sim \sigma \sqrt{\frac{\tau}{n}} \frac{2e^{r\tau/n} - (u + d)}{u - d} + \frac{\ln(X/S)}{n} \sim \frac{r\tau}{n},$$

поскольку $u - d \sim 2\sigma\sqrt{\tau/n}$, $2e^{r\tau/n} - (u + d) \sim 2(r\tau - \ln(X/S))/n$. Второй момент прироста цены за период также сходится ко второму моменту при стандартном выборе из текста.

2) Если n чётно, то $Su^{n/2}d^{n/2} = X$, что помещает цену исполнения в центр дерева в момент погашения. Если же n нечётно, то $Su^{(n+1)/2}d^{(n-1)/2} = Xe^{\sigma\sqrt{\tau/n}}$ или $Sd^{(n-1)/2}u^{(n+1)/2} = Xe^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}$; цена исполнения, таким образом, оказывается между двумя средними узлами при погашении. См. [555, 589].

9.4.3. 1) Имеется $m + 2$ равенства: запись дисконтированной ожидаемой выплаты по опционам (m равенств), дисконтированная ожидаемая цена акции (одно равенство) и равенство суммы заключительных вероятностей единице (одно равенство). Поэтому можно разделить (имеющийся) промежуток времени на $m + 1$ периодов для получения $m + 2$ узлов в конце этого промежутка, т.е. положить $n = m + 1$.

2) Сначала находим вероятности попадания в заключительные узлы, решая вышеуказанную систему из $m+2$ уравнений. Поскольку все пути, ведущие в один и тот же узел равновероятны, то мы делим вероятность попадания в узел на число путей в этот узел для получения вероятности конкретного пути. Наконец, используя обратную индукцию, мы получаем остальные вероятности дерева следующим образом. Предположим, что узел A раздваивается на узлы B и C , с вероятностями любого пути, ведущего в эти узлы, равными p_B и p_C , соответственно. Тогда вероятность любого пути в узел A равна $p_B + p_C$, а вероятность перехода из A в B равна $p_B/(p_B + p_C)$. См. [302, 503]. Алгоритм построения индуцированного или обусловленного биномиального дерева в более общей постановке рассмотрен в [269].

9.6.1. Из текста мы знаем, что стоимость можно определить, заменяя текущую цену акции S на $(1-\delta)^m S$. Но это фактически приводит к платежной функции

$$\max((1-\delta)^m S - X) = (1-\delta)^m \times \max(S - (1-\delta)^{-m} X).$$

См. [879, с. 97].

9.6.2. Нет. Когда Американский опцион колл исполняется, то, с одной стороны, всегда найдется исполняемый в тот же момент Европейский опцион колл с той же выплатой, а с другой, после исполнения Американского опциона колл может остаться Европейский. Поэтому пакет потенциально является более ценным, чем Американский опцион колл.

9.6.5. Мы знаем, что $C = P + S - D - P3(X)$ в силу (8.2). Но $S - D = Se^{-q\tau}$, поскольку цена акции должна быть сегодня равна $S^{-q\tau}$, чтобы в конце оказаться равной той же цене, что и в случае без дивидендов. Эту формулу можно найти в [894, с. 72].

9.6.6. Действуем так же, как и в п. 9.2.1 при построении эквивалентного портфеля, с той лишь разницей, что теперь

$$hSue^{\hat{q}} + RB = C_u, \quad hSde^{\hat{q}} + RB = C_d,$$

где $\hat{q} \equiv q\Delta t$ означает дивидендную доходность периода. Причина состоит в том, что акционер приобретает новые акции с интенсивностью q в год. Поэтому равенства (9.1) и (9.2) заменяются на

$$h = \frac{C_u - C_d}{(Su - Sd)e^{\hat{q}}}, \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R}.$$

Соответственно, после подстановки и перегруппировки вместо (9.3) будем иметь

$$hS + B = \left(\frac{Re^{-\hat{q}} - d}{u-d} C_u + \frac{u - Re^{-\hat{q}}}{u-d} C_d \right) / R,$$

а равенство (9.4) превратится в равенство $hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}$ при $p \equiv \frac{Re^{-\hat{q}} - d}{u-d}$.

Но можно взглянуть на ситуацию по-другому. Достаточно заметить, что в риск-нейтральной экономике средний доход от владения акцией за период должен быть равным R . Ну а поскольку дивиденды по акции выплачиваются с интенсивностью $\hat{q}$, то доход от акции без учета дивидендов должен быть равен $Re^{-\hat{q}}$.

9.6.7. 1) Совокупный доход растет со скоростью μ , а не $\mu - q$!

2) Прежняя структура обратной индукции у алгоритма биномиального дерева остается, за исключением того, что любое значение цены S через j периодов от начала следует заменить на величину $Se^{-qj\Delta t}$. Конечно, получаемый при этом результат не совсем тот, который возникает при решении использовать уравнение (9.21) и считать, что дивидендов нет. Однако оба подхода приводят к одному и тому же значению. Интересно отметить, что тот же вывод получится, если оставить $(e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$ и сохранить исходный алгоритм бездивидендной ситуации, но с u и d , умноженными на $e^{q\Delta t}$.

9.6.8. Предположим, что до истечения срока остался один период и $Sue^{-\hat{q}} < X$, где $\hat{q}$ — дивидендная доходность за период. Ясно, что стоимость опциона сейчас равна нулю, поскольку он не будет исполнен по окончании срока. Однако, если $S > X$, то у опциона положительная внутренняя стоимость, а это означает, что он должен быть исполнен сейчас. Эти два неравенства означают, что $X < S < Xu^{-1}e^{\hat{q}}$. А это возможно, когда $u < e^{\hat{q}}$.

9.7.1. Обратитесь к [154, 156], [575, п. 4.1.4] или [783].

9.7.2. Предположим, что опцион не был исполнен по цене S , но исполнить его по той же цене двумя периодами ранее было бы оптимально. В этом случае должны выполняться неравенства

$$e^{r\Delta t}(X - S) \leq pP_u + (1-p)P_d, \quad e^{r\Delta t}(X - S) > pP'_u + (1-p)P'_d.$$

(символы со штрихом относятся к моменту на два периода ранее). Поэтому

$$pP'_u + (1-p)P'_d < pP_u + (1-p)P_d.$$

Однако, $P_d \leq P'_d$ и $P_u \leq P'_u$ по лемме 8.2.1 в силу большего срока до погашения. Причем действует эта лемма независимо от того, есть дивиденды или их нет. Тем самым мы получаем противоречие: $pP_u + (1-p)P_d < pP'_u + (1-p)P'_d$.

К главе 10

10.1.1. Заметим, что $\Phi'(y) = e^{-(y^2/2)}/\sqrt{2\pi}$ и пусть в следующих равенствах $x' \equiv \partial x / \partial S$:

$$\begin{aligned} \partial C / \partial S &= \Phi(x) + S\Phi'(x)x' - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})x' = \Phi(x) + S\Phi'(x)x' - Xe^{-r\tau}\Phi(x)e^{x\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau/2}x' = \\ &= \Phi(x) + S\Phi'(x)x' - Xe^{-r\tau}\Phi(x)e^{\ln(S/X) + r\tau}x' = \Phi(x). \end{aligned}$$

10.1.2. Заметим, что $\Phi'(y) = e^{-(y^2/2)}/\sqrt{2\pi}$ и пусть теперь $x' \equiv \partial x / \partial X$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial P / \partial X &= e^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Xe^{-r\tau}\Phi'(-x + \sigma\sqrt{\tau})x' + S\Phi'(-x)x' = \\ &= e^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Xe^{-r\tau}\Phi'(-x)e^{x\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau/2}x' + S\Phi'(-x)x' = \\ &= e^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - Xe^{-r\tau}\Phi'(-x)e^{\ln(S/X) + r\tau}x' + S\Phi'(-x)x' = e^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}). \end{aligned}$$

10.1.3. Нам нужно показать, что цена исполнения X , которая максимизирует временную стоимость опциона, равна S . Напомним, что временная стоимость опциона колл определяется соотношением $V \equiv C - \max(S - X, 0)$. И несложно проверить, что $\partial C / \partial X = -e^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})$. Поэтому $\partial V / \partial X = \partial C / \partial X < 0$, если $X > S$, и $\partial V / \partial X = (\partial C / \partial X) + 1 > 0$ если $X \leq S$. Тем самым временная стоимость максимальна при $X = S$. Случай опциона пут аналогичен.

10.1.4. Он равен $\frac{r\tau + \sigma^2\tau/2 - \ln(S/X)}{2\sigma\tau\sqrt{\tau}}$ [894, с. 78].

10.1.5. 1) При $S = Xe^{(r+\sigma^2/2)\tau}$ (а не $S = X$). Чтобы в этом убедиться заметим, что $(x' \equiv \partial x / \partial S)$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial S} = -\frac{\Phi'(x)\sigma + S\Phi''(x)x'\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rXe^{-r\tau}\Phi'(x - \sigma\sqrt{\tau})x' = -\frac{\Phi'(x)\sigma + S\Phi''(x)x'\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rS\Phi'(x)x'.$$

В последнем равенстве используется, что $Xe^{-r\tau}\Phi'(x - \sigma\sqrt{\tau})x' = S\Phi'(x)x'$, и проверить это можно с помощью равенства (10.1) и формулы Блэка—Шоулса для Европейского опциона колл. Привлекая далее соотношения $\Phi''(x) = -x\Phi'(x)$ и $x' = 1/(S\sigma\sqrt{\tau})$, нетрудно понять, что $\partial \Theta / \partial S = 0$ тогда и только тогда, когда $-\sigma^2 + (x\sigma/\sqrt{\tau}) - 2r = 0$. Отсюда и следует ответ на заданный вопрос.

2) Это вытекает из леммы 8.2.1.

10.1.6. Производная веги по σ равна $-xx'\Lambda$, где $x' \equiv \partial x/\partial \sigma$. Заметим, что x можно записать в виде $(A/\sigma) + B\sigma$. Поэтому $x'x = -A^2/\sigma^3 + B^2\sigma$ и ясно, что уравнение $x'x = 0$ имеет положительное решение $\sigma = \sigma^* \equiv \sqrt{|A/B|}$. Нетрудно видеть, что функция Λ' принимает значение ∞ при $\sigma = 0$, пересекает ось σ в точке σ^* , а далее принимает отрицательные значения и сходится к нулю при приближении к положительной бесконечности. Унимодальность веги и вытекает из этих замечаний.

10.1.7. 1) $-\frac{x + \sigma\sqrt{\tau}}{S\sigma\sqrt{\tau}} \Gamma$ [894, с. 78]. 2) $-\frac{\sigma\sqrt{\tau} + (\ln(X/S) + (r + \sigma^2/2)\tau)x}{2\sigma^2\tau^2S} \Phi(x)$ [894, с. 78].

10.2.1. В соответствии со стандартной схемой конечных разностей вторая производная приближается при помощи значений функции в трех равноудаленных друг от друга точках $S - \Delta S$, S , и $S + \Delta S$. И это означает, что улучшения точности таким образом добавляются за счет изменения ΔS . В формуле же (10.2), напротив, вторая производная записывается с помощью фиксированных точек S_{uu} , S и S_{dd} , а точность в ней улучшают, изменяя значение параметра n .

К главе 11

11.1.1. Это обязательство приводит к выплате держателям облигаций суммы $-\min(0, V^* - B) = \max(0, B - V^*)$ [660, с. 630].

11.1.3. Для получения неравенств можно использовать правило Лейбница [448]:
если $F(x) \equiv \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz$, то

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz + f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x).$$

1) Чем выше стоимость фирмы, тем выше цена облигации. Интуитивно, чем выше стоимость фирмы, тем менее вероятно, что фирма разорится.

2) Чем больше фирма занимает в долг, тем выше стоимость облигаций. Однако, заметим, что увеличение общей стоимости облигаций оказывается меньше прироста ее номинала.

3) Чем дальше отстоит дата погашения, тем меньше цена облигации. Это объясняется тем, что ПЗ уменьшается, а премия за риск разорения увеличивается. См. [746, с. 396].

11.1.4. Любая другая цена облигации приведет к арбитражной прибыли при помощи сделки с акциями компании Merck, опциона колл на эти акции, а также облигаций компании XYZ.com.

11.1.5. Акционеры «получат» сумму $[35\,000 \times (5/35)] + 9500 - 15250 = -750$ долларов. Первоначальные же держатели облигаций «потеряют» равную сумму, $29\,250 - [(30/35) \times 35\,000] = -750$. Таким образом, держатели облигаций выиграют.

11.1.6. Результаты приведены в таблице ниже.

Обещанные выплаты держателям облигаций	Текущая рыночная стоимость облигаций	Текущая рыночная стоимость акций	Совокупная текущая стоимость фирмы	Прибыль акционеров от выпуска облигаций
X	B	nS	V	$\frac{X - 30\,000}{1000}$
55 000	54 375	16 750	71 125	0
60 000	59 375	11 750	71 125	-52,083
65 000	64 125	7 000	71 125	115,385
70 000	68 000	3 125,5	71 125	946,429

11.1.7. Дивиденды уменьшают общую стоимость фирмы на равную сумму. Однако, акционерный капитал, как опцион на эту совокупную стоимость, уменьшается на меньшую сумму в силу выпуклости стоимости опциона по лемме 8.5.1. См. [424, с. 531].

11.1.8. 2) Выберите V так, чтобы $V > nS$, и постройте биномиальное дерево для V/n . Оцените по этому дереву стоимость Американского опциона колл с ценой исполнения X . Стоимость любого ворранта W тогда будет равна доли $n/(n+m)$ от стоимости опциона колл. Останавливайтесь, если окажется, что $V \approx nS + mW$. В противном случае выберите новое значение $V > nS$ и повторите процедуру.

11.1.9. Она равна

$$V - C(X) + \lambda C(X/\lambda), \quad (33.7)$$

где $C(Y)$ представляет стоимость Европейского опциона колл с ценой исполнения Y , а λ — коэффициент разбавления.

11.1.10. 1) Из выражения (33.7) и того, что величина $V - C(X)$ эквивалентна стоимости бескупонной облигации номинала X вытекает, что любая КО в основном сводится к бескупонной облигации и опциону колл на долю λ от совокупной стоимости корпорации с ценой исполнения X/λ [746, с. 401].

2) Ворранты — это опционы колл (см. п. 11.1.2).

3) При анализе выплаты в момент погашения легко выясняется, что ее величина не меньше λV^* , а иногда и больше. С другой стороны, в результате конверсии владелец КО получает долю λ от стоимости фирмы. Следовательно, первая стратегия предпочтительнее второй. См. [491, теорема 1], [492, с. 430] и [697].

11.1.11. Во всех трех случаях ПЗ меньше, либо равны P :

$$V < \text{ПЗ}(X) \leq P, \quad \text{ПЗ}(X) \leq X \leq P, \quad \lambda V < P.$$

11.2.1. 1) См. [470, с. 463]. 2) См. [470, с. 464].

11.2.5. Предположим, что барьерным опционом в нижеследующем будет опцион колл. Наш подход состоит в одновременном расчете стоимости опционов вниз-и-вход и вниз-и-выход, и использовании того факта, что их суммарная стоимость совпадает со стоимостью стандартного Европейского опциона колл в каждом узле в силу паритета вход—выход.

Начиная с заключительных узлов и вплоть до корня дерева, обратная индукция позволяет вычислять стоимость опциона в каждом узле в предположении, что *производная ЦБ выпускается в этом узле*. В каждом узле сохраняются две стоимости: одна под названием «вход» относится к стоимости опциона вниз-и-вход, а другая, с названием «выход», — к стоимости опциона вниз-и-выход. Каждый заключительный узел, лежащий выше цены исполнения, стартует с выплаты стандартного опциона колл при расчете стоимости «выход» и нуля при определении стоимости «вход», в то время как любой заключительный узел, равный цене исполнения или ниже ее, стартует с нуля в обоих случаях. В соответствии с индукцией в любом узле не из барьера определяют два значения — математическое ожидание ПЗ значений стоимости «вход» двух следующих за ним узлов, а также математическое ожидание ПЗ значений стоимости «выход» двух следующих узлов, — а затем располагает полученные числа в соответствующих ячейках. В случае произвольного узла на барьере мы делаем то же самое и затем полагаем значение стоимости «выход» равной нулю, а значение стоимости «вход» равным сумме значений «вход» и «выход». Общее ограничение на память линейно, а временная сложность квадратична. Если же по опциону колл вниз-и-выход из игры имеется скидка, то денежный поток от скидки должен вычисляться *отдельно*. Сам алгоритм приведен на рис. 33.2.

11.2.6. Выплату по искомому портфелю можно представить в виде

$$D(X_0, H_1) + \sum_{i=1}^{n-1} [D(X_i, H_{i+1}) - D(X_i, H_i)].$$

Алгоритм биномиального дерева для оценки стоимости опционов колл вниз-и-выход и вниз-и-вход на бездивидендную акцию:

```

ввод:  $S, u, d, X, H$  ( $H < X, H < S$ ),  $n, \hat{r}, K$ ;
действительные числа  $R, p, C_o[0..n], C_i[0..n], C_r[0..n]$ ;
целые  $i, j, h$ ;
 $R := \hat{e}^{\hat{r}}$ ;  $p := (R - d)/(u - d)$ ;
 $h := \lfloor \ln(H/S) / \ln u \rfloor$ ;  $H := Su^h$ ;
для ( $i = 0$  до  $n$ ) {  $C_o[i] := \max(0, Su^{n-i}d^i - X)$ ;  $C_i[i] := 0$ ;  $C_r[i] := 0$ ; }
если [ $n - h$  четно и  $0 \leq (n - h)/2 \leq n$ ] { // удар
     $C_i[(n - h)/2] := C_o[(n - h)/2]$ ;
     $C_o[(n - h)/2] := 0$ ;  $C_r[(n - h)/2] := K$ ;
}
для ( $j = n - 1$  вниз до  $0$ ) {
    для ( $i = 0$  до  $j$ ) {
         $C_o[i] := (p \times C_o[i] + (1 - p) \times C_o[i + 1])/R$ ;
         $C_i[i] := (p \times C_i[i] + (1 - p) \times C_i[i + 1])/R$ ;
         $C_r[i] := (p \times C_r[i] + (1 - p) \times C_r[i + 1])/R$ ;
    }
    если [ $j - h$  четно и  $0 \leq (j - h)/2 \leq j$ ] { // удар
         $C_i[(j - h)/2] := C_i[(j - h)/2] + C_o[(j - h)/2]$ ;
         $C_o[(j - h)/2] := 0$ ;  $C_r[(j - h)/2] := K$ ;
    }
}
вывод  $C_o[0] + C_r[0], C_i[0]$ ;

```

Рис. 33.2. Алгоритм биномиального дерева для барьерных опционов колл на бездивидендную акцию. Поскольку значение H может не совпадать с реальной ценой акции, то мы уменьшаем этот уровень до значения Su^h , т.е. до максимальной цены акции, не превосходящей H . Новый барьер соответствует ячейкам $C_x[(j - h)/2]$ в моменты $j = n, n - 1, \dots, h$, где $x \in \{«o», «i», «r»\}$. По покаут-опциону при достижении барьера предоставляется скидка K .

Здесь $D(X, H)$ обозначает выплату по опцион вниз-и-выход с ценой исполнения X и барьером H . А объяснить это можно следующим образом. Если ближайший барьер H_1 никогда не достигается, то необходимую выплату дает первый опцион вниз-и-выход, а все слагаемые в сумме равны нулю, поскольку они отвечают двум опционам с одинаковой ценой исполнения. Если же H_1 достигается, то выплаты $D(X_0, H_1)$ и $D(X_1, H_1)$ оказываются нулевыми. Поэтому выплата по исходному портфелю превращается в величину

$$D(X_1, H_2) + \sum_{i=2}^{n-1} [D(X_i, H_{i+1}) - D(X_i, H_i)].$$

В остальном остается лишь применить индукцию [158, с. 16].

11.4.1. См. [95, с. 288].

11.5.1. Нужно купить опцион колл с ценой исполнения X_H и продать опцион пут с ценой исполнения X_L [346, с. 297].

11.5.2. Нужно купить опцион колл с ценой исполнения $X + p$, продать опцион пут с ценой исполнения $X + p$, и купить опцион пут с ценой исполнения X [346, с. 299].

11.5.3. Нужно купить опцион колл с ценой исполнения X и продать α опционов пут с той же ценой исполнения X [346, с. 302].

11.5.4. 1) Воспользуйтесь равенством (9.21) [346, с. 165].

2) Предположим, что у нас есть на $\$h$ иностранных безрисковых облигаций (с номиналом в иностранной валюте) и на $\$B$ своих безрисковых облигаций. Портфель стоит $hS + B$ в домашней валюте, если S означает текщий обменный курс местная валюта/иностранная. Далее можно действовать по аналогии с п.9.2.1, что приведет к следующим уравнениям:

$$he^{\hat{r}\Delta t}Su + RB = C_u, \quad he^{\hat{r}\Delta t}Sd + RB = C_d.$$

Множитель $e^{\hat{r}\Delta t}$ представляет иностранный «доход». Решая эти уравнения, получаем ответ. См. [514, с. 321].

11.5.5. Используйте равенства $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ и $r = \hat{r}$.

11.5.6. Это можно сделать, если $S \gg X$ [746, с. 345].

11.5.7. 1) См. [746, с. 332] и равенство (8.1). 2) См. [746, с. 333] и лемму 8.3.2.

11.6.1. Выплачивая первые проценты, акционеры приобретают опцион на получение права собственности на фирму, если будут производить и в будущем процентные выплаты и погашения. См. [424, с. 531] и [746, сс. 398—400].

11.6.2. Поскольку он может быть исполнен только, если контракт присужден [346, с. 305].

11.6.3. См. [879, с. 201].

11.7.1. Постройте портфель, состоящий из одного опциона колл, оглядывающегося на минимум и одного опциона пут, оглядывающегося на максимум [388].

11.7.2. Пусть $r_k \equiv S_k/S_{k-1}$. Тогда $r_k \in \{u, d\}$ и зависит от того, каким будет k -й скачок, вверх или вниз. Поскольку

$$S_i = S_0 \prod_{j=1}^i r_j,$$

то будем иметь

$$\prod_{i=0}^n S_i = S_0^{n+1} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^i r_j = S_0^{n+1} \prod_{i=1}^n r_i^{n-i+1}.$$

Наша проблема, таким образом, сводится к подсчету числа различных значений (назовем его N), которые выражение $\prod_{i=1}^n r_i^{n-i+1}$ может принять при $r_i \in \{u, d\}$, т.е. при двух возможных значениях у каждого из слагаемых; но то же самое можно сказать и о выражении $\sum_{i=1}^n (n-i+1) \ln r_i$. С другой стороны, поскольку $ud = 1$, то $\ln d = -\ln u$.

Поэтому N равно числу возможных значений скалярного произведения $Y = \sum_{i=1}^n ik_i$ двух векторов $(1, 2, \dots, n)$ и $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ на множестве всех 2^n возможных значений вектора k , каждая компонента которого может принимать два значения: 1 и -1 . Остается сделать два простых замечания. Во-первых, ясно, что максимально, соответственно, минимально возможные значения у Y возникают при всех единицах или -1 и, очевидно, равны $\pm n(n+1)/2$. И, во-вторых, очевидно, все возможные значения представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 2, т.е. могут быть либо все четные, либо все нечетные (между указанными крайними включительно). А найти искомое количество членов этой прогрессии N можно, например, так: если $n(n+1)/2 = 2m$, то, очевидно, что $N = 1 + 2m$, а если $n(n+1)/2 = 2m - 1$, то $N = 2m$. А, значит, в обоих случаях $N = 1 + n(n+1)/2$.

11.7.3. См. [147, с. 382].

11.7.4. Пусть на момент ноль среднее по прошлым m ценам есть A . Тогда заключительная выплата по опциону колл равна

$$\begin{aligned} \max\left(\frac{mA + \sum_{i=0}^n S_i}{m+n+1} - X, 0\right) &= \max\left(\frac{\sum_{i=0}^n S_i}{m+n+1} - \left(X - \frac{mA}{m+n-1}\right), 0\right) = \\ &= \frac{n+1}{m+n+1} \times \max\left(\frac{\sum_{i=0}^n S_i}{n+1} - \frac{m+n+1}{n+1} \left(X - \frac{mA}{m+n-1}\right), 0\right). \end{aligned}$$

Тем самым она составляет долю $\frac{n+1}{m+n+1}$ стоимости опциона (отвечающего новым ценам) с ценой исполнения $\frac{m+n+1}{n+1} \left(X - \frac{mA}{m+n-1}\right)$.

11.7.5. 1) В риск-нейтральной экономике $ES_i = S_0 \widehat{e}^{\widehat{r}}$. Поэтому ожидаемое среднее значение цены равно

$$\frac{S_0}{n+1} \sum_{i=0}^n \widehat{e}^{\widehat{r}i} = \begin{cases} \frac{S_0}{n+1} \cdot \frac{1 - \widehat{e}^{\widehat{r}(n+1)}}{1 - \widehat{e}^{\widehat{r}}}, & \text{если } \widehat{r} \neq 0, \\ S_0, & \text{если } \widehat{r} = 0. \end{cases}$$

2) Предположим, что $\widehat{r} \neq 0$. Указанное значение текущей суммы означает, что опцион колл будет в деньгах, поскольку любая траектория, продолжающая данный начальный отрезок, закончится с арифметическим средним, не меньшим величины $X + a/(n+1) \geq X$. Таким образом, ожидаемая заключительная выплата будет равна сумме $a/(n+1)$ и $E\left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^n S_i\right]$, причем силу (1) для второго слагаемого имеем

$$\frac{S_k}{n+1} \cdot \frac{1 - \widehat{e}^{\widehat{r}(n-k+1)}}{1 - \widehat{e}^{\widehat{r}}}.$$

11.7.6. Докажем утверждение для случая, когда $i < n/2$. И предположим для удобства, что $S_0 = 1$. Наша разница при $u^i d^{n-i} = u^{2i-n}$ равна

$$A \equiv (u + u^2 + \dots + u^i + u^{i-1} + \dots + u^{2i-n}) - (d + d^2 + \dots + d^{n-i} + d^{n-i-1} + \dots + d^{n-2i}).$$

Аналогично, при $u^{i-1} d^{n-i+1} = u^{2i-n-2}$ она равна

$$B \equiv (u + u^2 + \dots + u^{i-1} + u^{i-2} + \dots + u^{2i-n-2}) - (d + d^2 + \dots + d^{n-i+1} + d^{n-i} + \dots + d^{n-2i+2}).$$

Теперь, как и утверждается, получим

$$\begin{aligned} A - B &= u^i + u^{i-1} - u^{2i-n-1} - u^{2i-n-2} + d^{n-i+1} + d^{n-i} - d^{n-2i+1} - d^{n-2i} = \\ &= u^i + u^{i-1} - u^{2i-n-1} - u^{2i-n-2} - (u^{2i-n} + u^{2i-n-1} - u^{i-n} - u^{i-n-1}) = \\ &= u^i + u^{i-1} - u^{2i-n-1} - u^{2i-n-2} - u^{i-n}(u^i + u^{i-1} - 1 - u^{-1}) > \\ &> u^i + u^{i-1} - u^{2i-n-1} - u^{2i-n-2} - (u^i + u^{i-1} - 1 - u^{-1}) > 0. \end{aligned}$$

11.7.7.

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + \left[\frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right] (x - x_0)(x - x_1).$$

11.7.8. «Черпание ведрами» больше не является необходимым, поскольку все текущие суммы узла $N(j, i)$ являются целыми числами, лежащими между целыми $(j+1)A_{\min}(j, i)$ и $(j+1)A_{\max}(j, i)$, а потому их конечное число. Ошибка второго типа, от интерполяции, исчезает как следствие, поскольку текущая сумма — теперь целое число — которую мы ищем в следующем узле, существует. Если же конкретнее, то пусть $V(j, i, k)$ означает стоимость опциона в узле $N(j, i)$ при условии, что сумма до

этого узла равна k . И пусть также $S(j, i)$ представляет реальную цену актива в узле $N(j, i)$. Тогда в соответствии с обратной индукцией

$$V(j, i, k) = [pV(j+1, i, k + S(j+1, i)) + (1-p)V(j+1, i+1, k + S(j+1, i+1))]e^{-r\Delta t},$$

где $0 \leq j < n$, $0 \leq i \leq j$ и $(j+1)A_{\min}(j, i) \leq k \leq (j+1)A_{\max}(j, i)$. См. [251, 252].

11.7.9. Используйте оба алгоритма и возьмите среднее от их решений. Тогда это среднее не сможет отличаться от истинного значения больше, чем на разницу соответствующих оценок.

11.7.12. Мы используем терминологию п. 11.7.1. Рассмотрим опцион колл, оглядывающийся на минимум, и пусть $S_{\min}$ означает минимальную цену по прошлым наблюдениям на настоящий момент.

1) Рис. 11.12 показывает, что в узле $N(j, i)$ максимальная из минимальных цен между настоящим моментом и узлом $N(j, i)$ равна $S_{\max}(j, i) \equiv \min(S_0, S_0 u^{j-i} d^i)$. Аналогично, минимум из минимальных цен равен величине $S_{\min}(j, i) \equiv S_0 u^{-i}$, которая *не зависит* от j . Поэтому возможными значениями минимальной цены в узле $N(j, i)$, очевидно, являются $S_{\min}(j, i)$, $u S_{\min}(j, i)$, $u^2 S_{\min}(j, i)$, $\dots$, $S_{\max}(j, i)$. Число же этих состояний равно либо а) $j-i+1$, когда $j \leq 2i$ и $S_{\max}(j, i) = S_0 u^{j-i} d^i$, либо б) $i+1$, если $j > 2i$ и $S_{\max}(j, i) = S_0$. Нетрудно показать далее, что общее число состояний на всем дереве пропорционально n^3 , и это же число дает оценку используемому времени. Обозначим через $N(j, i, k)$ состояние в узле $N(j, i)$, при котором значение $u^k S_{\min}(j, i) = S_0 u^{k-i}$ представляет собой минимальную цену между настоящим временем и узлом $N(j, i)$. Заметим, что $k \leq i$. Наконец, пусть $C(j, i, k)$ означает стоимость опциона в состоянии $N(j, i, k)$.

Обратная индукция начинается со значения

$$C(n, i, k) = \max(S_0 u^{n-i} d^i - \min(u^k S_{\min}(n, i), S_{\min}(n, i))),$$

в момент n , где $0 \leq i \leq n$ и $0 \leq k \leq \ln_u \frac{S_{\max}(n, i)}{S_{\min}(n, i)}$. В соответствии с индукцией каждое состояние в узле $N(j, i)$ в качестве входа берет состояние в предшествующем верхнем узле $N(j+1, i)$ и состояние в нижнем узле $N(j+1, i+1)$. Точнее, для $j = n-1, n-2, \dots, 0$, алгоритм приводит к выражениям

$$RC(j, i, k) = \begin{cases} [pC(j+1, i, k) + (1-p)C(j+1, i+1, k+1)], & \text{если } j > 2i & \text{(i),} \\ [pC(j+1, i, k) + (1-p)C(j+1, i+1, k+1)], & \text{если } j = 2i, k < i & \text{(ii),} \\ [pC(j+1, i, k) + (1-p)C(j+1, i+1, k)], & \text{если } j = 2i, k = i & \text{(iii),} \\ [pC(j+1, i, k) + (1-p)C(j+1, i+1, k+1)], & \text{если } j < 2i, k < j-i & \text{(iv),} \\ [pC(j+1, i, k) + (1-p)C(j+1, i+1, k)], & \text{если } j < 2i, k = j-i & \text{(v),} \end{cases}$$

где $0 \leq i \leq j$ и $0 \leq k \leq \ln_u \frac{S_{\max}(j, i)}{S_{\min}(j, i)}$. При выводе этой формулы были использованы несколько соображений. Во-первых, минимальная цена в состоянии верхнего узла всегда равняется минимальной цене в узле $N(j, i, k)$. В случае (i) цена акции в состоянии $N(j, i, k)$, равная $S_0 u^{j-i} d^i = S_0 u^{j-2i}$, превосходит S_0 ; таким образом, минимальная цена в состоянии нижнего узла равна минимальной цене в состоянии $N(j, i, k)$. В случаях (ii) и (iii) цена акции в состоянии $N(j, i, k)$ равна S_0 . В случае (ii) минимальная цена в состоянии $N(j, i, k)$ меньше S_0 ; таким образом, минимальная цена в состоянии нижнего узла равняется минимальной цене в состоянии $N(j, i, k)$. В случае (iii) минимальная цена в состоянии $N(j, i, k)$ равна S_0 ; таким образом, минимальная цена в состоянии нижнего узла равна $S_0 d$. В каждом из случаев (iv) и (v) цена акции в состоянии $N(j, i, k)$, равная $S_0 u^{j-i} d^i = S_0 u^{j-2i}$, меньше, чем S_0 .

В случае (iv) минимальная цена в состоянии $N(j, i, k)$ меньше, чем $S_0 u^{j-2i}$; таким образом минимальная цена в состоянии нижнего узла равняется минимальной цене в состоянии $N(j, i, k)$. В случае (v) минимальная цена в состоянии $N(j, i, k)$ равна $S_0 u^{j-2i}$; таким образом, минимальная цена в состоянии нижнего узла равняется $S_0 u^{j-2i-1}$. В качестве ответа получим величину $C(0, 0, 0)$. Если же опцион является Американским, то вместо указанного выше значения $C(j, i, k)$ следует просто брать большее из него и величины $S_0 u^{j-i} d^i - \min(u^k S_{\min}(j, i), S_{\min})$.

2) Если опцион появился недавно, то число состояний в каждом узле можно существенно уменьшить — до одного. Основная идея сводится к тому, чтобы в каждом узле рассчитать стоимость недавно появившегося оглядывающегося опциона, когда текущая цена акции равна единице. См. [470, с. 475—477] (подобная идея используется и в алгоритме на рис. 29.5). К несчастью, эта идея может не сработать для опционов с прошлыми данными о ценах.

К главе 12

12.2.1. Выплату в долларах США можно записать в виде $4\,288\,200 + 4\,000\,000 \times r$, где r — обменный курс $\$/DEM$ три месяца спустя.

12.2.2. 1) Процентные ставки в Германии меньше, чем в США.

12.2.3. Используйте паритет процентных ставок [514, сс. 328—329].

12.2.4. 1) Недавно выписанный форвардный контракт эквивалентен портфелю из одного длинного Европейского опциона колл и одного короткого Европейского опциона пут на один и тот же базовый актив с общей датой истечения, совпадающей с датой поставки. Это верно потому, что $S_T - X = \max(S_T - X, 0) - \max(X - S_T, 0)$. Поэтому, если цена X равна форвардной цене, то выплата в точности совпадает со стоимостью форвардного контракта.

2) Поскольку стоимость нового форвардного контракта нулевая, то цена исполнения должна быть такой, чтобы премия по опциону пут равнялась премии по опциону колл. Если же объяснять по-другому, то мы можем записать паритет пут—колл (8.1) в виде $C = P + \text{ПЗ}(F - X)$ с помощью формулы (12.3). Вывод тогда очевиден, поскольку $F = X$. См. [119].

3) Используя (2) и паритет пут—колл (8.1) получаем, что

$$0 = C - P - S + Fe^{-r\tau} = -S + Fe^{-r\tau},$$

а это и есть в точности утверждение леммы 12.2.1. См. [236, сс. 59—61] и [346, с. 244].

12.2.5. Рассмотрим случай $f > (F - X)e^{-r\tau}$. При этом условии можно создать арбитражную возможность, покупая один форвардный контракт с ценой поставки F и занимая короткую позицию по другому форвардному контракту с ценой поставки X , если оба они погашаются τ лет спустя. Эта сделка приведет к поступлению суммы f , поскольку первый контракт имеет нулевую стоимость в силу определения F . Сумма при погашении составляет величину

$$(S_T - F) + (X - S_T) = -(F - X).$$

Тем самым гарантируется поступление денежного потока с ПЗ, равным $f - (F - X) \times e^{-r\tau} > 0$. Для доказательства тождества в оставшемся случае $f < (F - X)e^{-r\tau}$ нужно лишь обратить проведенную сделку.

12.3.1. Повторите соображения, которые привели к соотношению (12.8), но с кредитованием при положительной сумме и заимствованием в случае, когда она отрицательна. В результате получите выражение

$$(F_1 - F_0)R^{n-1} + (F_2 - F_1)R^{n-2} + \dots + (F_n - F_{n-1}).$$

Ясно, что оно зависит от того, как разница $F_n - F_0$ распределена в n -дневном периоде.

12.3.3. Более высокие ставки порождают более высокие фьючерсные цены, что приводит к положительному денежному потоку, который может быть реинвестирован по более высоким ставкам. И аналогично, менее высокие ставки приводят к меньшим фьючерсным ценам, порождая отрицательный денежный поток, который может быть профинансирован по меньшим ставкам. Поскольку оба варианта дают преимущество владельцам фьючерсных контрактов, то соответствующие им цены должны быть выше. В [402] или [514, с. 58] можно найти более строгую аргументацию.

12.3.4. В равенствах предполагается, что индекс акции *не* учитывает дивидендные выплаты. Отметим прежде всего решающий момент в доказательстве равенств (12.4) и (12.6), состоящий в том, что дивиденды индекса акций — а в действительности любого базового актива — предсказуемы. Следовательно, у дивидендов должны быть предсказуемые значения. А теперь обратимся к проблеме учета дивидендов. Если бы индексы учитывали дивидендные выплаты, то учет сводился бы к изменению начальной позиции по базовому активу, т. е. портфеля акций в случае индексов акций, о котором трудно что-либо сказать. А это ломает доказательства, в которых единственными допустимыми сделками являются либо ссуда, используемая для занятия длинной позиции по базовому активу, либо отток средств, возникающий при занятии короткой позиции по базовому активу.

12.3.5. 1) Стоимость переноса равна $Se^{r\tau}$, поскольку именно столько стоит «перенести» (во времени) инструмент из наличных.

2) $F = Se^{r\tau}$ по условию форвардной цены, отвечающей полному переносу. См. [88, с. 170].

12.3.6. Если ВК приносят 6 % годовых и некто владеет золотом точно 1 год, то «стоимость» владения равна 6 % от суммы, представляющей его стоимость, которые этот некто получил бы, если бы купил ВК вместо золота. При цене \$ 350 за унцию стоимость благоприятной возможности, связанной с владением 100 унциями золота в течение одного года равна $100 \times \$ 350 \times 0,06 = \$ 2100$. Таким образом, \$ 2100 и есть стоимость переноса. См. [698, с. 192].

12.3.7. Рассмотрим портфель, состоящий из суммы S , взятой в долг для покупки единицы базового товара, и короткой позиции по форвардному контракту с ценой поставки F (и потому имеющему нулевую стоимость). Начальная сумма нулевая. В момент поставки поступление равно $F - S - C$. Поэтому, чтобы не было арбитражных возможностей, должно выполняться неравенство $F - S - C \leq 0$.

12.3.8. Рассмотрим стратегию занятия короткой позиции по товару, инвестирования выручки под безрисковую ставку и приобретения форвардного контракта с ценой поставки F . Начальная сумма от стратегии нулевая, а в момент поставки она равна $S + I - F - D$. Это имеет место потому, что инвестор должен заплатить F за товар и закрыть короткую позицию. Но инвестор также обязан оплатить все суммы, которые он должен владельцу товара. С другой стороны, инвестор получает $S + I$ от вклада. Из тождества (12.12) вытекает, что

$$S + I - F - D = S - F + C - U.$$

Поэтому неравенство $S - F + C - U \leq 0$ должно исключить арбитражные возможности. См. [746, с. 41].

12.4.1. Мы должны показать, что денежного оттока (от конверсии) при окончании срока действия не будет. Предположим, что цена фьючерса при окончании срока уменьшается. Тогда мы исполняем опцион пут, получая короткую позицию по фьючерсу, компенсирующую длинную позицию по фьючерсу, и избавляемся от опциона колл. Подобные действия можно предпринимать и в двух других случаях. См. [95, с. 188] и [328].

12.4.2. См. [514, с. 204].

12.4.3. Рассмотрим портфель, состоящий из одного длинного опциона колл, одного короткого опциона пут, одного короткого фьючерсного контракта и ссуды в размере $Fe^{-rt} - X$. Первоначальная стоимость портфеля равна $C - P - Fe^{-rt} + X$, а в момент t она составляет величину

$$\begin{aligned} 0 - (X - F_t) - (F_t - F) - (F - Xe^{rt}) &= X(e^{rt} - 1) \geq 0, & \text{если } F_t \leq X, \\ (F_t - X) - 0 - (F_t - F) - (F - Xe^{rt}) &= X(e^{rt} - 1) \geq 0, & \text{если } F_t > X. \end{aligned}$$

Предположим, что опцион пут исполняется в момент $s < t$. Стоимость портфеля тогда равна

$$C - (X - F_s) - (F_s - F) - [Fe^{-r(t-s)} - Xe^{rs}] = C + F[1 - e^{-r(t-s)}] + X(e^{rs} - 1) \geq 0.$$

Из этого мы заключаем, что $C - P - Fe^{-rt} + X \geq 0$.

Для обоснования оценки сверху рассмотрим портфель из одного длинного опциона пут, одного короткого опциона колл, одного длинного фьючерсного контракта и предоставления кредита в размере $F - Xe^{-rt}$. В этом случае первоначальная стоимость портфеля равна величине $P + F - Xe^{-rt} - C$, а в момент t она составляет величину

$$\begin{aligned} (X - F_t) + (F_t - F) + (F - Xe^{rt}) - 0 &= F(e^{rt} - 1) \geq 0, & \text{если } F_t \leq X, \\ 0 + (F_t - F) + (F - Xe^{rt}) - (F_t - X) &= F(e^{rt} - 1) \geq 0, & \text{если } F_t > X. \end{aligned}$$

Предположим, что опцион колл исполняется в момент $s < t$. Тогда стоимость портфеля равна

$$P + (F_s - F) + [Fe^{rs} - Xe^{-r(t-s)}] - (F_s - X) = P + F(e^{rs} - 1) + X[1 - e^{-r(t-s)}] \geq 0.$$

Отсюда и заключаем, что $P + F - Xe^{-rt} - C \geq 0$. См. [746, с. 281–282].

12.4.4. 1) Мы проверим это лишь для опционов колл. Заменяем величину F из формулы (12.16) в модели Блэка на $Se^{(r-q)\tau}$ и получим равенство (9.20). Если же по базовому активу дивиденды не выплачиваются, то заменим F на $Se^{r\tau}$, и получим первоначальную формулу Блэка—Шоулса для Европейских опционов колл (в теореме 9.3.4). См. [346, с. 201] и [470, с. 295].

2) Это имеет место, поскольку фьючерсная цена совпадает с ценой актива в наличных при погашении.

12.4.5. 1) На биномиальном дереве для базовой акции мы заменяем цену акции S в каждом узле дерева на $Se^{r\tau}$, где τ — время до погашения фьючерсного контракта в этом узле. Соответствующая биномиальная модель для фьючерсной цены тогда будет выглядеть как переход $Se^{r\tau} \rightarrow Sue^{r(\tau-\Delta t)}$ или $Sde^{r(\tau-\Delta t)}$; другими словами, как переход $F \rightarrow Fue^{-r\Delta t}$ или $Fde^{-r\Delta t}$.

2) Если по базовой акции выплачивается непрерывная дивидендная доходность q , то биномиальная модель для фьючерсной цены при той же риск-нейтральной вероятности будет выглядеть как переход $Se^{(r-q)\tau} \rightarrow Sue^{-q\Delta t}e^{(r-q)(\tau-\Delta t)}$ или к $Sde^{-q\Delta t}e^{(r-q)(\tau-\Delta t)}$; другими словами, как переход $F \rightarrow Fue^{-r\Delta t}$ или $Fde^{-r\Delta t}$, что совпадает со случаем (1).

12.5.3. В силу (12.1) форвардный обменный курс «доллар/йена» для промежутка времени $[0, i]$ можно записать в виде $F_i \equiv Se^{(r-q)i}$. Поэтому ПЗ суммы в долларах после форвардного обмена i лет спустя равно $(F_i Y_i - D_i)e^{-ri} = SY_i e^{-qi} - D_i e^{-ri}$, в полном соответствии с выражением (12.17).

К главе 13

$$\begin{aligned} \mathbf{13.1.1.} \quad E(X(t+s) - X(0)) &= E(X(t+s) - X(s)) + E(X(s) - X(0)) = \\ &= E(X(t) - X(0)) + E(X(s) - X(0)). \end{aligned}$$

Положим $f(t) \equiv E(X(t) - X(0))$. Тогда полученное равенство означает, что $f(t+s) = f(t) + f(s)$. Продифференцируем его по s : $f'(t+s) = f'(s)$. В частности, это означает,

что $f'(t) = f'(t-1) = f'(1)$. Поэтому $f(t) = tf'(1) + a$. Но $a = 0$, поскольку $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$; следовательно, $f(t) = tf'(1)$. А это означает, что $f(1) = f'(1)$ и $f(t) = tf(1)$.

Перейдем к выводу выражения для дисперсии. Заметим, что

$$D(X(t+s) - X(0)) = D(X(t+s) - X(s)) + D(X(s) - X(0)) = D(X(t) - X(0)) + D(X(s) - X(0)),$$

причем первое равенство здесь вытекает из независимости приращений, а второе объясняется стационарностью. Положим $f(t) \equiv D(X(t) - X(0))$. Тогда вышеуказанное соотношение означает, что $f(t+s) = f(t) + f(s)$. Дифференцируя его, получаем, что

$$f'(t+s) = f'(t), \quad f''(t+s) = f''(s);$$

и, в частности, $f'(t) = f'(1)$. Поэтому $f(t) = tf'(1) + a$. Но $a = 0$, поскольку $f(0) = 2f(0)$ и, следовательно, $f(t) = tf'(1)$, $f(1) = f'(1)$ и $f(t) = tf(1)$. А это доказывает искомое утверждение, поскольку

$$D(X(t) - X(0)) = DX(t) + DX(0).$$

См. [566, с. 61].

13.1.2. См. [280, с. 96].

13.1.3. Прежде всего, $m_X(n) = EX_n = 0$. Далее, при $a \neq b$

$$EX_a X_b = \text{Cov}(X_a, X_b) = 0,$$

поскольку с. в. X_a и X_b некоррелированы. Наконец,

$$K_X(m+n, m) = EX_{m+n} X_m = \begin{cases} 1, & \text{если } n=0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

13.1.4. 1) В соотношении (13.1) $\mu = 0$, а

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } q \equiv 1-p. \end{cases}$$

2) Поскольку среднее ноль, то дисперсия равна $n[(1/2) \times 1 + (1/2) \times (-1)^2] = n$.

13.1.5. Рассмотрим симметричное двумерное случайное блуждание, совместное распределение перемещений которого за один шаг имеет следующий вид:

$$(X_1, X_2) = \begin{cases} (+1, +1) & \text{с вероятностью } (1+\rho)/4, \\ (+1, -1) & \text{с вероятностью } (1-\rho)/4, \\ (-1, +1) & \text{с вероятностью } (1-\rho)/4, \\ (-1, -1) & \text{с вероятностью } (1+\rho)/4. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $DX_1 = DX_2 = 1$, а $EX_1 X_2 = \rho$. См. [254].

13.2.1. В самом деле,

$$\begin{aligned} E(X(t_n) | X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_1)) &= \\ &= E(X(t_n) - X(t_{n-1}) | X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_1)) + X(t_{n-1}) = X(t_{n-1}), \end{aligned}$$

причем последнее равенство справедливо потому, что

$$\begin{aligned} E(X(t_n) - X(t_{n-1}) | X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_1)) &= \\ = E(X(t_n) - X(t_{n-1}) | X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1) - X(0)) &= E(X(t_n) - X(t_{n-1})) = 0. \end{aligned}$$

13.2.2. Используйте результат упр. 6.4.3 (2) и определение мартингала из (13.3).

13.2.3. См. [763, с. 229].

13.2.4. В силу определения и равенства (6.5)

$$DX_n = DX_{n-1} + DX_n + 2 \text{Cov}(Z_{n-1}, X_n).$$

Поэтому достаточно показать, что $\text{Cov}(Z_{n-1}, X_n) = 0$. Но

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{n-1}, X_n) &\stackrel{1}{=} E(Z_{n-1} X_n) - E Z_{n-1} E X_n \stackrel{2}{=} E(Z_{n-1} X_n) \stackrel{3}{=} E(Z_{n-1} (Z_n - Z_{n-1})) \stackrel{4}{=} E(Z_{n-1} Z_n) - E Z_{n-1}^2 \stackrel{5}{=} \\ &\stackrel{5}{=} E(E(Z_{n-1} Z_n | Z_{n-1})) - E Z_{n-1}^2 \stackrel{6}{=} E(Z_{n-1} E(Z_n | Z_{n-1})) - E Z_{n-1}^2 \stackrel{7}{=} E(Z_{n-1} Z_{n-1}) - E Z_{n-1}^2 = 0, \end{aligned}$$

причем первое равенство здесь вытекает из (6.3), второе справедливо в силу (13.4) и равенства $E[Z_0] = 0$, пятое использует телескопическое свойство условных математических ожиданий, а седьмое использует всего лишь определение мартингала. См. [763, с. 247].

13.2.5. Заметим, что последовательность $\{S_n, n \geq 1\}$ является мартингалом в силу примера 13.2.1. Положим $Z_n \equiv S_n^2 - n\sigma^2$. Тогда

$$\begin{aligned} E(Z_n | Z_1, \dots, Z_{n-1}) &= E(S_n^2 | Z_1, \dots, Z_{n-1}) - n\sigma^2 = E((S_{n-1} + X_n)^2 | S_1, \dots, S_{n-1}) - n\sigma^2 = \\ &= E(S_{n-1}^2 | S_1, \dots, S_{n-1}) + 2E(S_{n-1}X_n | S_1, \dots, S_{n-1}) + E(X_n^2 | S_1, \dots, S_{n-1}) - n\sigma^2 = \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}E(X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) + E(X_n^2 | X_1, \dots, X_{n-1}) - n\sigma^2 = \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}EX_n + EX_n^2 - n\sigma^2 = S_{n-1}^2 + EX_n^2 - n\sigma^2 = S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 = Z_{n-1}. \end{aligned}$$

См. [763, с. 247].

$$\begin{aligned} \mathbf{13.2.6.} \quad E(Y_n - Y_{n-1} | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) &= \\ &= E(C_n(X_n - X_{n-1}) | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = C_n E(X_n - X_{n-1} | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

См. [725, с. 94] или [877, с. 97].

13.2.7. Нужно использовать математическую индукцию. См. также [419, с. 227].

13.2.8. Обозначим неизвестную риск-нейтральную вероятность через p и пусть одна единица иностранной валюты к концу периода превращается в R_f единиц. Тогда в терминах местной валюты математическое ожидание обменного курса на конец периода можно записать в виде

$$pR_f S u + (1-p)R_f S d = R_f S [pu + (1-p)d],$$

где S — текущий обменный курс. Но в силу (13.7) должно быть $S = \frac{R_f S [pu + (1-p)d]}{R}$; поэтому

$$\frac{R}{R_f} = pu + (1-p)d = p(u-d) + d.$$

См. [514, с. 320].

13.2.9. Поскольку $E(S(i+1) | S(i)) = S(i)up + S(i)d(1-p)$, где $p = (R-d)/(u-d)$, то $E(S(i+1) | S(i)) = S(i)R$. Поэтому утверждение доказывается с помощью математической индукции.

13.2.10. Из (13.8) вытекает, что $F_i = E_i^\pi F_n$. Но $F_n = S_n$ так как будущая цена совпадает со спот-ценой при погашении. См. [514, с. 149].

13.2.11. Достаточно показать, что $F_i = E_i^\pi F_{i+1}$, поскольку общий случай будет вытекать из этого равенства с помощью рекуррентной цепочки. Поскольку фьючерсные контракты отмечаются на рынке ежедневно, их стоимость (а не цена!) равна нулю. Поэтому в силу (13.7) $E_i^\pi((F_{i+1} - F_i)/M(i+1)) = 0$. Ну а поскольку величина $M(i+1)$ в момент i уже известна, то это равенство можно записать и в виде $0 = (E_i^\pi F_{i+1} - F_i)/M(i+1)$, из которого легко следует искомое утверждение. См. [514, с. 171].

13.2.12. 1) Предположим, что текущая цена облигации равна $1/R$ и пусть $p \equiv \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R}\right) \frac{ud}{u-d}$. Цены облигаций относительно цены акции через период равны $1/(Su)$ и $1/(Sd)$. Поэтому

$$p \frac{1}{Su} + (1-p) \frac{1}{Sd} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R}\right) \frac{ud}{u-d} \cdot \frac{1}{Su} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{u}\right) \frac{ud}{u-d} \cdot \frac{1}{Sd} = \frac{1}{SR},$$

и эта величина является ценой облигации, выраженной по отношению к цене акции на сегодня. Альтернативный способ обоснования сводится к использованию равенства (13.10) и предположению, что в нем $S=1$, $S_1=S_2=R$, $P=S$, $P_1=Su$ и $P_2=Sd$. См. [681, с. 46].

2) Вероятности P_1 и P_2 являются риск-нейтральными вероятностями, которые в качестве условной платежной единицы используют цену акции и цену облигации, соответственно. См. [519, с. 48].

13.2.13. Используйте в качестве условной платежной единицы равенства (13.9) стоимость бескупонной облигации с погашением в момент k . Тогда его можно записать в виде

$$\frac{C(i)}{P(i, k)} = E_i^\pi \left[\frac{C(k)}{P(k, k)} \right],$$

где $P(j, k)$ и обозначает цену этой облигации в момент $j \leq k$. После этого для доказательства искомого утверждения достаточно заметить, что $P(i, k) = d(k-i)$ и $P(k, k) = 1$. См. [731, с. 171].

13.3.1. Первые два условия из определения броуновского движения, очевидно, выполнены и

$$E \left(\frac{x(t) - \mu t}{\sigma} - \frac{x(s) - \mu s}{\sigma} \right) = \frac{E(x(t) - x(s)) - \mu(t-s)}{\sigma} = 0.$$

Далее, дисперсия с. в. $Z \equiv \{(x(t) - \mu t) - (x(s) - \mu s)\} / \sigma$ равна

$$\begin{aligned} EZ^2 &= \sigma^{-2} (E(x(t) - x(s))^2 - 2E(x(t) - x(s))(\mu t - \mu s) + \mu^2(t-s)^2) = \\ &= \sigma^{-2} (E(x(t) - x(s))^2 - [E(x(t) - x(s))]^2) = \sigma^{-2} D(x(t) - x(s)) = t - s. \end{aligned}$$

(Отметим, что $EZ = 0$.)

13.3.2. Не теряя в общности, предположим, что $s < t$. Тогда

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &\equiv E[\{X(t) - \mu t\}\{X(s) - \mu s\}] = E[\{X(t) - X(s) - \mu(t-s) + X(s) - \mu s\}\{X(s) - \mu s\}] = \\ &= E[\{X(t) - X(s) - \mu(t-s)\}\{X(s) - \mu s\}] + E[\{X(s) - \mu s\}^2] = E[\{X(t) - X(s) - \mu(t-s)\}X(s)] + s\sigma^2 = \\ &= \{E[X(t) - X(s)] - \mu(t-s)\}EX(s) + s\sigma^2 \quad (\text{в силу независимости}) = s\sigma^2. \end{aligned}$$

См. [147, с. 345] или [364, с. 36]. Другой способ сводится к замечанию, что [763, с. 187]

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(s), X(t)) &= \text{Cov}(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) = \\ &= \text{Cov}(X(s), X(s)) + \text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) = DX(s) = s\sigma^2. \end{aligned}$$

13.3.3. Пусть $0 < t_1 < \dots < t_n$. Тогда

$$\begin{aligned} E(X(t_n) - X(0) | X(t_{n-1}) - X(0), \dots, X(t_1) - X(0)) &= \\ &= E(X(t_n) - X(t_{n-1}) + X(t_{n-1}) - X(0) | X(t_{n-1}) - X(0), \dots, X(t_1) - X(0)) = \\ &= E(X(t_n) - X(t_{n-1}) | X(t_{n-1}) - X(0), \dots, X(t_1) - X(0)) + X(t_{n-1}) - X(0) = X(t_{n-1}) - X(0). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, поскольку по определению винеровского процесса и в силу независимости приращений $E(X(t_n) - X(t_{n-1})) = 0$. Но в действительности эта проблема является частным случаем упр. 13.2.1. См. [280, с. 97] или [541, с. 233].

13.3.5. В случае (2)

$$\begin{aligned} E(X(t)^2 - \sigma^2 t | X(u), 0 \leq u \leq s) &= E(X(t)^2 | X(s)) - \sigma^2 t = \\ &= E(\{X(t) - X(s)\}^2 | X(s)) + E(2X(s)\{X(t) - X(s)\} + X(s)^2 | X(s)) - \sigma^2 t = \\ &= \sigma^2(t-s) + X(s)^2 - \sigma^2 t = X(s)^2 - \sigma^2 s. \end{aligned}$$

В последнем случае (3)

$$E(e^{\alpha X(t) - \alpha^2 \sigma^2 t/2} | X(u), 0 \leq u \leq s) = e^{\alpha X(s) - \alpha^2 \sigma^2 s/2} E e^{\alpha \{X(t) - X(s)\} - \alpha^2 (t-s)/2} = e^{\alpha X(s) - \alpha^2 \sigma^2 s/2},$$

причем последнее равенство вытекает из (6.8). См. [419, с. 7] и [543, с. 358].

13.3.6. Во-первых, $dP = 2^{-n}$, поскольку случайное блуждание симметрично. С другой стороны, $dQ = \prod_{i=1}^n [2^{-1} + (p - 2^{-1})X_i]$. Напомним, что $p \equiv (1 + \mu\sqrt{\Delta t})/2$. Поэтому

$$\frac{dQ}{dP} = \prod_{i=1}^n [1 + (2p - 1)X_i] = \prod_{i=1}^n (1 + \mu\sqrt{\Delta t}X_i).$$

13.3.7. Поскольку $X(t) - X(s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$, то

$$E(Y(t) | Y(s)) = E(e^{X(t)} | e^{X(s)}) = e^{X(s)} E e^{X(t) - X(s)} = Y(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)},$$

причем последнее равенство вытекает из (13.12). См. [543, с. 364], [692, с. 349].

13.3.8. 1) В соответствии с предыдущим упр. 13.3.7 средняя скорость роста цены равна $\mu + \sigma^2/2$. По вопросу о том, почему она равна не μ , обратитесь к замечанию 14.4.1.

2) Это легко вытекает из определения $S(t)$.

3) Достаточно заметить, что $\ln(\cdot)$ является вогнутой функцией своего аргумента (т. е. выпуклой вверх).

13.3.9. Напомним, что $DX = EX^2 - (EX)^2$. Поэтому, если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то мы получаем, что $EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Возвращаясь к нашему заданию, просто заметим, что выражение внутри скобок нормально распределено со средним $\mu t/2^n$ и дисперсией $\sigma^2 t/2^n$.

13.3.10. 1) Напомним, что $X((k+1)t/2^n) - X(kt/2^n) \sim N(0, 2^{-n})$. Заметим, что если $X \sim N(0, \sigma^2)$, то с. в. $|X|$ имеет среднее $\sigma\sqrt{2/\pi}$ и дисперсию $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

2) Пусть $b \equiv 2^{n/2}\sqrt{2/\pi}$ и $c \equiv 1 - 2/\pi$. Тогда при любом $\alpha > 0$ можно легко найти такое n_0 , что $\alpha < b - c^{1/2}2^{n/2}$ при $n > n_0$. Поэтому из неравенства Чебышева вытекает, что

$$P\{f_n(X) > \alpha\} \geq P\{f_n(X) \geq b - c^{1/2}2^{n/2}\} \geq P\{|f_n(X) - b| \leq c^{1/2}2^{n/2}\} \geq 1 - \frac{c}{(c^{1/2}2^{n/2})^2} = 1 - 2^{-n} \rightarrow 1.$$

См. [73, с. 64].

13.4.1. Например,

$$\begin{aligned} EB(t)^2 &= E \left[W(t)^2 - \frac{2t}{T} W(t) W(T) + \frac{t^2}{T^2} W(T)^2 \right] = \\ &= t - \frac{2t}{T} E(W(t)\{W(T) - W(t)\}) - \frac{2t}{T} E W(t)^2 + \frac{t^2}{T} = t - 0 - \frac{2t^2}{T} + \frac{t^2}{T} = t - \frac{t^2}{T}. \end{aligned}$$

См. [193, с. 193] или [557, с. 59].

13.4.2. Его можно записать в виде [557, с. 59]:

$$x + W(t) - (t/T)[W(T) - y + x], \quad 0 \leq t \leq T.$$

К главе 14

14.1.1. Рассмотрим сначала такие s и t , что $t_k \leq s < t \leq t_{k+1}$. Тогда в силу (14.1)

$$\begin{aligned} E(I_t(X) | W(u), 0 \leq u \leq s) &= E(I_s(X) + X(t_k)\{W(t) - W(s)\} | W(u), 0 \leq u \leq s) = \\ &= E(I_s(X) | W(u), 0 \leq u \leq s) + X(t_k) E(W(t) - W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s), \\ E(I_t(X) | W(u), 0 \leq u \leq s) &= I_s(X). \end{aligned} \quad (33.8)$$

Далее, с помощью математической индукции можно показать, что $E(I_t(X) | W(u), 0 \leq u \leq t_i) = I_{t_i}(X)$, если $t_i < t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Поэтому при $t_i \leq s < t_{i+1}$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $i < k$ и в силу (33.8)

$$\begin{aligned} E(I_t(X) | W(u), 0 \leq u \leq s) &= E(E(I_t(X) | W(u), 0 \leq u \leq t_{i+1}) | W(u), 0 \leq u \leq s) = \\ &= E(I_{t_{i+1}}(X) | W(u), 0 \leq u \leq s) = I_s(X). \end{aligned}$$

См. [566, с. 158] и [585, с. 167–168].

14.1.2. На этот раз аппроксимирующей является сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

[30, с. 104].

$$\begin{aligned} 14.1.3. \mathbb{E} \left(\frac{W(t)^2}{2} \mid W(u), 0 \leq u \leq s \right) &= \mathbb{E} \left(\frac{W(s)^2}{2} \mid W(u), 0 \leq u \leq s \right) + \\ &+ \mathbb{E} \left(\frac{W(t)^2}{2} - \frac{W(s)^2}{2} \mid W(u), 0 \leq u \leq s \right) = \frac{W(s)^2}{2} + \frac{t-s}{2}. \end{aligned}$$

А это и означает, что процесс $W(t)^2/2$ мартингалом не является [566, с. 160].

14.1.4. Используйте равенство (14.3) и определение винеровского процесса, в соответствии с которым $\mathbb{E}W(t)^2 = \mathbb{D}W(t) = t$.

14.1.5. Это так, поскольку $\int_{t_0}^t dW(s) = W(t) - W(t_0)$ [30, с. 59].

14.2.1.

$$\varphi_0 S_0 + G_k = \varphi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i (S_{i+1} - S_i) = \varphi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi_{i+1} S_{i+1} - \varphi_i S_i) = \varphi_k S_k.$$

См. [70] или [420, с. 226].

14.2.2. Применяя формулу Ито (из теоремы 14.2.1 или из (14.9)) при $f(x) = x^2$ получим, что $W(t)^2 = \int_0^t ds + \int_0^t 2W(s) dW$. Поэтому $\int_0^t W(s) dW = [W(t)^2/2] - (t/2)$. См. [585, с. 172].

14.3.1. 1) См. [746, с. 175].

2) Из примера 14.3.3 мы знаем, что $X(t) = e^{Y(t)}$, где Y является $(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ -броуновским движением. Таким образом, $\ln(X(t)/X(0)) \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$.

14.3.2. Заметим, что $dR = d(\ln X) + (\sigma^2/2) dt$. Поэтому, используя результат упр. 14.3.1 получаем, что

$$dR = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW + \frac{\sigma^2}{2} dt = \mu dt + \sigma dW.$$

14.3.3. 1) Примените сначала формулу Ито (14.10) к функции $f(x) = x^n$ для получения равенства

$$dX^n = nX^{n-1} dX + \frac{1}{2}n(n-1)X^{n-2}(dX)^2.$$

А затем замените в нем X на W_t :

$$dW_t^n = nW_t^{n-1} dW_t + \frac{n(n-1)}{2}W_t^{n-2} dt.$$

См. [30, с. 94].

2) Получите разложение

$$dW(t)^n = [W(t) + dW(t)]^n - W(t)^n = nW(t)^{n-1} dW(t) + \frac{n(n-1)}{2}W(t)^{n-2} dt$$

с помощью представлений (13.15) и (13.16). См. [373, с. 89].

14.3.4. Сначала многомерную лемму Ито (теорему 14.2.2) можно использовать для того, чтобы установить равенство $dU = (1/2) dY + (1/2) dZ$. Затем от него останется перейти к соотношению

$$\frac{dU}{U} = \left(\frac{Y}{Y+Z} a + \frac{Z}{Y+Z} f \right) dt + \left(\frac{Y}{Y+Z} b + \frac{Z}{Y+Z} g \right) dW.$$

14.3.5. У сомножителей процесса Ито $U = YZ$ дифференциалы определяются равенствами $dY = a dt + b dW_y$ и $dZ = f dt + g dW_z$, соответственно. И нужно помнить, что коэффициент корреляции dW_y и dW_z равен ρ . Тогда с помощью многомерной леммы Ито (теоремы 14.2.3) можно показать, что

$$dU = Z dY + Y dZ + (a dt + b dW_y)(f dt + g dW_z) = (Za + Yf + bg\rho)dt + Zb dW_y + Yg dW_z.$$

14.3.7. Этот процесс удовлетворяет уравнению $(1/F) dF = (1/X) dX + (1/Y) dY + \sigma^2 dt$ См. [746, с. 176].

14.3.8. Следует представить процесс Y в виде $Y(X, t) \equiv X e^{k t}$ и применить лемму Ито [373, с. 106].

14.3.9. Пусть $f(t) \geq 0$ — произвольная непрерывная и строго возрастающая функция. Тогда

$$W(f(t + \Delta t)) - W(f(t)) \sim N(0, f(t + \Delta t) - f(t)),$$

т.е. эта с.в. приближенно распределена как $N(0, f'(t)\Delta t) = \sqrt{f'(t)\Delta t} N(0, 1)$. С другой стороны,

$$dY(t) = \frac{\partial e^{-t}}{\partial t} W(e^{2t}) dt + e^{-t} dW(e^{2t}) = -Y(t) dt + e^{-t} \sqrt{2e^{2t}} \frac{dW}{dt} \xi = -Y(t) dt + \sqrt{2} dW,$$

где $\xi \sim N(0, 1)$. Но $dW(t) = W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$ и $\xi \sqrt{\Delta t} \sim N(0, \Delta t)$. Поэтому $dY = -Y dt + \sqrt{2} dW$. Общая же формула для дифференциала процесса $a(t) W(f(t))$ имеется в [230, с. 229].

14.3.10. Лемма Ито (теорема 14.2.3) утверждает, что функция H удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial S} dS + \frac{\partial H}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial H}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} dt + \sigma \gamma S \rho \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial \tau} dt + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} dt = \\ &= \left[\mu S \frac{\partial H}{\partial S} + \beta(\bar{\sigma} - \sigma) \frac{\partial H}{\partial \sigma} - \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \sigma \gamma S \rho \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial \tau} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} \right] dt + \\ &\quad + \sigma S \frac{\partial H}{\partial S} dW_1 + \gamma \frac{\partial H}{\partial \sigma} dW_2. \end{aligned}$$

Отметим, что $d\tau = -dt$. См. [790].

14.3.11. Без ограничения общности проверим, что имеет место уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{2} x \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $\tau \equiv t - s$. Поступить так можно потому, что процесс однороден, а в этом мы убеждаемся, замечая, что как снос, так и диффузия процесса Ито не зависят от t [30, замечание 2.6.8]. Из указания мы знаем, что

$$p(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-\tau})}} \exp \left[-\frac{(y - x e^{-\tau/2})^2}{2(1 - e^{-\tau})} \right] = B^{-1/2} A,$$

где

$$A \equiv \exp \left[-\frac{(y - x e^{-\tau/2})^2}{2(1 - e^{-\tau})} \right], \quad B \equiv 2\pi(1 - e^{-\tau}).$$

А далее остается лишь убедиться в справедливости равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= B^{-3/2} A \pi \left[-e^{-\tau} + (y - x e^{-\tau/2})^2 \frac{e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}} - (y - x e^{-\tau/2}) x e^{-\tau/2} \right], \\ \frac{1}{2} x \frac{\partial p}{\partial x} &= B^{-3/2} A \pi (y - x e^{-\tau/2}) e^{-\tau/2} x, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = B^{-3/2} A \pi \left[-e^{-\tau} + \frac{(y - x e^{-\tau/2})^2}{1 - e^{-\tau}} e^{-\tau} \right]. \end{aligned}$$

14.4.1. Это вытекает из предельного соотношения (13.17), т.е. из того, что полная вариация броуновского движения бесконечна (с вероятностью единица) [723].

14.4.2. Если ставки отрицательны, то цена превышает суммарные выплаты по облигации. Поэтому для получения арбитражной прибыли достаточно занять короткую позицию по облигации и зарезервировать часть выручки для погашения в будущем связанного с обязательствами денежного потока.

14.4.3. Должно выполняться равенство $g(T) = 0$; поэтому $\mu = \sigma = 0$. Это и означает, в частности, что случайные изменения отсутствуют. См. [207].

14.4.4. Положим текущее время равным нулю, и пусть в портфеле имеется $b_i > 0$ единиц облигаций типа $i = 1, 2$.

1) Пусть $\theta(t) \equiv A(t)/L(t)$, где

$$A(t) = \sum_{i=1}^2 b_i P(r(t), t, t_i), \quad L(t) = P(r(t), t, s),$$

а функция $P(r(t), t, s)$ определена в (14.16). Подчеркнем, что $r(t)$ — случайная величина. Тогда

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^2 b_i \frac{P(r(t), t, t_i)}{P(r(t), t, s)} = \sum_{i=1}^2 b_i \exp \left[-r(t)(t_i - s) - \mu \frac{(t_i - t)^2 - (s - t)^2}{2} + \sigma^2 \frac{(t_i - t)^3 - (s - t)^3}{6} \right].$$

И, поскольку $\partial^2 \theta(t) / \partial r^2$ равна величине

$$\sum_{i=1}^2 b_i (t_i - s)^2 \times \exp \left[-r(t)(t_i - s) - \mu \frac{(t_i - t)^2 - (s - t)^2}{2} + \sigma^2 \frac{(t_i - t)^3 - (s - t)^3}{6} \right] > 0,$$

то $\theta(t)$ действительно является выпуклой функцией параметра $r(t)$.

2) Иммунизация означает, что $\partial \theta / \partial r = 0$ при $t = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^2 -(t_i - s) b_i \times \exp \left[-r(0)(t_i - s) - \mu \frac{t_i^2 - s^2}{2} + \sigma^2 \frac{t_i^3 - s^3}{6} \right] = 0. \quad (33.9)$$

Но совершенно случайно оказывается, и в этом убеждаемся с помощью простых преобразований, что равенство (33.9) является стандартным условием равенства дюрации фиксированному числу, т.е. оно записывается в виде $-\partial A(t) / \partial r / A(t) = s$. Другое же условие иммунизации состоит в том, что стоимость актива и обязательств при $t = 0$ должны быть равны, или что $\theta(0) = 1$. А это ведет к равенству

$$\sum_{i=1}^2 b_i \times \exp \left[-r(0)(t_i - s) - \mu \frac{t_i^2 - s^2}{2} + \sigma^2 \frac{t_i^3 - s^3}{6} \right] = 1. \quad (33.10)$$

Но, полагая

$$w_i \equiv b_i \times \exp \left[-r(0)(t_i - s) - \mu \frac{t_i^2 - s^2}{2} + \sigma^2 \frac{t_i^3 - s^3}{6} \right],$$

мы приходим к представлению

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sum_{i=1}^2 w_i \times \exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_i - s) - \mu \frac{(t_i - t)^2 - (s - t)^2 - t_i^2 + s^2}{2} + \sigma^2 \frac{(t_i - t)^3 - (s - t)^3 - t_i^3 + s^3}{6} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^2 w_i \times \exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_i - s) + \mu t(t_i - s) + \sigma^2 \frac{t - t_i - s}{2} t(t_i - s) \right]. \end{aligned}$$

И для доказательства останется лишь показать, что

$$\theta(t) < w_1 + w_2 = 1. \quad (33.11)$$

Но это неравенство вытекает из следующей леммы.

Лемма. Неравенство (33.11) имеет место, поскольку при $i = 1, 2$

$$\exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_i - s) + \mu t(t_i - s) + \sigma^2 \frac{t - t_i - s}{2} t(t_i - s) \right] < 1.$$

Доказательство леммы. С помощью равенств (33.9) и (33.10) легко понять, что $w_1 = [(s - t_2)/(t_1 - t_2)]$ и $w_2 = [(t_1 - s)/(t_1 - t_2)]$, поскольку $\sum_{i=1}^2 -(t_i - s) w_i = 0$

и $\sum_{i=1}^2 w_i = 1$. Но, используя полученное представление для $\theta(t)$, условие $[\partial\theta(t)/\partial r(t)] = 0$ можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^2 (s - t_i) w_i \times \exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_i - s) + \mu t(t_i - s) + \sigma^2 \frac{t - t_i - s}{2} t(t_i - s) \right] = 0.$$

Подставляя далее найденные выражения для (w_1, w_2) в это равенство получим, что

$$0 = (s - t_1) \frac{s - t_2}{t_1 - t_2} \exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_1 - s) + \mu t(t_1 - s) + \sigma^2 \frac{t - t_1 - s}{2} t(t_1 - s) \right] + \\ + (s - t_2) \frac{t_1 - s}{t_1 - t_2} \exp \left[-\{r(t) - r(0)\}(t_2 - s) + \mu t(t_2 - s) + \sigma^2 \frac{t - t_2 - s}{2} t(t_2 - s) \right].$$

Следовательно,

$$-\{r(t) - r(0)\}(t_1 - s) + \mu t(t_1 - s) + \sigma^2 \frac{t - t_1 - s}{2} t(t_1 - s) = \\ = -\{r(t) - r(0)\}(t_2 - s) + \mu t(t_2 - s) + \sigma^2 \frac{t - t_2 - s}{2} t(t_2 - s). \quad (33.12)$$

Но тождество (33.12) означает, что

$$r(t) = \left[r(0)(t_2 - t_1) + \mu t(t_2 - t_1) + \sigma^2 \frac{t - t_2 - s}{2} t(t_2 - s) - \sigma^2 \frac{t - t_1 - s}{2} t(t_1 - s) \right] / (t_2 - t_1) = \\ = r(0) + \mu t + \frac{\sigma^2 t}{2} (t - t_2 - t_1).$$

Наконец, подставляя полученное равенство в первое ($i = 1$) из выражений леммы получим, что

$$\exp \left[-\left\{ \mu t + \frac{\sigma^2 t}{2} (t - t_2 - t_1) \right\} (t_1 - s) + \mu t(t_1 - s) + \sigma^2 \frac{t - t_1 - s}{2} t(t_1 - s) \right] = \\ = \exp \left[\frac{\sigma^2 t}{2} (t_1 - s)(t_2 - s) \right] < 1.$$

Ну а второе выражение ($i = 2$) рассматривать излишне в силу тождества (33.12). $\square$

14.4.5. Это равенство вытекает из (13.12).

14.4.6. Хотя равенство $dS/S = \sigma dW$ и выглядит «симметричным» относительно нуля, на самом деле оно таким не является. И убедиться в этом проще на примере его дискретного аналога, который утверждает, что изменение в процентах имеет нулевое среднее. Однако 2 % уменьшение с последующим 2 % увеличением приведут к уменьшению: $1,02 \times 0,98 = 0,9996 < 1$. Другими словами, за 2 % уменьшением должно последовать более, чем 2 % увеличение, чтобы получить исходный уровень.

14.4.7. Эти значения вытекают из тождества (13.12) и того факта, что $\ln(S(t)/S(0))$ является $(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ -броуновским движением.

14.4.8. Это может быть оправдано эвристически, следующим образом. Разобьем интервал $[0, T]$ на n равных отрезков. И пусть σ_{i-1} обозначает (рассматриваемую как ежегодную) волатильность на протяжении периода i , а S_i — цену акции в момент i . Тогда в силу (14.17)

$$\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \sim N \left(\mu \Delta t - \frac{1}{2} \sigma_{i-1}^2 \Delta t, \sigma_{i-1}^2 \Delta t \right).$$

Если S и σ некоррелированы, то предыдущее соотношение выполняется при данном σ_{i-1} . Распределение же вероятностей с.в. $\ln(S_n/S_0)$ при данной траектории σ (т.е.

при $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$) является нормальным со средним

$$\sum_i \left(\mu \Delta t - \frac{1}{2} \sigma_{i-1}^2 \Delta t \right) = \mu T - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{i-1}^2 \Delta t \rightarrow \mu T - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 T$$

и дисперсией $\sum_i (\sigma_{i-1}^2 \Delta t) \rightarrow \hat{\sigma}^2 T$.

14.4.9. Это вытекает из того, что $(\Delta S)^2 \approx \sigma^2 S^2 \Delta t$ [514, с. 221].

14.4.11. Заметим, что

$$\ln u = -\ln d, \quad u \approx 1 + \sigma \sqrt{\frac{\tau}{n}} + \frac{\sigma^2 \tau}{2n}, \quad d \approx 1 - \sigma \sqrt{\frac{\tau}{n}} + \frac{\sigma^2 \tau}{2n}.$$

Отсюда $u + d \approx 2 + \sigma^2(\tau/n)$ и $u - d \approx 2\sigma\sqrt{\tau/n}$. Наконец,

$$p \approx \frac{[1 + r(\tau/n)] - [1 - \sigma\sqrt{\tau/n} + (1/2)\sigma^2(\tau/n)]}{2\sigma\sqrt{\tau/n}} \approx \frac{1}{2} + \frac{r(\tau/n) - (1/2)\sigma^2(\tau/n)}{2\sigma\sqrt{\tau/n}}.$$

Поэтому

$$\mathbb{E}X_i = p \ln u + (1-p) \ln d = (2p-1) \ln u \approx r \frac{\tau}{n} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\tau}{n}.$$

И, следовательно, $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n \mathbb{E}X_i \approx r\tau - \sigma^2 \tau/2$.

Далее вычисляем дисперсию:

$$\begin{aligned} DX_i &= p(\ln u - \mathbb{E}X_i)^2 + (1-p)(\ln d - \mathbb{E}X_i)^2 = \\ &= p[\ln u - (2p-1) \ln u]^2 + (1-p)[\ln d - (2p-1) \ln u]^2 = \\ &= p[\ln u - (2p-1) \ln u]^2 + (1-p)[- \ln u - (2p-1) \ln u]^2 = 4p(1-p) \ln^2 u \approx \\ &\approx 4 \left[\frac{1}{2} + \frac{r(\tau/n) - (1/2)\sigma^2(\tau/n)}{2\sigma\sqrt{\tau/n}} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{r(\tau/n) - (1/2)\sigma^2(\tau/n)}{2\sigma\sqrt{\tau/n}} \right] \sigma^2 \frac{\tau}{n} \approx \sigma^2 \frac{\tau}{n}. \end{aligned}$$

И, соответственно, приходим к искомому выражению: $D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n DX_i \approx \sigma^2 \tau$.

14.4.12. Неправильным будет простейший выбор

$$X_{i+1} = \ln \left(1 + \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right) \approx \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \equiv \frac{\Delta S_i}{S_i}.$$

Следует положить

$$X_{i+1} = \ln \left(1 + \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right) \approx \frac{\Delta S_i}{S_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta S_i}{S_i} \right)^2.$$

Тогда, поскольку $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$, в результате получим, что $X_{i+1} \approx (\Delta S_i/S_i) - (1/2)\sigma^2 \Delta t$. А это решает проблему.

14.4.13. Используйте приближение (14.7) к уравнению $dX = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW$ [229].

К главе 15

15.2.2. Из различных подходов к определению базового процесса вытекают различные способы оценки по имеющимся данным коэффициента диффузии и они могут и не привести к одинаковым значениям. Поэтому σ , которая входит в формулу Блэка—Шоулса, может принимать разные значения в разных моделях. А, следовательно, неправильная характеристизация сноса может привести к неправильной оценке коэффициента диффузии у процесса Ито [819]. Более полная аргументация приведена в [613].

15.2.3. Запишем формулу (9.4) для оценки стоимости (эквивалентного портфеля) в виде

$$C(S, t) = \frac{pC(S^+, t + \Delta t) + (1-p)C(S^-, t + \Delta t)}{e^{r\Delta t}},$$

где $p \equiv (Se^{r\Delta t} - S^-)/(S^+ - S^-)$. Разложим функции $C(S^+, t + \Delta t)$ и $C(S^-, t + \Delta t)$ в ряд Тейлора в точке (S, t) и подставим полученные выражения в указанную формулу. См. [696, с. 416].

15.2.4. Эта формула представляет собой риск-нейтральную оценку стоимости с логнормальной плотностью у цены [492, с. 312].

15.2.5. Нужно проделать те же шаги, но при несколько измененных граничных условиях: $B(0, \tau) = 1$ при $\tau > 0$ и $B(S, 0) = \max(1 - S/X, 0)$. Кроме того, на этот раз используется равенство $\Theta(z, 0) = \max(e^{-z} - 1, 0)$. Тогда

$$\Theta(z, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^0 (e^{-y} - 1) e^{-(z-y)^2/(2u)} dy = \dots = -\Phi\left(-\frac{z}{\sqrt{u}}\right) + \frac{1}{x} \Phi\left(-\frac{z-u}{\sqrt{u}}\right).$$

Все остальное очень просто.

15.2.6. Если $X - S$ вставить в уравнение (15.2), то получим, что [879, с. 112]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP = -rX < 0.$$

15.3.1. Оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} = rC.$$

И получить его можно с помощью соображений по хеджированию, а также замечания о том, что заключение форвардного контракта не требуется оплачивать. Если же действовать по-другому, то в первоначальном дифференциальном уравнении Блэка—Шоулса можно заменить $\partial C/\partial t$ на $\partial C/\partial t - rF(\partial C/\partial F)$, $\partial C/\partial S$ на $e^{r(T-t)}(\partial C/\partial F)$, и $\partial^2 C/\partial S^2$ на $e^{2r(T-t)}(\partial^2 C/\partial F^2)$. См. [125], [575, п. 2.3.3] и [879, с. 100].

15.3.3. 1) Это очевидно [492, с. 380].

$$2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n rS_i \frac{\partial C}{\partial S_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 S_i^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} = rC.$$

15.3.4. $\max(S_1, S_2) = S_1 + \max(S_2 - S_1, 0)$.

15.3.5. Его заключительную выплату можно записать в виде

$$\max(S_1(\tau) - X, 0) + \max(S_2(\tau) - X, 0) - \max(\max(S_1(\tau), S_2(\tau)) - X, 0).$$

Последнее слагаемое здесь и представляет собой заключительную выплату по опциону колл на максимум из (цен) двух активов с ценой исполнения X . См. [746, с. 376].

15.3.6. См. [492, с. 4].

15.3.8. Если применить лемму Ито к функции $f(S_1, S_2) = S_2/S_1$, то получим

$$df = (\dots) dt - \frac{S_2}{S_1} \sigma_1 dW_1 + \frac{S_2}{S_1} \sigma_2 dW_2.$$

С помощью выражения для дисперсии (линейной комбинации нормально распределенных с.в.) (6.9) мы заключаем, что дисперсия у $df/f = d(S_2/S_1)/(S_2/S_1)$ как раз и равна σ^2 из (15.5).

15.3.10. Оно получается с помощью уравнения $dV - V_1 dS_1 - V_2 dS_2 = 0$.

15.3.11. Нужно лишь вставить данные в формулу (9.20) для акции, по которой выплачивается непрерывная дивидендная доходность.

15.3.12. 1) Пусть F обозначает форвардный обменный курс на момент τ лет спустя. Начнем с S единиц местной валюты и конвертируем ее в одну единицу

иностранной. А потом продадим эту валюту с помощью форвардного контракта. Затем применим стандартную аргументацию хеджирования, используя для построения эквивалентных портфелей лишь иностранные активы и получая доходность, равную безрисковой ставке r_f в иностранной валюте. А чтобы проверить самофинансируемость выбранной стратегии в терминах местной валюты заметим, что форвардная цена равна $Se^{(r-r_f)\tau}$ на момент за τ лет до окончания срока. Заключительная стоимость, равная $e^{r\tau}$, совпадает со стоимостью опциона колл в иностранной риск-нейтральной экономике. И она может быть конвертируема за $e^{r\tau}F = Se^{r\tau}$ долларов в местной валюте, поскольку $F = Se^{(r-r_f)\tau}$. Корреляция между обменным курсом и ценой иностранного актива устраняется с помощью форвардного контракта.

2) Результаты в (1) показывают, что сумма G_f растет со скоростью $r_f - q_f + r - r_f = r - q_f$ в местной риск-нейтральной экономике, эквивалентной ситуации со ставкой выплат q_f . Более того, в этой экономике сумма X_f в момент окончания срока превращается в $X_f F/S = X_f e^{(r-r_f)\tau}$.

15.3.13. Пусть $S_f(t) \equiv S(t) B_f(t)$ — этот процесс также описывается геометрическим броуновским движением. У нас есть опцион обмена, по которому можно купить $S(T) B_f(T)$ за $XB(T)$ в момент времени T . Заметим, что $B(T) = B_f(T) = 1$. Поэтому искомой является формула $SB_f\Phi(x) - X B\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau})$, в которой

$$x \equiv \frac{\ln(SB_f/(XB)) + (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma_{S_f}^2 - 2\rho\sigma_{S_f}\sigma_B + \sigma_B^2,$$

а ρ является коэффициентом корреляции между ценами S_f и B , см. [575, с. 110].

15.3.15. Возьмите доллар США за валюту C в случае иностранного опциона в местной валюте. Случай форексного опциона тривиален.

15.3.16. Портфель характеризует следующая заключительная выплата в долларах США:

$$\max(S_A - X_A, 0) + X \times \max(X_C - S_C, 0).$$

А далее рассмотрите все шесть возможных соотношений между спот-ценами (S_A , S_C и S) и ценами исполнения. См. [775].

15.3.17. Положим для простоты, что $\hat{S} = 1$. Обменный курс и цена иностранного актива удовлетворяют следующим уравнениям

$$dS = \mu_s S dt + \sigma_s S dW_s, \quad dG_f = \mu_f G_f dt + \sigma_f G_f dW_f,$$

соответственно. По иностранному активу выплачивается непрерывная дивидендная доходность q_f . И пусть C — цена квантового опциона. Тогда по лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$dC = \left(\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \mu_f G_f \frac{\partial C}{\partial G_f} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_f^2 G_f^2 \frac{\partial^2 C}{\partial G_f^2} + \rho \sigma_s \sigma_f S G_f \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial G_f} \right) dt + \sigma_s S \frac{\partial C}{\partial S} dW_s + \sigma_f G_f \frac{\partial C}{\partial G_f} dW_f.$$

Соберем портфель из одного длинного квантового опциона, короткой позиции по δ_s единицам иностранной валюты и короткой позиции по δ_f единицам иностранного актива. Его стоимость $\Pi = C - \delta_s S - \delta_f G_f S$. Полное же изменение стоимости портфеля за время dt задается выражением

$$d\Pi = dC - \delta_s dS - \delta_f d(G_f S) - \delta_s S r_f dt - \delta_f G_f S q_f dt.$$

Последние два слагаемые в нем относятся к иностранным процентам и дивидендам. Из примера 14.3.5 вытекает, что

$$d(G_f S) = G_f S (\mu_s + \mu_f + \rho \sigma_s \sigma_f) dt + \sigma_s G_f S dW_s + \sigma_f G_f S dW_f.$$

Если далее в представление для $d\P$ вставим выражения для dC , dS и $d(G_f S)$, то получим

$$d\P = \left[\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \mu_f G_f \frac{\partial C}{\partial G_f} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_f^2 G_f^2 \frac{\partial^2 C}{\partial G_f^2} + \rho \sigma_s \sigma_f S G_f \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial G_f} - \right. \\ \left. - \delta_s \mu_s S - \delta_f G_f S (\mu_s + \mu_f + \rho \sigma_s \sigma_f) - \delta_s S r_f - \delta_f G_f S q_f \right] dt + \\ + \left(\sigma_s S \frac{\partial C}{\partial S} - \delta_s \sigma_s S - \delta_f \sigma_s G_f S \right) dW_s + \left(\sigma_f G_f \frac{\partial C}{\partial G_f} - \delta_f \sigma_f G_f S \right) dW_f.$$

Очевидно, устранить элемент случайности можно, положив $\delta_f = (\partial C / \partial G_f) S^{-1}$ и $\delta_s = (\partial C / \partial S) - (\partial C / \partial G_f) (G_f / S)$. При таком выборе

$$d\P = \left[\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \mu_f G_f \frac{\partial C}{\partial G_f} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_f^2 G_f^2 \frac{\partial^2 C}{\partial G_f^2} + \rho \sigma_s \sigma_f S G_f \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial G_f} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial G_f} \cdot \frac{G_f}{S} \right) \mu_s S - \frac{\partial C}{\partial G_f} G_f (\mu_s + \mu_f + \rho \sigma_s \sigma_f) - \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial G_f} \cdot \frac{G_f}{S} \right) S r_f - \right. \\ \left. - \frac{\partial C}{\partial G_f} G_f q_f \right] dt = r \Pi \quad dt = r(C - \delta_s S - \delta_f G_f S) dt = r \left[C - \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial G_f} \cdot \frac{G_f}{S} \right) S - \frac{\partial C}{\partial G_f} G_f \right] dt.$$

После упрощений получим

$$rC = (r - r_f) S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma_s^2 S^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\sigma_f^2 G_f^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial G_f^2} + \rho \sigma_s \sigma_f S G_f \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial G_f} + \\ + \frac{\partial C}{\partial G_f} G_f (r_f - \rho \sigma_s \sigma_f - q_f).$$

Наконец, C непосредственно от обменного курса S не зависит [734]. Поэтому полученное уравнение превращается в равенство

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma_f^2 G_f^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial G_f^2} + \frac{\partial C}{\partial G_f} G_f (r_f - \rho \sigma_s \sigma_f - q_f).$$

См. [878, с. 156—157].

15.3.18. Это потому, что облигация существует после момента t^* только если $C(V, t^*) < P(t^*)$ и рыночная стоимость при неотзыве превышена величиной $P(t)$ при $t = t^*$, поскольку в противном случае она будет отозвана в момент $t = t^*$. Начиная с этого момента облигация будет отозвана сразу после того, как ее рыночная стоимость при неотзыве поднимется до цены опциона колл. Поскольку эта рыночная стоимость не может быть превышена стоимостью конверсии, то $C(V, t) \leq P(t)$. И как следствие, при оплате купона и когда облигация отзывается (другими словами, $t > t^*$),

$$W(V, t^-) = \min(W(V - mc, t^+) + c, P(t)),$$

поскольку, как это объясняется в тексте, облигация должна быть отозвана только тогда, когда ее стоимость при неотзыве сравняется с ценой опциона колл, которая равна стоимости при отзыве, если $C(V, t) \leq P(t)$.

15.4.1. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ обозначают стоимость ценной бумаги, которая зависит от величин $S_1, S_2, \dots, S_n$ и t . Тогда по лемме Ито (теорема 14.2.2)

$$df_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_i \mu_i S_i \frac{\partial f_j}{\partial S_i} + \sum_{i,k} \frac{1}{2} \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k S_i S_k \frac{\partial^2 f_j}{\partial S_i \partial S_k} \right) dt + \sum_i \sigma_i S_i \frac{\partial f_j}{\partial S_i} dW_i \equiv \\ \equiv \mu_j f_j dt + \sum_i \sigma_{ij} f_j dW_i. \quad (33.13)$$

Соберем портфель из такого числа k_j единиц ценных бумаг со стоимостью f_j , что

$$\sum_j k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (33.14)$$

Поскольку же

$$\sum_j k_j df_j = \sum_j k_j \mu_j f_j dt + \sum_j k_j \sum_i \sigma_{ij} f_j dW_i = \sum_j k_j \mu_j f_j dt + \sum_i \sum_j k_j \sigma_{ij} f_j dW_i = \sum_j k_j \mu_j f_j dt,$$

то портфель оказывается мгновенно безрисковым. Следовательно, его доходность равняется краткосрочной ставке, т.е. $\sum_j k_j \mu_j f_j = r \sum_j k_j f_j$. Запишем это равенство в виде

$$\sum_j k_j f_j (\mu_j - r) = 0. \quad (33.15)$$

Если не все k_j равны нулю, то из полученных равенств (33.14) и (33.15) вытекает, что $\mu_j - r = \sum_i \lambda_i \sigma_{ij}$ при некоторых таких $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые зависят лишь от $S_1, S_2, \dots, S_n$ и t ¹. Таким образом, для любого производного инструмента, чья стоимость зависит лишь от $S_1, S_2, \dots, S_n$ и t , а также удовлетворяет уравнению

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_i \sigma_i dW_i, \quad (33.16)$$

должно выполняться равенство

$$\mu - r = \sum_i \lambda_i \sigma_i, \quad (33.17)$$

в котором λ_i обозначают рыночную цену риска для (акции с ценой) S_i . Равенство (33.17) связывает дополнительную ожидаемую доходность с риском. Слагаемое же $\lambda_i \sigma_i$ измеряет ту степень, с которой требуемая доходность по ценной бумаге определяется ее зависимостью от S_i . В соответствии с уравнением (33.13) величины μ и σ_i из (33.16) можно записать в виде

$$\mu = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \mu_i S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k S_i S_k \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_k}, \quad \sigma_i = \sum_i \sigma_i S_i \frac{\partial f}{\partial S_i}.$$

Вставляя их в равенство (33.17) и группируя слагаемые, получим искомое уравнение (15.14). Риск-нейтральная оценка стоимости дисконтирует ожидаемую выплату f по безрисковой ставке в предположении, что $dS_i/S_i = (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) dt + \sigma_i dW_i$. Корреляция между dW_i не изменилась.

15.4.2. 1) Заметим лишь, что $S = X$.

2) Используйте риск-нейтральную аргументацию. См. [894, с. 186].

К главе 16

16.2.1. Оно уменьшает риск (стандартное отклонение доходности), не требуя премии за риск [3, с. 38].

16.2.2. Поскольку выражение для $\hat{\beta}_1$ из формулы (6.14) представляет собой именно коэффициент хеджирования $h = \rho \delta_S / \delta_F$. И убедиться в этом нетрудно, если в последнее равенство подставить значение $\rho = r$ из (6.18), а также выражения (6.2) для δ_S и δ_F .

16.2.3. По формуле (16.2) мы занимаем короткую позицию по $(1,25 - 2,0) \times \times [2\,400\,000 / (600 \times 500)] = -6$ фьючерсным контрактам, или, что эквивалентно, длинную позицию по шести фьючерсным контрактам.

16.3.1. 1) В рассматриваемой постановке число возможных значений у цены акции образует множество мощности континуум, в отличие от двух возможных значений в биномиальной модели.

2) Совершенное копирование возможно, например, если соответствующие стоимости связаны линейно. См. [119].

16.3.3. Из-за выпуклости стоимости опциона, стоимость хеджа, будучи линейной функцией от цены акции, уменьшается независимо от того, в какую сторону движется цена; обычно акции покупают, когда их цена растет, и продают, когда падает. Поэтому премию можно рассматривать как резерв наличных для оплаты будущих потерь от хеджирования с целью сохранить самофинансируемость стратегии. См. [593].

С другой стороны, мы можем проверить, что эквивалентный портфель, состоящий из Δ сертификатов акций плюс на B долларов облигаций, в произвольный момент *не* является самофинансируемым, если величина B не превосходит стоимость акций точно на величину премии по опциону. Это означает, что мы занимаем деньги для того, чтобы покупать акции, но при этом должны сами первоначально вложить сумму, равную опционной премии.

16.3.5. Из равенства (15.3) ясно, что $\Theta = 0$, если $\Delta = \Gamma = f = 0$.

16.3.8. Если обе цены исполнения в бычьем колл-спреде относительно близки друг к другу, то его позиционная выплата будет примерно совпадать с выплатой по бинарному опциону [514, с. 604].

К главе 17

17.1.1. Используйте принцип отражения [725, с. 106].

17.1.3. Заметим лишь, что для каждой заключительной цены число траекторий с минимальным уровнем цены M , равно числу траекторий, которые достигают M , за вычетом траекторий, попадающих на уровень $M - 1$. Оба указанных числа можно получить с помощью принципа отражения.

17.1.4. Положим

$$\kappa \equiv \left\lfloor \frac{\ln(K/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\ln(K/S)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Легко видеть, что величина $\tilde{K} \equiv Su^\kappa d^{n-\kappa}$ представляет ту цену среди всех цен $Su^j d^{n-j}$ ($0 \leq j \leq n$), которая является ближайшей к K , но в то же время не превосходящей ее. Роль спусковой цены в биномиальной модели играет эффективная спусковая цена $\tilde{K}$. Предположим, что она превосходит текущую цену акций, т.е. $2\kappa \geq n$.

Возьмем произвольный узел A , в который можно попасть из начальной точки (корня) за l шагов, и который соответствует спусковой цене, т.е. $Su^j d^{l-j} = \tilde{K}$ при некотором $0 \leq j \leq l$. ПЗ выплаты равно $R^{-l}(\tilde{K} - X)$. И теперь нам нужно лишь найти вероятность того, что барьер цены $\tilde{K}$ до сих пор не достигался. Рассмотрим узел B , из которого в A можно попасть за два шага вверх. Цена в этом узле равна $Su^{j-2} d^{l-j}$. Заметим, что вероятность траекторий длины $l-2$, которые достигают B , но не касаются барьера $\tilde{K} = Su^{j-1} d^{l-2-(j-1)}$, как раз и является вероятностью, которую мы ищем. Однако эта эквивалентная проблема представляет собой *дополнение* к известной теореме о так называемой баллотировке! Запишем цену узла B в виде $Su^{j-2} d^{(l-2)-(j-2)}$. Тогда искомая вероятность по формуле (17.5) может быть записана следующим образом:

$$\binom{l-2}{(l-2)-2(j-1)+(j-2)} p^{j-2} (1-p)^{(l-2)-(j-2)} = \binom{l-2}{l-j-2} p^{j-2} (1-p)^{l-j}.$$

Из природы процесса вытекает, что число $n-l$ должно быть четным. В силу же (17.4) $l \geq 2\kappa - n$. Более того, поскольку $Su^j d^{l-j} = Su^\kappa d^{n-\kappa}$, то $j = (l-n)/2 + \kappa$. Поэтому предыдущую вероятность можно записать в виде

$$\binom{l-2}{(l+n)/2 - \kappa - 2} p^{(l-n)/2 + \kappa - 2} (1-p)^{(l+n)/2 - \kappa}.$$

Отсюда мы заключаем, что выплата при досрочном исполнении равна

$$\sum_{\substack{2\kappa-n \leq l \leq n \\ n-l \text{ чётно}}} R^{-l} \binom{l-2}{(l+n)/2-\kappa-2} p^{(l-n)/2+\kappa-2} (1-p)^{(l+n)/2-\kappa} (\tilde{K}-X).$$

Остается добавить часть, соответствующую выплате от исполнения при погашении, которая как раз и представляет стоимость опциона вниз-и-выход с барьером, приравненным к спусковой цене.

17.1.6. Сначала проверим, что

$$\left(\frac{up}{d(1-p)} \right)^{2h-n} \rightarrow \left(\frac{H}{S} \right)^{2\lambda}, \quad (33.18)$$

если положить $\lambda \equiv (r + \sigma^2/2)/\sigma^2$, использовать выражения для u , d из формулы (17.1) и p , а также привлечь асимптотическое соотношение $\ln(1+x) \approx x$, $x \rightarrow 0$. Запишем далее представление (17.6) в виде

$$\begin{aligned} S \sum_{j=a}^{2h} \binom{n}{n-2h+j} \left(\frac{up}{R} \right)^j \left[\frac{d(1-p)}{R} \right]^{n-j} - X R^{-n} \sum_{j=a}^{2h} \binom{n}{n-2h+j} p^j (1-p)^{n-j} = \\ = S \left[\frac{up}{d(1-p)} \right]^{2h-n} \sum_{j=a}^{2h} \binom{n}{n-2h+j} \left(\frac{up}{R} \right)^{n-2h+j} \left[\frac{d(1-p)}{R} \right]^{2h-j} - X \times (\dots). \end{aligned}$$

И проанализируем первое слагаемое, поскольку со вторым можно поступить аналогично. Заметим, что $h \leq n/2$, поскольку $H < S$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=a}^{2h} \binom{n}{n-2h+j} \left(\frac{up}{R} \right)^{n-2h+j} \left[\frac{d(1-p)}{R} \right]^{2h-j} = \sum_{j=n-2h+a}^n \binom{n}{j} \left(\frac{up}{R} \right)^j \left[\frac{d(1-p)}{R} \right]^{n-j} = \\ = \Phi(n-2h+a; n, pu/R). \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $n-2h+a \approx \ln \left(\frac{SX}{H^2 d^n} \right) / \ln(u/d)$. Наконец, используем сходимость (9.18) и получим, что

$$\Phi(n-2h+a; n, pu/R) \rightarrow \Phi(x), \quad \text{где } x \equiv \frac{\ln(H^2/(SX)) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Таким образом, учитывая сходимость (33.18), можно сказать, что мы доказали справедливость формулы (11.4) для случая бездивидендной акции.

17.1.7. Из леммы 9.3.3 вытекает, что в риск-нейтральной экономике $\ln S_\tau \sim N(\ln S + (r - q - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau)$, где q — непрерывная дивидендная доходность. Поэтому $\ln S_\tau^2 \sim N(2 \ln S + (2r - 2q - \sigma^2)\tau, 2\sigma^2\tau)$. Таким образом, искомая формула переходит в формулу Блэка—Шоулса в результате следующей замены: $S \rightarrow S^2$, $r \rightarrow 2r + \sigma^2$, $q \rightarrow 2q$, и $\sigma \rightarrow 2\sigma$. См. [845].

17.1.8. См. алгоритм на рис. 17.3 и [624].

17.1.9. В качестве информации, которая в каждом узле считается известной, мы будем использовать текущую цену акции, а также геометрически взвешенное среднее прошлых цен акций. В соответствии с упр. 11.7.2, число состояний в момент i приближенно равно $i^3/2$ и потому обратная индукция за n периодов приводит к затрачиваемому времени $O(n^4)$. За более тонким использованием структуры данных обращайтесь в [249].

Чтобы сократить затрачиваемое время до $O(n^3)$ докажем, что число траекторий длины n , имеющих то же самое геометрическое среднее, в точности равно числу неупорядоченных разбиений некоторого целого числа на неравные части, ни одна из которых не превосходит n . Пусть $q(m)$ означает число таких разбиений целого числа

$m > 0$. Произвольное правильное разбиение m , скажем, $\lambda \equiv (x_1, x_2, \dots, x_k)$, удовлетворяет равенству $\sum_i x_i = m$, в котором $n \geq x_1 > x_2 > \dots > x_k > 0$. Будем интерпретировать λ как траекторию длины n , в которой первый переход вверх делается на шаге $n - x_1$ (т. е. в течение периода $n - x_1 + 1$), второе движение вверх — на шаге $n - x_2$, и т.д. Каждое движение вверх на шаге $n - x_i$ добавляет в сумму m величину x_i . У такой траектории заключительное геометрическое среднее (цен) равно $SM^{1/(n+1)}$, где $M \equiv u^m d^{n(n+1)/2-m}$, причем i -е движение вверх вносит вклад u^{x_i} в множитель u^m . И пусть для полноты картины $q(0) = 1$ (См. [26], где есть более подробная информация по целочисленным разбиениям). Ну а наиболее важным является замечание, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)=\sum_{m=0}^{n(n+1)/2}q(m)x^m.$$

Очевидно, вышеуказанное произведение можно разложить в полином за время $O(n^3)$. Таким образом, его коэффициенты $q(m)$ также могут быть получены за кубическое время. При параметрах из упр.9.3.1 стоимость опциона окажется равной

$$R^{-n}\sum_{m=0}^{n(n+1)/2}2^{-n}q(m)\times\max(S[u^m d^{n(n+1)/2-m}]^{1/(n+1)}-X,0).$$

Отметим, что эта конкретная параметризация делает вычисление вероятности достижения произвольного заданного заключительного геометрического среднего легкой: она равна $2^{-n}q(m)$. Стандартные же параметры $u=e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}$ и $d=1/u$ привели бы к осложнениям, вызванным неравенством вероятностей движений вверх и вниз.

17.1.10. 1) Пусть $H_i \equiv Sd^{n-i}$, $i=0, 1, \dots, n$, и $H_{-1} \equiv -\infty$. Опцион, оглядывающийся на минимум в n -периодном биномиальном дереве эквивалентен портфелю из $n+1$ опциона барьерного типа, i -й из которых является опционом, вступающим в силу при достижении барьера H_i , но прекращающим свою «жизнь» при достижении барьера H_{i-1} . Поскольку такой опцион в основном является длинным начало-опционом с барьером H_i и коротким нокаут-опционом с барьером H_{i-1} , то его стоимость можно оценить за время $O(n)$. Учитывая, что таких опционов всего $n+1$, приходим к совокупному затрачиваемому времени $O(n^2)$. См. упр.17.1.3 и [285].

2) Для барьерных опционов, упомянутых в (1), последовательные пары опционов связаны: и потому стоимость каждого опциона в паре может быть оценена, исходя из предыдущего опциона за время $O(1)$.

17.1.12. Это имеет место, поскольку h появляется в результате операции пол; противоположное выполнялось бы, если бы h было результатом применения операции потолок. По сравнению с этим моментом влияние a ничтожно.

17.1.13. Рассмотрим такое j , которое делает величину $H' = Su^j d^{n-1-j}$ максимальной из всех, которые не превосходят H . Обозначим это число h' . И будем использовать $2h+1$ вместо $2h$, если $Su^{h'} d^{n-1-h'} > Su^h d^{n-h}$, поскольку этот эффективный барьер H' «плотнее» (т.е. ближе к H), чем $Su^h d^{n-h}$. Альтернативная эквивалентная процедура состоит в проверке неравенства $Su^h d^{n-1-h} \leq H$ и, если оно окажется справедливым, то в замене $2h$ на $2h+1$. Результатом этого будет упрощение выбора n :

$$n=\left\lfloor\frac{\tau}{[\ln(S/H)/(j\sigma)]^2}\right\rfloor,\quad j=1,2,3,\dots$$

17.1.15. Мы установим формулу (17.8) с помощью рис.33.3. Рассмотрим произвольную законную траекторию, соединяющую точки $(0, -a)$ и $(n, -b)$, которая достигает H . Пусть J означает первый момент, когда это происходит (эта траектория может проходить через линию L ранее). Отображая часть этой траектории от точки $(0, -a)$ до точки J (относительно линии H), мы строим траекторию, соединяющую точку $(0, a)$ с точкой $(n, -b)$. Отметим, что эта новая траектория достигает H в точке J . Число траекторий из точки $(0, -a)$ в точку $(n, -b)$, в которых достижению

Триномиальная обратная индукция с использованием диагонального метода:

ввод: S, σ, X, n, τ, r ;
действительные числа $p_u, p_m, p_d, u, d, C[0..n][0..2n]$;
целые i, j ;
Вычислить u и d ;
Вычислить вероятности ветвления p_u, p_m и p_d ;
для $(i = 2n$ вниз до $0)$ {
 для $(j = n$ вниз до $\lceil i/2 \rceil)$ {
 если $[j = n]$ // Момент окончания срока
 Вычислить $C[j][i]$, исходя из Su^{j-i} ;
 } в противном случае { // Обратная индукция
 Вычислить $C[j][i]$, исходя из $C[j+1][i]$,
 $C[j+1][i+1]$, $C[j+1][i+2]$, p_u, p_m, p_d и Su^{j-i}
 (с дисконтирующим фактором $e^{-r\tau/n}$);
 }
 }
}
вывод $C[0][0]$;

Рис. 33.4. Триномиальная обратная индукция с диагональным методом. $C[j][i]$ представляет стоимость производного инструмента в момент j , если цена акции сделает на $j-i$ движений вверх больше, чем вниз; это отвечает узлу с $(i+1)$ -й наибольшей ценой базового актива. Напоминаем, что $ud=1$. Требования по памяти можно еще более ослабить, используя одномерный набор для C .

значений цен акций Su^j ($-n \leq j \leq n$). Пусть

$$a \equiv \left\lceil \frac{\ln(X/S)}{\lambda \sigma \sqrt{\Delta t}} \right\rceil, \quad h \equiv \frac{\ln(S/H)}{\lambda \sigma \sqrt{\Delta t}} > 0.$$

Процесс за n шагов заканчивается ценой, равной или большей цены исполнения X тогда и только тогда, когда число ее движений вверх превосходит число движений вниз по крайней мере на a , поскольку $Su^{a-1} < X \leq Su^a$. Стартовая же цена отделена от барьера h переходами вниз, поскольку $Su^{-h} = H$ (см. рис. 33.5). Позволяет оценивать стоимость Европейских опционов колл вниз-и-вход следующая формула:

$$R^{-n} \sum_{m=0}^{n-2h-a} \sum_{j \geq \max(a, m-n)}^{n-m-2h} \frac{n! p_u^{(n-m+j)/2} p_m^m p_d^{(n-m-j)/2} (Su^j - X)}{[(n-m+j+2h)/2]! m! [(n-m-j-2h)/2]!}. \quad (33.19)$$

Она же дает альтернативную характеристику алгоритму триномиального дерева для опционов колл вниз-и-вход.

Чтобы доказать справедливость формулы (33.19), используем принцип отражения для триномиального случайного блуждания. Рассмотрим траектории, которые достигают барьера, заканчиваются на цене Su^j и содержат m горизонтальных переходов. Любая такая траектория суммарно содержит $(n-m+j)/2$ переходов вверх, m переходов на тот же уровень и $(n-m-j)/2$ переходов вниз и потому имеет вероятность $p_u^{(n-m+j)/2} p_m^m p_d^{(n-m-j)/2}$. Число же таких траекторий, которые по пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, j) касаются или пересекают линию H в соответствии с принципом отражения равно числу траекторий из точки $(0, -2h)$ в точку (n, j) , равному

$$\frac{n!}{[(n-m+j+2h)/2]! m! [(n-m-j-2h)/2]!},$$

поскольку, если число горизонтальных переходов равно m , то соответствующее число переходов вверх равно $(n-m+j+2h)/2$, а число переходов вниз равно*) $(n-m-j-2h)/2$.

*) Ранее имелось в виду количество переходов вверх и вниз по пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, j) , а сейчас и только сейчас имеется в виду число переходов вверх и вниз из точки $(0, -2h)$ в точку (n, j) . — Прим. перев.

Правильность же границ для числа m (числа горизонтальных переходов) и j (числа движений вверх за вычетом числа движений вниз) в формуле (33.19) можно проверить следующим образом. Первое не может превосходить $n - 2h - a$, поскольку должно быть $2h + a$ негоризонтальных переходов, чтобы достигнуть барьера и окончиться на цене не меньшей X . То, что числа $(n - m + j + 2h)/2$, $(n - m - j - 2h)/2$, $(n - m + j)/2$ и $(n - m - j)/2$ являются целыми, означает, что $n - m + j$ четное. Ну а то, что j должно быть не меньше a , очевидно. Оценка $j \geq m - n$ вытекает из неравенства $(n - m + j)/2 \geq 0$. Оценка $j \leq n - m - 2h$, поскольку $(n - m - j - 2h)/2 \geq 0$. Наконец, можно легко проверить, что все слагаемые являются неотрицательными целыми числами во всей допустимой для них области.

17.3.1. Число узлов в момент n равно $1 + 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 4n$.

17.3.2. Ковариация между с.в. R_1 и R_2 , т.е. величина $E(R_1 R_2) - \mu_1 \mu_2$, равна

$$\sigma_1 \sigma_2 (p_1 - p_2 - p_3 + p_4) = \sigma_1 \sigma_2 [p_1 - (1 - p_1 - p_4) + p_4] = \sigma_1 \sigma_2 (2p_1 + 2p_4 - 1).$$

Поэтому их коэффициент корреляции, как и утверждалось, равен $2p_1 + 2p_4 - 1$.

17.3.5. Мы используем актив 1 для обозначения акции S и актив 2 для обозначения фьючерса F . Пусть h обозначает коэффициент хеджирования, а коэффициент корреляции цены акции с ценой производного инструмента равен ρ . Дисперсия на момент Δt равна величине $\delta_S^2 + h^2 \delta_F^2 - 2h\rho\delta_S\delta_F$, где δ_S означает стандартное отклонение цены акции, а δ_F — стандартное отклонение цены фьючерса в момент Δt . Оптимальный коэффициент хеджирования, как показано в (16.1), равен величине $h = \rho(\delta_S/\delta_F) = E[(S - S\mu_1)(F - F\mu_2)]/\delta_F^2$, где μ_1 и μ_2 представляют ожидаемый грубый доход соответствующих активов на момент Δt . Формула для h имеет вид

$$\frac{(Fu_2 - F\mu_2)[p_1(Su_1 - S\mu_1) + p_3(Sd_1 - S\mu_1)] + (Fd_2 - F\mu_2)[p_2(Su_1 - S\mu_1) + p_4(Sd_1 - S\mu_1)]}{(p_1 + p_3)(Fu_2 - F\mu_2)^2 + (p_2 + p_4)(Fd_2 - F\mu_2)^2}.$$

Конечно, можно рассматривать не только акции и фьючерсы. Например, индексный фьючерс можно использовать для хеджирования опционов на обычные акции динамически и прежняя формула останется в силе.

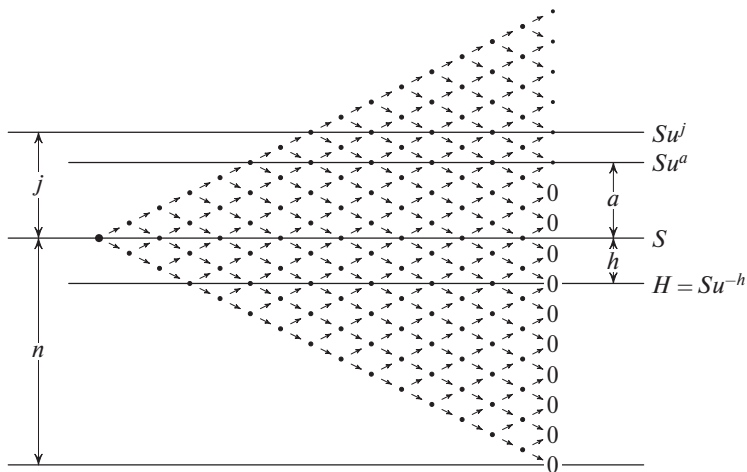


Рис. 33.5. Стоимость опционов колл вниз-и-вход на тринomialном дереве. Отметим, что интерпретация величин a , j и h отличается от использованной на рис. 17.2.

К главе 18

18.1.1. См. [706, с. 135].

18.1.2. $U_{i,T} = \max(0, X - e^{V_{\min} + t \times \Delta V})$.

18.1.4. После дискретизации получаем уравнение $U_{i,j-1} = aU_{i+1,j} + bU_{i,j} + cU_{i-1,j}$, в котором

$$a \equiv \left[\left(\frac{\sigma S_i}{\Delta S} \right)^2 + \frac{r S_i}{\Delta S} \right] \frac{1}{2\Delta t}, \quad b \equiv \left[-r + \frac{1}{\Delta t} - \left(\frac{\sigma S_i}{\Delta S} \right)^2 \right] \Delta t, \quad c \equiv \left[\left(\frac{\sigma S_i}{\Delta S} \right)^2 - \frac{r S_i}{\Delta S} \right] \frac{1}{2\Delta t},$$

а S_i — цена акции, отвечающая $U_{i,j}$. Должны выполняться два условия: 1) $1/\Delta t > (\sigma S_i/\Delta S)^2 + r$, чтобы иметь $b > 0$ и 2) $\sigma^2 S_i/r > \Delta S$ для того, чтобы $a > 0$ и $c > 0$. См. [897].

18.2.2. Узел с максимальным значением дисконтированной внутренней стоимости может и не быть исполнен [129].

18.2.4. Из упр. 14.3.1 мы знаем, что $d(\ln X) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW$, т.е. $\ln X$ является процессом броуновского движения. Поскольку выборочные траектории броуновского движения можно генерировать без потери точности, если уж мы имеем совершенный датчик случайных чисел, то более хороший алгоритм сначала генерирует выборочные траектории для процесса $\ln X$, а затем превращает их в траектории для X , используя экспоненту. В результате получаем, что $X_i = X_{i-1} e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi}$, где $\xi \sim N(0, 1)$.

18.2.7. Заметим, что $P\{X < -y\} = 1 - P\{X < y\}$, если с.в. X нормально распределена со средним ноль. Поэтому упомянутый метод действительно попадает в категорию методов с противоположно направленными переменными в силу метода обратного преобразования. Но он также применим и для любой с.в. с плотностью, симметричной относительно нуля.

18.2.9. Проведите обобщение модели для стохастической волатильности из п. 15.5 следующим образом. В риск-нейтральной экономике $dS = rS dt + \sigma S \times (\rho dW_v + \sqrt{1-\rho^2} dW_s)$, а $d\sigma^2 = \mu dt + \sigma_v dW_v$, где $\mu(t)$ и $\sigma_v(t)$ могут зависеть от прошлых значений $\sigma^2(t)$, а $W_v(t)$ и $W_s(t)$ некоррелированы. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \times \exp \left[rT - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 du + \rho \int_0^T \sigma dW_v + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma dW_s \right] = \\ &= S_0 \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{2} \int_0^T \sigma^2 du + \rho \int_0^T \sigma dW_v \right] \times \exp \left[rT - \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^T \sigma^2 du + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma dW_s \right]. \end{aligned}$$

Если траектория W_v известна, то $\xi \equiv \exp \left[-\frac{\rho^2}{2} \int_0^T \sigma^2 du + \rho \int_0^T \sigma dW_v \right]$ является постоянной, а с.в. $\ln S_T$ нормально распределена со средним $\ln(S_0 \xi) + rT - \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^T \sigma^2 du$

и дисперсией $(1-\rho^2) \int_0^T \sigma^2 du$, а, следовательно, формула Блэка—Шоулса применима.

Идея алгоритма теперь ясна. Нужно моделировать процесс W_v , чтобы получить траекторию значений σ . А затем использовать теоретическое (точное) решение, чтобы получить стоимость опциона при данной траектории. После этого следует повторить процедуру несколько раз и усреднить. Необходимости моделировать W_s нет. См. [876].

18.2.10. Ими являются: при $\beta = -1$ неравенство $DY < 2 \text{Cov}(X, Y)$, а при $\beta = 1$ — $DY < -2 \text{Cov}(X, Y)$. Оба они являются более жесткими, чем неравенство (18.6). См. [584].

18.2.11. В этой схеме $\text{Cov}(X, Y) = 0$ и, следовательно, $DW > DX$ при $\beta \neq 0$.

Рис. 33.6. Метод контрольных переменных для арифметически усредненных опционов колл. В нем m — количество копий, а n — количество периодов, M_1 — среднее арифметическое, M_2 — среднее геометрическое. Точное значение вычисляется с помощью уравнения (11.8) для геометрически средневзвешенного опциона. На практике стоимость опциона в биномиальной модели могут предпочесть точному значению (однако для его расчета требуется больше времени). Заметьте, что ожидаемое значение контрольной переменной не равно в точности M_2 .

**Контрольные переменные
для оценки стоимости
усредненных опционов колл
на бездивидендную акцию:**

ввод: $S, X, n, r, \sigma, \tau, m$;
действительные числа P, C, M_1, M_2 ,
 $\xi()$; // $\xi() \sim N(0, 1)$
целые числа i, j ;
 $C := 0$;
для $(i = 1 \text{ до } m)$ {
 $P := S$; $M_1 := S$; $M_2 := S^{1/(n+1)}$;
 для $(j = 1 \text{ до } n)$ {
 $P := P e^{(r-\sigma^2/2)(\tau/n) + \sigma\sqrt{\tau/n}\xi()}$;
 $M_1 := M_1 + P$; $M_2 := M_2 \times P^{1/(n+1)}$;
 }
 $C := C + e^{-r\tau} \times \max(M_1/(n+1) - X, 0) -$
 $-(e^{-r\tau} \times \max(M_2 - X, 0) -$
 теоретическое значение);
}
вывод C/m ;

18.2.12. См. алгоритм на рис. 33.6.

18.2.13. Пусть $\varepsilon \equiv |B|/|A|$. Тогда вероятность неуспеха в подходе Монте-Карло, очевидно, равна $(1 - \varepsilon)^N$. С другой стороны, вероятность неуспеха в схеме усовершенствованного поиска равна $\prod_i (1 - \varepsilon_i)^{N/m}$, где ε_i представляет долю тех A_i , которые пересекаются с B , другими словами, $\varepsilon_i \equiv |B \cap A_i|/|A_i|$. Ясно, что $\sum_i \varepsilon_i = m\varepsilon$. Поэтому $\left[\prod_i (1 - \varepsilon_i) \right]^{N/m} \leq \left(\sum_i \frac{1 - \varepsilon_i}{m} \right)^N = (1 - \varepsilon)^N$; здесь мы использовали неравенство между арифметическим и геометрическим средними.

18.3.1. Их значения таковы: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{10}{27}$.

К главе 19

19.1.1. Это следует из определения матрицы корреляции и того, что $c_{ii} = \sigma_i^2$, т. е. равны дисперсии x_i .

19.1.2. Рассмотрим произвольную нормированную линейную комбинацию $\sum_i b_i x_i = b^T x$, для которой $\sum_i b_i^2 = 1$. Пусть $b = Be$ при некотором векторе $e \equiv (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ единичной длины. Тогда $b^T x = e^T B^T x = e^T P$. И далее

$$\begin{aligned} D(e^T P) &= E(e^T P)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 E p_i^2 \quad (\text{в силу некоррелированности } p_i) = \\ &= \lambda_1 + \sum_{i=2}^n e_i^2 (\lambda_i - \lambda_1), \quad \text{поскольку } E p_i^2 = \lambda_i, \quad e_1^2 = 1 - \sum_{i=2}^n e_i^2. \end{aligned}$$

Максимум в предыдущем равенстве равен λ_1 и достигается при $e_2 = e_3 = \dots = e_n = 0$, т. е. когда $e^T P = p_1$. В общем же случае, p_j является нормированной линейной комбинацией x_i , которые некоррелированы с $p_1, p_2, \dots, p_{j-1}$ и имеет максимальную дисперсию. Проверить это можно следующим образом. Из некоррелированности

вытекает, что $e_1 = e_2 = \dots = e_{j-1} = 0$. Поэтому

$$D(e^\top P) = \sum_{i=j}^n e_i^2 \mathbb{E} p_i^2 = \lambda_j + \sum_{i=j+1}^n e_i^2 (\lambda_i - \lambda_j).$$

Но ясно, что максимум в последнем равенстве равен λ_j и достигается он при $e_{j+1} = \dots = e_n = 0$, т.е. когда $e^\top P = p_j$.

19.1.3. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

19.1.4. См. упр. 6.1.3.

19.1.5. 1) Пусть $B \equiv \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^\top$. Достаточно доказать, что $Av_i = Bv_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$, поскольку $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Но $Av_i = \sigma_i u_i$ и, с другой стороны, $Bv_i = \sum_j \sigma_j u_j (v_j^\top v_i) = \sigma_i u_i$. См. [870, с. 395].

2) Это верно потому, что $Av_i = \sigma_i u_i$ и $A^\top u_i = \sigma_i v_i$. См. [392, с. 258], или [870, с. 392].

19.2.1. В силу (19.5) при линейной регрессии получается следующая задача НК:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Уравнения нормали в этом случае имеют вид

$$\begin{pmatrix} m & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{pmatrix}.$$

См. [381, с. 263].

19.2.2. 1) Пусть данные представлены в виде

$$\{(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, y_1), (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, y_2), \dots, (x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n}, y_m)\}.$$

И мы хотим описать их с помощью линейной модели $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$. Тогда задача НК — это следующая система уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

2) Ими являются уравнения

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_{i,1} & \sum_{i=1}^m x_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{i,n} \\ \sum_{i=1}^m x_{i,1} & \sum_{i=1}^m x_{i,1} x_{i,1} & \sum_{i=1}^m x_{i,1} x_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{i,1} x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_{i,n} & \sum_{i=1}^m x_{i,n} x_{i,1} & \sum_{i=1}^m x_{i,n} x_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{i,n} x_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_{i,1} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_{i,n} y_i \end{pmatrix}.$$

19.2.3. См. [392, с. 223].

19.2.4. Пусть $A \equiv (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда $a_{ij}a_{ik} \neq 0$ лишь если $|j-k| < \omega$. Поэтому (j, k) -й вход матрицы $A^T A$, который записывается в виде $\sum_{i=1}^m a_{ij}a_{ik}$, будет равен 0 при $|j-k| \geq \omega$. См. [75, с. 217].

19.2.5. Поскольку $A^T(Ax_{LS} - b) = 0$ [415, с. 201].

19.2.6. Пусть $C = PP^T$ разложение Холецкого и матрица P невырождена. С помощью замен $Pu = b$ и $P\varepsilon' = \varepsilon$ преобразуем исходную запись в равенство $Pu = Ax + P\varepsilon'$, или, что эквивалентно, $y = P^{-1}Ax + \varepsilon'$. Мы утверждаем, что свели дело к проблеме НК $y = P^{-1}Ax$; другими словами, нам нужно найти регрессию $P^{-1}b$ по $P^{-1}A$. И убедиться в этом можно с помощью равенств

$$\text{Cov } \varepsilon' = \text{Cov}(P^{-1}\varepsilon) = P^{-1} \text{Cov } \varepsilon (P^T)^{-1} = P^{-1} \sigma^2 C (P^T)^{-1} = \sigma^2 I.$$

См. упр. 6.1.3 и [802, с. 54].

19.2.7. Матрица ковариации x_{LS} есть

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} A^T E (b b^T) A [(A^T A)^{-1}]^T &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} A^T A [(A^T A)^{-1}]^T = \\ &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} [A^T A (A^T A)^{-1}]^T = \sigma^2 (A^T A)^{-1}. \end{aligned}$$

19.2.8. Поскольку U и V ортогональны обе, то $U^{-1} = U^T$ и $V^{-1} = V^T$. Поэтому для получения искомого результата достаточно раскрыть выражение $(A^T A)^{-1} A^T$ и воспользоваться равенством $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$.

19.2.9. Нужно лишь дважды применить преобразование $A = U \Sigma V^T \rightarrow A^+ = V \Sigma^+ U^T$.

19.2.10. Это можно проверить легко, например, следующим образом. Начнем с соотношений

$$A\hat{x} = AA^+b + AV_2y = U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T b + U\Sigma V^T V_2y = b + U0y = b.$$

А закончим доказательство замечая, что размерность y нашего множества решений равна $n - m$. См. [586].

19.2.11. В силу упр. 19.2.6 для получения x нам следует решить систему $y = P^{-1}Ax$ при условии, что $C = PP^T$ и $Pu = b$. При этом, в соответствии с уравнениями нормали (19.6), решение x должно удовлетворять уравнениям

$$(P^{-1}A)^T (P^{-1}A)x = (P^{-1}A)^T y = (P^{-1}A)^T P^{-1}b.$$

После раскрытия скобок предыдущее тождество превращается в равенство $A^T (P^{-1})^T \times \times P^{-1}Ax = A^T (P^{-1})^T P^{-1}b$, из которого вытекает, как и утверждалось, что $A^T C^{-1}Ax = = A^T C^{-1}b$.

19.2.12. Пусть $B = U\Sigma V^T$ представляет РСЧ для B и $V \equiv \left(\underbrace{V_1}_p, \underbrace{V_2}_{n-p} \right) \Bigg\}^n$.

Решением проблемы с ограничениями является вектор [586]

$$B^+d + V_2(AV_2)^+(b - AB^+d). \quad (33.20)$$

Решение (33.20), очевидно, удовлетворяет ограничениям $Bx = d$, поскольку все решения y системы $Bx = d$ имеют вид $B^+d + V_2y$ при произвольном $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ в силу уравнения (19.10). Алгоритм, реализующий решение (33.20), приведен на рис. 33.7. Мы проверим его корректность следующим образом. После шага 1 $U^T B V = \Sigma$. Заметим, что $B^+ B V_1 = V_1$, даже если $B^+ B \neq I$. И верно это потому, что в силу определения (19.9) псевдообратной матрицы

$$\begin{aligned} B^+ B V_1 &= V \Sigma^+ U^T U \Sigma V^T V_1 = V \Sigma^+ \Sigma V^T V_1 = V \Sigma^+ \times \text{diag}_{p \times p}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) = \\ &= V \times \text{diag}_{n \times p}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_p^{-1}) \times \text{diag}_{p \times p}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) = V \times \text{diag}_{n \times p}(1, 1, \dots, 1) = V_1. \end{aligned}$$

**Алгоритм для решения проблемы НК
с линейными ограничениями в виде равенств:**

ввод: $A[1..m][1..n]$, $b[1..m]$, $B[1..p][1..n]$, $d[1..p]$, m, n, p ($p \leq n$);
действительные числа $x_1[1..p]$, $x_2[1..n-p]$, $\hat{b}[1..m]$, $U[1..p][1..p]$,

$V[1..n][1..n]$, $\Sigma[1..p][1..n]$;

1. Вычислить РСЧ для B , $B = U\Sigma V^T$;

2. Разбиение $V \equiv \left(\underbrace{V_1}_p, \underbrace{V_2}_{n-p} \right) \Bigg\}^n$

3. Найти x_1 из уравнения $BV_1x_1 = d$;

4. $\hat{b} := b - AV_1x_1$;

5. Решить проблему НК $AV_2x_2 = \hat{b}$, т.е. найти x_2 ;

6. вывод $V_1x_1 + V_2x_2$;

Рис. 33.7. Алгоритм для решения проблемы НК с линейными ограничениями в виде равенств. Смысл обозначений входных переменных объясняется в тексте. Поскольку нужны лишь диагональные элементы матрицы Σ , то одномерный набор достаточен (требуемое изменение алгоритма очевидно).

Следовательно, после шага 3 $B^+d = B^+BV_1x_1 = V_1x_1$. Шаг 4 приводит к равенству $\hat{b} = b - AV_1x_1 = b - AB^+d$. После шага 5 $x_2 = (AV_2)^+\hat{b} = (AV_2)^+(b - AB^+d)$. Наконец, выдаваемое значение равно $V_1x_1 + V_2x_2 = B^+d + V_2(AV_2)^+(b - AB^+d)$, что совпадает с решением (33.20).

19.2.13. См. [586, с. 139].

19.2.14. Обозначим $W \equiv \text{diag}(1/\sqrt{\Psi_1}, 1/\sqrt{\Psi_2}, \dots, 1/\sqrt{\Psi_p})$. Эта матрица играет роль W в проблеме взвешенных НК (19.11). Иными словами, мы утверждаем, что наша проблема эквивалентна оптимизационной задаче

$$\min_{x \in R^n} \|W L f_i - W(y_i - \mu)\|. \quad (33.21)$$

И поскольку $\Psi^{-1} = W^T W$, то это доказывает, что ее решение f_i по формуле (19.13) представляется в виде $(L^T \Psi^{-1} L)^{-1} L^T \Psi^{-1}(y_i - \mu)$, как мы того и хотели. Поэтому нам следует проверить лишь эквивалентность задачи (33.21) исходной задаче. Но матрица ковариации ε_i из уравнения (19.15) равна Ψ . Поэтому рассуждение, которое привело к выражению (19.14), позволяет утверждать, что матрица, обратная к $W^T W$ должна равняться этой матрице, что и имеет место на самом деле.

19.2.15. $\text{Cov}(y_i, f_i^T) = E((y_i - \mu)f_i^T) = E((L f_i + \varepsilon_i)f_i^T) = E(L f_i f_i^T) = L$ [523, с. 399].

19.2.16. См. [239, 390].

19.3.1. Сначала показываем, что

$$f''(x) = f''_{i-1} \frac{6x - 4x_i - 2x_{i-1}}{h_i^2} - f''_i \frac{-6x + 2x_i + 4x_{i-1}}{h_i^2} + y_{i-1} \frac{12x - 6x_i - 6x_{i-1}}{h_i^3} + y_i \frac{-12x + 6x_i + 6x_{i-1}}{h_i^3} \quad (33.22)$$

при $x \in [x_{i-1}, x_i]$. В случае $f''(x_{i-1})$ мы просто оцениваем $f''(x_i)$, считая точку x_i правым концом интервала в уравнении (33.22) для $f''(x)$. Что же касается случая $f''(x_i)$, то сначала мы выводим аналогичную формулу для $f''(x)$, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, эта формула получается из формулы (33.22) при замене индекса i на $i+1$. И, наконец, оцениваем искомое значение $f''(x_i)$, считая x_i левой крайней точкой этой последней формулы. См. [447, с. 479].

Дифференцируя ее по μ и σ^2 получаем, что

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta S_i / S_i)}{n\Delta t}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [(\Delta S_i / S_i) - \hat{\mu}\Delta t]^2}{n\Delta t}.$$

И эти оценки по-существу совпадают с оценками, приведенными в (20.2) и (20.3), если положить $R_i = (S_{i+1} - S_i) / S_i$ и заменить α на μ . Оценивание параметра μ остается сложным.

20.1.2. Из упр. 14.4.7 видно, что простая доходность имеет среднее $\mu_s = e^{\mu} - 1$ и дисперсию $\sigma_s^2 = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu}$. Поэтому

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{t} \cdot \ln \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{(1 + \mu_s)^2} \right)}.$$

Публикуемые данные по доходностям акций в основном основаны на таких простых доходностях [147, с. 362]. Простые доходности следует использовать также при расчете СПР в п. 31.4.

20.1.3. Равенство (20.5) можно упростить до

$$0 = \sum_i (\Delta r_i - \beta(\mu - r_i)\Delta t) r_i^{-1} \quad (33.23)$$

с помощью уравнения (20.6) в предположении, что $\mu \neq 0$. Производя умножение в слагаемых (33.23) и (20.6) получаем, что

$$0 = \sum_i \Delta r_i r_i^{-1} - \beta \mu \Delta t \sum_i r_i^{-1} + \beta n \Delta t, \quad 0 = \sum_i \Delta r_i r_i^{-2} - \beta \mu \Delta t \sum_i r_i^{-2} + \beta \Delta t \sum_i r_i^{-1}.$$

Теперь исключаем из этих уравнений μ и получаем формулу для β . Затем вставляем полученную формулу для β в одно из предыдущих уравнений и получаем формулу для μ . Наконец, используя найденные μ и β , с помощью уравнения (20.7) приходим к выражению для σ^2 .

20.1.4. Из уравнения (20.4) с помощью леммы Ито получаем, что $d \ln r = \left[\frac{\beta(\mu - r)}{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dW$. Таким образом, дискретное приближение этого уравнения сводится к соотношению

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right) - \left(\frac{\beta(\mu - r)}{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \sim N(0, \sigma^2 \Delta t).$$

Логарифмическая функция правдоподобия по данным n наблюдениям $\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_n$ после удаления постоянных слагаемых и упрощения может быть записана в виде

$$-n \ln \sigma - (2\sigma^2 \Delta t)^{-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) - \left[\frac{\beta(\mu - r_i)}{r_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \Delta t \right\}^2.$$

Дифференцируем эту функцию по β , μ и σ и затем приравниваем производные к нулю. Упрощая, приходим к уравнениям:

$$0 = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) - \left[\frac{\beta(\mu - r_i)}{r_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \Delta t \right\} r_i^{-1}, \quad (33.24)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) - \left[\frac{\beta(\mu - r_i)}{r_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \Delta t \right\}, \quad (33.25)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) - \left[\frac{\beta(\mu - r_i)}{r_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \Delta t \right\} \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right).$$

Эту систему из трех уравнений можно решить приближенными методами. Получить же указанные уравнения можно следующим образом. Сначала выводим уравнение (33.24), дифференцируя логарифмическую функцию правдоподобия по μ и приравнявая производную нулю. Затем то же самое делаем с производной по β . Найденные уравнения можно упростить с помощью уравнения (33.24) и получить уравнение (33.25). Наконец, дифференцируем нашу функцию по σ и полагаем производную равной нулю. И с помощью уравнения (33.24) получим, что

$$\frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) - \left[\frac{\beta(\mu - r_i)}{r_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \Delta t \right\}^2 = \sigma^2.$$

Производя умножение в слагаемых и опять используя уравнения (33.24) и (33.25), приходим к последней формуле.

20.1.5. Логарифмическая функция правдоподобия для выборки объема n имеет вид

$$-\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\lambda^2) - \theta \sum_{i=1}^n \ln S_i - \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta S_i}{S_i} \right)^2 S_i^{-2\theta}.$$

Непосредственная ее максимизация по λ^2 и θ приводит к выражениям:

$$\lambda^2 = \frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{\Delta S_i}{S_i} \right)^2 S_i^{-2\theta}, \quad \lambda^2 = \sum_i \frac{\ln S_i}{\sum_i \ln S_i} \left(\frac{\Delta S_i}{S_i} \right)^2 S_i^{-2\theta}.$$

Имеем два нелинейных уравнения с двумя неизвестными. Решить их можно методом Ньютона—Рафсона. См. [208], а также [113] о тринomialной модели для процесса ПУД.

20.1.8. В соответствии с упр. 6.4.3 (2) искомый прогноз с. в. X_{t+1} при данных $X_1, X_2, \dots, X_t$ должен быть равен $E(X_{t+1} | X_1, X_2, \dots, X_t)$. Но из-за стационарности это выражение равняется величине $E X_{t+1} = \mu$.

20.1.9. Пусть $X \equiv (X_t, X_{t-1}, \dots, X_1)^\top$ и $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_t)^\top$. Тогда линейный прогноз имеет вид $a_0 + \mathbf{a}^\top X$. Матричная версия упр. 6.4.1 утверждает, что мы должны выбрать $a_0 = \mu$ и $\mathbf{a}^\top = \text{Cov}(X_{t+1}, X)(\text{Cov } X)^{-1}$ [416, с. 75] (см. упр. 19.2.2 (2), для случая произвольной конечной выборки и упр. 6.4.1 (1) для одномерной версии под названием бета). По определению $\text{Cov } X = (\lambda_{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq t}$. Поскольку ковариация между X_{t+1} и X_{t-i} равна λ_{t+1} , то $\text{Cov}(X_{t+1}, X) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$. См. [416, с. 86].

20.1.10. Пусть S_t обозначает цену в момент времени t и $S_t = S_{t-1} + \varepsilon_t$. По предположению и в силу (6.5) $DS_t = DS_{t-1} + D\varepsilon_t$.

20.1.12. Предположите для примера, что автокорреляция положительна. Это будет означать, что более высокий, чем средний (более низкий, чем средний) доход сегодня, вероятно, превратится в более высокий, чем средний (более низкий, чем средний) доход в будущем. Другими словами, доход сегодня можно использовать для прогноза доходов в будущем [424, 767].

20.1.13. Заметим, что $E Y_t = \sum_{k=0}^l E(a_k X_{t-k}) = 0$ и

$$\lambda_\tau = E \left(\left(\sum_{j=0}^l a_j X_{t+\tau-j} \right) \left(\sum_{k=0}^l a_k X_{t-k} \right) \right) = \begin{cases} a_l a_{l-\tau} + \dots + a_\tau a_0, & \text{если } \tau \leq l, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

См. [541, с. 167].

20.1.14. $\lambda_\tau \equiv E((X_{t-\tau} - b)(X_t - b))$ равно

$$E \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j-\tau} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \right) \right) = \sigma^2 (c_0 c_\tau + c_1 c_{\tau+1} + \dots) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+\tau}.$$

См. [667, с. 68].

20.1.15. По аналогии с упр. 19.2.2 (1), проблему НК можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & X_p & X_{p-1} & \dots & X_1 \\ 1 & X_{p+1} & X_p & \dots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{p+1} \\ X_{p+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

20.2.1. 1) Пусть k_X обозначает коэффициент эксцесса у X_t , а k_U — у U_t . Прежде всего $k_U = EU_t^4$, поскольку $EU_t = 0$ и $EU_t^2 = 1$. Поэтому

$$k_X \equiv \frac{E(X_t - \mu)^4}{E((X_t - \mu)^2)^2} = \frac{E(V_t^4 U_t^4)}{E(V_t^2)^2 E(U_t^2)^2} = \frac{k_U EV_t^4}{E(V_t^2)^2} > k_U. \quad (33.26)$$

Полученное неравенство вытекает из неравенства Йенсена. Заметим, что (для справедливости этих соотношений) нам нужно требовать лишь, чтобы V_t и U_t были независимы. См. [839, с. 72].

20.2.2. Ниже используется, что $EV_t^n = e^{na + n^2 b^2 / 2}$ (см. п. 6.1.4) и $EV_t^i U_t^j = EV_t^i EU_t^j$ при любом i .

1) Это вытекает из (33.26) и того, что эксцесс у стандартного нормального распределения равен 3.

3) $|X_t - \mu| = V_t |U_t|$, а среднее у $|U_t|$ равно $\sqrt{2/\pi}$.

4) $(X_t - \mu)^2 = V_t^2 U_t^2$.

20.2.3. 1) Используйте запись процесса в виде последовательности соотношений.

2) $V_{t+1}^2 = (1 - a_1 - a_2)V + a_1(X_t - \mu)^2 + a_2 V_t^2$ при данном V_t . Возьмите математическое ожидание от обеих частей и преобразуйте — получите соотношение $E(V_{t+1}^2 | V_t) = V + (a_1 + a_2)(V_t^2 - V)$. Повторяя эту операцию, придете к равенству $E(V_{t+k}^2 | V_t) = V + (a_1 + a_2)^k (V_t^2 - V)$. После этого останется использовать соотношение (20.11), которое выполняется, если U_t и V_t некоррелированы. См. [470, с. 379].

К главе 21

21.1.1. Изменение в 0,01 переходит в изменение доходности в форме банковского дисконта равное одному базисному пункту, т. е. величину 0,0001, которая изменит долларовый дисконт и, следовательно, вместе с ним и цену по счету на сумму

$$0,0001 \times \$ 1\,000\,000 \times \frac{t}{360} = \$ 0,2778 \times t,$$

где t — количество дней до окончания срока. Как следствие, величина тика оказывается равной $\$ 0,2778 \times 91 = \$ 25,28$. См. [88, с. 163] или [325, с. 393].

21.1.2. Индуцированная ставка для 9-месячного периода определяется равенством

$$1,01656 \times 1,01694 \times [1 + 0,0689 \times (91/360)] - 1 = 5,179 \, \%.$$

Поэтому эквивалентная ей ежегодная ставка равна $5,179 \, \% \times (360/274) = 6,805 \, \%$.

21.1.4. При вычислении коэффициента перевода предполагается, что до погашения облигации остается точно 19 лет и 9 месяцев. Следовательно, пройдут 40 купонных платежей, причем первое из них через три месяца. Поэтому стоимость облигации равна

$$\sum_{i=0}^{39} \frac{6,5}{(1,04)^{i+0,5}} + \frac{100}{(1,04)^{38,5}} - 3,25 = 149,19.$$

И, следовательно, коэффициентом перевода является величина 1,4919.

21.1.5. Купите сентябрьские контракты на БНК и продайте их в августе [95, с. 107].

21.1.6. 1) Форвардной ставкой T -го периода является величина $f(T, T+1)$. Допустим, что продаем сейчас одну единицу T -периодной бескупонной облигации и покупаем $d(T)/d(T+1)$ единиц $(T+1)$ -периодной бескупонной облигации. Тогда чистый денежный поток на сегодня равен нулю. Но этот портфель приводит к расходам в размере \$1 в момент T , и к поступлению $d(T)/d(T+1)$ долларов в момент $T+1$. Поскольку форвардная ставка сегодня может быть зафиксирована, то во избежание арбитражной прибыли она должна удовлетворять равенству $1 + f(T, T+1) = d(T)/d(T+1)$.

2) Оно представляет стоимость копирования СФС на сегодня.

21.2.2. См. упр. 12.2.4 или [346, с. 244].

21.4.1. С точки зрения стороны A , выпуская заем с фиксированной ставкой (F_A) и заключая соглашение по свопу с банком, она реально будет оплачивать плавающую ставку $(\text{LIBOR} - S'_A - F'_A)\%$. И она окажется в выигрыше, если $S_A > -S'_A - F'_A$. Аналогично, с точки зрения стороны B , выпуская заем под плавающую ставку $(\text{LIBOR} + S_B)\%$ и вступая в соглашение по свопу, она в действительности будет выплачивать по фиксированной ставке, равной $(F_B + F'_B + S_B + S'_B)\%$. И сделка для нее окажется выгодной, если $F_B > F_B + F'_B + S_B + S'_B$. Наконец, заключая свопы с обеими сторонами, банк не прогадает, если $F_B + F'_B - S'_A - F_A - F'_A + S'_B > 0$. Для получения искомого результата достаточно объединить все эти неравенства и поменять местами слагаемые. См. [849].

21.4.2. Денежный поток идентичен тому, который возникает у стороны, оплачивающей по фиксированной ставке и получающей по плавающей. Начнем с того, что начальная сумма отсутствует. Более того, при всех шести выплатах чистый денежный поток состоит из поступлений по ставке LIBOR плюс 0,5% и расхода величиной в \$5 млн.

21.4.3. Поскольку стоимость свопа равна

$$(0,5 - x)e^{-0,101 \times 0,3} + \left(\frac{0,106962}{2} \times 10 - x \right) e^{-0,103 \times 0,8}$$

миллионам, то значение x , которое делает ее нулевой, равно 0,51695. Поэтому искомая фиксированная ставка равна 10,339%.

21.4.4. Начнем с того, что

$$P_2 - P_1 - (21.4) =$$

$$\begin{aligned} &= (\mathcal{N} + C^*)e^{-r_1 t_1} - \sum_{i=1}^n C e^{-r_i t_i} - \mathcal{N} e^{-r_n t_n} - (C^* - C)e^{-r_1 t_1} - \sum_{i=2}^n \left(\frac{f_i}{k} \mathcal{N} - C \right) e^{-r_i t_i} = \\ &= \mathcal{N} e^{-r_1 t_1} - \mathcal{N} e^{-r_n t_n} - \sum_{i=2}^n \frac{f_i}{k} \mathcal{N} e^{-r_i t_i}. \end{aligned}$$

Поэтому нам достаточно лишь доказать, что

$$e^{-r_1 t_1} - e^{-r_n t_n} - \sum_{i=2}^n \frac{f_i}{k} e^{-r_i t_i} = 0. \quad (33.27)$$

Но в силу (5.9) превращенная в эквивалентную ежегодную форвардная ставка непрерывного начисления на момент t_{i-1} лет спустя равна

$$c_i \equiv \frac{r_i t_i - r_{i-1} t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{r_i t_i - r_{i-1} t_{i-1}}{(1/k)}.$$

Поэтому $f_i = k(e^{c_i/k} - 1) = k(e^{r_i t_i - r_{i-1} t_{i-1}} - 1)$ в соответствии с равенством (3.3), поскольку искомая ставка должна быть ежегодной ставкой k -кратного начисления. Теперь

можно вставить формулу для f_i в (33.27) и получить, как и утверждалось, что

$$e^{-r_1 t_1} - e^{-r_n t_n} - \sum_{i=2}^n (e^{r_i t_i - r_{i-1} t_{i-1}} - 1) e^{-r_i t_i} = 0.$$

21.4.5. Она равна $(C - \hat{C})e^{-r_1 t_1} + \sum_{i=2}^n (C - \hat{C})e^{-r_i t_i}$.

21.4.7. Отзывные облигации отзываются, когда ставки падают. Это оставляет учреждение в длинной позиции по свопам процентной ставки, в которых фиксированная ставка является высокой в невыгодном положении. Отзывные свопы могут смягчить подобную ситуацию. См. [821, с. 602].

21.4.8. Шапка дает владельцу право при каждой дате пересмотра занять по ограниченной ставке. Опцион же на своп, наоборот, предоставляет своему владельцу одноразовое право в определенный момент занять под фиксированную ставку на весь оставшийся срок жизни свопа. Ясно, что свопционы являются менее гибкими инструментами. Если же более грубо, то свопционы можно рассматривать как опцион на портфель, а шапку как портфель из опционов. Теорема 8.6.1 утверждает, что портфель из опционов стоит больше, чем опцион на портфель. См. [346, с. 248] или [746, с. 513].

К главе 22

22.1.1. См. упр. 5.6.3 и уравнение (5.11).

22.2.1. Поскольку $d(t) = e^{-ts(t)}$, то уравнение (2.1) можно сначала записать в виде $e^{-ts(t)} = e^{-ts(t_1) \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}} e^{-ts(t_2) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}}$, а затем упростить до выражения $s(t) = s(t_1) \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + s(t_2) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$.

22.3.1. В соответствии с числами из уравнения (2.2), проблему НК можно записать в виде

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} C_i (a_0 + a_1 j + a_2 j^2) + (a_0 + a_1 n_i + a_2 n_i^2) = \\ = a_0 (n_i C_i + 1) + a_1 \left(n_i + C_i \sum_{j=1}^{n_i} j \right) + a_2 \left(n_i^2 + C_i \sum_{j=1}^{n_i} j^2 \right), \quad 1 \leq i \leq m,$$

и решить при помощи многомерной регрессии.

22.3.2. Предположим, что все элементы выборки удовлетворяют соотношению $y \approx ae^{bx}$. Тогда $\ln y \approx bx + \ln a$. Преобразуем имеющиеся данные в набор пар $(x_i, \ln y_i)$ и воспользуемся линейной регрессией для получения прямой линии $z = a' + b'x$. Затем положим $a = e^{a'}$, $b = b'$ и получим, что $y = e^z = e^{a' + b'x} = ae^{bx}$. См. [846, с. 545].

22.4.2. Заметим, что в силу (5.7)

$$f(T) = \frac{\partial[-\ln d(T)]}{\partial T} = -\frac{1}{d(T)} \cdot \frac{\partial d(T)}{\partial T}.$$

Чтобы кривая форвардных ставок была непрерывной, дисконтирующая функция должна иметь хотя бы одну непрерывную производную, отсюда и вытекает утверждение (1). Вышеуказанные тождества также показывают, что если кривая форвардных ставок должна быть непрерывно дифференцируемой, то потребуются кубический сплайн. См. [147, с. 411].

К главе 23

23.1.1. Нет [492, с. 388].

23.1.2. НЗ \$ 1 есть $a(n) \equiv \prod_{i=1}^n (1 + i_i)$. Поскольку $\ln(1 + i_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$, то в соответствии с выражениями (6.11) среднее и дисперсия логнормальной величины равны

$e^{\mu+\sigma^2/2}$ и $e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ соответственно. Но с. в. $\ln a(n) = \sum_{i=1}^n \ln(1+i_i)$ распределена нормально со средним $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. Поэтому можно сказать, что величина $a(n)$ логнормальна со средним $e^{n\mu+n\sigma^2/2}$ и дисперсией $e^{2n\mu+n\sigma^2}(e^{n\sigma^2}-1)$. См. [547, с. 368].

23.2.1. Логарифмы краткосрочных ставок равны $\ln r_k, \ln r_k + \ln v_k, \ln r_k + 2 \ln v_k, \dots, \ln r_k + (k-1) \ln v_k$. Поскольку на вычислении дисперсии слагаемое $\ln r_k$ не сказывается, то его можно исключить из списка. Тогда среднее логарифмов краткосрочных ставок можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{k-1} (i \ln v_k) \frac{\binom{k-1}{i}}{2^{k-1}} = \frac{k-1}{2} \ln v_k.$$

И потому дисперсия равна величине

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} (i \ln v_k)^2 \frac{\binom{k-1}{i}}{2^{k-1}} - \left(\frac{k-1}{2} \ln v_k \right)^2 &= \frac{(\ln v_k)^2}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \binom{k-1}{i} - \left(\frac{k-1}{2} \ln v_k \right)^2 = \\ &= \frac{(\ln v_k)^2}{2^{k-1}} (k-1)[2^{k-2} + (k-2)2^{k-3}] - \left(\frac{k-1}{2} \ln v_k \right)^2 = (k-1) \left(\frac{\ln v_k}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

которая в свою очередь равняется $\sigma_k^2(k-1)\Delta t$, если учесть равенство (23.2). См. [731, с. 440].

23.2.2. Рассмотрим ставку $r \equiv r_j v_j^j$ периода j и две связанные с ней ставки следующего периода $r_{j+1} v_{j+1}^j$ и $r_{j+1} v_{j+1}^{j+1}$. В силу (23.2) и предположения постоянства волатильности вытекает, что $v_j = v_{j+1} = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Поэтому динамику можно записать в виде $r \rightarrow r(r_{j+1}/r_j)e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}\xi}$, где $\xi = 0, 1$, причем каждое из этих значений принимается с вероятностью $1/2$. К искомому утверждению мы придем, определяя μ из равенства $r_{j+1}/r_j = e^{\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}}$.

23.2.3. 1) Она равна

$$q(\ln r_l)^2 + (1-q)(\ln r_h)^2 - [q \ln r_l + (1-q) \ln r_h]^2 = q(1-q)(\ln r_h - \ln r_l)^2.$$

2) Используем запись $r(\Delta t)$ для обозначения ставки r через промежуток времени Δt , т. е. положим $\bar{r} = r(\Delta t)$. Тогда в силу (1)

$$\sigma^2 \Delta t = D(\ln r(\Delta t)) = D(\ln(r + \Delta r)) = D \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right) \right] \approx D \left(\frac{\Delta r}{r} \right) = \frac{D(\Delta r)}{r^2}.$$

Поэтому $D(r + \Delta r) = D(\Delta r) = r^2 \sigma^2 \Delta t$.

23.2.4. 1) Пусть ставкой первого периода будет r , а форвардной ставкой следующего периода — f . Предположим, что в соответствии с биномиальным деревом процентной ставки форвардные ставки второго периода равны r_l или r_h . По построению $r_h/r_l = v$ и $(r_h + r_l)/2 = f$. Цена бескупонной облигации со сроком жизни два первых периода с помощью дерева оценивается величиной

$$\frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+r_h} + \frac{1}{1+r_l} \right).$$

Нетрудно видеть, что это число превосходит $1/[(1+r)(1+f)]$ при $v \neq 1$.

2) Из (1) мы знаем, что утверждение выполняется для деревьев с двумя периодами. Предположим, что оно выполняется для деревьев с $n-1$ периодом и попробуем доказать его справедливость для деревьев с n периодами. Обозначим ставки основной линии через $r_1, r_2, \dots, r_n$ и пусть r_i будет ставкой i -го периода. Само это дерево обозначим $T(r_1, \dots, r_n)$. И разобьем его на два $(n-1)$ -периодные деревья, убирая его корень. Первое дерево можно обозначить $T(r_2, \dots, r_n)$, а второе — $T(r_2 v_2, \dots, r_n v_n)$.

Тогда, если $V(T)$ использовать для обозначения стоимости ЦБ при оценке с помощью биномиального дерева T , то, очевидно,

$$V(T(r_1, \dots, r_n)) = \frac{V(T(r_2, \dots, r_n)) + V(T(r_2 v_2, \dots, r_n v_n))}{2(1+r_1)}. \quad (33.28)$$

Утверждение для бескупонных облигаций достаточно вывести из аддитивности процесса оценки стоимости. Поэтому проблема сводится к доказательству неравенства

$$V(T(r_1, \dots, r_n)) > [(1+f_1)(1+f_2)\dots(1+f_n)]^{-1},$$

в котором f_i — однопериодная форвардная ставка периода i .

В силу (23.4) $f_j = r_j((1+v_j)/2)^{j-1}$. Поэтому в случае дерева $T(r_2, \dots, r_n)$ его форвардная ставка i -го периода (начиная с корня) есть

$$f'_i = r_{i+1} \left(\frac{1+v_{i+1}}{2} \right)^{i-1} = f_{i+1} \frac{2}{1+v_{i+1}}.$$

И, аналогично, в случае дерева $T(r_2 v_2, \dots, r_n v_n)$ его форвардная ставка i -го периода равна

$$f''_i = r_{i+1} v_{i+1} \left(\frac{1+v_{i+1}}{2} \right)^{i-1} = f_{i+1} \frac{2v_{i+1}}{1+v_{i+1}}.$$

Используя предположение индукции для каждого поддерева получим, что

$$\begin{aligned} V(T(r_2, \dots, r_n)) &> [(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})]^{-1}, \\ V(T(r_2 v_2, \dots, r_n v_n)) &> [(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1})]^{-1}. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, будем иметь

$$\begin{aligned} V(T(r_2, \dots, r_n)) + V(T(r_2 v_2, \dots, r_n v_n)) &> \\ &> [(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})]^{-1} + [(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1})]^{-1}. \end{aligned}$$

В силу (33.28) это означает, что мы докажем наше утверждение, если сможем показать, что

$$[(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})]^{-1} + [(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1})]^{-1} > 2[(1+f_2)\dots(1+f_n)]^{-1}.$$

Напоминаем, что $r_1 = f_1$ по определению. А в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\begin{aligned} [(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})]^{-1} + [(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1})]^{-1} &\geq \\ &\geq 2\sqrt{[(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})]^{-1}[(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1})]^{-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$(1+f'_1)(1+f'_2)\dots(1+f'_{n-1})(1+f''_1)(1+f''_2)\dots(1+f''_{n-1}) < [(1+f_2)\dots(1+f_n)]^2.$$

В справедливости этого неравенства мы убедимся показав, что неравенство $(1+f'_i) \times (1+f''_i) < (1+f_{i+1})^2$ верно при любом $1 \leq i \leq n-1$.

В самом деле, поскольку

$$(1+f'_i)(1+f''_i) = \left(1 + f_{i+1} \frac{2}{1+v_{i+1}}\right) \left(1 + f_{i+1} \frac{2v_{i+1}}{1+v_{i+1}}\right) = \frac{4v_{i+1}}{(1+v_{i+1})^2} f_{i+1}^2 + 2f_{i+1} + 1,$$

то, как мы и хотели, получим:

$$(1+f'_i)(1+f''_i) - (1+f_{i+1})^2 = - \left(\frac{1-v_{i+1}}{1+v_{i+1}} \right)^2 f_{i+1}^2 < 0.$$

23.2.5. Зафиксируем период $[k-1, k]$.

1) Пусть f означает форвардную ставку этого периода. Заключим СФС в момент 0 на этот период. Выплата по нему в момент k равна $s - f$, где s — будущая спот-ставка периода. Форвардная же ставка f по определению является фиксированной

ставкой по контракту, при которой стоимость СФС равна нулю. Возьмем форвардно-нейтральную вероятностную меру π_k и примем бескупонную облигацию с погашением в момент k за платежное средство. Тогда в силу упр. 13.2.13 $0 = d(k) E_0^{\pi_k}(s - f)$, откуда вытекает, что $f = E_0^{\pi_k} s$.

2) Пусть f' обозначает ту же форвардную ставку один период спустя. Опять получим, что $f' = E_1^{\pi_k} s$. Применяя оператор $E_0^{\pi_k}$ к обеим частям этого равенства и учитывая телескопическое свойство (6.6) условных математических ожиданий получим, что $E_0^{\pi_k} f' = E_0^{\pi_k}(E_1^{\pi_k} s) = E_0^{\pi_k} s$, т.е. равно f . См. [691, с. 398] и [731, с. 177].

23.2.6. Решая уравнение

$$\frac{0,112832}{1+r} + \frac{0,333501}{1+1,5 \times r} + \frac{0,327842}{1+(1,5)^2 \times r} + \frac{0,107173}{1+(1,5)^3 \times r} = \frac{1}{(1+0,044)^4},$$

получим, что $r = 0,024329$. Форвардная ставка для четвертого периода равна $(1+0,044)^4/(1+0,043)^3 - 1 = 0,047006$. Поэтому ставка основной линии оказалась бы равной $2^3 \times 0,047006/(2,5)^3 = 0,024067$, если бы мы использовали равенство (23.4). Она меньше, чем 0,024329.

23.2.7. 1) Поскольку $d(j) = \sum_i P_i$, где P_i — цена состояния, относящаяся к состоянию i в момент j , то определим риск-нейтральные вероятности просто равенством $q_i \equiv P_i/d(j)$. Ясно, что сумма q_i равна единице. В упр. 13.2.13 эти вероятности называются форвардно-нейтральными вероятностями.

2) Они равны 0,232197/0,92101, 0,460505/0,92101 и 0,228308/0,92101. См. [40].

23.2.8. Нужно рассчитать все цены состояния за время $O(n^2)$, используя форвардную индукцию. А затем просуммировать цены состояния каждого столбца.

23.2.9. 1) Прделаем это с помощью индукции. Предположим, что сейчас момент j и существует $j+1$ узлов с ценами состояний $P'_1, P'_2, \dots, P'_{j+1}$. Пусть ставка основной линии периода j есть $r \equiv r_j$, мультипликативное отношение $v \equiv v_j$, а $P_1, P_2, \dots, P_j$ — цены состояния предшествующего периода, соответствующие ставкам $r, rv, \dots, rv^{j-1}$. Каждой величине P_i отвечают вероятности ветвления p_i для движения вверх и $1-p_i$ для движения вниз. И для удобства добавим соотношение $P_0 \equiv 0$. Ясно, что $P'_i = (1-p_{i-1})P_{i-1}/(1+rv^{j-2}) + p_i P_i/(1+rv^{j-1})$, $i = 1, 2, \dots, j+1$ (см. рис. 23.7). Тем самым мы получили то, что хотели, поскольку имеем $j+1$ уравнение (одно из которых лишнее) и j неизвестных $p_1, p_2, \dots, p_j$.

2) Хотя j цен состояния $P_1, P_2, \dots, P_j$ у нас неизвестны, но по предположению $p_1 = p_2 = \dots = p_j$. Поэтому остается $j+1$ неизвестных. И для их нахождения мы используем все $j+1$ уравнений, поскольку среди них нет лишних.

23.3.1. Нет [427].

23.3.4. 1) Это совпадает с вычислением фьючерсной цены, за исключением того, что а) дисконтирование должно быть использовано во время обратной индукции и б) для получения заключительной цены, т.е. для получения ее будущего значения нужно ПЗ облигации, поставленной в момент поставки T разделить на дисконтирующий фактор $d(T)$ [623, с. 390].

2) Форвардная цена равна

$$\frac{97,186 \times 0,232197 + 95,838 \times 0,460505 + 93,884 \times 0,228308}{0,92101} = 95,693.$$

Заметим, что форвардная цена превышает фьючерсную цену 95,687, как это и предсказывается в упр. 12.3.3.

23.3.6. Рассмотрим стратегию покупки купонной облигации, продажи опциона колл на эту облигацию с ценой исполнения X и покупки опциона пут на эту облигацию с той же ценой исполнения X . Срок действия обеих опционов истекает в один и тот же момент t . Денежный поток по облигации есть $C, C, \dots, C, X$, где C величина периодических купонных выплат. Заметим, что выплат после момента t

нет. Поэтому $P_3(I) + P_3(X) = B + P - C$, где $P_3(I)$ обозначает ПЗ денежного потока из сумм по облигации, поступающих до момента t включительно. См. [731, с. 269].

23.4.1. В любом узле на коррелированном биномиальном дереве с парой «цена акции — краткосрочная ставка» (S, r) в силу упр. 9.2.1 должны выполняться неравенства $d < 1 + r < u$. И если нет предварительных ограничений на r , то отсюда вытекает, что u и d должны зависеть от состояния, времени и траектории. См. [779].

К главе 24

24.2.1. 1) Если форвардная цена удовлетворяет этому соотношению, то одну и ту же сумму в долларах и за ту же цену через промежуток времени M принесут следующие две стратегии: (1) купить бескупонную облигацию со сроком жизни M за $P(t, M)$ долларов, а также (2) потратить $P(t, M)$ долларов на покупку $P(t, M)/P(t, T)$ единиц бескупонной облигации со сроком жизни T и заключить форвардный контракт длительности T на бескупонную облигацию со сроком действия $(M - T)$. Заметим, что к концу периода времени длины T при стратегии (2) у нас будет сумма $F(t, T, M)$ долларов, т. е. ровно столько, сколько требуется для принятия поставки одной бескупонной облигации со сроком действия $(M - T)$. Если $P(t, M) > P(t, T)F(t, T, M)$, то арбитражные возможности возникнут, если занять короткую позицию по бескупонной облигации со сроком действия M и длинную позицию как по бескупонной облигации срока T , так и по форвардному контракту на время T по бескупонным облигациям срока $(M - T)$. В случае противоположного неравенства $P(t, M) < P(t, T)F(t, T, M)$ позиции следует поменять. Обратите внимание на «родственную близость» выражений (24.1) и (5.2).

2) Предположим, что денежный поток перед моментом поставки по форвардному контракту состоит из сумм $C_1, C_2, \dots$, отнесенных к моментам $T_1, T_2, \dots$. И пусть F означает цену форварда. Наша стратегия по дублированию состоит в следующем: занять $FP(t, T)$ долларов на T лет, занять $C_i P(t, T_i)$ долларов на T_i лет при всех $i = 1, 2, \dots$, и купить одну единицу базовой облигации за $B(t, M)$ долларов. Каждое из обязательств по ссуде до момента T может быть оплачено купонами облигации. В момент поставки T стоимость позиции складывается из НЗ по облигации за вычетом форвардной цены $B(T, M) - F$, копирующей выплату по форвардному контракту. Поскольку стоимость форвардного контракта в момент t нулевая, то должно

$$\text{быть } FP(t, T) + \sum_i C_i P(t, T_i) - B(t, M) = 0. \text{ Таким образом, } F = \frac{B(t, M) - \sum_i C_i P(t, T_i)}{P(t, T)}.$$

Другими словами, форвардная цена равна НЗ текущей цены по счету базовой облигации минус ПЗ денежного потока по облигации до даты поставки. Форвардная цена включает в себя и накопленные проценты по базовой облигации, выплачиваемые в момент T . См. [848, с. 169].

24.2.2. В момент t капиталовложения отсутствуют, но мы платим \$1 в момент T и получаем $P(t, T)/P(t, M)$ долларов в момент M . Другими словами, капиталовложение момента T приносит грубый доход величины $P(t, T)/P(t, M)$ в момент M . Поэтому рассматриваемая форвардная цена должна быть равной $P(t, M)/P(t, T)$. См. [76, с. 22].

24.2.3. Заметим, что равенство (5.11) эквивалентно выражению $f(T) = \frac{\partial(TS(T))}{\partial T}$ и $TS(T) = -\ln d(T)$ в силу (5.7). Остается лишь перейти в другую систему обозначений.

24.2.4. Из равенства (24.2) вытекает, что

$$1 + f(t, s, 1) = 1 + f(t, s) = \frac{P(t, s)}{P(t, s+1)}.$$

Используя это представление при $t+1 \leq s \leq T-1$ получим, что

$$P(t, T) = \frac{P(t, t+1)}{[1+f(t, t+1)] \dots [f(t, T-1)]}.$$

Остается заметить, что $P(t, t+1) = (1+r(t))^{-1}$. См. [492, с. 388].

24.2.5. Мы знаем, что для спот-ставки s имеет место выражение $P = e^{-sr}$. С другой стороны, в силу равенства (5.8), т.е. аналога выражения (24.6) для случая непрерывного начисления процентов, $P = \exp\left[-\sum_{i=0}^{T-1} f(i, i+1)\right]$. См. [746, с. 422].

24.2.6. Вытекает непосредственно из формул (5.12) и (5.13). Если же действовать по-другому, то можно начать с вытекающего из (24.1) равенства $F(t, T, T+L) = \frac{P(t, T+L)}{P(t, T)}$. А затем заметить, что

$$f(t, T, L) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{F(t, T, T+L)} - 1 \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T+L)} - 1 \right].$$

24.2.8. Используйте представления (14.16) и (24.4), чтобы получить равенство $f(t, T) = r(t) + \mu(T-t) - \sigma^2(T-t)^2/2$. Но по определению $E_t[r(T)|r(t)] = r(t) + \mu(T-t)$. Поэтому

$$f(t, T) - E_t[r(T)|r(t)] = -\frac{\sigma^2(T-t)^2}{2} < 0.$$

Что же касается форвардной ставки, то для нее из (14.16) и (24.4) вытекает представление $r + \mu(T-t) - \sigma^2(T-t)^2/2$.

24.2.9. Из упр. 5.6.6 и формулы (24.5) вытекает, что в этой экономике $P(t, T) = \exp\left[-\int_t^T r(s) ds\right]$. См. [746, с. 527].

24.2.10. Поскольку $r_e \equiv \ln(1+r_e)$, то $r_e/(1+r_e) = 1 - e^{-r_e}$. Поэтому

$$\begin{aligned} dr_e &= (1+r_e)^{-1} dr_e - \frac{1}{2}(1+r_e)^{-2}(dr_e)^2 = (1+r_e)^{-1}r_e(\mu dt + \sigma dW) - \frac{1}{2}(1+r_e)^{-2}r_e^2\sigma^2 dt = \\ &= (1 - e^{-r_e})(\mu dt + \sigma dW) - \frac{1}{2}(1 - e^{-r_e})^{-2}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Искомое равенство отсюда и вытекает. См. [781, теорема 3].

24.3.1. Из равенства $P(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)}$ и выражения (24.9) вытекает, что

$$r(t, T) = -\frac{\ln E_t\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s) ds\right\}\right]}{T-t}.$$

Ну а по неравенству Йенсена правая часть этого равенства меньше, чем $\frac{E_t\left[\int_t^T r(s) ds\right]}{T-t}$, если только случайность не отсутствует. См. [302, теорема 1].

24.3.2. По правилу Лейбница и в силу (24.4) и (24.9)

$$f(t, T) = -\frac{\partial P(t, T)/\partial T}{P(t, T)} = \frac{E_t\left[r(T) \exp\left\{-\int_t^T r(s) ds\right\}\right]}{E_t\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s) ds\right\}\right]}.$$

Поэтому форвардная ставка является взвешенным средним будущих спот-ставок. Наконец, по предположению правая часть последнего равенства меньше обычного среднего $E_t(r(T))$. См. [302, теорема 2].

24.3.3. Для калиброванного дерева это верно независимо от временной структуры волатильности. Рассмотрим n -периодную облигацию с $n > 1$. Через период (после момента t), у облигации будет одна из двух цен P_u и P_d , причем таких, что

$(P_u + P_d)/\{2[1 + r(t)]\} = P(t, n)$, т.е. равно рыночной цене n -периодной бескупонной облигации. По построению, ожидаемый однопериодный доход у этой облигации равен

$$\frac{(P_u + P_d)/2}{P(t, n)} = 1 + r(t),$$

т.е. в точности как и требуется в теории локального оценивания в среднем. Что же касается некалиброванного дерева, то оно не вписывается в эту теорию. Причина проста: величина

$$\frac{P_u + P_d}{2(1 + r(t))} > P(t, n),$$

поскольку известно, что дерево переоценивает дисконтирующий множитель по теореме 23.2.2.

24.3.4. Это равенство вытекает из (24.5), (24.6) и самой теории, в соответствии с которой $f(s, t) = E_s[r(t)]$.

24.3.5. Каждый элемент денежного потока должен быть дисконтирован с помощью соответствующей дисконтирующей функции [292].

24.3.7. См. [725, с. 231].

24.3.8. Напоминаем, что шапка на процентную ставку представляет собой контракт, в котором продавец обещает оплатить владельцу некоторую сумму в наличных, если процентная ставка превысит некоторый заранее выбранный уровень (ставка шапки) в определенные моменты времени в будущем. И точно так же, продавец контракта, называемого пол, обещает заплатить наличными, если будущие процентные ставки упадут ниже заданного уровня. Технически контракт шапка равен сумме контрактов шапочек. А теперь приведем точное описание шапочки.

Пусть t означает момент подписания контракта, интервал $[t_0, t_1]$ представляет период действия шапочки, а $\Delta t \equiv t_1 - t_0$. Обозначим ставку шапки через x . И для простоты предположим, что условная основная сумма — \$1.

Процентная ставка, которая в реальной жизни определяет выплаты по шапке, является некоторой рыночной ставкой, такой как ставка LIBOR. Ставка котируется как ставка простых процентов в периоде $[t_0, t_1]$. Эта ставка простых процентов, которую мы обозначим через f , определяется в момент t_0 соотношением $P(t_0, t_1) = 1/(1 + f\Delta t)$. Наконец, шапочка представляет собой условное t_1 -требование, по которому владельцу контракта в момент t_1 будет выплачена сумма $\max(f - x, 0) \times \Delta t$. Причем выплата делается в конце (периода). Точнее говоря, выплата в момент t_1 равна

$$\max\left(\frac{1 - P(t_0, t_1)}{P(t_0, t_1)\Delta t} - x, 0\right) \times \Delta t = \max\left(\frac{1}{P(t_0, t_1)} - (1 + x\Delta t), 0\right) = \max\left(\frac{1}{P(t_0, t_1)} - \alpha, 0\right),$$

где $\alpha \equiv 1 + x\Delta t$. Цена же шапочки в момент t , и это можно легко показать, равна

$$E_t^\pi\left[\exp\left\{-\int_t^{t_1} r(s) ds\right\} \max\left(\frac{1}{P(t_0, t_1)} - \alpha, 0\right)\right] = \alpha E_t^\pi\left[\exp\left\{-\int_t^{t_0} r(s) ds\right\} \max\left(\frac{1}{\alpha} - P(t_0, t_1), 0\right)\right].$$

Таким образом, шапочка эквивалентна α опциону на облигацию с датой поставки t_0 , погашения t_1 , и ценой исполнения $1/\alpha$ (см. и п. 21.2.4).

24.4.1. Из уравнения (24.13) получаем, что $\Theta_1 - \Theta_2 = \sigma(r, r)^2(C_2 - C_1)/2$ [207].

24.4.3. Перепишем уравнение (24.14) в виде

$$\frac{1}{2} \sigma(r)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu(r) \frac{\partial P}{\partial r} - rP - \frac{\partial P}{\partial T} = 0$$

и предположим для простоты, что μ и σ не зависят от времени. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных превращается в следующие $N - 1$

разностных уравнений:

$$\frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \mu_i \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta r} - r P_{i,j} - \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{\Delta t} = 0,$$

где $\mu_i \equiv \mu(i\Delta r)$, $\sigma_i \equiv \sigma(i\Delta r)$, $1 \leq i \leq N-1$ (производную $\partial P / \partial r$ из вышеприведенного уравнения мы могли бы заменить и на отношение $(P_{i+1,j} - P_{i-1,j}) / (2\Delta r)$). Сгруппируем теперь слагаемые левой части полученной системы разностных уравнений относительно $P_{i,j-1}$, $P_{i-1,j}$, $P_{i,j}$ и $P_{i+1,j}$ и запишем ее в виде

$$a_i P_{i-1,j} + b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j} = P_{i,j-1},$$

где

$$a_i \equiv -\left(\frac{\sigma_i}{\Delta r}\right)^2 \frac{\Delta t}{2}, \quad b_i \equiv 1 + i\Delta r \Delta t + \left(\frac{\sigma_i}{\Delta r}\right)^2 \Delta t + \frac{\mu_i \Delta t}{\Delta r}, \quad c_i \equiv -\left(\frac{\sigma_i}{\Delta r}\right)^2 \frac{\Delta t}{2} - \frac{\mu_i \Delta t}{\Delta r}.$$

В исходном положении даны заключительные условия $P_{i,0}$. Из условия $\sigma(0) = 0$ вытекает, что $a_0 = 0$. Другое условие $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, T) = 0$ приводит к равенству $P_{N,j} = 0$. Систему полученных уравнений можно записать и в матричном виде

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & \\ 0 & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{0,j} \\ P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \vdots \\ P_{N-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{0,j-1} \\ P_{1,j-1} \\ P_{2,j-1} \\ \vdots \\ P_{N-1,j-1} \end{pmatrix}.$$

Из нее видно, что при данных $P_{i,j-1}$ получить $P_{i,j}$ можно, обращая тридиагональную матрицу. См. п. 18.1 или [38, сс. 81–84]. Отметим, что частная производная дифференциального уравнения Блэка—Шоулса по времени из п. 18.1 берется по отношению к t , а не к T как здесь. Это приводит к небольшой разнице в обозначениях по сравнению с явными уравнениями из п. 18.1.3.

На практике конечный интервал на оси r , такой, как [0 %, 30 %] оказывается достаточным для получения хорошего приближения. Еще более хорошее приближение можно получить с помощью преобразования типа $x \equiv 1/(1+r)$ и решения дифференциального уравнения относительно x , область определения которого (0, 1] конечна [38]. См. также [859].

24.4.4. Аргументация совпадает с той, которая привела к уравнению временной структуры, с тем отличием, что доход по фьючерсному контракту равен нулю, а не r [746, с. 565].

24.5.1. Относительно риск-нейтральной вероятностной меры $\mu_p(t, T) = r(t)$ и

$$d \ln P(t, T) = \left[r(t) - \frac{1}{2} \sigma_p(t, T, P(t, T))^2 \right] dt + \sigma_p(t, T, P(t, T)) dW_t.$$

Напомним, что в силу (24.3)

$$f(t, T, \Delta t) = \frac{\ln P(t, T) - \ln P(t, T + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Поэтому $df(t, T, \Delta t)$ равно

$$\frac{\sigma_p(t, T + \Delta t, P(t, T + \Delta t))^2 - \sigma_p(t, T, P(t, T))^2}{2\Delta t} dt + \frac{\sigma_p(t, T, P(t, T)) - \sigma_p(t, T + \Delta t, P(t, T + \Delta t))}{\Delta t} dW_t.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ предыдущее уравнение превращается в

$$df(t, T) = \sigma_p(t, T, P(t, T)) \frac{\partial \sigma_p(t, T, P(t, T))}{\partial T} dt - \frac{\partial \sigma_p(t, T, P(t, T))}{\partial T} dW_t.$$

См. [692, п. 19.3.2].

24.5.2. Пусть $\sigma_p(t, T, P) = \psi(t) \ln P(t, T)$. Тогда искомый элемент диффузии, $-\frac{\partial \sigma_p(t, T, P)}{\partial T}$, равен $-\psi(t) \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = \psi(t) f(t, T)$, поскольку $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$. См. [731, с. 378].

24.6.2. Через период цена облигации 1 изменится на $P_1 u_1$ или $P_1 d_1$, а цена облигации 2 — на $P_2 u_2$ или $P_2 d_2$. Портфель, состоящий из одной короткой облигации 1 и $\frac{P_1 u_1 - P_1 d_1}{P_2 u_2 - P_2 d_2}$ длинных единиц облигации 2 является безрисковым, поскольку его стоимость в обоих случаях равна $\frac{P_1(u_1 d_2 - u_2 d_1)}{u_2 - d_2}$. Поэтому

$$\left[-B_1 + \frac{P_1(u_1 - d_1)}{P_2(u_2 - d_2)} B_2 \right] (1+r) = \frac{P_1(u_1 d_2 - u_2 d_1)}{u_2 - d_2},$$

где через B_i обозначена текущая цена i -й облигации. Используйте теперь полученное уравнение, а также равенства (24.16) и (24.17) в формуле для λ , чтобы убедиться в том, что конечный результат действительно не зависит от облигации. См. [38, § 3.3] и [781, сноска 3].

24.6.3. 1) Через период стоимость портфеля равна либо $P_u + V_u(P_d - P_u)/(V_u - V_d)$ либо $P_d + V_d(P_d - P_u)/(V_u - V_d)$. Поскольку обе величины равны $\frac{-P_u V_d + P_d V_u}{V_u - V_d}$, то доход должен быть безрисковым.

2) Найдите x из уравнения $\left(1 + x \frac{P_d - P_u}{V_u - V_d}\right) R = \frac{-P_u V_d + P_d V_u}{V_u - V_d}$. См. [739].

24.6.4. 1) Чтобы выплаты через период совпали, должны выполняться равенства:

$$uP(t, t+2)\Delta + e^r B = V_u, \quad dP(t, t+2)\Delta + e^r B = V_d.$$

Отсюда легко вывести, что указанные значения корректны.

2) Подставьте значения из (1) в уравнение $V = \Delta \times P(t, t+2) + B$. См. [441].

24.6.5. Используйте простые алгебраические операции. См. [38, с. 44].

24.6.6. Без текущей временной структуры, шаг $100/(1,05)^2 = 90,703$ не был бы предпринят и все, что следовало за ним, «полетело бы». Больше информации есть в [725, пример 6.1].

$$\mathbf{24.6.7.} \quad p = \frac{P(1+r) - Pd}{P(u-d)} = \frac{(90,703 \times 1,04) - 92,593}{98,039 - 92,593}.$$

24.6.8. Если стоимость ценной бумаги в каждом состоянии совпадает со стоимостью портфеля из облигаций, который постоянно пересматривается, то ценная бумага будет иммунизирована. Это понятие не допускает арбитражной прибыли.

24.7.1. 1) Поскольку облигация никогда не сможет стоить больше \$100, если процентные ставки неотрицательны.

2) Это вытекает из предположения логнормальности цен облигаций и простого факта, что цена облигации с положительной вероятностью превысит *любое* заранее заданное положительное значение. В действительности, однако, цена облигации должна принимать значения между нулем и суммарной величиной оставшихся в дежном потоке сумм, если процентные ставки положительные. См. [304].

24.7.2. Нет. Стоимость этого опциона равна максимуму из нуля и дисконтированного значения разности номинала и цены исполнения, т.е. $\max(0, P(t, T)(100 - X))$, где T — дата окончания его срока действия. См. [304].

К главе 25

25.1.1. Перепишем процесс AR(1) $X_t - b = a(X_{t-1} - b) + \varepsilon_t$ в виде $X_t - X_{t-1} = (1-a) \times (b - X_{t-1}) + \varepsilon_t$, который представляет собой дискретный аналог модели Васичека [41, с. 94]. Напомним, что автокорреляция X с лагом единица равна a и она переходит в $1 - \beta \, dt$ в модели Васичека.

25.1.2. 2) Заметим, что $\partial B(t, T)/\partial T = e^{-\beta(T-t)}$. А из представления (24.4) мы получаем

$$f(t, T) = -\frac{\sigma^2(e^{-\beta(T-t)} - 1)^2}{2\beta^2} - \mu(e^{-\beta(T-t)} - 1) + r(t)e^{-\beta(T-t)}.$$

Поскольку $E_t(r(T) | r(t)) = \mu + (r(t) - \mu)e^{-\beta(T-t)}$, то премия за ликвидность равна $-\sigma^2 \times [e^{-\beta(T-t)} - 1]^2 / (2\beta^2)$. Отметим, что эта премия равна нулю при $T=t$, как и должно быть. В противном случае она отрицательна и при $T \rightarrow \infty$ сходится к величине $-\sigma^2 / (2\beta^2)$, которая представляет собой разницу между долгосрочной ставкой и долгосрочным средним краткосрочной ставки μ . См. [855].

25.1.3. Равенства

$$\begin{aligned} \lambda(t, r) &= 0, \quad \mu(r, t) = \beta(\mu - r), \quad \sigma(r, t) = \sigma, \\ \frac{\partial P / \partial T}{P} &= -re^{-\beta(T-t)} + \mu e^{-\beta(T-t)} - \frac{\sigma^2}{\beta^2} e^{-\beta(T-t)} - \mu + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} e^{-2\beta(T-t)}, \\ \frac{\partial P / \partial r}{P} &= -B(t, T) = \frac{e^{-\beta(T-t)} - 1}{\beta}, \quad \frac{\partial^2 P / \partial r^2}{P} = B(t, T)^2 = \left[\frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} \right]^2 \end{aligned}$$

нужно вставить в уравнение (24.12). Случай $\beta = 0$ еще проще.

25.1.4. Формула для $\partial P / \partial r$ выводится с помощью упр. 25.1.3.

25.1.5. Из упр. 25.1.4 вытекает, что

$$d \ln P = \left[r - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma^2 \right] dt - B(t, T) \sigma dW.$$

Поскольку $f(t, T) = -\partial \ln P(t, T) / \partial T$, то

$$df = - \left[-B(t, T) \sigma^2 \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \right] dt + \sigma \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} dW.$$

Используя же формулу $\partial B(t, T) / \partial T = e^{-\beta(T-t)}$, можно упростить предыдущее равенство до представления

$$df = \left[\frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} e^{-\beta(T-t)} \sigma^2 \right] dt + e^{-\beta(T-t)} \sigma dW.$$

См. [16].

25.1.6. Используйте равенство $\ln P(t, T) = \ln A(t, T) - B(t, T)r(t)$ и уравнение (14.14) для того, чтобы доказать представление

$$D(\ln P) = B(t, T)^2 D(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(T-t)}].$$

25.2.1. При $T \rightarrow \infty$ она приближается к $2\beta\mu / (\beta + \gamma)$.

25.2.4. Для кривой спот-ставок имеет место представление

$$r(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} = -\frac{\ln A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)r(t, T)}{T-t}.$$

Поэтому структура волатильности спот-ставок записывается в виде

$$\frac{\partial r(t, T)}{\partial r} \sigma(r, t) = \sigma(r, t) B(t, T) / (T-t).$$

См. [731, с. 415].

25.2.5. 2) Значение σ записывается в виде $\sqrt{2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_2^2)}$ [138].

25.2.6. Из (25.1) и (25.3) вытекает, что спот-ставка в этих двух моделях является линейной функцией краткосрочной ставки, скажем, $r(t, T) = a(T - t) + b(T - t)r(t)$. В частности, $r(T, T_1) = a' + b'r(T, T_2)$ при некоторых a' и b' . Поэтому

$$\max(0, r(T, T_1) - r(T, T_2)) = \max(0, a' + (b' - 1)r(T, T_2)) = (b' - 1) \times \max\left(0, r(T, T_2) - \frac{a'}{1 - b'}\right),$$

что и означает портфель из шапочек. Случай поликов симметричен. См. [616].

25.2.9. Подставьте формулы для r^+ , r^- и $r = f(x)$ в уравнение (25.4) [268].

25.2.11. См. [868].

25.2.12. Заметим, что все ставки на одном и том же горизонтальном уровне равны. Узлы с одинаковыми краткосрочными ставками производят ту же временную структуру, поскольку временная структура зависит только от существующей краткосрочной ставки. Как результат, нам следует хранить лишь вектор ставок и вектор вероятностей. Для ответа на вопрос (1), например, мы передвигаем два вектора в обратном направлении по времени, выполняя необходимые вычисления с третьим вектором. См. [405].

25.2.13. Пусть $x \equiv f(y, t)$. Тогда по лемме Ито

$$dx = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \alpha(y, t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sigma(y, t)^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial y} \sigma(y, t) dW.$$

Поэтому указанное преобразование делает элемент диффузии выше равным единице. См. [696, 841].

25.2.14. Спрашивая, имеет ли место равенство

$$\sigma(r, t)\sqrt{\Delta t} - \sigma(r_u, t)\sqrt{\Delta t} = -\sigma(r, t)\sqrt{\Delta t} + \sigma(r_d, t)\sqrt{\Delta t}, \quad (33.29)$$

мы замечаем, что $\sigma(r, t) = \sigma\sqrt{r}$ в модели КИР и $\sigma(r, t) = r\sigma$ для геометрического броуновского движения. Поэтому в модели КИР

$$r_u = r + \beta(\mu - r)\Delta t + \sigma\sqrt{r}\sqrt{\Delta t}, \quad r_d = r + \beta(\mu - r)\Delta t - \sigma\sqrt{r}\sqrt{\Delta t},$$

в то время как для броуновского движения

$$r_u = r + r\mu\Delta t + r\sigma\sqrt{\Delta t}, \quad r_d = r + r\mu\Delta t - r\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Легко проверить, что равенство (33.29) выполняется для геометрического броуновского движения, но не выполняется в модели КИР.

25.3.1. С помощью дерева следует моделировать функцию $x(r) \equiv r^{1-\gamma}$ [475].

25.5.1. Изменения наклона обусловлены изменениями параметра a , изменения кривизны связаны с изменениями параметра b , а параллельные сдвиги определяются изменениями параметра r [239, 564].

К главе 26

26.1.1. Равновесные модели, поскольку безарбитражные калибруются по правилу облигаций.

26.2.3. Рассмотрим n -периодную облигацию. Пусть $P_{ud}(t+2, t+n)$ обозначает ее цену, если краткосрочная ставка сначала поднимается, а затем убывает. И, аналогично, пусть $P_{du}(t+2, t+n)$ обозначает ее цену в случае, когда краткосрочная ставка сначала убывает, а затем поднимается. Тогда из (26.3) и (26.3') вытекает, что

$$P_{ud}(t+2, t+n) = \frac{P_u(t+1, t+n)}{P_u(t+1, t+2)} \cdot \frac{2e^{v_3+\dots+v_n}}{1+e^{v_3+\dots+v_n}} = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2}{1+e^{v_2+\dots+v_n}} e^{r_2+v_2} \frac{2e^{v_3+\dots+v_n}}{1+e^{v_3+\dots+v_n}},$$

$$P_{du}(t+2, t+n) = \frac{P_d(t+1, t+n)}{P_d(t+1, t+2)} \cdot \frac{2}{1+e^{v_3+\dots+v_n}} = \frac{P(t, t+n)}{P(t, t+1)} \cdot \frac{2e^{v_2+\dots+v_n}}{1+e^{v_2+\dots+v_n}} e^{r_2} \frac{2}{1+e^{v_3+\dots+v_n}}.$$

А эти два выражения действительно равны.

26.2.5. Стоимость портфеля равна $P(t, t+T_1) + \beta P(t, t+T_2)$. Она меняется на $V_u = P_u(t+1, t+T_1) + \beta P_u(t+1, t+T_2)$, если краткосрочная ставка поднимается, и на $V_d = P_d(t+1, t+T_1) + \beta P_d(t+1, t+T_2)$, если убывает. Чтобы сделать портфель безрисковым, нужно убрать неопределенность, т.е. обеспечить равенство $V_u = V_d$. В силу (26.3) это означает, что

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{P_u(t+1, t+T_1) - P_d(t+1, t+T_1)}{P_u(t+1, t+T_2) - P_d(t+1, t+T_2)} = \frac{2 \frac{P(t, t+T_1)}{P(t, t+1)} \left(\frac{1 - \exp[v_2 + \dots + v_{T_1}]}{1 + \exp[v_2 + \dots + v_{T_1}]} \right)}{2 \frac{P(t, t+T_2)}{P(t, t+1)} \left(\frac{1 - \exp[v_2 + \dots + v_{T_2}]}{1 + \exp[v_2 + \dots + v_{T_2}]} \right)} = \\ &= \frac{P(t, t+T_1)(1 - \exp[v_2 + \dots + v_{T_1}])(1 + \exp[v_2 + \dots + v_{T_2}])}{P(t, t+T_2)(1 - \exp[v_2 + \dots + v_{T_2}])(1 + \exp[v_2 + \dots + v_{T_1}])}. \end{aligned}$$

См. [458].

26.2.7. Доход $r(t, t+n)$ равен либо $\ln P_d(t+1, t+n) - \ln P(t, t+n) = (n-1)v + C$ с вероятностью $1-p$, либо $\ln P_u(t+1, t+n) - \ln P(t, t+n) = C$ с вероятностью p при некоторой постоянной C . Дисперсия с.в. $r(t, t+n)$, следовательно, равна $p(1-p)[(n-1)v]^2$. Равенство (26.2) утверждает, что $\sigma^2 = p(1-p)v^2$. Поэтому дисперсия $r(t, t+n)$ есть $(n-1)^2\sigma^2$. Что же касается ковариации, то используйте равенство (26.3). См. [72].

26.2.8. Заметим, что $D\xi_s = (1/4)(\ln \delta)^2 = v^2/4$ и $v = 2\sigma$.

$$\begin{aligned} \text{26.2.9. } -\ln \left(\frac{1 + \delta^n}{1 + \delta^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \ln \delta &= \ln \left(\frac{\delta^{-1/2} + \delta^{n+1/2}}{1 + \delta^n} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{e^{-\sigma(\Delta t)^{1.5}} + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}[(T-t)+\Delta t/2]}}{1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}(T-t)}} \right) \approx \ln \left(\frac{1 - \sigma(\Delta t)^{1.5} + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}[(T-t)+\Delta t/2]}}{1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}(T-t)}} \right) \approx \\ &\approx \frac{-\sigma(\Delta t)^{1.5} + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}[(T-t)+\Delta t/2]} - e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}(T-t)}}{1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}(T-t)}} \approx \\ &\approx \frac{(1/2)(2\sigma\sqrt{\Delta t}[(T-t)+\Delta t/2])^2 - (1/2)[2\sigma\sqrt{\Delta t}(T-t)]^2}{2} \approx \sigma^2(T-t)(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

26.2.10. Следуя доказательству из упр. 26.2.9, получим, что

$$-\ln \left(\frac{1 + \delta^{t-1}}{1 + \delta^t} \right) - \frac{1}{2} \ln \delta = \ln \left(\frac{\delta^{-1/2} + \delta^{t-1/2}}{1 + \delta^{t-1}} \right) \approx \sigma^2 t(\Delta t)^2.$$

26.3.1. Перепишем равенства (26.7) и (26.8) в следующем виде:

$$f(P_u, P_d) \equiv P_u + P_d - \frac{2(1+r_1)}{(1+y)^i} = 0, \quad g(P_u, P_d) \equiv P_u^{-1/(i-1)} - 1 - e^{2\kappa} [P_d^{-1/(i-1)} - 1] = 0.$$

Поскольку P_u и P_d зависят от r_i и v_i , то $f(P_u, P_d)$ и $g(P_u, P_d)$ также являются функциями r_i и v_i . Обозначим их через $F(r_i, v_i)$ и $G(r_i, v_i)$, соответственно. А для краткости будем писать $f(r, v)$ вместо $f(r_i, v_i)$, $g(r, v)$ вместо $g(r_i, v_i)$, и т.д. По методу Ньютона—Рафсона $(k+1)$ -е приближение для (r_i, v_i) — обозначаемое через $(r(k+1), v(k+1))$ — удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F(r(k), v(k))}{\partial r} & \frac{\partial F(r(k), v(k))}{\partial v} \\ \frac{\partial G(r(k), v(k))}{\partial r} & \frac{\partial G(r(k), v(k))}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r(k+1) \\ \Delta v(k+1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F(r(k), v(k)) \\ G(r(k), v(k)) \end{pmatrix},$$

в которой мы полагаем, что $\Delta r(k+1) \equiv r(k+1) - r(k)$ и $\Delta v(k+1) \equiv v(k+1) - v(k)$. Чтобы решить эту систему (т.е. найти $(r(k+1), v(k+1))$), нам нужны производные $\partial F/\partial r$,

$\partial F/\partial v$, $\partial G/\partial r$ и $\partial G/\partial v$. Очевидно,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial P_u}{\partial r} + \frac{\partial P_d}{\partial r}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial P_u}{\partial v} + \frac{\partial P_d}{\partial v}.$$

Кроме того, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial P_u} \cdot \frac{\partial P_u}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial P_d} \cdot \frac{\partial P_d}{\partial r}, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial P_u} \cdot \frac{\partial P_u}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial P_d} \cdot \frac{\partial P_d}{\partial v}.$$

В этих четырех уравнениях нам нужно оценить величины

$$\frac{\partial P_u}{\partial r}, \quad \frac{\partial P_d}{\partial r}, \quad \frac{\partial P_u}{\partial v}, \quad \frac{\partial P_d}{\partial v}, \quad \frac{\partial g}{\partial P_u}, \quad \frac{\partial g}{\partial P_d}.$$

С помощью метода дифференциального дерева их можно рассчитать в следующем порядке. Используя метод в обратном направлении по отношению ко времени, мы придем к величинам P_u , P_d , $\partial P_u/\partial r$, $\partial P_d/\partial r$, $\partial P_u/\partial v$ и $\partial P_d/\partial v$. Недостающие две $\partial g/\partial P_u$ и $\partial g/\partial P_d$ можно будет вычислить, используя непосредственно определение функции g :

$$\frac{\partial g}{\partial P_u} = -\frac{1}{i-1} P_u^{-i/(i-1)}, \quad \frac{\partial g}{\partial P_d} = \frac{e^{2\kappa}}{i-1} P_d^{-i/(i-1)}.$$

Так мы и получим величины $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial v$, $\partial G/\partial r$ и $\partial G/\partial v$.

Этот алгоритм обратной индукции реализуется за кубическое время, поскольку в методе Ньютона—Рафсона для достижения желаемой точности требуется провести лишь несколько итераций. См. [625].

26.3.4. Доказательство похоже на то, которое использовано в упр.23.2.3. Из определения процесса вытекает, что

$$\begin{aligned} \sigma(t)^2 \Delta t &= D(\ln r(t + \Delta t) - \ln r(t)) = D(\ln r(t) \{1 + \Delta r(t)/r(t)\} - \ln r(t)) = D(\ln(1 + \Delta r(t)/r(t))) \approx \\ &\approx D(\Delta r(t)/r(t)) = D(\Delta r(t))/r(t)^2. \end{aligned}$$

Поэтому $D(\Delta r(t)) \approx r(t)^2 \sigma(t)^2 \Delta t$. См. [514, с. 482].

26.4.1. Нормальная модель, причем по следующим причинам. У нее более толстые левые хвосты и тонкие правые у вероятностного распределения процентных ставок в будущем (см. рис.6.1). Но это приводит к более тонким левым хвостам и толстым правым для вероятностного распределения цен облигаций. См. [476].

26.4.2. Используйте производящую функцию моментов нормального распределения со средним $r_j + \mu_{i,j} \Delta t$ и дисперсией $\sigma^2 \Delta t$. Другими словами, используйте формулу (6.8) при $t = -\Delta t$, $\mu = r_j + \mu_{i,j} \Delta t$ и $\sigma = \sigma \sqrt{\Delta t}$. В результате придете к соотношению

$$e^{-r_j \Delta t - \mu_{i,j} (\Delta t)^2 + \sigma^2 (\Delta t)^3 / 2} \approx e^{-r_j \Delta t} \left[1 - \mu_{i,j} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 (\Delta t)^3 \right].$$

См. [477].

26.4.3. Поскольку входы на ветвях, соответствующие недостижимым узлам бесполезны, то можно улучшить алгоритм, определяя верхнюю и нижнюю границы достижимых узлов в каждом столбце ветвления и ограничивая вычисления этими узлами.

26.4.5. Примените алгоритм триномиального дерева для модели Халла—Уайта функции $x \equiv \ln r$. См. также [215, 848].

26.5.1. Она равна $(\sigma^2/\kappa)(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)})$ [746, с. 581].

26.5.2. С помощью (26.14) уравнение (26.15) можно записать в виде (26.13):

$$df(t, T) = \mu(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t.$$

Поэтому функция $r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \mu(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s$. Дифференцируя ее

по t , получим, что

$$\begin{aligned} dr(t) &= \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} dt + \left[\int_0^t \frac{\partial \mu(s, t)}{\partial t} ds \right] dt + \left[\int_0^t \frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} dW_s \right] dt + \mu(t, t) dt + \sigma(t, t) dW_t = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[f(0, T) + \int_0^T \mu(s, T) ds + \int_0^T \sigma(s, T) dW_s \right] \right\} \Big|_{T=t} dt + \mu(t, t) dt + \sigma(t, t) dW_t = \\ &= \left[\mu(t, t) + \frac{\partial f(t, T)}{\partial T} \right]_{T=t} dt + \sigma(t, t) dW_t = \left[\sigma(t, t) \lambda(t) + \frac{\partial f(t, T)}{\partial T} \right]_{T=t} dt + \sigma(t, t) dW_t. \end{aligned}$$

См. [515, приложение 1].

26.5.4. В силу (26.21)

$$C_t = P(t, T) \Phi(d_t) - XP(t, s) \Phi(d_t - \sigma_t),$$

где $d_t \equiv (1/\sigma_t) \ln(P(t, T)/[XP(t, s)]) + (\sigma_t/2)$.

1) Полагаем $\sigma_t \equiv \sigma(T-s)\sqrt{s-t}$.

2) Полагаем $\sigma_t \equiv \beta(s-t, T-t)\sqrt{\varphi(s-t)}$.

26.5.5. Используя пример 26.5.3, получим, что

$$\frac{\partial r(t, T)}{\partial r(t)} \sigma = -\frac{1}{T-t} \cdot \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial r(t)} \sigma = \beta(t, T) \frac{\sigma}{T-t}.$$

26.5.7. Если в каждом узле содержатся форвардные ставки различных сроков вплоть до даты погашения базовой облигации, то временная структура до этой даты может быть построена. Затем дерево нужно будет расширить лишь до даты погашения требования.

26.5.8. Используйте уравнения (24.5), (26.23) и (26.24), чтобы получить равенство

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \exp \left[-\left\{ \Delta t \int_{t+\Delta t}^T \mu(t, u) du + \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T \sigma(t, u) du \right\} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp \left[-\left\{ \Delta t \int_{t+\Delta t}^T \mu(t, u) du - \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T \sigma(t, u) du \right\} \right]. \end{aligned}$$

26.5.9. Если использовать равенство (26.25) дважды, полагая $x \equiv \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T \sigma(t, u) du$

и $y \equiv \sqrt{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^{T-\Delta t} \sigma(t, u) du$, то получим, что

$$\begin{aligned} (\Delta t)^2 \mu(t, T) &\approx \ln \frac{e^x + e^{-x}}{e^y + e^{-y}} \approx \frac{e^x - e^y + e^{-x} - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \approx \frac{[e^{(\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T)} - 1]e^y - [1 - e^{-(\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T)}]e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \approx \\ &\approx \frac{(\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T)e^y - (\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T)e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = (\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T) \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \approx (\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \\ &= (\Delta t)^{1.5} \sigma(t, T) \tanh x. \end{aligned}$$

К главе 27

27.3.1. Не теряя в общности предположим, что номинал облигации равен \$1. И пусть стоимость отзыва в момент t есть $C(t)$. Допустим, что условие использования погасительного фонда требует от выпускающей организации изымать из обращения (погашать) основную сумму частями в F_i долларов и в моменты t_i для $i = 1, 2, \dots, n$, причем $\sum_{i=1}^n F_i = 1$. Как и прежде, лучше всего рассматривать такой вложенный опцион

как n отдельных опционов. И, в частности, считать, что i -й опцион дает право купить отзывную облигацию номинала F_i по номиналу при погашении (момент t_i) с ценой отзыва $F_i C(t)$ в момент $0 \leq t \leq t_i$. В остальном используемая облигация идентична исходной облигации. Стоимость же опциона можно рассчитать при помощи обратной индукции. Искомая цена равна цене в остальном такой же облигации без опционов минус стоимость n опционов. См. [848].

27.3.2. Предположим, что облигация продается по цене ниже стоимости ее конверсии. Рассмотрим следующую стратегию: покупаем одну КО, продаем из короткой позиции акции в количестве, равном конверсионному отношению и закрываем короткую позицию с помощью конверсии. Отметим, что в этой стратегии возникнет положительный начальный денежный поток, а число акций в точности закроет короткую позицию. См. [325, с. 374].

27.3.3. Поскольку держатели облигаций их конвертируют, то число акций увеличивается и потому цена их убывает. Корректное определение стоимости конверсии должно было бы использовать цену акции *после* конверсии, которая бы учитывала этот момент. Однако здесь мы предполагаем, что рассматриваемые КО являются единственными ценными бумагами, которые могут повлиять на цену существующих акций, что редко имеет место. См. [221, глава 8] и [325, с. 373n].

27.3.4. Рыночная стоимость КО по меньшей мере равна стоимости конверсии, но в точности порождает эту стоимость конверсии именно досрочная конверсия.

27.3.5. Если текущая цена акции настолько высока, что опцион в конце срока действия конверсии всегда оказывается в деньгах и опцион исполняется, то любой узел будет узлом исполнения по индукции от заключительных узлов. Как следствие, стоимость КО в любом узле равняется цене акции.

27.3.6. На по-акционной основе искомое соотношение записывается в виде

$$\text{стоимость КО } (B) = \text{стоимость ворранта } (W) + \text{базовая стоимость } (s), \quad (33.30)$$

где цена исполнения ворранта X равняется цене конверсии КО P плюс купонная выплата. Предположим, что изменение цены акции выпускающей организации описывается биномиальной моделью и до погашения остается n периодов. Пусть c_i — купонная выплата момента i , P — номинал обычной облигации, R — безрисковый грубый доход за период и $s_i \equiv PR^{-(n-i)} + \sum_{j=i}^n c_j R^{-(j-i)}$ — стоимость простой облигации в момент i . Тогда тождество (33.30) с помощью индукции можно доказать следующим образом. При погашении $W = \max(S - X, 0)$ и $B = \max(S, X) = W + (P + c_n) = W + s_n$. Поэтому, используя предположение индукции, для произвольного момента i получаем равенство

$$B = \frac{pB_u + (1-p)B_d}{R} + c_i = \frac{p(W_u + s_{i+1}) + (1-p)(W_d + s_{i+1})}{R} + c_i = W + s_i.$$

См. [221, глава 8].

27.4.1. Эта ситуация аналогична оценке стоимости безрисковых облигаций с помощью обратной индукции в риск-нейтральной экономике, с той лишь разницей, что теперь в каждом узле момента i облигация может перейти в неплатежеспособное состояние с вероятностью p_i и принести владельцу в момент погашения ноль долларов. Другими словами, теперь риск-нейтральные вероятности момента i равны соответствующим вероятностям безрисковой облигации, умноженным на $1 - p_i$. См. [514, с. 570] или [535], где рассматривается более общий случай, когда (разорившаяся) фирма выплачивает не ноль долларов, а некоторую долю номинала.

27.4.2. Если процентные ставки растут, то цены обеих компонент, неотзывной облигации и вложенного опциона колл падают. Падение же цены вложенного опцио-

на будет компенсировать некоторую часть уменьшения цены неотзывной облигации. См. [325, с. 324].

27.4.3. 1) В силу (27.1)

$$\text{цена}_o = \text{цена}_{\text{но}} - \text{цена опциона колл}.$$

Если продифференцировать обе части этого равенства и разделить на цену отзывной облигации цена_o , то получим

$$-ДУО_o = \frac{\partial(\text{цена}_{\text{но}})}{\partial y} \cdot \frac{1}{\text{цена}_o} - \frac{\partial(\text{цена опциона колл})}{\partial y} \cdot \frac{1}{\text{цена}_o}. \quad (33.31)$$

Первое слагаемое справа в (33.31) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\text{цена}_{\text{но}})}{\partial y} \cdot \frac{1}{\text{цена}_{\text{но}}} \cdot \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o} = -\text{дюрация}_{\text{но}} \times \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o}. \quad (33.32)$$

По правилу дифференцирования сложной функции и определению дельта

$$\frac{\partial(\text{цена опциона колл})}{\partial y} = \frac{\partial(\text{цена опциона колл})}{\partial(\text{цена}_{\text{но}})} \cdot \frac{\partial(\text{цена}_{\text{но}})}{\partial y} = \Delta \times \frac{\partial(\text{цена}_{\text{но}})}{\partial y}.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (33.31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{цена опциона колл})}{\partial y} \cdot \frac{1}{\text{цена}_{\text{но}}} \cdot \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o} &= \Delta \times \frac{\partial(\text{цена}_{\text{но}})}{\partial y} \cdot \frac{1}{\text{цена}_{\text{но}}} \cdot \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o} = \\ &= -\Delta \times \text{дюрация}_{\text{но}} \times \frac{\text{цена}_{\text{но}}}{\text{цена}_o}. \end{aligned}$$

Искомый результат и получится, если объединить (33.32) и последнее равенство. См. [325, сс. 332–334].

27.4.4. См. упр. 23.3.1.

27.4.5. Увеличенная волатильность делает отзыв облигации более вероятным, что приводит к уменьшению доходов инвестора.

27.4.6. 1) СУО возрастает. Естественно, цена не может опуститься ниже номинала.

2) СУО уменьшается, но через некоторое время будет держаться несколько выше нуля.

27.4.7. Рассмотрим T -периодную бескупонную облигацию, отзываемую в момент m по цене отзыва X . Чтобы облегчить сравнение предположим, что изменение процентной ставки описывается биномиальным процессом, в котором $r_n(i)$ обозначает краткосрочную ставку периода i на n -й траектории. Истинная стоимость в этом случае получается с помощью обратной индукции, которая приводит к равенству

$$P_b \equiv \frac{1}{2^T} \sum_{n_1=1}^{2^m} \times \min \left(\sum_{n_2=1}^{2^{T-m}} \frac{100}{\prod_{i=1}^T [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]}, \frac{X}{\prod_{i=1}^m [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]} \right),$$

в то время, как метод Монте-Карло действует следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\text{MC}} &\equiv \frac{1}{2^T} \sum_{n=1}^{2^T} \frac{1}{\prod_{i=1}^m [1 + r_n(i) + \text{СУО}]} \times \min \left(\frac{100}{\prod_{i=m+1}^T [1 + r_n(i) + \text{СУО}]}, X \right) = \\ &= \frac{1}{2^T} \sum_{n_1=1}^{2^m} \sum_{n_2=1}^{2^{T-m}} \frac{1}{\prod_{i=1}^m [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]} \times \min \left(\frac{100}{\prod_{i=m+1}^T [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]}, X \right) = \\ &= \frac{1}{2^T} \sum_{n_1=1}^{2^m} \sum_{n_2=1}^{2^{T-m}} \times \min \left(\frac{100}{\prod_{i=1}^T [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]}, \frac{X}{\prod_{i=1}^m [1 + r_{n_1 n_2}(i) + \text{СУО}]} \right). \end{aligned}$$

В силу неравенства Йенсена $\sum_{n=1}^l \min(x_n, c) \leq \min\left(\sum_{n=1}^l x_n, c\right)$, и мы делаем вывод, что $P_{MC} \leq P_b$. Действуя аналогично, можно показать, что метод Монте-Карло имеет тенденцию переоценивать стоимость отдаваемых облигаций. См. [349].

27.4.11. На рис. 27.7 (г)

1) замените 0,936 на 1,754, поскольку $1,754 = (106,754 - 5) - 100$ и

2) замените 0,482 на 0,873, поскольку $0,873 = (1,754 + 0,071)/1,045$.

27.4.12. Мы докажем утверждение для биномиальных деревьев процентной ставки и будем опираться на рис. 23.1. Но то же самое рассуждение можно применить и к любому дереву. Пусть s представляет СУО. И рассмотрим сначала бескупонные облигации. В соответствии с обратной индукцией в каждом узле имеем равенства

$$P_A = \frac{P_B + P_C}{2e^{r+s}} = e^{-s} \frac{P_B + P_C}{2e^r}.$$

С помощью математической индукции получаем, что цена n -периодной основной облигации $P_b(n)$ и цена n -периодной неосновной облигации $P_{nb}(n)$ связаны соотношением $P_b(n) = P_{nb}(n) e^{sn}$. Пусть $r_b(n)$ и $r_{nb}(n)$ обозначают соответствующие им доходности. Тогда $e^{-r_b(n)n} = e^{-r_{nb}(n)n} e^{sn}$, т. е. $r_b(n) = r_{nb}(n) - s$. Но по предположению все $r_b(n)$ равны. Поэтому зависимость от срока погашения n можно опустить и мы получим равенство $r_b = r_{nb} - s$. Рассмотрим далее купонные облигации с денежным потоком $C_1, C_2, \dots, C_n$. Тогда

$$P_{nb} = \sum_{i=1}^n C_i P_{nb}(i) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-r_{nb}i} = \sum_{i=1}^n C_i e^{-(r_b+s)i}.$$

Поэтому, как и утверждалось, спред доходности равен s .

К главе 28

28.5.1. Это потому, что плата за обслуживание и гарантию составляет процент от ссуды, оставшейся непогашенной, которая уменьшается со временем.

28.6.1. Прежде всего у инвестора есть прирост капитала. С другой стороны, переводные продаются со скидкой, поскольку их купонная ставка меньше, чем текущая купонная ставка новых выпусков. А, следовательно, предоплата может быть реинвестирована по более высокой купонной ставке. См. [325, с. 254].

28.6.2. В соответствии с предположением, чем меньше остаток непогашенной ссуды, тем меньше стимулов к ее рефинансированию, если остальные параметры одинаковы. Поскольку 30-летняя ссуда погашается медленнее 15-летней, то предоплата по ЦБЗ, обеспеченной 30-летней закладной, должна быть более быстрой.

28.6.3. Даже при отсутствии операционных издержек выражение (28.2) утверждает, что рефинансирование экономически невыгодно, пока старая ставка не будет превосходить новую.

28.6.4. Из выражения (28.1) вытекает, что непогашенная ссуда составит величину $B_a = (C/r)(1 - (1+r)^{-n+a})$ при первом рефинансировании, где C — ежемесячная выплата. Легко показать, однако, что (см. также (29.4))

$$C = B \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}, \quad (33.33)$$

где B — величина взятой ссуды. Если предыдущие выражения объединить, то остаток первой непогашенной ссуды можно записать в виде

$$B_a = B \times \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} [1 - (1+r)^{-n+a}] = B \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^a}{(1+r)^n - 1}.$$

Но в силу (33.33) новая ежемесячная выплата равна

$$C_a = B_a \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = B \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^a}{(1+r)^n - 1} \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Поэтому, если приведенный процесс продолжить, то получим, что ежемесячная выплата после i -го рефинансирования равна

$$B \times \left[\frac{(1+r)^n - (1+r)^a}{(1+r)^n - 1} \right]^i \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

28.6.5. Хотя оба сценария характеризует одна и та же разница ставок в 2 %, но второй вариант лучше из-за более высоких побудительных стимулов к рефинансированию, о которых говорит выражение (28.3).

К главе 29

29.1.2. По формуле (29.2) при $k=1$ остаток непогашенной ссуды по отношению к \$1 взятой ссуды составляет величину

$$1 - \frac{x-1}{x^n-1} = 1 - \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1},$$

где $x \equiv 1 + r/m \geq 1$. Правая часть этого равенства монотонно возрастает по x . Поэтому различные ставки r приводят к различным значениям остатка непогашенной ссуды, поскольку они означают, что соответствующие им значения x также различны.

29.1.3. См. рис. 33.8.

29.1.5. Во-первых, примените алгоритм из рис. 33.8, но для дерева краткосрочных ставок с $n+k-1$ периодами, для получения всех искомых спот-ставок вплоть до момента времени n , когда истекает срок действия свопа. При этом нужны лишь узлы вплоть до момента $n-1$. Затем используйте обратную индукцию для определения в каждом узле цены свопа номинала в \$1, начинающегося в этом узле и заканчивающего свою жизнь в момент n . Сумма погашения свопа зависит от его первоначальной

Алгоритм, порождающий процесс изменения спот-ставок:

```

ввод:  $n, k, r[0..n-1][0..n-1]$ ;
действительные числа  $s[0..n-k][0..n-k], P[0..n-1]$ ;
целые  $i, j, l$ ;
для ( $i=n-k$  вниз до 0) {
    // Обратная индукция для получения дисконтирующих множителей
    для ( $j=0$  до  $i+k-1$ ) {  $P[j] := 1/(1+r[i+k-1][j])$ ; }
    для ( $l=i+k-2$  вниз до  $i$ ) {
        для ( $j=0$  до  $l$ ) {  $P[j] := 0,5(P[j]+P[j+1])/(r[l][j]+1)$ ; }
    }
    // Преобразует дисконтирующие множители в спот-ставки
    для ( $j=0$  до  $i$ ) {  $s[i][j] := P[j]^{-1/k} - 1$ ; }
}
вывод  $s[ ][ ]$ ;

```

Рис. 33.8. Алгоритм, порождающий процесс изменения спот-ставок. Обозначение $r[i][j]$ представляет $(j+1)$ -ю краткосрочную ставку периода $i+1$, дерево краткосрочных ставок занимает n периодов, а k означает срок действия искомых спот-ставок. Спот-ставки хранятся в ячейке $s[][]$. В частности, $s[i][j]$ относится к искомой спот-ставке в том же самом узле, что и $r[i][j]$, где $0 \leq i \leq n-k$ и $0 \leq j \leq i$. Все ставки относятся к периоду.

стоимости. В частности, пусть a — сумма амортизации в текущем узле, которая однозначно определяется k -периодной спот-ставкой этого узла. Тогда стоимость свопа в этом узле равна $C + (1-a)(p_u P_u + p_d P_d)/(1+r)$, где r — краткосрочная ставка этого узла, C — его сумма, p_u и p_d вероятности ветвления, а P_u и P_d представляют стоимость свопа в двух последующих узлах как описано выше. Отметим использование масштабирования. Затрачиваемое время имеет порядок $O(kn^2)$.

29.1.6. Используя формулу (29.5) получаем, что

Месяц	6	12	18	24	30	36
УСП	1,2	3,12	5,544	11,04	8,1	7,5

29.1.7. Нет. Пример см. в [323, с. 362].

29.1.8. Просуммируйте величины $\overline{P}_i$ из равенства (29.6) и $\overline{I}_i$ из равенства (29.7) с $\alpha = 0$.

29.1.9. 1) Запишите выражение для R_i с помощью равенства (29.8).

$$2) \overline{P}_i + R_i = b_{i-1} P_i + \overline{B}_{i-1} \frac{B_i}{B_{i-1}} \times v_i = b_{i-1} P_i + B_{i-1} \times b_{i-1} \frac{B_i}{B_{i-1}} \times v_i = b_{i-1} (P_i + B_i \times v_i).$$

29.1.10. В отношении равенства (29.9) заметим лишь, что $\overline{B}_i/\beta_i = (\overline{B}_{i-1}/\beta_{i-1})(1-v_i)$. Что же касается равенств (29.10), то при выводе формулы для $\overline{P}_i$ используйте выражения (29.2) и (29.3). Формула же для $\overline{I}_i$ вытекает из процесса погашения (амортизации).

29.1.12. Пусть s означает ЕСО. И предположим для простоты, что исходная ссуда равна \$1, а r — ставка периода. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{ПОГ} &= \sum_{i=1}^n \frac{\overline{P}_i + R_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^n \frac{(1-s)^{i-1} \frac{r(1+r)^{i-1}}{(1+r)^n - 1} + \overline{B}_i \frac{s}{1-s}}{(1+r)^i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(1-s)^{i-1} \frac{r(1+r)^{i-1}}{(1+r)^n - 1} + \frac{(1+r)^n - (1+r)^i}{(1+r)^n - 1} s(1-s)^{i-1}}{(1+r)^i} = \\ &= \frac{1}{(1+r)^n - 1} \left\{ \frac{r}{1+r} \cdot \frac{1 - (1-s)^n}{s} + s \frac{(1+r)^n - (1-s)^n}{r+s} - [1 - (1-s)^n] \right\}, \end{aligned}$$

если для получения второго равенства использовать выражения (29.3), (29.10) и упр. 29.1.9 (1), а для получения третьего равенства — выражения (29.2) и (29.9). Аналогично, используя (29.2) получаем, что

$$\begin{aligned} \text{ПРО} &= \sum_{i=1}^n \frac{\overline{I}_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^n \frac{(1-s)^{i-1} \times B_{i-1} \times r}{(1+r)^i} = r \sum_{i=1}^n \frac{(1-s)^{i-1} \frac{(1+r)^n - (1+r)^{i-1}}{(1+r)^n - 1}}{(1+r)^i} = \\ &= \frac{r}{(1+r)^n - 1} \left[\frac{(1+r)^n - (1-s)^n}{r+s} - \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - (1-s)^n}{s} \right]. \end{aligned}$$

29.1.13. Пусть погашение ссуды осуществляется за счет выплат $P_1, P_2, \dots, P_n$, а на оплату процентов в момент i идет сумма $I_i \equiv r \left(P - \sum_{j=1}^{i-1} P_j \right)$ в силу принципа амортизации*), где r — доходность периода и $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ — величина взятой ссуды. Тогда НЗ объединенного денежного потока из сумм $P_i + I_i$, $i = 1, 2, \dots, n$,

*) В России принцип амортизации чаще называется «классическим принципом погашения или начисления процентов». — Прим. перев.

равно величине

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[P_i + r \left(P - \sum_{j=1}^{i-1} P_j \right) \right] (1+r)^{n-i} &= \sum_{i=1}^n \left(P_i + r \sum_{j=i}^n P_j \right) (1+r)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^n P_i (1+r)^{n-i} \left[1 + \sum_{j=1}^i r(1+r)^{i-j} \right] = \sum_{i=1}^n P_i (1+r)^{n-i} (1+r)^i = P(1+r)^n, \end{aligned}$$

независимо от того, каким образом исходная сумма P распределяется по выплатам-слагаемым P_i .

29.1.15. Они равны \$125 618, \$115 131, \$67 975, \$34 612, \$20 870 и \$0, соответственно, для месяцев 1–6. См. формулу из упр. 29.1.9 (1).

29.1.16. Проверьте правильность вашей программы, прогоняя ее при нулевой взятой ссуде C (т.е. при $B_0[3]=0$) и сравнивая ответ с числами, приведенными в таблице на рис. 29.11.

29.2.1. Поскольку быстро погашающие участники покинут пул с большой скоростью, то среди оставшихся все большую долю будут составлять его медленно погашающие участники. А, следовательно, скорость погашения в пуле будет сближаться со скоростью погашения «медленных» участников. См. [433].

29.2.2. Пусть $P \equiv \text{ПОГ} \approx s/(r+s)$ а $I \equiv \text{ПРО} \approx r/(r+s)$. Тогда $\frac{\partial P/\partial s}{P} \approx \frac{r}{s(r+s)}$ а $\frac{\partial I/\partial s}{I} \approx -\frac{1}{r+s}$.

29.2.3. Как и с процентами, на оплату обслуживания идет некоторый процент от взятой ссуды [829, с. 105].

29.3.1. У покупаемой с премией ЦБЗ купонная ставка должна превосходить рыночную ставку дисконтирования. Это означает, что сумма предоплаченной ссуды меньше ПЗ части будущего денежного потока, «исчезнувшей» из-за рассматриваемых предоплат или соответствующей им. Поэтому предоплата «сжимает» стоимость денежного потока. Аргументация для ЦБЗ, покупаемых со скидкой, симметрична.

29.3.2. Формула справедлива лишь когда денежный поток не зависит от доходностей. Но для ЦБЗ это условие не выполняется. См. [55, с. 132].

29.3.3. Обратимся к рис. 28.8. На бычьем рынке цены ценных бумаг Казначейства идут вверх, а цены ЦБЗ — вниз. Следовательно, такой хеджер реализует наихудший вариант из двух плохих, теряя деньги в каждом из них. См. [54, с. 204].

29.3.4. Эта модель не принимает во внимание отрицательную выпуклость ценных бумаг [304].

К главе 30

30.2.1.

Изменение LIBOR (базисные пункты)	−300	−200	−100	0	+100	+200	+300
Обычный поплавок	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
Суперпоплавок	2,0	3,5	5,0	6,5	8,0	9,5	11,0

К главе 31

31.1.1. Пусть $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top$ — портфель, т.е. вектор из долей, которые стоимость входящих в него активов составляет от их совокупной стоимости, $\bar{r} \equiv (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^\top$ — вектор из ожидаемых доходностей входящих в портфель ценных бумаг, а Q — матрица ковариаций этих доходностей. Тогда портфель с минимальной дисперсией при заданном среднем значении $\bar{r}$ (и, в частности, эффективный

портфель) определяется как решение следующей задачи квадратичного программирования:

$$\min_{\omega} \omega^T Q \omega \rightarrow \min, \quad \omega^T \bar{r} = \bar{r}, \quad \omega^T \mathbf{1} = 1,$$

в которой $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1)^T$. См. [3].

31.1.2. В случае двух активов с коэффициентом корреляции $\rho = -1$ дисперсия доходности портфеля равна $\omega_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 - 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1\sigma_2$. Поэтому, чтобы «обнулить» дисперсию, достаточно положить $\omega_1 = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Такой ответ годится, поскольку лежит между нулем и единицей (т.е. короткая продажа отсутствует). См. [317, с. 74].

31.1.3. 1) Рассматривается задача

$$-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \rightarrow \min, \quad \omega_i \geq 0 \text{ при всех } i, \quad \sum_i \omega_i = 1.$$

Пусть i^* таково, что $\sigma_{i^*i^*} = \max_i \sigma_{ii}$. Нетрудно показать, что $\sigma_{ii} \sigma_{jj} > \sigma_{ij}^2$ при всех i, j [465, с. 398]; поэтому $\sigma_{i^*i^*} > \sigma_{i^*i}$ при всех $i \neq i^*$. Условия Куна—Таккера, которым удовлетворяет решение вышеуказанной задачи, утверждают, что существуют μ и $v_1, v_2, \dots$ такие, что [721, с. 522—523]:

$$-\sum_j \sigma_{ij} \omega_j + \mu - v_i = 0, \quad \omega_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad v_i \omega_i = 0 \text{ при всех } i, \quad \sum_i \omega_i = 1.$$

Заметим, что величина $\sum_i (\mu - v_i) \omega_i = \mu > 0$ является искомой. Допустимое решение с $\omega_{i^*} = 1$ и $\omega_i = 0$ при $i \neq i^*$ удовлетворяет вышеуказанной системе при выборе $\mu = \sigma_{i^*i^*}$ и $v_i = \sigma_{i^*i^*} - \sigma_{i^*i} \geq 0$ при всех i .

2) На этот раз задача может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \rightarrow \min, \quad \omega_i \geq 0 \text{ при всех } i, \quad \sum_i \omega_i = 1.$$

Используйте множители Лагранжа чтобы показать, что ее решение удовлетворяет соотношениям

$$\sum_j \sigma_{ij} \omega_j + \mu = 0, \quad \omega_i \geq 0 \text{ при всех } i, \quad \sum_i \omega_i = 1.$$

Заметим, что величина $-\mu \sum_i \omega_i = -\mu > 0$ является искомой. Пусть $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ и $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1)^T$. Тогда $\omega = -\mu C^{-1} \mathbf{1}$, причем условие $\omega_i \geq 0$ при всех i выполняется по предположению. Объединяя это соотношение с равенством $\mathbf{1}^T \omega = 1$, получаем, что $\mathbf{1}^T (-\mu C^{-1} \mathbf{1}) = 1$, из чего следует, что $-\mu = 1/(\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1})$. И если положить $C^{-1} \equiv (a_{ij})$, то $-\mu = 1/\left(\sum_i \sum_j a_{ij}\right)$.

31.1.4. Отметим, что величина $r(T) + 1$ распределена логнормально, а $r_c(T)$ — нормально. Поэтому средние и дисперсии величин $r(T)$ и $r_c(T)$ связаны соотношениями

$$\mu(T) = e^{\mu_c(T) + 0.5\sigma_c^2(T)} - 1, \quad \sigma^2(T) = e^{2\mu_c(T) + 2\sigma_c^2(T)} - e^{2\mu_c(T) + \sigma_c^2(T)},$$

в соответствии с равенствами (6.11). Альтернативная запись имеет вид

$$\mu_c(T) = 2 \ln(1 + \mu(T)) - \frac{\ln(\sigma^2(T) + [1 + \mu(T)]^2)}{2}, \quad \sigma_c^2(T) = \ln \left(1 + \left[\frac{\sigma(T)}{1 + \mu(T)} \right]^2 \right).$$

См. [646, с. 105].

31.1.5. Доходность каждого отдельного актива равна $\mu - \sigma^2/2$ (см. упр. 13.3.8 (2)). Дисперсия же портфеля равна σ^2/n ; доходность портфеля поэтому есть $\mu - \sigma^2/(2n)$. А разница доходностей равна $\sigma^2/2 - \sigma^2/(2n) = (1 - 1/n)(\sigma^2/2)$. См. [623, с. 429].

31.1.6. Поскольку все инвесторы имеют дело с одним и тем же комплектом рисковых активов, то торговая активность по каждой акции, представляемая как доля акций, находящихся в обращении, одинакова по всем акциям [614].

31.1.7. Замените каждую переменную ω_i на $Y_i - Z_i$ и добавьте условия $Y_i \geq 0$ и $Z_i \geq 0$. В новой модели уравнение для средних остается однородной линейной формой относительно переменных, а уравнение с ковариациями остается однородной квадратичной формой. Таким образом, получаем общую модель по выбору портфеля. Новая модель строго эквивалентна исходной модели по следующим причинам. Если вектор $(Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots, Y_n, Z_n)$ является допустимым портфелем в новой модели, то $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ с $\omega_i \equiv Y_i - Z_i$ является допустимым для исходной модели с теми же средними и стандартными отклонениями. И наоборот, если $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ является допустимым решением для исходной модели, то вектор $(Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots, Y_n, Z_n)$ с $Y_i \equiv \max(\omega_i, 0)$ и $Z_i \equiv \max(-\omega_i, 0)$ является допустимым для новой модели, причем с теми же средними и стандартными отклонениями. См. [642, с. 26].

31.2.1. В тексте было показано, что комбинация портфелей с минимальной дисперсией приводит к портфелю с минимальной дисперсией. В действительности комбинация эффективных портфелей приводит к эффективному портфелю, если веса всех портфелей неотрицательны. Так получается потому, что результирующий портфель является портфелем с минимальной дисперсией и ожидаемой доходностью, равной или выше доходности ТНД, что делает его эффективным по определению. Поскольку инвесторы держат у себя только эффективные портфели, то рыночный портфель представляет комбинацию эффективных портфелей и, следовательно, также эффективен.

31.2.2. Пусть рыночная доходность равна $r_M = \sum_i \omega'_i r_i$, где ω'_i — рыночные пропорции. Из того факта, что каждый инвестор владеет одним и тем же рыночным портфелем вытекает, что рыночный портфель удовлетворяет системе уравнений (31.1), т.е. $\lambda \sum_i \sigma_{ij} \omega'_i = \bar{r}_j - r_f$, $j = 1, \dots, n$. Отметим, что λ не зависит от выбора j . Поскольку

$$\text{Cov}(r_j, r_M) = E \left[(r_j - \bar{r}_j) \sum_i \omega'_i (r_i - \bar{r}_i) \right] = \sum_i \omega'_i E[(r_j - \bar{r}_j)(r_i - \bar{r}_i)] = \sum_i \omega'_i \sigma_{ij},$$

то мы видим, что $\lambda \text{Cov}(r_j, r_M) = \bar{r}_j - r_f$. Для рыночного портфеля $\lambda \text{Cov}(r_M, r_M) = \bar{r}_M - r_f$, из чего вытекает, что $\lambda = (\bar{r}_M - r_f) / \sigma_M^2$. См. [317, сс. 303—304], [623, с. 177] и [799, сс. 287—289].

31.2.3. Риск актива, который некоррелирован с рынком, может быть сведен к нулю с помощью диверсификации, поскольку покупка большого числа таких активов, которые также взаимно некоррелированы, приводит к маленькой совокупной дисперсии [623, с. 179].

31.2.4. Такой актив уменьшает совокупный риск портфеля, если объединяется с рынком. Инвесторы должны платить за это уменьшение риска. Другой пример представляет страхование. См. [424, с. 213], [623, с. 179] и [799, с. 271].

31.2.5. У всех них одинаковый уровень систематического риска, т.е. одинаковое бета. Стоимость части совокупного риска, которую называют специальным риском, оцениваться не будет. См. [88, с. 300].

31.2.6. 1) Нам нужно показать, что если

$$P_1 = \frac{\bar{Q}_1}{1 + r_f + \beta_1(\bar{r}_M - r_f)}, \quad P_2 = \frac{\bar{Q}_2}{1 + r_f + \beta_2(\bar{r}_M - r_f)},$$

то

$$P_1 + P_2 = \frac{\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2}{1 + r_f + \beta'(\bar{r}_M - r_f)},$$

где β' представляет бета актива, который является суммой активов 1 и 2. Поскольку оба слагаемых внутри скобок формулы (31.5) зависят от Q линейно, то утверждение имеет место.

2) В противном случае мы сможем купить более дешевый портфель и продать более дорогой, получив на совершенном рынке арбитражную прибыль. См. [623, с. 188].

31.2.7.

Значение индекса через год	1200	1100	1000	900	800
Стоимость портфеля через год	1,36	1,16	0,96	0,76	0,56

31.2.8. Если значение индекса есть S , то стоимость портфеля будет равна величине $\$ 1000 \times S$. Однако, выплата по опционам будет равна

$$10 \times \max(1000 - S, 0) \times 100 \geq 1\,000\,000 - 1000 \times S$$

долларов (напомним, что размер опционного контракта на индекс акций определяется как произведение $\$ 100$ на значение индекса). Сложим их (стоимость портфеля и выплату по опционам) и получим, что нижняя оценка суммы равна $\$ 1\,000\,000$.

31.2.10. Это бычий колл-спред.

31.2.11. Поскольку доходность типа непрерывного начисления процентов $\ln S(t)/S(0)$ описывается $(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ броуновским движением в силу примера 14.3.3, то его среднее пропорционально t , а его волатильность или шум пропорциональны $\sqrt{t}$. Следовательно, краткосрочные доходности (т.е. при малых t) подавляются шумом.

31.2.12. См. [317, с. 359] или [424, сс. 132–135]. А существуют ли безрисковые активы или нет, то это не существенно.

31.3.1. $\text{Cov}(r_i, r_M) = b_i \times Dr_M$. В модели CAPM предсказывают, что $\alpha_i = 0$. См. [623, с. 205].

31.3.2. Рассмотрим k -факторную модель $r_i = a_i + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \dots + b_{ik}f_k + \varepsilon_i$. Положим $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ и пусть C матрица ковариации факторов f . Предположим, что $Ef = 0$ или применим приведенную ниже процедуру к величине $f - Ef$. В силу (19.1) существует такая действительная ортогональная матрица B , что матрица $\Sigma \equiv B^T C B$ является диагональной. Но поскольку матрица ковариации вектора $(p_1, p_2, \dots, p_k)^T \equiv B^T f$ есть Σ , то сам вектор $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ можно использовать в качестве искомого множества некоррелированных факторов.

31.3.3. Если модель CAPM имеет место, то уравнение (31.7) записывается в виде $\bar{r} = r_f + b_1 \lambda_1$. Если сравним его с уравнением рыночной линии $\bar{r} - r_f = \beta(\bar{r}_M - r_f)$ из теоремы 31.2.1, то получим, что $\lambda_1 = \beta(\bar{r}_M - r_f)/b_1$. Поскольку $\beta = \text{Cov}(r, r_M)/\sigma_M^2 = b_1 \times \text{Cov}(f, r_M)/\sigma_M^2$, то получаем, что $\lambda_1 = (\text{Cov}(f, r_M)/\sigma_M^2)(\bar{r}_M - r_f)$. См. [799, с. 335].

31.3.4. Предположим, что мы инвестируем ω_i долларов в актив i , $i = 1, 2, \dots, n$, «чтобы» выполнялись соотношения $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i b_{i1} = 0, \dots, \sum_{i=1}^n \omega_i b_{im} = 0$. Такой портфель не требует начальных капиталовложений и у него нулевой риск. А, следовательно, ожидаемая выплата по нему должна быть равна нулю, т.е. $\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = 0$. Положим $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, $b_j \equiv (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})^T$ при $j = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1)^T$, и $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^T$. Тогда мы можем переформулировать наш вывод следующим образом: при любом ω , удовлетворяющем соотношениям $\omega^T \mathbf{1} = 0$, $\omega^T b_1 = 0, \dots, \omega^T b_m = 0$, выполняется равенство $\omega^T \bar{r} = 0$. Иными словами, любой вектор ω , ортогональный к $\mathbf{1}$, $b_1, \dots, b_m$ оказывается также ортогональным и к вектору $\bar{r}$. В силу стандартного результата из линейной алгебры вектор $\bar{r}$ в этом случае должен

быть линейной комбинацией векторов $\mathbf{1}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$. А, следовательно, существуют такие постоянные $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, что $\bar{\mathbf{r}} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m$.

31.3.5. Доказательство упр. 31.3.4 сохраняется для хорошо диверсифицированного портфеля, поскольку он является безрисковым.

31.4.2. Поскольку $\ln S_\tau - \ln S \sim N((\mu - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau)$ (см. замечание 14.4.1), то с вероятностью c доход $\ln S_\tau/S$ будет по меньшей мере равен величине $(\mu - \sigma^2/2)\tau - \Phi^{-1}(c)\sigma\sqrt{\tau}$. Таким образом, искомое значение СПР равняется величине $Se^{\mu\tau} - Se^{(\mu - \sigma^2/2)\tau - \Phi^{-1}(c)\sigma\sqrt{\tau}}$. См. [8].

31.4.3. Утверждения (1) и (2) вытекают из (19.1), (3) вытекает из равенства

$$(dZ_1, dZ_2, \dots, dZ_n)^\top = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) P^\top (dW_1, dW_2, \dots, dW_n)^\top$$

и (2), а (4) обусловлено построением величин u_i .

Примечание

1. Формально это можно проверить следующим образом. Записанные в матричной форме, уравнения (33.14) и (33.15) утверждают, что $Ak=0$, где k является вектором столбцом с компонентами k_j и A является матрицей размерности $(n+1) \times (n+1)$, i -я строка которой есть вектор $(\sigma_{i1}f_1, \sigma_{i2}f_2, \dots, \sigma_{in}f_n)$ при $1 \leq i \leq n$, а $(n+1)$ -й строкой является вектор $(f_1(\mu_1 - r), f_2(\mu_2 - r), \dots, f_n(\mu_n - r))$. Чтобы это множество уравнений имело нетривиальное решение необходимо, чтобы определитель матрицы A был равен нулю. В частности, его последняя строка должна быть линейной комбинацией первых n строк. А это означает, что $f_j(\mu_j - r) = \sum_i \lambda_i \sigma_{ij} f_j$, $j=1, 2, \dots, n+1$, при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые зависят лишь от $S_1, S_2, \dots, S_n$ и t .

34.1 Используемые русские сокращения и их английские эквиваленты

Финансовые понятия и термины

ВД	внутренняя доходность	internal rate of return	<i>IRR</i>
ВУО	выпуклость с учетом опции	option-adjusted convexity	<i>OAC</i>
ГИК	инвестиционный контракт с гарантией	guaranteed investment contract	<i>GIC</i>
ДМ	дюрация по Маклею	Macaulay duration	<i>MD</i>
ДП	денежный поток	cash flows	
ДПВ	доходность за период владения	holding period return	<i>HPR</i>
ДУО	дюрация с учетом опции	option-adjusted duration	<i>OAD</i>
ДЭЗ	доходность, эквивалентная доходности по закладным	mortgage equivalent yield	<i>MEY</i>
ДЭО	доходность, эквивалентная облигационной	bond equivalent yield	<i>BEY</i>
ИСК	Индекс стоимости капиталовложений	cost of funds index	<i>COFI</i>
КО	конвертируемая облигация	convertible bond	<i>CB</i>
МД	модифицированная дюрация	modified duration	
НЗ	накопленное значение	future value	<i>FV</i>
ПЗ	приведенное значение	present value	<i>PV</i>
ПП	приведенная прибыль	net present value	<i>NPV</i>
Репо	соглашение о продаже и последующей покупке	sale and repurchase agreement	<i>RP</i>
СБП	стоимость базисного пункта	basis point value	<i>BPV</i>
ДС	депозитный сертификат	certificate of deposit	<i>CD</i>
СИА	своп с индексной амортизацией	index-amortizing swap	<i>IAS</i>
СпР	стоимость под риском	value at risk	<i>VaR</i>
СУ	сертификат участия	participation certificate	<i>PC</i>
СУО	спред с учетом опции	option-adjusted spread	<i>OAS</i>

СФС	соглашения по форвард-ной ставке	forward rate agreements	<i>FRA</i>
ЦБ	ценная(ые) бумага(и)	security(ies)	

З а к л а д н ы е и ц е н н ы е б у м а г и н а з а к л а д н ы х

АГЦБ	Ассоциация Государственных Ценных Бумаг	Public Securities Association	<i>PSA</i>
ЕСО	ежемесячное сокращение остатка (непогашенной ссуды)	single monthly mortality	<i>SMM</i>
ЗКВ	закладные с корректируемыми выплатами	ajustable-payment mortgages	<i>APM</i>
ЗКС	закладные с корректируемой ставкой	ajustable-rate mortgages	<i>ARM</i>
ЗПК	(облигации) класса запланированного погашения	planned-amortization class	<i>PAC</i>
ОЗЗ	обязательство по закладным в роли залога	collateralized mortgage obligation	<i>CMO</i>
ПиП	погашение и проценты	principal and interest	<i>P&I</i>
ПОГ	только погашение	principal only	<i>PO</i>
ПРО	только проценты	interest only	<i>IO</i>
ПЦБЗ	переводные ценные бумаги, обеспеченные закладными	mortgage pass-through securities	<i>MPTS</i>
РЦБЗ	разделенные ценные бумаги, обеспеченные закладными	stripped mortgage-backed securities	<i>SMBS</i>
СВК	средневзвешенный купон	weighted average coupon	<i>WAC</i>
ССЖ	средневзвешенный срок жизни	weighted average life	<i>WAL</i>
ССП	средневзвешенный срок погашения	weighted average maturity	<i>WAM</i>
УСП	условная скорость предоплаты	conditional prepayment rate	<i>CPR</i>
ЦБЗ	ценные бумаги, обеспеченные закладными	mortgage-backed securities	<i>MBS</i>
ЦПК	(облигации) класса целевого погашения	targeted amortization class	<i>TAC</i>

Ф е д е р а л ь н ы е (к р е д и т н ы е) а г е н т с т в а С Ш А

ДВ	Департамент по делам ветеранов	Department of Veterans Affairs	<i>VA</i>
ОСЖ	(Отдел по) обслуживанию сельских жителей	Rural Housing Service	<i>RHS</i>
ПНАЗ	Правительственная Национальная Ассоциация по закладным	Government National Mortgage Association	<i>GNMA</i>

САУС	Студенческая Ассоциация по Управлению ссудами (Салли Маэ)	Student Loan Marketing Association (Sallie Mae)	<i>SLMA</i>
ФАЖ	Федеральная Администрация по жилтому сектору	Federal Housing Administration	<i>FHA</i>
ФКПД	Федеральная Корпорация по закладным для покупки жилья (Фредди Мак)	Federal Home Loan Mortgage Association (Freddie Mac)	<i>FHLMC</i>
ФНАЗ	Федеральная Национальная Ассоциация по закладным (Фанни Маэ)	Federal National Mortgage Association (Fannie Mae)	<i>FNMA</i>

Ценные бумаги Казначейства США

ВК	векселя Казначейства	Treasury bills	<i>T-bills</i>
НК	ноты Казначейства	Treasury notes	<i>T-notes</i>
ОК	облигации Казначейства	Treasury bonds	<i>T-bonds</i>

Математические термины и модели

БМОО	биномиальная модель оценки стоимости опциона	binomial option pricing model	<i>BOPM</i>
КИР	(модель) Кокса—Ингерсолла—Росса	Cox—Ingersoll—Ross (model)	<i>CIR</i>
НК	(проблема) наименьших квадратов	least-squares (problem)	<i>LS</i>
ОНК	обобщенная (оценка) наименьших квадратов	generalized least-squares (estimator)	<i>GLS</i>
РС	(модель) Ритчкена—Санкарасубраманиана	Ritchken—Sankarasubramanian (model)	<i>RS</i>
РСЧ	разложение сингулярных чисел	singular value decomposition	<i>SVD</i>
с. в.	случайная(ые) величина(ы)	random variable(s)	<i>r. v.('s)</i>
СНК	стандартная (оценка) наименьших квадратов	ordinary least-squares (estimator)	<i>OLS</i>
ХДМ	(модель) Хита—Джэрроу—Мортон	Heath—Jarrow—Morton (model)	<i>HJM</i>
ЧКЛС	(модель) Чэна—Кароли—Лонгстаффа—Сандерса	Chan—Karolyi—Longstaff—Sanders (model)	<i>CKLS</i>

34.2 Используемые английские сокращения

Индексы, банки, биржи и рынки

AMEX	American Stock Exchange	Американская фондовая биржа
СВОЕ	Chicago Board Option Exchange	Чикагская биржа опционов
СВТ	Chicago Board of Trade	Чикагская торговая палата
СМЕ	Chicago Mercantile Exchange	Чикагская торговая биржа

CPI-U	Consumer Price Index (for all Urban (consumers))	Индекс Потребительских Цен (для) Городских (потребителей)
FHL	-banks; Federal Home Loan Banks	Федеральные банки, выдающие ссуды для приобретения жилья
IMM	International Monetary Market	Международный денежный рынок
LIBOR	London InterBank Offered Rate	Лондонская межбанковская ставка; см. сноску на с. 67
LIFFE	London International Financial Futures & options Exchange	Лондонская Международная Финансовая Биржа фьючерсов и опционов
PHLX	Philadelphia Stock Exchange	Филадельфийская фондовая биржа
UBS	Union Bank of Switzerland	Объединенный банк Швейцарии

М а т е м а т и ч е с к и е п о н я т и я и м о д е л и

APT	Arbitrage Pricing Theory	Арбитражная теория оценки стоимости
AR	autoregressive (process)	авторегрессионный (процесс)
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroskedastic (model)	авторегрессионная (модель) условной неоднородности
ARMA	autoregressive moving average (process)	смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
CAPM	Capital Asset Pricing Model	модель оценки стоимости финансовых активов
CEV	constant elasticity variance (process)	(процесс) дисперсии с постоянной упругостью
CML	Capital Market Line	рыночная линия капитала
CMT	-rate; Constant Maturity Treasury Rate	ставка ЦБ Казначейства определенного срока погашения
GARCH	generalized autoregressive Conditional Heteroskedastic (model)	обобщенная авторегрессионная (модель) условной неоднородности
MA	moving average (process)	(процесс) скользящего среднего
SSE	error sum of squares	остаточная сумма квадратов
SSR	regression sum of squares	сумма квадратов регрессии
SST	total sum of squares	полная сумма квадратов

35 **Некоторые из основных понятий современной финансовой теории**

Акция —

ценная бумага, представляющая долю собственности

Арбитраж —

получение гарантированной безрисковой прибыли с помощью одной или нескольких сделок на рынке

Базовая ЦБ —

одна из основных рыночных ЦБ, таких как акции, облигации или валюты

Безарбитражный рынок —

рынок, на котором отсутствует возможность получения безрисковой прибыли

Бескупонка —

облигация, по которой не полагается никаких выплат до погашения

Брокер —

(в Англии) дилер, который должен производить котировки цен двух типов и торговать по ним

Валюта —

денежная единица одной страны или нескольких стран

Ванилла стандартная —

основная версия продукта

Внебиржевое соглашение —

соглашение, заключаемое непосредственно между двумя сторонами, без обращения к бирже

Stock —

a security representing partial ownership of a company

Arbitrage —

the making of a guaranteed risk-free profit with a trade or series of trades in the market

Underlying —

a basic market securities, such as stocks, bonds and currencies

Arbitrage-free market —

a market which has no opportunity for risk-free profit

Zero coupon —

a bond which does not make any payments until maturity

Market maker —

(in UK) a dealer who is obligated to quote and trade at two-way prices

Currency —

the monetary unit of a country or a group of countries

Vanilla of a product —

the standard basic version

Over-the-counter agreement —

an agreement concluded directly between two parties, without the mediation of an exchange

Волатильность —

величина «шума» или изменчивость процесса, точнее, коэффициент перед слагаемым с броуновским движением в записи случайного процесса

Дивиденды —

регулярные, но меняющиеся платежи по акции

Дисконтирование —

уменьшение будущего вознаграждения или стоимости которое отражает преимущество настоящего момента над более поздним

Дисконтная облигация —

облигация, по которой крупная сумма должна быть выплачена в некоторый момент в будущем, а до тех пор она стоит меньше своего номинала

Доходность —

средняя процентная ставка у данной облигации

Инструменты —

торгуемые ЦБ или контракты

Кванты —

контракты или производные инструменты с двумя валютами, которые производят платежи в другой валюте

Кривая доходности —

зависимость доходности облигации от ее срока до погашения

Купон —

периодическая выплата по облигации

Модель Блэка—Шоулса —

модель рынка акций, позволяющая получить точные формулы для оценки стоимости опциона

Облигации —

ценные бумаги, приносящие проценты и по которым полагаются регулярные процентные платежи и/или выплата солидной суммы при погашении

Volatility —

the amount of «noise» or a variability of a process, more precisely, the coefficient of the Brownian motion term of a stochastic process

Dividends —

regular but variable payments made by an equity

Discount —

scaling a future reward or cost down to reflect the importance of now over later

Discount bond —

a bond which promises to make a lump sum payment at a future date, but until then is worth less than its face value

Yield —

an average interest rate offered by a bond

Instruments —

tradable securities or contracts

Quantos —

cross-currency contracts, derivatives which pay off in another currency

Yield curve —

the graph of yield plotted against bond maturity

Coupon —

a periodic payment made by a bond

Black—Scholes —

a stock market model with an analytic option pricing formulas

Bonds —

interest bearing securities which can either make regular interest payments and/or a lump sum payment at maturity

Основная сумма —

номинал, который должен быть возвращен владельцу облигации при погашении

Паритет пут—колл —

наблюдение, состоящее в том, что разница стоимости опционов колл и пут с одной и той же ценой исполнения равна текущей стоимости форварда

Погашение —

момент времени, в который по облигации должен быть выплачен ее номинал или, более общим образом, дата оплаты обязательств по (любому) требованию

Позиция —

определенное количество какой-то ценной бумаги, которое принадлежит либо держателю, либо другому лицу

Полный рынок —

такой рынок, на котором любое требование можно защитить

Производный инструмент —

ценная бумага, чья стоимость зависит (определяется) существующими базовыми ЦБ рынка

Процентная ставка —

скорость оплаты процентов

Рынок —

место обмена ценовой информацией; обычно располагается в «электронном пространстве»

Рынок акций —

место, на котором торгуют акциями

Рынок процентных ставок —

рынок на котором определяется временная стоимость денег

Principal —

the face value that a bond will pay back at maturity

Put—call parity —

the observation that the worth of a call less the price of a put struck at the same price is the current worth of a forward

Maturity —

the time at which a bond will repay its principal or more generally the time at which any claim pays off

Position —

the amount of a security held, which can either be positive or negative

Complete market —

a market in which every claim is hedgable

Derivative —

a security whose value is dependent on (derived from) existing underlying market securities

Interest rate —

the rate at which interest is paid

Market —

a place for the exchanging of price information; commonly situated in electronic space

Stock market —

a place for trading stocks

Interest rate market —

the market which determines the time value of money

Своп —

соглашение по обмену последовательности фиксированных выплат на соответствующую последовательность выплат, зависящих от текущей процентной ставки, или наоборот

Свопцион —

опцион, дающий право вступить в соглашение по свопу в некоторый момент в будущем

Сертификат акции —

(в Англии) представляет произвольную акцию или ее частный случай (с выплатой дивидендов)

Стоимость сделки —

сумма при покупке или продаже ЦБ

Торгуемый актив —

актив, которым можно торговать либо напрямую, либо косвенно, торгуя эквивалентным ему портфелем

Указательный инструмент —

производный инструмент, по которому выплачивается фиксированная сумма, если определенное событие произойдет в будущем, и ничего в противном случае

Условное требование —

требование, размер выплаты по которому зависит от поведения некоторых ценных бумаг на рынке вплоть до момента его оплаты

Форвард —

соглашение на покупку или продажу чего-либо в некоторый момент в будущем по оговоренной цене, называемой форвардной ценой

Форвардная ставка —

форвардная цена мгновенного займа

Swaps —

an agreement to make a series of fixed payments over time and receive a corresponding series of payments dependent on current interest rates, or vice versa

Swaption —

an option to enter into a swap agreement at a future date

Share —

(in UK) a stock or equity

Transaction cost —

a charge for buying or selling a security

Tradable asset —

an asset, that can be traded either directly or indirectly by trading a matching portfolio

Digital security —

a derivative which pays off a fixed amount if a given future event happens, and nothing otherwise

Contingent claim —

a claim whose amount is determined by the behavior of market securities up until the time it is paid

Forward —

an agreement to buy or sell something at a future date for a set price, called the forward price

Forward rate —

the forward price of instantaneous borrowing

Форекс-рынок —

рынок, на котором одна валюта оценивается через другую

Фьючерс —

форвард, которым торгуют на бирже

Хеджировать —

защищать произвольную позицию от рисков, связанных с неблагоприятными движениями рынка

Ценная бумага —

лист бумаги с некоторым обещанием

Шум —

разговорное выражение для термина «волатильность»

Экзотические ЦБ —

новые производные ЦБ, которые быстро станут стандартными или исчезнут

LIBOR (the London Inter-Bank Offer Rate) —

ежедневный набор процентных ставок для различных валют и сроков погашения

Foreign exchange —

the market which prices one currency in terms of another

Future —

a forward traded on an exchange

Hedge —

to protect a position against the risk of market movements

Security —

a piece of paper representing a promise

Noise —

a loose term for volatility

Exotics —

new derivative security which will quickly become standard or will disappear

a daily set of interest rates for various currencies and maturities

Литература

- [1] *Abbey M., Corey M. J.* Oracle8: A Beginner's Guide. Berkeley, CA: Osborne/McGraw-Hill, 1997.
- [2] *Abken P. A.* An Empirical Evaluation of Value at Risk by Scenario Simulation // *J. Derivatives*. Vol. 7. No. 4. 2000. P. 12—29.
- [3] *Abken P. A., Shrikhande M. M.* The Role of Currency Derivatives in Internationally Diversified Portfolios // *Econom. Rev.* Vol. 82. No. 3. 1997. P. 34—59.
- [4] *Abrahams S. W.* The New View in Mortgage Prepayments: Insight from Analysis at the Loan-by-Loan Level // *J. Fixed Income*. Vol. 7. No. 1. 1997. P. 8—21.
- [5] *Abramowitz M., Stegun I. A., eds.* Handbook of Mathematical Functions. NY: Dover, 1972. [Имеется русский перевод: *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.)*. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.]
- [6] *Acworth P., Broadie M., Glasserman P.* A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Techniques for Option Pricing // *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods* / Ed. H. Niederreiter et al. NY: Springer, 1998.
- [7] *Adams K. J., Deventer D. R. van.* Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness // *J. Fixed Income*. Vol. 4. No. 1. 1994. P. 52—62.
- [8] *Ahn D.-H., Boudoukh J., Richardson M., Whitelaw R. F.* Optimal Risk Management Using Options // *J. Finance*. Vol. 54. No. 1. 1999. P. 359—375.
- [9] *Ahn D.-H., Figlewski S., Gao B.* Pricing Discrete Barrier Options with an Adaptive Mesh Model // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 4. 1999. P. 33—43.
- [10] *Aingworth D., Motwani R., Oldham J. D.* Accurate Approximations for Asian Options // *Proceedings of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [11] *Ait-Sahalia Y.* Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate // *Rev. Financial Stud.* Vol. 9. No. 2. 1996. P. 385—426.
- [12] *Allen A. O.* Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications. 2nd ed. NY: Academic, 1990.
- [13] *Alsop S.* E or Be Eaten // *Fortune*. 8 Nov 1999. P. 86—87.
- [14] *Amerman D. R.* Collateralized Mortgage Obligations. NY: McGraw-Hill, 1996.
- [15] *Ames W. F.* Numerical Methods for Partial Differential Equations. 3rd ed. NY: Academic, 1992.
- [16] *Amin K. I.* On the Computation of Continuous Time Option Pricing Using Discrete Approximations // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 26. No. 4. 1991. P. 477—495.
- [17] *Amin K. I., Bodurtha J. N., jr.* Discrete-Time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates // *Rev. Financial Stud.* Vol. 8. No. 1. 1995. P. 193—234.
- [18] *Amin K., Khanna A.* Convergence of American Option Values from Discrete to Continuous-Time Financial Models // *Math. Finance*. Vol. 4. No. 4. 1994. P. 289—304.
- [19] *Amin K. I., Morton A. J.* Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure

- Models // J. Financial Econom. Vol. 35. No. 2. 1994. P. 141—180.
- [20] *Andersen L., Boyle P. P.* Monte Carlo Methods for the Valuation of Interest Rate Securities // [516, ch. 13].
- [21] *Anderson K., Amero S.* Scenario Analysis and the Use of Options in Total Return Portfolio Management // [321, ch. 7].
- [22] *Anderson T. W.* The Statistical Analysis of Time Series. NY: Wiley, 1971. [Имеется русский перевод: *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.]
- [23] *Anderson T. W.* An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. 2nd ed. NY: Wiley, 1984. [Имеется русский перевод: *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.]
- [24] *Anderson T. E., Culler D. E., Patterson D. A., the NOW Team.* A Case for NOW (Networks of Workstations) // IEEE Micro. Vol. 15. No. 1. 1995. P. 54—64.
- [25] *Andreasen J.* The Pricing of Discretely Sampled Asian and Lookback Options: a Change of Numeraire Approach // J. Comp. Finance. Vol. 2. No. 1. 1998. P. 5—30.
- [26] *Andrews G. E.* The Theory of Partitions. Reading, MA: Addison-Wesley, 1976.
- [27] *Angel E., Bellman R.* Dynamic Programming and Partial Differential Equations. NY: Academic, 1972.
- [28] *Aoyama M.* Is MPT Applicable to Japan? // J. Portfolio Management. Vol. 21. No. 1. 1994. P. 103—111.
- [29] *Aristotle.* The Politics of Aristotle / Transl. E. Barker. London: Oxford Univ. Press, 1971.
- [30] *Arnold L.* Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. NY: Wiley, 1973.
- [31] *Arrow K. J., Hahn F. H.* General Competitive Analysis. San Francisco: Holden-Day, 1971.
- [32] *Artzner P., Delbaen F.* Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach // Adv. Appl. Math. Vol. 10. No. 1. 1989. P. 95—129.
- [33] *Asay M. R., Guillaume F.-H., Mattu R. K.* Duration and Convexity of Mortgage-Backed Securities: Some Hedging Implications from a Simple Prepayment-Linked Present-Value Model // [320, p. 103—125].
- [34] *Asness C.* OAS Models, Expected Returns, and a Steep Yield Curve // J. Portfolio Management. Vol. 19. No. 4. 1993. P. 85—93.
- [35] *Atkinson K. E.* An Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. NY: Wiley, 1989.
- [36] *Audley D., Chin R., Ramamurthy S., Volin S.* OAS and Effective Duration // [328, ch. 20].
- [37] *Baase S.* Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.
- [38] *Babbel D. F., Merrill C. B.* Valuation of Interest-Sensitive Financial Instruments. SOA Monograph M-FI96-1. Schaumburg, IL: The Society of Actuaries, 1996.
- [39] *Backus D., Foresi S., Mozumdar A., Wu L.* Predictable Changes in Yields and Forward Rates // J. Financial Econom. Vol. 59. No. 3. 2001. P. 281—311.
- [40] *Backus D., Foresi S., Telmer C.* Quantitative Models of Bond Pricing. Manuscript, 10 Sep 1996. www.stern.nyu.edu/~dbackus/bondnotes.htm.
- [41] *Backus D., Foresi S., Telmer C.* Discrete-Time Models of Bond Pricing // [516, ch. 4].
- [42] *Backus D., Foresi S., Zin S.* Arbitrage Opportunities in Arbitrage-Free Models of Bond Pricing // J. Bus. Econom. Statist. Vol. 16. No. 1. 1998. P. 13—26.
- [43] *Backus D. K., Gregory A. W., Zin S. E.* Risk Premiums in the Term Structure: Evidence from Artificial Economies // J. Monetary Econom. Vol. 24. No. 3. 1989. P. 371—399.
- [44] *Bakshi G., Cao C., Chen Z.* Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models // J. Finance. Vol. 52. No. 5. 1997. P. 2003—2049.
- [45] *Bakshi G., Cao C., Chen Z.* Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction? // Rev. Financial Stud. Vol. 13. No. 3. 2000. P. 549—584.

- [46] *Balduzzi P., Das S. R., Foresi S., Sundaram R. A.* Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 3. 1996. P. 43—53.
- [47] *Bali T. G.* Testing the Empirical Performance of Stochastic Volatility Models of the Short-Term Interest Rate // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 35. No. 2. 2000. P. 191—215.
- [48] *Ball C. A.* Estimation Bias Induced by Discrete Security Prices // *J. Finance*. Vol. 43. No. 4. 1988. P. 841—865.
- [49] *Ball C. A., Roma A.* Stochastic Volatility Option Pricing // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 29. No. 4. 1994. P. 589—607.
- [50] *Ball C. A., Torous W. N.* Bond Price Dynamics and Options // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 18. No. 4. 1983. P. 517—531.
- [51] *Bank for International Settlements.* Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity. Basel, Switzerland: Monetary and Economic Department, Bank for International Settlements, May 1999.
- [52] *Barber J. R., Copper M. L.* Is Bond Convexity a Free Lunch? // *J. Portfolio Management*. Vol. 24. No. 1. 1997. P. 113—119.
- [53] *Barraquand J., Pudet T.* Pricing of American Path-Dependent Contingent Claims // *Math. Finance*. Vol. 6. No. 1. 1996. P. 17—51.
- [54] *Bartlett W. W.* Mortgage-Backed Securities. NY: New York Inst. of Finance, 1989.
- [55] *Bartlett W. W.* The Valuation of Mortgage-Backed Securities. Burr Ridge, IL: Irwin, 1994.
- [56] *Battig R. J., Jarrow R. A.* The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing: A New Approach // *Rev. Financial Stud.* Vol. 12. No. 5. 1999. P. 1219—1235.
- [57] *Baumohl B.* The Banks' Nuclear Secrets // *Time*. 25 May 1998.
- [58] *Baxter M.* General Interest-Rate Models and the Universality of HJM // *Mathematics of Derivative Securities* / Ed. M. Dempster, S. Pliska. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [59] *Baxter M., Rennie A.* Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [60] *Beckett S.* Are Derivatives Too Risky for Banks? // *Econom. Rev.* Vol. 78. No. 3. 1993. P. 27—42.
- [61] *Beder T. S.* VAR: Seductive but Dangerous // *Financial Analysts J.* Vol. 51. No. 5. 1995. P. 12—24.
- [62] *Benninga S.* Numerical Techniques in Finance. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.
- [63] *Berners-Lee T.* WWW: Past, Present, and Future // *Computer*. Vol. 29. No. 10. 1996. P. 69—77.
- [64] *Bernstein P. L.* Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street. NY: Free Press, 1992.
- [65] *Bernstein P. L.* Against the Gods: The Remarkable Story of Risk. NY: Wiley, 1996.
- [66] *Bertsekas D. P.* Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [67] *Bertsekas D. P., Tsitsiklis J. N.* Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [68] *Bhagavatula R. S., Carr P. P.* Valuing Double Barrier Options with Fourier Series. Manuscript, 12 Sep 1997.
- [69] *Bhidé A.* Return to Judgment // *J. Portfolio Management*. Vol. 20. No. 2. 1994. P. 19—25.
- [70] *Bick A., Willinger W.* Dynamic Programming without Probabilities // *Stochast. Process. Appl.* Vol. 50. No. 2. 1994. P. 349—374.
- [71] *Bierwag G. O.* Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 12. No. 5. 1977. P. 725—742.
- [72] *Bierwag G. O.* The Ho—Lee Binomial Stochastic Process and Duration // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 2. 1996. P. 76—87.
- [73] *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. NY: Wiley, 1968. [Имеется русский перевод: *Биллингслей П.*

- Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.]
- [74] *Bjerksund P., Stensland G.* Implementation of the Black—Derman—Toy Interest Rate Model // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 2. 1996. P. 67—75.
 - [75] *Björck Å.* Numerical Methods for Least Squares Problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
 - [76] *Björck T.* Interest Rate Theory // *Financial Mathematics* / Ed. W. Runggaldier. (Lecture Notes in Mathematics; 1676). Berlin: Springer, 1997.
 - [77] *Björck T., Christensen B. J.* Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves. Working paper 209. Stockholm School of Economics. Nov 1997.
 - [78] *Björck T., Di Masi G., Kabanov Y., Runggaldier W.* Towards a General Theory of Bond Markets // *Finance Stochast.* Vol. 1. No. 2. 1997. P. 141—174.
 - [79] *Black F.* The Pricing of Commodity Contracts // *J. Financial Econom.* Vol. 3. No. 1/2. 1976. P. 167—179.
 - [80] *Black F.* Living Up to the Model // [744, ch. 1].
 - [81] *Black F.* Estimating Expected Return // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 5. 1993. P. 36—38.
 - [82] *Black F.* Beta and Return // *J. Portfolio Management*. Vol. 20. No. 1. 1993. P. 8—11.
 - [83] *Black F.* Interest Rates as Options // *J. Finance*. Vol. 50. No. 5. 1995. P. 1371—1376.
 - [84] *Black F., Derman E., Toy W.* A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options // *Financial Analysts J.* Vol. 46. No. 1. 1990. P. 33—39.
 - [85] *Black F., Karasinski P.* Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal // *Financial Analysts J.* Vol. 47. No. 4. 1991. P. 52—59.
 - [86] *Black F., Scholes M.* The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency // *J. Finance*. Vol. 27. No. 2. 1972. P. 399—418.
 - [87] *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *J. Political Economy*. Vol. 81. No. 3. 1973. P. 637—654.
 - [88] *Blake D.* Financial Market Analysis. NY: McGraw-Hill, 1990.
 - [89] *Blake D., Orszag J. M.* A Closed-Form Formula for Calculating Bond Convexity // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 1. 1996. P. 88—91.
 - [90] *Bliss R. R.* Testing Term Structure Estimation Methods // *Adv. Futures Options Res.* Vol. 9. 1997. P. 197—231.
 - [91] *Bliss R. R.* Movements in the Term Structure of Interest Rates // *Econom. Rev.* Vol. 82. No. 4. 1997. P. 16—33.
 - [92] *Bliss R. R., Ritchken P.* Empirical Tests of Two State-Variable Heath—Jarrow—Morton Models // *J. Money Credit Bank.* Vol. 28. No. 3, part 2. 1996. P. 452—476.
 - [93] *Bliss R., Smith D.* The Elasticity of Interest Rate Volatility—Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders Revisited // *J. Risk*. Vol. 1. No. 1. 1998. P. 21—46.
 - [94] *Blyth S., Uglum J.* Rates of Skew // *Risk*. Vol. 12. No. 7. 1999. P. 61—63.
 - [95] *Board of Trade of the City of Chicago.* Commodity Trading Manual. Chicago: Chicago Board of Trade, 1994.
 - [96] *Bodie Z., Kane A., Marcus A. J.* Investments. 4th ed. NY: McGraw-Hill, 1999.
 - [97] *Bodurtha J. N., jr., Courtadon G. R.* Tests of an American Option Pricing Model on the Foreign Currency Options Market // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 22. No. 2. 1987. P. 153—167.
 - [98] *Bogle J. C.* Bogle on Mutual Funds. NY: Dell, 1994.
 - [99] *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *J. Econometrics*. Vol. 31. No. 3. 1986. P. 307—327.
 - [100] *Bollobás B.* Random Graphs. NY: Academic, 1985.
 - [101] *Booch G.* Object Oriented Design with Applications. Redwood City, CA: Benjamin/Cummings, 1991.
 - [102] *Borodin A., El-Yaniv R.* Online Computation and Competitive Analysis. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1998.
 - [103] *Borodin A., Munro I.* The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems. NY: American Elsevier, 1975.

- [104] *Borodin A. N., Salminen P.* Handbook of Brownian Motion—Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 1996.
- [105] *Bouaziz L., Briys E., Crouhy M.* The Pricing of Forward-Starting Asian Options // *J. Bank. Finance*. Vol. 18. No. 5. 1994. P. 823—839.
- [106] *Boyle P. P.* Options: A Monte Carlo Approach // *J. Financial Econom.* Vol. 4. No. 3. 1977. P. 323—338.
- [107] *Boyle P. P.* A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 23. No. 1. 1988. P. 1—12.
- [108] *Boyle P. P., Broadie M., Glasserman P.* Monte Carlo Methods for Security Pricing // *J. Econom. Dynam. Control*. Vol. 21. No. 8. 1997. P. 1267—1321.
- [109] *Boyle P. P., Emanuel D.* Discretely Adjusted Option Hedges // *J. Financial Econom.* Vol. 8. No. 3. 1980. P. 259—282.
- [110] *Boyle P., Evnine J., Gibbs S.* Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims // *Rev. Financial Stud.* Vol. 2. No. 2. 1989. P. 241—250.
- [111] *Boyle P., Lau S. H.* Bumping Up against the Barrier with the Binomial Method // *J. Derivatives*. Vol. 1. No. 4. 1994. P. 6—14.
- [112] *Boyle P., Tan K. S.* Lure of the Linear // *Over the Rainbow* / Ed. R. Jarrow. London: Risk Publications, 1995.
- [113] *Boyle P., Tian Y.* Pricing Lookback and Barrier Options under the CEV Process // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 34. No. 2. 1999. P. 241—264.
- [114] *Boyle P., Tse Y. K.* An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 25. No. 2. 1990. P. 215—227.
- [115] *Boyle P., Vorst T.* Option Replication in Discrete Time with Transaction Cost // *J. Finance*. Vol. 47. No. 1. 1992. P. 271—293.
- [116] *Brace A., Gątarek D., Musiela M.* The Market Model of Interest Rate Dynamics // *Math. Finance*. Vol. 7. No. 2. 1997. P. 127—155.
- [117] *Brauer J. S., Goodman L. S.* Hedging with Options and Option Products // [321, ch. 9].
- [118] *Brazil A. J.* Citicorp's Mortgage Valuation Model Option-Adjusted Spreads and Option-Based Durations // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 1. No. 2. 1988. P. 151—162.
- [119] *Brennan M. J.* The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models // *J. Finance*. Vol. 34. No. 1. 1979. P. 53—68.
- [120] *Brennan M. J., Schwartz E. S.* Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion // *J. Finance*. Vol. 32. No. 5. 1977. P. 1699—1715.
- [121] *Brennan M. J., Schwartz E. S.* A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds // *J. Bank. Finance*. Vol. 3. No. 2. 1979. P. 133—155.
- [122] *Brennan M. J., Schwartz E. S.* Analyzing Convertible Bonds // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 15. No. 4. 1980. P. 907—929.
- [123] *Brennan M. J., Schwartz E. S.* An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 17. No. 3. 1982. P. 301—329.
- [124] *Brennan M. J., Schwartz E. S.* Determinants of GNMA Mortgage Prices // *J. Amer. Real Estate Urban Econom. Assoc.* Vol. 13. No. 3. 1985. P. 209—228.
- [125] *Brenner M., Courtadon G., Subrahmanyam M.* Options on the Spot and Options on Futures // *J. Finance*. Vol. 40. No. 5. 1985. P. 1303—1317.
- [126] *Brenner R. J., Harjes R. H., Kroner K. F.* Another Look at Models of the Short-Term Interest Rate // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 31. No. 1. 1996. P. 85—107.
- [127] *Broadie M., Detemple J.* American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods // *Rev. Financial Stud.* Vol. 9. No. 4. 1996. P. 1211—1250.
- [128] *Broadie M., Glasserman P.* Estimating Security Price Derivatives Using Simulation // *Management Sci.* Vol. 42. No. 2. 1996. P. 269—285.
- [129] *Broadie M., Glasserman P.* Pricing American-Style Securities Using Simulation // *J. Econom. Dynam. Control*. Vol. 21. No. 8—9. 1997. P. 1323—1352.

- [130] *Broadie M., Glasserman P., Jain G.* Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 1. 1997. P. 25—44.
- [131] *Broadie M., Glasserman P., Kou S. A.* Continuity Correction for Discrete Barrier Options // *Math. Finance*. Vol. 7. No. 4. 1997. P. 325—349.
- [132] *Brocato J., Chandy P. R.* Does Market Timing Really Work in the Real World? // *J. Portfolio Management*. Vol. 20. No. 2. 1994. P. 39—44.
- [133] *Brooks R., Yan D. Y.* London Inter-Bank Offer Rate (LIBOR) versus Treasury Rate: Evidence from the Parsimonious Term Structure Model // *J. Fixed Income*. Vol. 9. No. 1. 1999. P. 71—83.
- [134] *Brown D. T.* The Determinants of Expected Returns on Mortgage-Backed Securities: An Empirical Analysis of Option-Adjusted Spreads // *J. Fixed Income*. Vol. 9. No. 2. 1999. P. 8—18.
- [135] *Brown R. H., Schaefer S. M.* The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll, and Ross Model // *J. Financial Econom.* Vol. 35. No. 1. 1994. P. 3—42.
- [136] *Brown R. H., Schaefer S. M.* Interest Rate Volatility and the Shape of the Term Structure // *Philos. Trans. Royal Soc. London A*. Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 563—576.
- [137] *Brown R. H., Schaefer S. M.* Ten Years of the Real Term Structure: 1984—1994 // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 4. 1996. P. 6—22.
- [138] *Brown S. J., Dybvig P. H.* The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates // *J. Finance*. Vol. 41. No. 3. 1986. P. 617—632.
- [139] *Bühler W., Uhrig-Homburg M., Walter U., Weber T.* An Empirical Comparison of Forward-Rate and Spot-Rate Models for Valuing Interest-Rate Options // *J. Finance*. Vol. 54. No. 1. 1999. P. 269—305.
- [140] *Business Week.* Special 1994 Bonus Issue: the Information Revolution. *Business Week*, 1994.
- [141] *Bykhovsky M., Hayre L.* Anatomy of PAC Bonds // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 1. 1992. P. 44—50.
- [142] *Caflisch R. E., Morokoff W.* Valuation of Mortgage Backed Securities Using the Quasi-Monte Carlo Method. Report 96-23. Department of Mathematics. Univ. of California. Los Angeles. California. 1996.
- [143] *Campbell J. Y.* A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates // *J. Finance*. Vol. 41. No. 1. 1986. P. 183—193.
- [144] *Campbell J. Y.* Some Lessons from the Yield Curve // *J. Econom. Perspect.* Vol. 9. No. 3. 1995. P. 129—152.
- [145] *Campbell J. Y.* Understanding Risk and Return // *J. Political Economy*. Vol. 104. No. 2. 1996. P. 298—345.
- [146] *Campbell J. Y., Ammer J.* What Moves the Stock and Bond Markets? A Variance Decomposition for Long-Term Asset Returns // *J. Finance*. Vol. 48. No. 1. 1993. P. 3—37.
- [147] *Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C.* The Econometrics of Financial Markets. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1997.
- [148] *Campbell J. Y., Shiller R. J.* Stock Prices, Earnings and Expected Dividends // *J. Finance*. Vol. 43. No. 3. 1988. P. 661—676.
- [149] *Canabarro E.* Where Do One-Factor Interest Rate Models Fail? // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 31—52.
- [150] *Canina L., Figlewski S.* The Informational Content of Implied Volatility // *Rev. Financial Stud.* Vol. 6. No. 3. 1993. P. 659—681.
- [151] *Cao H. H.* The Effect of Derivative Assets on Information Acquisition and Price Behavior in a Rational Expectations Equilibrium // *Rev. Financial Stud.* Vol. 12. No. 1. 1999. P. 131—163.
- [152] *Carayannopoulos P.* The Mispricing of U. S. Treasury Callable Bonds // *J. Futures Markets*. Vol. 15. No. 8. 1995. P. 861—879.
- [153] *Carleton W., Cooper I.* Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates // *J. Finance*. Vol. 31. No. 4. 1976. P. 1067—1083.

- [154] Carr P. Randomization and the American Put // *Rev. Financial Stud.* Vol. 11. No. 3. 1998. P. 597—626.
- [155] Carr P., Chen R.-R., Scott L. O. Valuing the Timing Option and the Quality Option in Treasury Bond Futures Contracts. Manuscript, Jan 1996. www.rci.rutgers.edu/~rchen/papers.html.
- [156] Carr P., Chesney M. American Put Call Symmetry. Working Paper. Morgan Stanley. NY. Nov 1996.
- [157] Carr P., Chou A. Breaking Barriers: Static Hedging of Barrier Securities // *Risk*. Sep 1997. P. 139—145.
- [158] Carr P., Chou A. Hedging Complex Barrier Options. Working Paper. Morgan Stanley. NY. 1997.
- [159] Carr P., Ellis K., Gupta V. Static Hedging of Exotic Options // *J. Finance*. Vol. 53. No. 3. 1998. P. 1165—1190.
- [160] Carr P., Yang G. Simulating American Bond Options in an HJM Framework. Working Paper. Morgan Stanley. NY. Dec 1996.
- [161] Carron A. S. Understanding CMOs, REMICs, and Other Mortgage Derivatives // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 1. 1992. P. 25—43.
- [162] Carron A. S. Collateralized Mortgage Obligations // [328, ch. 25].
- [163] Carverhill A. When Is the Short Rate Markovian? // *Math. Finance*. Vol. 4. No. 4. 1994. P. 305—312.
- [164] Carverhill A. A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 89—96.
- [165] Carverhill A. A Simplified Exposition of the Heath, Jarrow and Morton Model // *Stochast. Stochast. Rep.* Vol. 53. No. 3+4. 1995. P. 227—240.
- [166] Carverhill A., Pang K. Efficient and Flexible Bond Option Valuation in the Heath, Jarrow, Morton Framework // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 70—77.
- [167] Castro E. HTML for the World Wide Web. Berkeley, CA: Peachpit Press, 1998.
- [168] Chalasani P., Jha S., Egriboyun F., Varikooty A. A Refined Binomial Lattice for Pricing American Asian Options // *Rev. Derivatives Res.* Vol. 3. No. 1. 1999. P. 85—105.
- [169] Chalasani P., Jha S., Saias I. Approximate Option Pricing // *Algorithmica*. Vol. 25. No. 1. 1999. P. 2—21.
- [170] Chalasani P., Jha S., Varikooty A. Accurate Approximations for European Asian Options // *J. Comp. Finance*. Vol. 1. No. 4. 1999. P. 11—29.
- [171] Chambers D. R., Carleton W. T., Waldman D. W. A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 19. No. 3. 1984. P. 233—252.
- [172] Chan G. W.-T. Theory and Practice of Option Pricing in Taiwan. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1998.
- [173] Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. B. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate // *J. Finance*. Vol. 47. No. 3. 1992. P. 1209—1227.
- [174] Chan L. K. C., Lakonishok J. Are the Reports of Beta's Death Premature? // *J. Portfolio Management*. Vol. 19. No. 4. 1993. P. 51—62.
- [175] Chance D. M., Rich D. The Pricing of Equity Swaps and Swaptions // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 4. 1998. P. 19—31.
- [176] Chang C. W., Chang J. S. K. Forward and Futures Prices: Evidence from the Foreign Exchange Markets // *J. Finance*. Vol. 45. No. 4. 1990. P. 1333—1336.
- [177] Chang C. W., Chang J. S. K., Lim K.-G. Information-Time Option Pricing: Theory and Empirical Evidence // *J. Financial Econom.* Vol. 48. No. 2. 1998. P. 211—243.
- [178] Chapman D., Heaton J. SAMS Teach Yourself Visual C++ 6 in 21 Days. Indianapolis, IN: SAMS, 1999.
- [179] Chao K.-Y. Combinatorial Methods for Double-Barrier Option Pricing. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1999.
- [180] Chelo N. R. Can Volatility Be Your Friend? // *J. Indexes*. No. 4. 2000. P. 22—25.

- [181] *Chen G.-H., Kao M.-Y., Lyuu Y.-D., Wong H.-K.* Optimal Buy-and-Hold Strategies for Financial Markets with Bounded Daily Returns // Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. NY: ACM Press, 1999. P. 119—128.
- [182] *Chen J. B., Endo Y., Chan K., Mazières D., Dias A., Seltzer M., Smith M. D.* The Measured Performance of Personal Computer Operating Systems // ACM Trans. Comput. Systems. Vol. 14. No. 1. 1996. P. 3—40.
- [183] *Chen R.-R.* Understanding and Managing Interest Rate Risks. Singapore: World Scientific, 1996.
- [184] *Chen R.-R., Scott L.* Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox—Ingersoll—Ross Model of the Term Structure // Rev. Financial Stud. Vol. 4. No. 4. 1992. P. 613—636.
- [185] *Chen R.-R., Scott L.* Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates // J. Fixed Income. Vol. 3. No. 3. 1993. P. 14—31.
- [186] *Chen R.-R., Scott L.* Interest Rate Options in Multifactor Cox—Ingersoll—Ross Models of the Term Structure // J. Derivatives. Vol. 3. No. 2. 1995. P. 53—72.
- [187] *Chen R.-R., Yang T. T.* A Universal Lattice // Rev. Derivatives Res. Vol. 3. No. 2. 1999. P. 115—133.
- [188] *Chen S.* Understanding Option-Adjusted Spreads: The Implied Prepayment Hypothesis // J. Portfolio Management. Vol. 22. No. 4. 1996. P. 104—113.
- [189] *Chen W.-J.* Calibrating Interest Rate Models with Differential Tree Algorithms: The Case of Black—Derman—Toy Model. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1997.
- [190] *Chen W.-J., Lyuu Y.-D.* Calibrating Interest Rate Models with Differential Tree Algorithms: The Case of the Black—Derman—Toy Model // Proceedings of the 1997 National Computer Symposium (NCS'97). Tung-Hai Univ. Taiwan. Dec 1997. P. A19—A24.
- [191] *Chen Y.-W.* Towards Creating Taiwan's Put Market. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1999.
- [192] *Cheng C.-J.* On Hull—White Models: One and Two Factors. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1998.
- [193] *Cheng S. T.* On the Feasibility of Arbitrage-Based Option Pricing When Stochastic Bond Price Processes Are Involved // J. Econom. Theory. Vol. 5. No. 1. 1991. P. 185—198.
- [194] *Cherian J. A., Jarrow R. A.* Options Markets, Self-Fulfilling Prophecies, and Implied Volatilities // Rev. Derivatives Res. Vol. 2. No. 1. 1998. P. 5—37.
- [195] *Chernoff H., Moses L. E.* Elementary Decision Theory. NY: Dover, 1986.
- [196] *Cheuk T. H. F., Vorst T. C. F.* Complex Barrier Options // J. Derivatives. Vol. 4. No. 1. 1996. P. 8—22.
- [197] *Cheyette O.* Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation // J. Fixed Income. Vol. 1. No. 4. 1992. P. 28—41.
- [198] *Cheyette O.* OAS Analysis for CMOs // J. Portfolio Management. Vol. 20. No. 4. 1994. P. 53—66.
- [199] *Cheyette O., Choi S., Blanter E.* The New BARRA Fixed Rate Prepayment Model. BARRA, Spring 1996.
- [200] *Chien A. et al.* High Performance Virtual Machines (HPVM): Clusters with Supercomputing APIs and Performance // Proceedings of the 8th SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, Mar 1997.
- [201] *Cho D. C., Frees E. W.* Estimating the Volatility of Discrete Stock Prices // J. Finance. Vol. 43. No. 2. 1988. P. 451—466.
- [202] *Cho H. Y., Lee K. W.* An Extension of the Three-Jump Process Model for Contingent Claim Valuation // J. Derivatives. Vol. 3. No. 1. 1995. P. 102—108.
- [203] *Choi S., Schumacher M.* GNMA II 30-Year Pass-Through MBS Prepayment

- Analysis // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 4. 1997. P. 99—104.
- [204] *Chopra V. K., Ziemba W. T.* The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice // *J. Portfolio Management*. Vol. 19. No. 2. 1993. P. 6—11.
- [205] *Chow Y. S., Robbins H., Siegmund D.* Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Boston: Houghton Mifflin, 1971.
- [206] *Christensen P. E., Fabozzi F. J., LoFaso A.* Bond Immunization: An Asset/Liability Optimization Strategy // [328, ch. 42].
- [207] *Christensen P. O., Sørensen B. G.* Duration, Convexity, and Time Value // *J. Portfolio Management*. Vol. 20. No. 2. 1994. P. 51—60.
- [208] *Christie A. A.* The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects // *J. Financial Econom.* Vol. 10. No. 4. 1982. P. 407—432.
- [209] *Chua J.* A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration // *Financial Analysts J.* Vol. 40. No. 3. 1984. P. 76—78.
- [210] *Chung K. L.* A Course in Probability Theory. 2nd ed. NY: Academic, 1974. [Имеется русский перевод: Чжун К. Л., АумСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.]
- [211] *Chung K. L., Williams R. J.* Introduction to Stochastic Integration. Boston: Birkhäuser, 1983.
- [212] *Churchill R. V.* Fourier Series and Boundary Value Problems. 2nd ed. NY: McGraw-Hill, 1963.
- [213] *Chvátal V.* Linear Programming. NY: Freeman, 1983.
- [214] *Clewlow L., Carverhill A.* On the Simulation of Contingent Claims // *J. Derivatives*. Vol. 2. No. 2. 1994. P. 66—74.
- [215] *Clewlow L., Strickland C.* Implementing Derivatives Models. Chichester, U. K.: Wiley, 1998.
- [216] *Codd E. F.* A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // *Comm. ACM*. Vol. 13. No. 6. 1970. P. 377—397.
- [217] *Cohen J. B., Zinbarg E. D., Zeikel A.* Investment Analysis and Portfolio Management. 4th ed. Burr Ridge, IL: Irwin, 1982.
- [218] *Cohler G., Feldman M., Lancaster B.* Price of Risk Constant (PORC): Going beyond OAS // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 4. 1997. P. 6—15.
- [219] *Coleman T. S., Fisher L., Ibbotson R. G.* Estimating the Term Structure of Interest Rates from Data That Include the Prices of Coupon Bonds // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 2. 1992. P. 85—116.
- [220] *Collin-Dufresne P., Harding J. P.* A Closed Form Formula for Valuing Mortgages // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 19. No. 2. 1999. P. 133—146.
- [221] *Connolly K. B.* Pricing Convertible Bonds. NY: Wiley, 1998.
- [222] *Connor G.* Hedging // [307, p. 164—171].
- [223] *Constantinides G. M.* A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates // *Rev. Financial Stud.* Vol. 5. No. 4. 1992. P. 531—552.
- [224] *Conte S. D., BoorC. de.* Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. 3rd ed. NY: McGraw-Hill, 1980.
- [225] *Conze A., Viswanathan.* Path Dependent Options: the Case of Lookback Options // *J. Finance*. Vol. 46. No. 5. 1991. P. 1893—1907.
- [226] *Coopers & Lybrand.* Interest Rate Swap. Burr Ridge, IL: Irwin, 1992.
- [227] *Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L.* Introduction to Algorithms. Cambridge, MA: MIT Press, 1992. [Имеется русский перевод: Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.]
- [228] *Corrado C. J., Su T.* Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices // *J. Derivatives*. Vol. 4. No. 4. 1997. P. 8—19.
- [229] *Courtadon G.* An Introduction to Numerical Methods in Option Pricing // [346, ch. 14].

- [230] Cox D. R., Miller H. D. The Theory of Stochastic Processes. London: Chapman & Hall, 1995.
- [231] Cox J. C., Ingersoll J. E., jr., Ross S. A. Duration and the Measurement of Basis Risk // J. Business. Vol. 52. No. 1. 1979. P. 51—61.
- [232] Cox J. C., Ingersoll J. E., jr., Ross S. A. A Re-Examination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates // J. Finance. Vol. 36. No. 4. 1981. P. 769—799.
- [233] Cox J. C., Ingersoll J. E., jr., Ross S. A. The Relationship between Forward Prices and Futures Prices // J. Financial Econom. Vol. 9. No. 4. 1981. P. 321—346.
- [234] Cox J. C., Ingersoll J. E., jr., Ross S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. Vol. 53. No. 2. 1985. P. 385—407.
- [235] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option Pricing: a Simplified Approach // J. Financial Econom. Vol. 7. No. 3. 1979. P. 229—263.
- [236] Cox J. C., Rubinstein M. Options Markets. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [237] Crabbe L. E., Argilagos J. D. Anatomy of the Structured Note Market // J. Appl. Corp. Finance. Vol. 7. No. 3. 1994. P. 85—98.
- [238] Crabbe L. E., Nikoulis P. The Putable Bond Market: Structure, Historical Experience, and Strategies // J. Fixed Income. Vol. 7. No. 3. 1997. P. 47—60.
- [239] Crack T. F., Nawalkha S. K. Interest Rate Sensitivities of Bond Risk Measures // Financial Analysts J. Vol. 56. No. 1. 2000. P. 34—43.
- [240] Crownover R. M. Introduction to Fractals and Chaos. Boston: Jones & Bartlett, 1995.
- [241] Curran M. Valuing Asian and Portfolio Options by Conditioning on the Geometric Mean Price // Management Sci. Vol. 40. No. 12. 1994. P. 1705—1711.
- [242] Curran M. Accelerating American Option Pricing in Lattices // J. Derivatives. Vol. 3. No. 2. 1995. P. 8—18.
- [243] Cutland N. J., Kopp E., Willinger W. From Discrete to Continuous Financial Models: New Convergence Results for Option Pricing // Math. Finance. Vol. 3. No. 2. 1993. P. 101—123.
- [244] Dahl F. The Random House Personal Investment Calculator. NY: Random House, 1990.
- [245] Dahl H. A Flexible Approach to Interest-Rate Risk Management // [891, ch. 8].
- [246] Dahl H., Meeraus A., Zenios S. A. Some Financial Optimization Models: I Risk Management // [891, ch. 1].
- [247] Dahl H., Meeraus A., Zenios S. A. Some Financial Optimization Models: II Financial Engineering // [891, ch. 2].
- [248] Dahlquist M. et al. On Alternative Interest Rate Processes // J. Bank. Finance. Vol. 20. No. 6. 1996. P. 1093—1119.
- [249] Dai T.-S. Pricing Path-Dependent Derivatives. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1999.
- [250] Dai T.-S., Huang G.-S., Lyuu Y.-D. Accurate Approximation Algorithms for Asian Options. Manuscript, May 2001.
- [251] Dai T.-S., Lyuu Y.-D. Efficient Algorithms for Average-Rate Option Pricing // Proceedings of the 1999 National Computer Symposium (NCS'99). Tamkang Univ. Taiwan. Dec 1999. P. A359—A366.
- [252] Dai T.-S., Lyuu Y.-D. Efficient, Exact Algorithms for Asian Options with Multiresolution Lattices. Manuscript, Jan 2001.
- [253] Das S. R. Credit Risk Derivatives // J. Derivatives. Vol. 2. No. 3. 1995. P. 7—23.
- [254] Das S. R., Sundaram R. K. A Discrete-Time Approach to Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives // Management Sci. Vol. 46. No. 1. 2000. P. 46—62.
- [255] Das S. R., Sundaram R. K. Of Smiles and Smirks: A Term Structure Perspective // J. Financial Quant. Anal. Vol. 34. No. 2. 1999. P. 211—239.
- [256] Dattatreya R. E., Fabozzi F. J. A Simplified Model for the Valuation of Debt Options // [321, ch. 4].
- [257] Daves P. R., Ehrhardt M. C. Joint Cross-Section/Time-Series Maximum Likelihood Estimation for the Parameters of

- the Cox—Ingersoll—Ross Bond Pricing Model // *Financial Rev.* Vol. 28. No. 2. 1993. P. 203—237.
- [258] Davidson A. S. Overview of Alternative Duration Measures for Mortgage-Backed Securities // [320, p. 67—79].
- [259] Davidson A. S., Herskovitz M. D. Analyzing MBS: A Comparison of Methods for Analyzing Mortgage-Backed Securities // [322, p. 305—328].
- [260] Davidson A. S., Herskovitz M. D. Mortgage-Backed Securities: Investment Analysis & Advanced Valuation Techniques. Chicago: Probus, 1994.
- [261] Davidson J. Stochastic Limit Theory: An Introduction for Econometricians. London: Oxford Univ. Press, 1994.
- [262] Davis M. H. A., Clark J. M. C. A Note on Super-Replicating Strategies // *Philos. Trans. Royal Soc. London A.* Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 485—494.
- [263] DBMS. Special Report: Parallel Database Special // *DBMS.* Vol. 8. No. 3. 1995. P. A—X.
- [264] Deitel H. M., Deitel P. J. Java How To Program: With an Introduction to Visual J++. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997. [Имеется русский перевод: Дейтел Х. М., Дейтел П. Дж. Как программировать на Java. М.: Бинوم-Пресс, 2003.]
- [265] Deitel H. M., Deitel P. J. C++ How To Program. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998. [Имеется русский перевод: Дейтел Х. М., Дейтел П. Дж. Как программировать на C++. М.: Бинوم-Пресс, 2006.]
- [266] Delbaen F. Consols in the CIR Model // *Math. Finance.* Vol. 3. No. 2. 1993. P. 125—134.
- [267] Dembo R. S. Scenario Immunization // [891, ch. 12].
- [268] Deng Y. Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 14. No. 3. 1997. P. 309—331.
- [269] Derman E., Kani I. Riding on a Smile // *Risk.* Vol. 7. No. 2. 1994. P. 32—39.
- [270] Derman E., Ergener D., Kani I. Static Options Replication // *J. Derivatives.* Vol. 2. No. 4. 1995. P. 78—95.
- [271] Derman E., Kani I., Ergener D., Bardhan I. Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers // *Financial Analysts J.* Vol. 51. No. 6. 1995. P. 65—74.
- [272] DeRosa P., Goodman L., Zazzarino M. Duration Estimates on Mortgage-Backed Securities // *J. Portfolio Management.* Vol. 19. No. 2. 1993. P. 32—38.
- [273] Devore J. L. Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Monterey, CA: Brooks/Cole, 1987.
- [274] Dewynne J. N., Whalley A. E., Wilmott P. Path-Dependent Options and Transaction Costs // *Philos. Trans. Royal Soc. London A.* Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 517—529.
- [275] Dezhbakhsh H. Foreign Exchange Forward and Futures Prices: Are They Equal? // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 29. No. 1. 1994. P. 75—87.
- [276] Dharan V. G. Pricing Path-Dependent Interest Rate Contingent Claims Using a Lattice // *J. Fixed Income.* Vol. 6. No. 4. 1997. P. 40—49.
- [277] Dimand R. W. The Case of Brownian Motion: A Note on Bachelier's Contribution // *British J. Hist. Sci.* Vol. 26, part 2. No. 89. 1993. P. 233—234.
- [278] Dixit A. K. Optimization in Economic Theory. 2nd ed. Oxford, U. K.: Oxford Univ. Press, 1995.
- [279] Dixit A. K., Pindyck R. S. The Options Approach to Capital Investment // *Harvard Business Rev.* Vol. 73. No. 3. 1995. P. 105—115.
- [280] Doob J. L. Stochastic Processes. NY: Wiley, 1953. [Имеется русский перевод: Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.]
- [281] Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M. Linear Programming and Economic Analysis. NY: Dover, 1987.
- [282] Dothan M. On the Term Structure of Interest Rates // *J. Financial Econom.* Vol. 6. No. 1. 1978. P. 59—69.
- [283] Dowd K. A Value at Risk Approach to Risk-Return Analysis // *J. Portfolio*

- lio Management. Vol. 25. No. 4. 1999. P. 60—67.
- [284] *Downes J., Goodman J. E.* Dictionary of Finance and Investment Terms. Hauppauge, NY: Barron's, 1987.
- [285] *Draw C.-S.* Path-Dependent Option Pricing. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 2000.
- [286] *Duan J.-C.* The GARCH Option Pricing Model // *Math. Finance*. Vol. 5. No. 1. 1995. P. 13—32.
- [287] *Duan J.-C.* A Unified Theory of Option Pricing under Stochastic Volatility—from GARCH to Diffusion. Manuscript, Oct 1996. www.bm.ust.hk/~joduan/opm_sv.pdf.
- [288] *Duan J.-C., Gauthier G., Simonato J.-G.* An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model // *J. Comp. Finance*. Vol. 2. No. 4. 1999. P. 75—116.
- [289] *Duffie D.* Security Markets: Stochastic Models. NY: Academic, 1988.
- [290] *Duffie D.* Dynamic Asset Pricing Theory. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1996.
- [291] *Duffie D., Kan R.* Multi-Factor Term Structure Models // *Philos. Trans. Royal Soc. London A*. Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 577—586.
- [292] *Duffie D., Ma J., Yong J.* Black's Consol Rate Conjecture // *Ann. Appl. Probab.* Vol. 5. No. 2. 1995. P. 356—382.
- [293] *Duffie D., Pan J.* An Overview of Value at Risk // *J. Derivatives*. Vol. 4. No. 3. 1997. P. 7—49.
- [294] *Duffie D., Protter P.* From Discrete- to Continuous-Time Finance: Weak Convergence of the Financial Gain Process // *Math. Finance*. Vol. 2. No. 1. 1992. P. 1—15.
- [295] *Dumas B.* Partial Equilibrium versus General Equilibrium Models of the International Capital Market // *The Handbook of International Macroeconomics* / Ed. F. van der Ploeg. Cambridge, MA: Blackwell, 1996.
- [296] *Dunn K. B., McConnell J. J.* A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities // *J. Finance*. Vol. 36. No. 2. 1981. P. 471—484.
- [297] *Dunn K. B., McConnell J. J.* Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities // *J. Finance*. Vol. 36. No. 3. 1981. P. 599—616.
- [298] *Dunn K. B., McConnell J. J.* Rate of Return Indexes for GNMA Securities // *J. Portfolio Management*. Vol. 7. No. 2. 1981. P. 65—74.
- [299] *Dupire B.* Pricing with a Smile // *Risk*. Vol. 7. No. 1. 1994. P. 18—20.
- [300] *Dybvig P. H.* Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure // *Mathematics of Derivative Securities* / Ed. M. Dempster, S. Pliska. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [301] *Dybvig P. H., Ingersoll J. E., jr., Ross S. A.* Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall // *J. Business*. Vol. 69. No. 1. 1996. P. 1—25.
- [302] *Dybvig P. H., Marshall W. J.* Pricing Long Bonds: Pitfalls and Opportunities // *Financial Analysts J.* Vol. 52. No. 1. 1996. P. 32—39.
- [303] *Dybvig P. H., Ross S. A.* Arbitrage // [307, p. 57—71].
- [304] *Dyer L. J., Jacob D. P.* Guide to Fixed Income Option Pricing Models // [321, ch. 3].
- [305] *Dyer L. J., Jacob D. P.* An Overview of Fixed Income Option Pricing Models // [328, ch. 34].
- [306] *Dym S. I.* A Generalized Approach to Price and Duration of Non-Par Floating-Rate Notes // *J. Portfolio Management*. Vol. 24. No. 4. 1998. P. 102—107.
- [307] *Eatwell J., Milgate M., Newman P., eds.* The New Palgrave: Finance. NY: Norton, 1987.
- [308] *Economist, The.* The Risk Business // *Economist*. 17—23 Oct 1998.
- [309] *Economist, The.* The Trader's Lament // *Economist*. 16—22 Oct 1999.
- [310] *Edwards J.* 3-Tier Client/Server at Work. NY: Wiley, 1997.
- [311] *Edwards J.* Changing Database Market Hurts Major Vendors // *Computer*. Vol. 31. No. 3. 1998. P. 10—11.

- [312] *Ehrbar A.* The Great Bond Market Massacre // *Fortune*. 17 Oct 1994. P. 77—92.
- [313] *El B. M., Noel G.* Simulating Path-Dependent Options: A New Approach // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 2. 1998. P. 65—83.
- [314] *El-Jahel L., Perraudin W., Sellin P.* Value at Risk for Derivatives // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 3. 1999. P. 7—26.
- [315] *Elmasri R., Navathe S. B.* Fundamentals of Database Systems. Redwood City, CA: Benjamin/Cummings, 1989.
- [316] *Elmer P. J., Haidorfer A. E.* Prepayments of Multifamily Mortgage-Backed Securities // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 4. 1997. P. 50—63.
- [317] *Elton E. J., Gruber M. J.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. 5th ed. NY: Wiley, 1995.
- [318] *Elton E. J., Gruber M. J., Michaely R.* The Structure of Spot Rates and Immunization // *J. Finance*. Vol. 45. No. 2. 1990. P. 629—642.
- [319] *Engle R. F.* Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation // *Econometrica*. Vol. 50. No. 4. 1982. P. 987—1008.
- [320] *Fabozzi F. J., ed.* Mortgage-Backed Securities: New Strategies, Applications, and Research. Chicago: Probus, 1987.
- [321] *Fabozzi F. J., ed.* The Handbook of Fixed-Income Options: Pricing, Strategies & Applications. Chicago: Probus, 1989.
- [322] *Fabozzi F. J., ed.* Advances & Innovations in the Bond and Mortgage Markets. Chicago: Probus, 1989.
- [323] *Fabozzi F. J.* Fixed Income Mathematics: Analytical & Statistical Techniques. Revised ed. Chicago: Probus, 1991.
- [324] *Fabozzi F. J., ed.* The Handbook of Mortgage-Backed Securities. 3rd ed. Chicago: Probus, 1992.
- [325] *Fabozzi F. J., ed.* Bond Markets, Analysis and Strategies. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [326] *Fabozzi F. J.* The Structure of Interest Rates // [328, ch. 6].
- [327] *Fabozzi F. J.* Fixed Income Securities. New Hope, PA: F. J. Fabozzi Associates, 1997.
- [328] *Fabozzi F. J., Fabozzi T. D., eds.* The Handbook of Fixed Income Securities. 4th ed. Burr Ridge, IL: Irwin, 1995.
- [329] *Fabozzi F. J., Kalotay A. J., Williams G. O.* Valuation of Bonds with Embedded Options // [328, ch. 28].
- [330] *Fabozzi F. J., Modigliani F.* Mortgage and Mortgage-Backed Securities Markets. Boston: Harvard Business School, 1992.
- [331] *Fabozzi F. J., Senft D.* Introduction to Mortgages // [324, ch. 2].
- [332] *Fama E. F.* Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments // *J. Finance*. Vol. 23. No. 1. 1968. P. 29—40.
- [333] *Fama E. F.* Efficient Capital Markets: II // *J. Finance*. Vol. 46. No. 5. 1991. P. 1575—1617.
- [334] *Fama E. F.* Random Walks in Stock Market Prices // *Financial Analysts J.* Vol. 51. No. 1. 1995. P. 75—80.
- [335] *Fama E. F., Bliss R. R.* The Information in Long-Maturity Forward Rates // *Amer. Econom. Rev.* Vol. 77. No. 4. 1987. P. 680—692.
- [336] *Fama E. F., French K. R.* The Cross-Section of Expected Stock Returns // *J. Finance*. Vol. 47. No. 2. 1992. P. 427—465.
- [337] *Fang K.-T., Wang Y.* Number-Theoretic Methods in Statistics. London: Chapman & Hall, 1994.
- [338] *Fang M., Stallaert J., Whinston A. B.* The Internet and the Future of Financial Markets // *Comm. ACM*. Vol. 43. No. 11. 2000. P. 83—88.
- [339] *Farebrother R. W.* Linear Least Squares Computations. NY: Marcel Dekker, 1988.
- [340] *Feldman A., Caplin J.* The Art of Managing Your Stock Options. www.money.com. 16 Dec 2000.
- [341] *Feller W.* Two Singular Diffusion Problems // *Ann. Math.* Vol. 54. No. 1. 1951. P. 173—182.
- [342] *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1. 3rd ed. NY: Wiley, 1968. [Имеется русский перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1983.]

- [343] *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2. 2nd ed. NY: Wiley, 1971. [Имеется русский перевод: *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1983.]
- [344] *Ferguson R.* Some Formulas for Evaluating Two Popular Option Strategies // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 5. 1993. P. 71—76.
- [345] *Figlewski S.* Remembering Fischer Black // *J. Derivatives.* Vol. 3. No. 2. 1995. P. 94—98.
- [346] *Figlewski S., Silber W. L., Subrahmanyam M. G.* Financial Options: From Theory to Practice. Burr Ridge, IL: Irwin, 1990.
- [347] *Filimon R. A.* COFI: An Index of Retail Interest Rates // *J. Fixed Income.* Vol. 7. No. 3. 1997. P. 61—65.
- [348] *Finnerty J. D.* Measuring the Duration of Floating-Rate Debt Instruments // [322, p. 77—96].
- [349] *Finnerty J. D., Rose M.* Arbitrage-Free Spread: A Consistent Measure of Relative Value // *J. Portfolio Management.* Vol. 17. No. 3. 1991. P. 65—77.
- [350] *Fisher L., Weil R. L.* Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies // *J. Business.* Vol. 44. No. 4. 1971. P. 408—431.
- [351] *Fisher M., Gilles C.* Around and Around: The Expectations Hypothesis // *J. Finance.* Vol. 53. No. 1. 1998. P. 365—383.
- [352] *Fisher M., Nychka D., Zervos D.* Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines. Manuscript, Sep 1994.
- [353] *Fishman G. S.* Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications. NY: Springer, 1996.
- [354] *Fishman V., Fitton P., Galperin Y.* Hybrid Low-Discrepancy Sequences: Effective Path Reduction for Yield Curve Scenario Generation // *J. Fixed Income.* Vol. 7. No. 1. 1997. P. 75—84.
- [355] *Fitch T.* Dictionary of Banking Terms. Hauppauge, NY: Barron's, 1990.
- [356] *Flanagan D.* Java in a Nutshell: A Desktop Quick Reference for Java Programmers. 2nd ed. Sebastopol, CA: O'Reilly & Associates, 1997.
- [357] *Flanagan D.* JavaScript: The Definitive Guide. 3rd ed. Sebastopol, CA: O'Reilly & Associates, 1998.
- [358] *Fleming M. J., Remolona E. M.* What Moves Bond Prices? // *J. Portfolio Management.* Vol. 25. No. 4. 1999. P. 28—38.
- [359] *Flesaker B.* Testing the Heath—Jarrow—Morton/Ho—Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 28. No. 4. 1993. P. 483—495.
- [360] *Fogler H. R.* A Modern Theory of Security Analysis // *J. Portfolio Management.* Vol. 19. No. 3. 1993. P. 6—14.
- [361] *Follain J. R., Scott L. O., Yang T. L.* Microfunctions of a Mortgage Prepayment Function // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 5. No. 2. 1992. P. 197—217.
- [362] *Fong H. G., Vasicek O. A.* Fixed-Income Volatility Management // *J. Portfolio Management.* Vol. 17. No. 4. 1991. P. 41—46.
- [363] *Foster C., Order R. van.* FHA Terminations: A Prelude to Rational Mortgage Pricing // *J. Amer. Real Estate Urban Econom. Assoc.* Vol. 13. No. 3. 1985. P. 273—291.
- [364] *Friedman A.* Stochastic Differential Equations and Applications. Vol. I. NY: Academic, 1975.
- [365] *Froot K. A., Scharfstein D. S., Stein J. C.* A Framework for Risk Management // *Harvard Business Rev.* Vol. 72. No. 6. 1994. P. 91—102.
- [366] *Fu M. C., Madan D. B., Wang T.* Pricing Continuous Asian Options: A Comparison of Monte Carlo and Laplace Transform Inversion Methods // *J. Comp. Finance.* Vol. 2. No. 2. 1998/1999. P. 49—74.
- [367] *Gagnon L., Johnson L. D.* Dynamic Immunization under Stochastic Interest Rates // *J. Portfolio Management.* Vol. 20. No. 3. 1994. P. 48—54.
- [368] *Galanti S., Jung A.* Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices // *J. Derivatives.* Vol. 5. No. 1. 1997. P. 63—83.

- [369] *Galitz L. C.* Financial Engineering: Tools and Techniques To Manage Financial Risk. Burr Ridge, IL: Irwin, 1995.
- [370] *Gao B., Huang J.-Z., Subrahmanyam M. G.* An Analytical Approach to the Valuation of American Path-Dependent Options. Manuscript, 4 Oct 1996. www.kenanflagler.unc.edu/faculty/directory/80.html.
- [371] *Garbade K. D.* Invoice Prices, Special Redemption Features, Cash Flows, and Yields on Eurobonds // [322, p. 233—231].
- [372] *Garbade K. D.* Managerial Discretion and Contingent Valuation of Corporate Securities // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 4. 1999. P. 65—76.
- [373] *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. 2nd ed. Berlin: Springer, 1985.
- [374] *Garman M. B., Klass M. J.* On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data // *J. Business*. Vol. 53. No. 1. 1980. P. 67—78.
- [375] *Garland W. J., Ritchford T. W., Letica N. C.* Overview of Fixed-Income Options // [321, ch. 1].
- [376] *Gastineau G. L.* The Essentials of Financial Risk Management // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 5. 1993. P. 17—21.
- [377] *Gastineau G.* An Introduction to Special-Purpose Derivatives: Path-Dependent Options // *J. Derivatives*. Vol. 1. No. 2. 1993. P. 78—86.
- [378] *Geman H., Karoui N. E., Rochet J.-C.* Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing // *J. Appl. Probab.* Vol. 32. No. 2. 1995. P. 443—458.
- [379] *Geman H., Yor M.* Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities // *Math. Finance*. Vol. 3. No. 4. 1993. P. 349—375.
- [380] *Geman H., Yor M.* Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A Probabilistic Approach // *Math. Finance*. Vol. 6. No. 4. 1996. P. 365—378.
- [381] *Gerald C. F., Wheatley P. O.* Applied Numerical Analysis. 5th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [382] *Gerber R. I., Carron A. S.* The Option Feature in Mortgages // [346, ch. 10].
- [383] *Geske R., Shastri K.* Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 20. No. 1. 1985. P. 45—71.
- [384] *Gibbons M. R., Ramaswamy K.* A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure // *Rev. Financial Stud.* Vol. 6. No. 3. 1993. P. 619—658.
- [385] *Gilles C., Leroy S. F.* A Note on the Local Expectations Hypothesis: A Discrete-Time Exposition // *J. Finance*. Vol. 41. No. 4. 1986. P. 975—979.
- [386] *Gillespie D. T.* Markov Processes: An Introduction for Physical Scientists. NY: Academic, 1992.
- [387] *Goldman D., Heath D., Kentwell G., Platen E.* Valuation of Two-Factor Term Structure Models // *Adv. Futures Options Res.* Vol. 8. 1995. P. 263—291.
- [388] *Goldman M. B., Sosin H. B., Gatto M. A.* Path Dependent Options: 'Buy at the Low, Sell at the High' // *J. Finance*. Vol. 34. No. 5. 1979. P. 1111—1127.
- [389] *Gollinger T. L., Morgan J. B.* Calculation of an Efficient Frontier for a Commercial Loan Portfolio // *J. Portfolio Management*. Vol. 19. No. 2. 1993. P. 39—46.
- [390] *Golub B. W., Tilman L. M.* Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations // *J. Portfolio Management*. Vol. 23. No. 4. 1997. P. 72—84.
- [391] *Golub G. H., Ortega J. M.* Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods. NY: Academic, 1992. [Имеется русский перевод: Голуб Дж., Лоун ван Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.]
- [392] *Golub G. H., Loan C. F. van.* Matrix Computations. 2nd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1989.
- [393] *Gonçalves F. O. de, Issler J. V.* Estimating the Term Structure of Volatility and Fixed-Income Derivative Pricing // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 1. 1996. P. 32—39.

- [394] *Goodman L. S., Ho J.* Mortgage Hedge Ratios: Which One Works Best? // *J. Fixed Income*. Vol. 7. No. 3. 1997. P. 23—33.
- [395] *Goodman L. S., Jonson J., Silver A.* Trading and Investment Opportunities with Agency Securities // [322, p. 171—198].
- [396] *Goulden I. R., Jackson D. M.* Combinatorial Enumeration. NY: Wiley, 1983.
- [397] *Grannan L. E., Nutt S. L.* Fixed Income Option Contracts // [321, ch. 2].
- [398] *Grant J.* Hidden Risks in Credit Derivatives // *Financial Times*. 2 Nov 1998.
- [399] *Gray W. S.* Historical Returns, Inflation and Future Return Expectations // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 4. 1993. P. 35—45.
- [400] *Green T. C., Figlewski S.* Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options // *J. Finance*. Vol. 54. No. 4. 1999. P. 1465—1499.
- [401] *Greider W.* Secrets of the Temple: How the Federal Reserve Runs the Country. NY: Simon & Schuster, 1987.
- [402] *Grinblatt M., Jegadeesh N.* Futures vs. Forward Prices: Implications for Swap Pricing and Derivatives Valuation // [516, ch. 3].
- [403] *Grinold R. C.* Is Beta Dead Again? // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 4. 1993. P. 28—34.
- [404] *Guidera J.* Fannie and Freddie May Not Trim Cost of Home Financing // *Wall Street J.* 16 Nov 2000. P. A2.
- [405] *Guo J.-H.* Option-Adjusted Spread of Mortgage-Backed Securities: A Client/Server System Based on Java and C++. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1998.
- [406] *Guttentag J. M.* The Evolution of Mortgage Yield Concepts // *Financial Analysts J.* Vol. 48. No. 1. 1992. P. 39—46.
- [407] *Gyourko J., Keim D. B.* Risk and Return in Real Estate: Evidence from a Real Estate Stock Index // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 5. 1993. P. 39—46.
- [408] *Haberman R.* Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [409] *Hacking I.* The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction, and Statistical Inference. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1975.
- [410] *Hald A.* A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. NY: Wiley, 1990.
- [411] *Hall A. R.* Valuing the Mortgage Borrower's Prepayment Option // *J. Amer. Real Estate Urban Econom. Assoc.* Vol. 13. No. 3. 1985. P. 229—247.
- [412] *Hall M.* Core Web Programming. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998.
- [413] *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theory and Its Application. NY: Academic, 1980.
- [414] *Hamilton A., Madison J., Jay J.* The Federalist Papers. NY: New American Library, 1961. [First published in 1788].
- [415] *Hamilton J. D.* Time Series Analysis. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1994.
- [416] *Hamilton M. A.* Java and the Shift to Net-Centric Computing // *Computer*. Vol. 29. No. 8. 1996. P. 31—39.
- [417] *Hamming R. W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. 2nd ed. NY: Dover, 1986.
- [418] *Hansen L. P.* Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators // *Econometrica*. Vol. 50. No. 4. 1982. P. 1029—1054.
- [419] *Harrison J. M.* Brownian Motion and Stochastic Flow Systems. NY: Wiley, 1985.
- [420] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // *Stochast. Process. Appl.* Vol. 11. No. 1. 1981. P. 215—260.
- [421] *Hartmanis J.* Turing Award Lecture: On Computational Complexity and the Nature of Computer Science // *ACM Comput. Surveys*. Vol. 27. No. 1. 1995. P. 7—16.
- [422] *Harvey A. C.* The Econometric Analysis of Time Series. 2nd ed. NY: Philip Allan, 1990.

- [423] *Haug E. G.* The Complete Guide to Option Pricing Formulas. NY: McGraw-Hill, 1998.
- [424] *Haugen R. A.* Modern Investment Theory. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [425] *Hawawini G., ed.* Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contributions. NY: Garland, 1982.
- [426] *Hayek F. A. von.* New Studies in Philosophy, Politics, Economics and the History of Ideas. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1978.
- [427] *Hayre L. S.* Arbitrage-Free Spread: Response // *J. Portfolio Management*. Vol. 17. No. 3. 1991. P. 78—79.
- [428] *Hayre L. S.* Random Error in Prepayment Projections // *J. Fixed Income*. Vol. 7. No. 2. 1997. P. 77—84.
- [429] *Hayre L. S., Chang H.* Effective and Empirical Durations of Mortgage Securities // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 4. 1997. P. 17—33.
- [430] *Hayre L. S., Chaudhary S., Young R. A.* Anatomy of Prepayments // *J. Fixed Income*. Vol. 10. No. 1. 2000. P. 19—49.
- [431] *Hayre L. S., Lauterbach K., Mohebbi C.* Prepayment Models and Methodologies // [322, p. 329—350].
- [432] *Hayre L. S., Mohebbi C., Zimmerman T.* Mortgage Pass-Through Securities // [328, ch. 24].
- [433] *Hayre L. S., Rajan A.* Anatomy of Prepayments: The Salomon Prepayment Model. Fixed-Income Research. Salomon Brothers. Jun 1995; Anatomy of Prepayments: The Salomon Brothers Prepayment Model // [516, ch. 8].
- [434] *He H.* Convergence of Discrete- to Continuous-Time Contingent Claims Prices // *Rev. Financial Stud.* Vol. 3. No. 4. 1990. P. 523—546.
- [435] *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates // *Rev. Futures Markets*. Vol. 9. No. 1. 1990. P. 54—76.
- [436] *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 25. No. 4. 1990. P. 419—440.
- [437] *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation // *Econometrica*. Vol. 60. No. 1. 1992. P. 77—105.
- [438] *Herskovitz M. D.* Option-Adjusted Spread Analysis for Mortgage-Backed Securities // [321, ch. 22].
- [439] *Hess A. C., Smith C. W., jr.* Elements of Mortgage Securitization // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 1. No. 4. 1988. P. 331—346.
- [440] *Heston S. L.* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // *Rev. Financial Stud.* Vol. 6. No. 2. 1993. P. 327—344.
- [441] *Heston S.* Discrete-Time Versions of Continuous-Time Interest Rate Models // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 86—88.
- [442] *Heston S. L., Nandi S.* A Closed-Form GARCH Option Valuation Model // *Rev. Financial Stud.* Vol. 13. No. 3. 2000. P. 585—625.
- [443] *Heynen R. C., Kat H. M.* Discrete Partial Barrier Options with a Moving Barrier // *J. Financial Engrg.* Vol. 5. No. 3. 1996. P. 199—209.
- [444] *Heynen R., Kemna A., Vorst T.* Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 29. No. 1. 1994. P. 31—57.
- [445] *Hicks J. R.* Value and Capital. 2nd ed. London: Oxford Univ. Press, 1946.
- [446] *Hildebrand F. B.* Finite-Difference Equations and Simulations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968.
- [447] *Hildebrand F. B.* Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. NY: Dover, 1974.
- [448] *Hildebrand F. B.* Advanced Calculus for Applications. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
- [449] *Hilliard J. E., Kau J. B., Keenan D. C., Muller W. J., III.* Pricing a Class of American and European Path Dependent Securities // *Management Sci.* Vol. 41. No. 12. 1995. P. 1892—1899.

- [450] *Hilliard J. E., Schwartz A.* Binomial Option Pricing under Stochastic Volatility and Correlated State Variables // *J. Derivatives*. Vol. 4. No. 1. 1996. P. 23—39.
- [451] *Hilliard J. E., Schwartz A., Tucker A. L.* Bivariate Binomial Options Pricing with Generalized Interest Rate Processes // *J. Financial Res.* Vol. 19. No. 4. 1996. P. 585—602.
- [452] *Ho T.-S., Stapleton R. C., Subrahmanyam M. G.* Multivariate Binomial Approximations for Asset Prices with Nonstationary Variance and Covariance Characteristics // *Rev. Financial Stud.* Vol. 8. No. 4. 1995. P. 1125—1152.
- [453] *Ho T. S. Y.* Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 2. 1992. P. 29—44.
- [454] *Ho T. S. Y.* CMO Yield Attribution and Option Spread // *J. Portfolio Management*. Vol. 19. No. 3. 1993. P. 57—68.
- [455] *Ho T. S. Y.* Primitive Securities: Portfolio Building Blocks // *J. Derivatives*. Vol. 1. No. 2. 1993. P. 6—22.
- [456] *Ho T. S. Y.* Evolution of Interest Rate Models: a Comparison // *J. Derivatives*. Vol. 2. No. 4. 1995. P. 9—20.
- [457] *Ho T. S. Y., Abrahamson A. A.* Options on Interest Sensitive Securities // [346, ch. 8].
- [458] *Ho T. S. Y., Lee S.-B.* Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // *J. Finance*. Vol. 41. No. 5. 1986. P. 1011—1029.
- [459] *Hochbaum D. S., ed.* Approximation Algorithms for NP-Hard Problems. Boston: PWS-Kent, 1997.
- [460] *Hoffman W. C., Kiggins T., Letica N. C.* Covered Calls on Mortgage-Backed Securities // [321, ch. 11].
- [461] *Hofri M.* Probabilistic Analysis of Algorithms. NY: Springer, 1987.
- [462] *Hogan M.* Problems in Certain Two-State Term Structure Models // *Ann. Appl. Probab.* Vol. 3. No. 2. 1993. P. 576—581.
- [463] *Hogg R. V., Craig A. T.* Introduction to Mathematical Statistics. 4th ed. NY: Macmillan, 1978.
- [464] *Hopper G.* Value at Risk: A New Methodology for Measuring Portfolio Risk // *Business Rev.* Jul/Aug. 1996. P. 19—29.
- [465] *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix Analysis. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1991. [Имеется русский перевод: *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.]
- [466] *Horstmann C. S.* Mastering Object-Oriented Design in C++. NY: Wiley, 1995.
- [467] *Horstmann C. S., Cornell G.* Core Java 2. Vol. 1, Fundamentals. Mountain View, California: SunSoft Press, 1999.
- [468] *Houthakker H. S.* Futures Trading // [307, p. 153—158].
- [469] *Hu J.* Housing and the Mortgage Securities Markets: Review, Outlook, and Policy Recommendations // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 5. No. 2. 1992. P. 167—179.
- [470] *Hull J. C.* Options, Futures and Other Derivatives. 4th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [471] *Hull J. C., White A.* The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities // *J. Finance*. Vol. 42. No. 2. 1987. P. 281—300.
- [472] *Hull J. C., White A.* The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 23. No. 3. 1988. P. 237—251.
- [473] *Hull J. C., White A.* Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 25. No. 1. 1990. P. 87—100.
- [474] *Hull J. C., White A.* Pricing Interest-Rate-Derivative Securities // *Rev. Financial Stud.* Vol. 3. No. 4. 1990. P. 573—592.
- [475] *Hull J. C., White A.* Root and Branch // [744, ch. 14].
- [476] *Hull J. C., White A.* New Ways with the Yield Curve // [744, ch. 15].
- [477] *Hull J. C., White A.* One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 28. No. 2. 1993. P. 235—254.
- [478] *Hull J. C., White A.* Efficient Procedures for Valuing European and American

- Path-Dependent Options // J. Derivatives. Vol. 1. No. 1. 1993. P. 21—31.
- [479] *Hull J. C., White A.* Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: One-Factor Models // J. Derivatives. Vol. 2. No. 1. 1994. P. 7—17.
- [480] *Hull J. C., White A.* Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models // J. Derivatives. Vol. 2. No. 2. 1994. P. 37—48.
- [481] *Hull J. C., White A.* The Impact of Default Risk on the Prices of Options and Other Derivatives // J. Bank. Finance. Vol. 19. No. 2. 1995. P. 299—322.
- [482] *Hull J. C., White A.* A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response // J. Fixed Income. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 97—103.
- [483] *Hull J. C., White A.* Using Hull—White Interest Rate Trees // J. Derivatives. Vol. 3. No. 3. 1996. P. 26—36.
- [484] *Hull J. C., White A.* Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed // J. Derivatives. Vol. 5. No. 3. 1998. P. 9—19.
- [485] *Hunter W. C., Stowe D. W.* Path-Dependent Options: Valuation and Applications // Econom. Rev. Vol. 77. No. 4. 1992. P. 30—43.
- [486] *Hutchinson J. M., Lo A. W., Poggio T.* A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities via Learning Networks // J. Finance. Vol. 49. No. 3. 1994. P. 851—889.
- [487] *Hwang K., Xu Z.* Scalable Parallel Computing: Technology, Architecture, Programming. NY: McGraw-Hill, 2000.
- [488] *Iansiti M., MacCormack A.* Developing Products on Internet Time // Harvard Business Rev. Vol. 75. No. 5. 1997. P. 108—117.
- [489] *Ilmanen A.* Overview of Forward Rate Analysis (Understanding the Yield Curve: Part 1). Fixed-Income Research. Salomon Brothers. May 1995.
- [490] *Ilmanen A.* Convexity Bias and the Yield Curve // [516, ch. 2].
- [491] *Ingersoll J. E., jr.* A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities // J. Financial Econom. Vol. 4. No. 3. 1977. P. 289—322.
- [492] *Ingersoll J. E., jr.* Theory of Financial Decision Making. Savage, MD: Rowman & Littlefield, 1987.
- [493] *Ingersoll J. E., jr.* Interest Rates // [307, p. 172—179].
- [494] *Ingersoll J. E., jr.* Option Pricing Theory // [307, p. 199—212].
- [495] *Ingersoll J. E., jr.* Digital Contracts: Simple Tools for Pricing Complex Derivatives // J. Business. Vol. 73. No. 1. 2000. P. 67—88.
- [496] *Ingersoll J. E., jr., Skelton J., Weil R. L.* Duration Forty Years Later // J. Financial Quant. Anal. Vol. 13. No. 4. 1978. P. 627—650.
- [497] *Inmon W. H., Imhoff C., Sousa R.* Corporate Information Factory. NY: Wiley, 1998.
- [498] *Internetweek.* Transformation of the Enterprise 1999 // Internetweek. 28 Oct 1999. www.internetweek.com/trans/default.html.
- [499] *Inui K., Kijima M.* A Markovian Framework in Multi-Factor Heath—Jarrow—Morton Models // J. Financial Quant. Anal. Vol. 33. No. 3. 1998. P. 423—440.
- [500] *Ito K.* Stochastic Integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo. Vol. 20. No. 8. 1944. P. 519—524.
- [501] *Ito K.* On a Formula Concerning Stochastic Differentials // Nagoya Math. J. No. 3. 1951. P. 55—65.
- [502] *Jackwerth J. C.* Generalized Binomial Trees // J. Derivatives. Vol. 5. No. 2. 1997. P. 7—17.
- [503] *Jackwerth J. C.* Option-Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review // J. Derivatives. Vol. 7. No. 2. 1999. P. 66—82.
- [504] *Jacob D. P., Load G., Tilley J. A.* Price, Duration and Convexity of Mortgage-Backed Securities // [320, p. 81—101].
- [505] *James J., Webber N.* Interest Rate Modelling. NY: Wiley, 2000.
- [506] *Jamshidian F.* An Exact Bond Option Formula // J. Finance. Vol. 44. No. 1. 1989. P. 205—209.
- [507] *Jamshidian F.* Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model // Res. Finance. No. 9. 1991. P. 131—170.

- [508] *Jamshidian F.* Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models // *J. Fixed Income*. Vol. 1. No. 1. 1991. P. 62—74.
- [509] *Jamshidian F., Zhu Y.* Scenario Simulation: Theory and Methodology // *Finance Stochast.* Vol. 1. No. 1. 1997. P. 43—67.
- [510] *Jarrow R. A.* Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options. NY: McGraw-Hill, 1996.
- [511] *Jarrow R. A.* The HJM Model: Its Past, Present and Future // *J. Financial Engrg.* Vol. 6. No. 4. 1997. P. 269—279.
- [512] *Jarrow R. A.* In Honor of the Nobel Laureates Robert C. Merton and Myron S. Scholes: a Partial Differential Equation That Changed the World // *J. Econom. Perspect.* Vol. 13. No. 4. 1999. P. 229—248.
- [513] *Jarrow R. A., Turnbull S.* Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk // *J. Finance*. Vol. 50. No. 1. 1995. P. 53—85.
- [514] *Jarrow R. A., Turnbull S.* Derivative Securities. Cincinnati, OH: South-Western College Publishing, 1996.
- [515] *Jeffrey A.* Single Factor Heath—Jarrow—Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 30. No. 4. 1995. P. 619—642.
- [516] *Jegadeesh N., Tuckman B., eds.* Advanced Fixed-Income Valuation Tools. NY: Wiley, 2000.
- [517] *Jiang G. J., Knight J. L.* Finite Sample Comparison of Alternative Estimators of Ito Diffusion Processes: A Monte Carlo Study // *J. Comp. Finance*. Vol. 2. No. 3. 1999. P. 5—38.
- [518] *Johansson F., Seiler M. J., Tjarnberg M.* Measuring Downside Portfolio Risk // *J. Portfolio Management*. Vol. 26. No. 1. 1999. P. 96—107.
- [519] *Johnson H.* Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 22. No. 3. 1987. P. 277—283.
- [520] *Johnson H., Shanno D.* Option Pricing When the Variance Is Changing // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 22. No. 2. 1987. P. 143—151.
- [521] *Johnson H., Stulz R.* The Pricing of Options with Default Risk // *J. Finance*. Vol. 42. No. 2. 1987. P. 267—280.
- [522] *Johnson N. L., Kotz S.* Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions. Vol. 1. Boston: Houghton Mifflin, 1970. [Имеется русский перевод: *Джонсон Н., Котц С., Балакришнан Н.* Одномерные непрерывные распределения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний (готовится к печати).]
- [523] *Johnson R. A., Wichern D. W.* Applied Multivariate Statistical Analysis. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [524] *Jones F. J., Jain A.* Hedging Mortgage-Backed Securities // [320, p. 367—442].
- [525] *Jordan J. V., Mansi S. A.* How Well Do Constant-Maturity Treasuries Approximate the On-the-Run Term Structure? // *J. Fixed Income*. Vol. 10. No. 2. 2000. P. 35—45.
- [526] *Jorion P.* Predicting Volatility in the Foreign Exchange Markets // *J. Finance*. Vol. 50. No. 2. 1995. P. 507—528.
- [527] *Jorion P.* Orange County Case: Using Value at Risk To Control Financial Risk. 1997. www.gsm.uci.edu/~jorion/oc/case.html.
- [528] *Joubert A.* Financial Applications and HPF // *Proceedings of the Conference on High Performance Computing: Issues, Methods and Applications*. Jun 1994.
- [529] *Joubert A., Rogers L. C. G.* Fast, Accurate and Inelegant Valuation of American Options // *Numerical Methods in Finance* / Ed. L. C. G. Rogers and D. Talay. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [530] *Joy C., Boyle P. P., Tan K. S.* Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance // *Management Sci.* Vol. 42. No. 6. 1996. P. 926—938.
- [531] *Ju N.* Pricing an American Option by Approximating Its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function // *Rev. Financial Stud.* Vol. 11. No. 3. 1998. P. 627—646.
- [532] *Jung A.* Improving the Performance of Low-Discrepancy Sequences // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 2. 1998. P. 85—95.

- [533] *Kahneman D., Riepe M. W.* Aspects of Investor Psychology // *J. Portfolio Management*. Vol. 24. No. 4. 1998. P. 52—65.
- [534] *Kahneman D., Tversky A.* Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // *Econometrica*. Vol. 47. No. 2. 1979. P. 263—291.
- [535] *Kajima M., Komoribayashi M.* A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 1. 1998. P. 97—108.
- [536] *Kalotay A. J., Abreo L. A.* Putable/Callable/Reset Bonds: Intermarket Arbitrage with Unpleasant Side Effects // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 3. 1999. P. 88—93.
- [537] *Kamal M., Derman E.* Correcting Black—Scholes // *Risk*. Vol. 12. No. 1. 1999. P. 82—85.
- [538] *Kamphoefner J. E., McKendry R. J.* Trading and Arbitrage Strategies Using Debt Options // [321, ch. 8].
- [539] *Kamrad B., Ritchken P.* Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables // *Management Sci.* Vol. 37. No. 12. 1991. P. 1640—1652.
- [540] *Kang P., Zenios S. A.* Complete Prepayment Models for Mortgage-Backed Securities // *Management Sci.* Vol. 38. No. 11. 1992. P. 1665—1685.
- [541] *Kannan D.* An Introduction to Stochastic Processes. NY: Elsevier North Holland, 1979.
- [542] *Karatzas I.* Optimization Problems in the Theory of Continuous Trading // *SIAM J. Control Optim.* Vol. 27. No. 6. 1989. P. 1221—1259.
- [543] *Karlin S., Taylor H. M.* A First Course in Stochastic Processes. 2nd ed. NY: Academic, 1975.
- [544] *Karlin S., Taylor H. M.* A Second Course in Stochastic Processes. NY: Academic, 1981.
- [545] *Karloff H.* Linear Programming. Boston: Birkhäuser, 1991.
- [546] *Kau J. B., Keenan D. C., Muller W. J., III., Epperson J. F.* Rational Pricing of Adjustable Rate Mortgages // *J. Amer. Real Estate Urban Econom. Assoc.* Vol. 13. No. 2. 1985. P. 117—127.
- [547] *Kellison S. G.* The Theory of Interest. 2nd ed. Burr Ridge, IL: Irwin, 1991.
- [548] *Kemna A. G. Z., Vorst A. C. F.* A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values // *J. Bank. Finance*. Vol. 14. No. 1. 1990. P. 113—129.
- [549] *Kendall W. S.* Itovsn3: Doing Stochastic Calculus with *Mathematica* // [854, ch. 10].
- [550] *Kennedy P.* A Guide to Econometrics. 3rd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.
- [551] *Kikugawa T., Singleton K. J.* Modeling the Term Structure of Interest Rates in Japan // *J. Fixed Income*. Vol. 4. No. 2. 1994. P. 6—16.
- [552] *Kim D., Kon S. J.* Alternative Models for the Conditional Heteroskedasticity of Stock Returns // *J. Business*. Vol. 67. No. 4. 1994. P. 563—598.
- [553] *King T.-H. D., Mauer D. C.* Corporate Call Policy for Nonconvertible Bonds // *J. Business*. Vol. 73. No. 3. 2000. P. 403—444.
- [554] *Kishimoto N.* Duration and Convexity of Coupon Bond Futures // *J. Fixed Income*. Vol. 8. No. 1. 1998. P. 79—83.
- [555] *Klassen T. R.* Simple, Fast and Flexible Pricing of Asian Options // *J. Comp. Finance*. Vol. 4. No. 1. 2000. P. 89—124.
- [556] *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
- [557] *Kloeden P. E., Platen E., Schurz H.* Numerical Solution of SDE through Computer Experiments. Berlin: Springer, 1994.
- [558] *Kloeden P. E., Platen E., Schurz H., Sørensen M.* On Effects of Discretization on Estimators of Drift Parameters for Diffusion Processes // *J. Appl. Probab.* Vol. 33. No. 4. 1996. P. 1061—1076.
- [559] *Knecht L., McCowin M.* Valuing Convertible Securities // [322, p. 97—116].
- [560] *Knuth D. E.* The Art of Computer Programming, Vol. II: Seminumerical Algorithms. 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998. [Имеется русский перевод: *Кнут Д.* Искусство программирования: В 2 т. Киев: Вильямс, 2000.]

- [561] *Kon S. J.* Models of Stock Returns—A Comparison // *J. Finance*. Vol. 39. No. 1. 1984. P. 147—165.
- [562] *Kopprasch R. W.* Option-Adjusted Spread Analysis: Going down the Wrong Path? // *Financial Analysts J.* Vol. 50. No. 3. 1994. P. 42—47.
- [563] *Koutmos G.* Modeling Short-Term Interest Rate Volatility: Information Shocks versus Interest Rate Levels // *J. Fixed Income*. Vol. 9. No. 4. 2000. P. 19—26.
- [564] *Kraus A., Smith M.* A Simple Multifactor Term Structure Model // *J. Fixed Income*. Vol. 3. No. 1. 1993. P. 19—23.
- [565] *Kremer J. W., Roenfeldt R. L.* Warrant Pricing: Jump-Diffusion vs. Black—Scholes // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 28. No. 2. 1992. P. 255ff.
- [566] *Krishnan V.* Nonlinear Filtering and Smoothing. NY: Wiley, 1984.
- [567] *Kritzman M.* Portfolio Insurance and Related Dynamic Trading Strategies // [346, ch. 11].
- [568] *Kritzman M.* What Practitioners Need To Know about the Term Structure of Interest Rates // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 4. 1993. P. 14—18.
- [569] *Kritzman M.* What Practitioners Need To Know about Hedging // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 5. 1993. P. 22—26.
- [570] *Kritzman M.* What Practitioners Need To Know about Monte Carlo Simulation // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 6. 1993. P. 17—20.
- [571] *Kupiec P. H.* Stress Testing in a Value at Risk Framework // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 1. 1998. P. 7—24.
- [572] *Kushner H. J.* Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations. NY: Academic, 1977.
- [573] *Kushner H. J.* Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes with Applications to Stochastic Systems Theory. Cambridge, MA: MIT Press, 1984.
- [574] *Kwan T. T., McGrath R. E., Reed D. A.* NCSA's World Wide Web Server: Design and Performance // *Computer*. Vol. 28. No. 11. 1995. P. 68—74.
- [575] *Kwok Y.-K.* Mathematical Models of Financial Derivatives. Singapore: Springer, 1998.
- [576] *Lamberton D.* Convergence of the Critical Price in the Approximation of American Options // *Math. Finance*. Vol. 3. No. 2. 1993. P. 179—190.
- [577] *Lamle H. R.* Ginnie Mae: Age Equals Beauty // *J. Portfolio Management*. Vol. 7. No. 2. 1981. P. 75—79.
- [578] *Lamoureux C. G., Lastrapes W. D.* Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects // *J. Finance*. Vol. 45. No. 1. 1990. P. 221—229.
- [579] *Lamoureux C. G., Lastrapes W. D.* Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatility // *Rev. Financial Stud.* Vol. 6. No. 2. 1993. P. 293—326.
- [580] *Lamport L.* $\text{\LaTeX}$: a Document Preparation System. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [581] *Lancaster K.* Mathematical Economics. NY: Dover, 1987.
- [582] *Lanczos C.* Applied Analysis. NY: Dover, 1988. [First published in 1956].
- [583] *Lando D.* Some Elements of Rating-Based Credit Risk Modeling // [516, ch. 7].
- [584] *Law A. M., Kelton W. D.* Simulation Modeling and Analysis. 2nd ed. NY: McGraw-Hill, 1991.
- [585] *Lawler G. F.* Introduction to Stochastic Processes. London: Chapman & Hall, 1995.
- [586] *Lawson C. L., Hanson R. J.* Solving Least Squares Problems. Philadelphia: Society for Applied and Industrial Mathematics, 1995.
- [587] *Lehmann B. N.* Fads, Martingales and Market Efficiency // *Quart. J. Econom.* Vol. 105. No. 1. 1990. P. 1—28.
- [588] *Leighton F. T.* Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1992.
- [589] *Leisen D.* Pricing the American Put Option: A Detailed Convergence Analysis for Binomial Models // *J. Econom. Dynam. Control*. Vol. 22. No. 8—9. 1998. P. 1419—1444.

- [590] *Leisen D., Reimer M.* Binomial Models for Option Valuation—Examining and Improving Convergence // *Appl. Math. Finance*. Vol. 3. No. 4. 1996. P. 319—346.
- [591] *Lekkos I.* A Critique of Factor Analysis of Interest Rates // *J. Derivatives*. Vol. 8. No. 1. 2000. P. 72—83.
- [592] *Leland H. E.* Beyond Mean-Variance: Performance Measurement in a Non-symmetrical World // *Financial Analysts J.* Vol. 55. No. 1. 1999. P. 27—36.
- [593] *Leong K.* Solving the Mystery // [744, ch. 11].
- [594] *LeRoy S. F.* Efficient Capital Markets and Martingales // *J. Econom. Lit.* Vol. 27. No. 4. 1989. P. 1583—1621.
- [595] *LeRoy S. F.* Mortgage Valuation under Optimal Prepayment // *Rev. Financial Stud.* Vol. 9. No. 3. 1996. P. 817—844.
- [596] *Levy E.* Pricing European Average Rate Currency Options // *J. Internat. Money Finance*. Vol. 11. No. 5. 1992. P. 474—491.
- [597] *Levy E., Mantion F.* Discrete by Nature // *Risk*. Vol. 10. No. 1. 1997. P. 74—75.
- [598] *Levy E., Turnbull S.* Average Intelligence // [744, ch. 23].
- [599] *Lewis M.* Wall Street Crashes Venture Caps Party // *Bloomberg News*. 28 Sep 2000.
- [600] *Li A., Ritchken P., Sankarasubramanian L.* Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims // *J. Finance*. Vol. 50. No. 2. 1995. P. 719—737.
- [601] *Liao A., Lyuu Y.-D.* Computer Applications on Wall Street. Manuscript. Fixed Income Research. Citicorp Securities. NY. 1994.
- [602] *Liepelt M., Schittkowski K.* Remark on Algorithm 746: New Features of PCOMP, a Fortran Code for Automatic Differentiation // *ACM Trans. Math. Software*. Vol. 26. No. 3. 2000. P. 352—362.
- [603] *Linsmeier T. J., Pearson N. D.* Value at Risk // *Financial Analysts J.* Vol. 56. No. 2. 2000. P. 47—67.
- [604] *Lint J. H. van, Wilson R. M.* A Course in Combinatorics. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [605] *Lintner J.* The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // *Rev. Econom. Statist.* Vol. 47. No. 1. 1965. P. 13—37.
- [606] *Lions J. L.* Ariane 5 Flight 501 Failure: Report by the Inquiry Board. Paris, 19 Jul 1996. www.esa.int/htdocs/tidc/Press/Press96/ariane5rep.html.
- [607] *Litterman R., Scheinkman J.* Common Factors Affecting Bond Returns // *J. Fixed Income*. Vol. 1. No. 1. 1991. P. 54—61.
- [608] *Litzenberger R. H.* Swaps: Plain and Fanciful // *J. Finance*. Vol. 47. No. 3. 1992. P. 831—850.
- [609] *Litzenberger R. H., Rolfo J.* An International Study of Tax Effects on Government Bonds // *J. Finance*. Vol. 39. No. 1. 1984. P. 1—22.
- [610] *Liu Y.-H.* Barrier Options Pricing: Combinatorial Methods and Trinomial Tree Algorithms. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1997.
- [611] *Lo A. W.* Maximum Likelihood Estimation of Generalized Ito Processes with Discretely Sampled Data // *Econometric Theory*. Vol. 4. No. 2. 1988. P. 231—247.
- [612] *Lo A. W.* Neural Networks and Other Nonparametric Techniques in Economics and Finance // *Blending Quantitative and Traditional Equity Analysis* / Ed. H. R. Fogler. Charlottesville, VA: Association for Investment Management and Research, 1994.
- [613] *Lo A. W., Wang J.* Implementing Option Pricing Models When Asset Returns Are Predictable // *J. Finance*. Vol. 50. No. 1. 1995. P. 87—129.
- [614] *Lo A. W., Wang J.* Trading Volume: Definitions, Data Analysis, and Implementations of Portfolio Theory // *Rev. Financial Stud.* Vol. 13. No. 2. 2000. P. 257—300.
- [615] *Long D. M., Officer D. T.* The Relation between Option Mispricing and Volume in the Black—Scholes Option Model // *J. Financial Res.* Vol. 20. No. 1. 1997. P. 1—12.

- [616] *Longstaff F. A.* The Valuation of Options on Yields // *J. Financial Econom.* Vol. 26. No. 1. 1990. P. 97—121.
- [617] *Longstaff F. A.* Hedging Interest Rate Risk with Options on Average Interest Rates // *J. Fixed Income.* Vol. 5. No. 2. 1995. P. 37—45.
- [618] *Longstaff F. A., Schwartz E. S.* Interest Rate Volatility and Bond Prices // *Financial Analysts J.* Vol. 49. No. 4. 1993. P. 70—74.
- [619] *Lowell L.* Mortgage Pass-Through Securities // [324, ch. 4]; [328, ch. 27].
- [620] *Lowenstein L.* Sense and Nonsense in Corporate Finance. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.
- [621] *Luby M.* Pseudorandomness and Cryptographic Applications. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1996.
- [622] *Luehrman T. A.* Strategy as a Portfolio of Real Options // *Harvard Business Rev.* Vol. 76. No. 5. 1998. P. 89—99.
- [623] *Luenberger D. G.* Investment Science. NY: Oxford Univ. Press, 1998.
- [624] *Lyu Y.-D.* Very Fast Algorithms for Barrier Option Pricing and the Ballot Problem // *J. Derivatives.* Vol. 5. No. 3. 1998. P. 68—79.
- [625] *Lyu Y.-D.* A General Computational Method for Calibration Based on Differential Trees // *J. Derivatives.* Vol. 7. No. 1. 1999. P. 79—90.
- [626] *Lyu Y.-D., Wang C.-L.* An Object-Oriented Framework for Financial Computation on Three-Tier Client/Server Architectures // *Proceedings of the 13th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory.* Providence Univ. Taiwan. 1996.
- [627] *Macaulay F. R.* Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856. NY: National Bureau of Economic Research (NBER), 1938.
- [628] *Madan D. B., Milne F., Shefrin H.* The Multinomial Option Pricing Model and Its Brownian and Poisson Limits // *Rev. Financial Stud.* Vol. 2. No. 2. 1989. P. 251—265.
- [629] *Madan D., Unal H.* A Two-Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spread // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 35. No. 1. 2000. P. 43—65.
- [630] *Maghsoodi Y.* Solution of the Extended CIR Term Structure and Bond Option Valuation // *Math. Finance.* Vol. 6. No. 1. 1996. P. 89—109.
- [631] *Maiocchi R.* The Case of Brownian Motion // *British J. Hist. Sci.* Vol. 23, part 3. No. 78. 1990. P. 257—283.
- [632] *Malinvaud E.* Statistical Methods of Econometrics. 3rd revised ed. Amsterdam: North-Holland, 1980.
- [633] *Malkiel B. G.* Term Structure of Interest Rates // [307, p. 265—270].
- [634] *Malkiel B. G.* Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991 // *J. Finance.* Vol. 50. No. 2. 1995. P. 549—572.
- [635] *Malkiel B. G.* A Random Walk Down Wall Street. NY: Norton, 1999.
- [636] *Malkiel B. G., Xu Y.* Risk and Return Revisited // *J. Portfolio Management.* Vol. 23. No. 3. 1997. P. 9—14.
- [637] *Mandelbrot B. B.* Bachelier Louis // [307, p. 86—88].
- [638] *Manes S., Andrews P.* Gates. NY: Simon & Schuster, 1994.
- [639] *Mankiw N. G., Miron J. A.* The Changing Behavior of the Term Structure of Interest Rates // *Quart. J. Econom.* Vol. 101. No. 2. 1986. P. 211—228.
- [640] *Margrabe W.* The Value of an Option To Exchange One Asset for Another // *J. Finance.* Vol. 33. No. 1. 1978. P. 177—186.
- [641] *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // *J. Finance.* Vol. 7. No. 1. 1952. P. 77—91.
- [642] *Markowitz H. M.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Oxford, U. K.: Blackwell, 1987.
- [643] *Markowitz H. M.* The General Mean-Variance Portfolio Selection Problem // *Philos. Trans. Royal Soc. London A.* Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 543—549.
- [644] *Markowitz H. M.* The Early History of Portfolio Theory: 1600—1960 // *Financial Analysts J.* Vol. 55. No. 4. 1999. P. 5—16.

- [645] *Marsh T. A., Rosenfeld E. R.* Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices // *J. Finance*. Vol. 38. No. 2. 1983. P. 635—650.
- [646] *Marshall J. F., Bansal V. K.* Financial Engineering: A Complete Guide to Financial Innovation. NY: New York Inst. of Finance, 1992.
- [647] *Mason S. P., Merton R. C., Perold A. F., Tufano P.* Cases in Financial Engineering: Applied Studies of Financial Innovation. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [648] *Mayr E.* The Growth of Biological Thought: Diversity, Evolution and Inheritance. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1982.
- [649] *McConnell J. J., Singh M.* Rational Prepayments and the Valuation of Collateralized Mortgage Obligations // *J. Finance*. Vol. 49. No. 3. 1994. P. 891—921.
- [650] *McConnell S.* Code Complete. Redmond, WA: Microsoft Press, 1993.
- [651] *McCoy W. F.* Bond Dynamic Hedging, and Return Attribution: Empirical Evidence // *J. Portfolio Management*. Vol. 21. No. 2. 1995. P. 93—101.
- [652] *McCulloch J. H.* The Tax-Adjusted Yield Curve // *J. Finance*. Vol. 30. No. 3. 1975. P. 811—830.
- [653] *McEnally R. W., Jordan J. V.* The Term Structure of Interest Rates // [328, ch. 37].
- [654] *Mehrling P.* Minsky and Modern Finance // *J. Portfolio Management*. Vol. 26. No. 2. 2000. P. 81—88.
- [655] *Meleis H.* Toward the Information Network // *Computer*. Vol. 29. No. 10. 1996. P. 59—67.
- [656] *Melman A.* Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods // *SIAM Rev.* Vol. 39. No. 4. 1997. P. 728—735.
- [657] *Menger C.* Investigations into the Method of the Social Sciences with Special Reference to Economics. NY: New York Univ. Press, 1985.
- [658] *Merton R. C.* Options // [307, p. 213—218].
- [659] *Merton R. C.* Influence of Mathematical Models in Finance on Practice: Past, Present and Future // *Philos. Trans. Royal Soc. London A*. Vol. 347. No. 1684. 1994. P. 451—463.
- [660] *Merton R. C.* Continuous-Time Finance. Revised ed. Cambridge, MA: Blackwell, 1994.
- [661] *Merton R. C.* Finance Theory and Future Trends: The Shift to Integration // *Risk*. Vol. 12. No. 7. 1999. P. 48—51.
- [662] *Merton R. C., Scholes M. S.* Fischer Black // *J. Finance*. Vol. 50. No. 5. 1995. P. 1359—1370.
- [663] *Milevsky M. A., Posner S. E.* A Closed-Form Approximation for Valuing Basket Options // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 4. 1998. P. 54—61.
- [664] *Milevsky M. A., Posner S. E.* Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 33. No. 3. 1998. P. 409—422.
- [665] *Mill J. S.* Principles of Political Economy. Books IV and V. NY: Penguin, 1985. [First published in 1848].
- [666] *Miller M. H.* The History of Finance // *J. Portfolio Management*. Vol. 25. No. 4. 1999. P. 95—101.
- [667] *Mills T. C.* Time Series Techniques for Economists. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [668] *Mil'shtein G. N.* Approximate Integration of Stochastic Differential Equations // *Theory Probab. Appl.* Vol. 19. No. 2. 1974. P. 557—562.
- [669] *Mil'shtein G. N.* A Method of Second-Order Accuracy Integration of Stochastic Differential Equations // *Theory Probab. Appl.* Vol. 23. No. 2. 1978. P. 396—401.
- [670] *Miltersen K. R.* An Arbitrage Theory of the Term Structure of Interest Rates // *Ann. Appl. Probab.* Vol. 4. No. 4. 1994. P. 953—967.
- [671] *Mises R. von.* Probability, Statistics, and Truth. NY: Dover, 1981. [First published in 1928].
- [672] *Moad J.* Time for a Fresh Approach to DOI // *Datamation*. Vol. 41. No. 3. 1995. P. 57—59.
- [673] *Modigliani F., Modigliani L.* Risk-Adjusted Performance // *J. Portfolio Man-*

- agement. Vol. 23. No. 2. 1997. P. 45—54.
- [674] *Modigliani F., Sutch R.* Innovations in Interest Rate Policy // *Amer. Econom. Rev.* Vol. 56. No. 2. 1966. P. 178—197.
- [675] *Mohanty S. G.* Lattice Path Counting and Applications. NY: Academic, 1979.
- [676] *Montesquieu C. de.* The Spirit of Laws. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. [First published in 1748].
- [677] *Moraleda J. M., Pelsser A.* Forward versus Spot Interest Rate Models of the Term Structure: An Empirical Comparison // *J. Derivatives*. Vol. 7. No. 3. 2000. P. 9—21.
- [678] *Moro B.* The Full Monte // *Risk*. Vol. 8. No. 2. 1995. P. 57—58.
- [679] *Morokoff W. J.* Generating Quasi-Random Paths for Stochastic Processes // *SIAM Rev.* Vol. 40. No. 4. 1998. P. 765—788.
- [680] *Mossin J.* Equilibrium in a Capital Asset Market // *Econometrica*. Vol. 34. No. 4. 1966. P. 768—783.
- [681] *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale Methods in Financial Modeling. Berlin: Springer, 1997.
- [682] *Musiela M., Turnbull S. M., Wakeman L. M.* Interest Rate Risk Management // *Rev. Futures Markets*. Vol. 12. No. 1. 1993. P. 221—261.
- [683] *Myneni R.* The Pricing of the American Options // *Ann. Appl. Probab.* Vol. 2. No. 1. 1992. P. 1—23.
- [684] *Nabar P. G., Tierney J. E.* Market Dynamics of Eleventh District COFI in a Post-RTC World // *J. Fixed Income*. Vol. 3. No. 3. 1993. P. 63—70.
- [685] *Nagot I., Trommsdorff R.* The Tree of Knowledge // *Risk*. Vol. 12. No. 8. 1999. P. 99—102.
- [686] *Narayana T. V.* Lattice Path Combinatorics with Statistical Applications. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1979.
- [687] *Nash S. G., Sofer A.* Linear and Nonlinear Programming. NY: McGraw-Hill, 1996.
- [688] *Nath A.* The Guide to SQL Server. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995.
- [689] *Nauss R. M.* Bond Portfolio Analysis Using Integer Programming // [891, ch. 11].
- [690] *Nawalkha S. K., Chambers D. R.* The Binomial Model and Risk Neutrality: Some Important Details // *Financial Rev.* Vol. 30. No. 3. 1995. P. 605—615.
- [691] *Neftci S. N.* Value at Risk Calculation, Extreme Events and Tail Estimation // *J. Derivatives*. Vol. 7. No. 3. 2000. P. 23—37.
- [692] *Neftci S. N.* An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. 2nd ed. San Diego, CA: Academic, 2000.
- [693] *Negrych C., Senft D.* Portfolio Insurance Using Synthetic Puts—the Reasons, Rewards and Risks // [321, ch. 12].
- [694] *Nelson C. R.* The Term Structure of Interest Rates. NY: Basic Books, 1972.
- [695] *Nelson C. R., Siegel A. F.* Parsimonious Modeling of Yield Curves // *J. Business*. Vol. 60. No. 4. 1987. P. 473—489.
- [696] *Nelson D. B., Ramaswamy K.* Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models // *Rev. Financial Stud.* Vol. 3. No. 3. 1990. P. 393—430.
- [697] *Nyborg K. G.* The Use and Pricing of Convertible Bonds // *Appl. Math. Finance*. Vol. 3. No. 2. 1996. P. 167—190.
- [698] *New York Institute of Finance.* Stocks, Bonds, Options, Futures: Investments and Their Markets. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [699] *Niederreiter H.* Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. Philadelphia: Society for Applied and Industrial Mathematics, 1992.
- [700] *Nielsen J. A., Sandmann K.* The Pricing of Asian Options under Stochastic Interest Rates // *Appl. Math. Finance*. Vol. 3. No. 3. 1996. P. 209—236.
- [701] *Noble B.* Applied Linear Algebra. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969.
- [702] *Ogden J. P.* An Analysis of Yield Curve Notes // *J. Finance*. Vol. 42. No. 1. 1987. P. 99—110.
- [703] *Ohmae K.* Five Strong Signals of Japan's Coming Crash // *Straits Times*. 6 Jul 1998. P. 28.
- [704] *Omberg E.* A Note on the Convergence of Binomial-Pricing and Compound-Option Models // *J. Finance*. Vol. 42. No. 2. 1987. P. 463—469.

- [705] *Oreizy P., Kaiser G.* The Web as Enabling Technology for Software Development and Distribution // *Internet Comput.* Vol. 1. No. 6. 1997. P. 84—87.
- [706] *Ortega J. M.* Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems. NY: Plenum, 1988. [Имеется русский перевод: *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.]
- [707] *Ortega J. M., Voigt R. G.* Solution of Partial Differential Equations on Vector and Parallel Computers. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [708] *Orvis W. J.* Excel for Scientists and Engineers. 2nd ed. San Francisco: SYBEX, 1995.
- [709] *Osborne M.* Brownian Motion in the Stock Market // *Oper. Res.* Vol. 7. No. 2. 1959. P. 145—173.
- [710] *Papadimitriou C. H.* Computational Complexity. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995.
- [711] *Papageorgiou A., Traub J. F.* New Results on Deterministic Pricing of Financial Derivatives. Technical Report CUCS-028-96. Department of Computer Science. Columbia Univ. NY. 1996.
- [712] *Paquette L., Vankudre P.* Citicorp's Rich/Cheap Model for Treasury Securities. Research Series. Citicorp Fixed Income Research. NY. Vol. 3. No. 4. Sep 1988.
- [713] *Parkinson M.* Option Pricing: The American Put // *J. Business.* Vol. 50. No. 1. 1977. P. 21—36.
- [714] *Parnas D. L.* Why Software Jewels Are Rare // *Computer.* Vol. 29. No. 2. 1996. P. 57—60.
- [715] *Paskov S. H.* New Methodologies for Valuing Derivatives. Technical Report CUCS-029-96. Department of Computer Science. Columbia Univ. NY. 1996; New Methodologies for Valuing Derivatives // *Mathematics of Derivative Securities* / Ed. S. Pliska, M. Dempster. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [716] *Paskov S. H., Traub J. F.* Faster Valuation of Financial Derivatives. Technical Report CUCS-030-96. Department of Computer Science. Columbia Univ. NY. 1996.
- [717] *Patterson D. A., Hennessy J. H.* Computer Organization & Design: The Hardware/Software Interface. 2nd ed. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1994.
- [718] *Pelsser A., Vorst T.* The Binomial Model and the Greeks // *J. Derivatives.* Vol. 1. No. 3. 1994. P. 45—49.
- [719] *Peterson L. L., Davie B. S.* Computer Networks: A Systems Approach. 2nd ed. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 2000.
- [720] *Phelan M. J.* Probability and Statistics Applied to the Practice of Financial Risk Management: The Case of JP Morgan's RiskMetrics™. Working paper 95-19. Wharton School. Univ. of Pennsylvania. Philadelphia.
- [721] *Phillips D. T., Ravindran A., Solberg J. J.* Operations Research: Principles and Practice. NY: Wiley, 1976.
- [722] *Phoa W.* Can You Derive Market Volatility Forecasts from the Observed Yield Curve Convexity Bias? // *J. Fixed Income.* Vol. 7. No. 1. 1997. P. 43—54.
- [723] *Pikovsky I., Karatzas I.* Anticipative Portfolio Optimization // *Adv. Appl. Probab.* Vol. 28. No. 4. 1996. P. 1095—1122.
- [724] *Pitts M., Fabozzi F. J.* Introduction to Interest-Rate Futures and Options Contracts // [328, ch. 50].
- [725] *Pliska S. R.* Introduction to Mathematical Finance: Discrete-Time Models. Malden, MA: Blackwell, 1997.
- [726] *Prechelt L.* An Empirical Comparison of Seven Programming Languages // *Computer.* Vol. 33. No. 10. 2000. P. 23—29.
- [727] *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. 2nd ed. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [728] *Pritsker M.* Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models // *Rev. Financial Stud.* Vol. 11. No. 3. 1998. P. 449—487.
- [729] *Public Securities Association.* Standard Formulas for the Analysis of Mortgage-

- Backed Securities and Other Related Securities. 1 Jul 1990.
- [730] *Raymar S. B., Zwecher M. J.* Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 1. 1997. P. 7—23.
- [731] *Rebonato R.* Interest-Rate Option Models: Understanding, Analyzing and Using Interest Rate Models for Exotic Interest-Rate Options. 2nd ed. NY: Wiley, 1998.
- [732] *Redington F. M.* Review of the Principles of Life-Office Valuations // *J. Inst. Actuar.* Vol. 18. No. 3. 1952. P. 286—315.
- [733] *Regli W.* Intranets // *Internet Comput.* Vol. 1. No. 5. 1997. P. 6—7.
- [734] *Reiner E.* Quanto Mechanics // [744, ch. 22].
- [735] *Reisman H.* A Binomial Tree for the Hull and White Model with Probabilities Independent of the Initial Term Structure // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 3. 1996. P. 92—96.
- [736] *Renaud P. E.* Introduction to Client/Server Systems: A Practical Guide for Systems Professionals. NY: Wiley, 1993.
- [737] *Rendleman R. J., jr.* Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures // *J. Fixed Income*. Vol. 9. No. 1. 1999. P. 84—91.
- [738] *Rendleman R. J., jr., Bartter B. J.* Two State Option Pricing // *J. Finance*. Vol. 34. No. 5. 1979. P. 1093—1110.
- [739] *Rendleman R. J., jr., Bartter B. J.* The Pricing of Options on Debt Securities // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 15. No. 1. 1980. P. 11—24.
- [740] *Rich D. R.* The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory // *Adv. Futures Options Res.* Vol. 7. 1994. P. 267—311.
- [741] *Richard S. F.* An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates // *J. Financial Econom.* Vol. 6. No. 1. 1978. P. 38—57.
- [742] *Richard S. F., Roll R.* Prepayments on Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities // *J. Portfolio Management*. Vol. 15. No. 3. 1989. P. 73—82.
- [743] *Richardson M., Smith T.* A Test for Multivariate Normality in Stock Returns // *J. Business*. Vol. 66. No. 2. 1993. P. 295—321.
- [744] *Risk Magazine.* From Black—Scholes to Black Holes: New Frontiers in Options. London: RISK/FINEX, 1992.
- [745] *Ritchken P.* On Pricing Barrier Options // *J. Derivatives*. Vol. 3. No. 2. 1995. P. 19—28.
- [746] *Ritchken P.* Derivative Markets: Theory, Strategy, and Applications. NY: Harper-Collins, 1996.
- [747] *Ritchken P., Sankarasubramanian L.* Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure // *Math. Finance*. Vol. 5. No. 1. 1995. P. 55—72.
- [748] *Ritchken P., Sankarasubramanian L., Vijh A. M.* The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average // *Management Sci.* Vol. 39. No. 10. 1993. P. 1202—1213.
- [749] *Ritchken P., Trevor R.* Pricing Options under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes // *J. Finance*. Vol. 54. No. 1. 1999. P. 377—402.
- [750] *Ritter L. S., Silber W. L.* Principles of Money, Banking, and Financial Markets. NY: Basic Books, 1991.
- [751] *Roberds W., Runkle D., Whiteman C. H.* A Daily View of Yield Spreads and Short-Term Interest Rate Movements // *J. Money Credit Bank*. Vol. 28. No. 1. 1996. P. 34—53.
- [752] *Roberts G. O., Shortland C. F.* Pricing Barrier Options with Time-Dependent Coefficients // *Math. Finance*. Vol. 7. No. 1. 1997. P. 83—93.
- [753] *Rogers L. C. G.* Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage // *Stochast. Stochast. Rep.* Vol. 51. No. 1. 1994. P. 41—49.
- [754] *Rogers L. C. G.* Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use? // *Mathematical Finance* / Ed. M. H. A. Davis, D. Duffie, W. H. Fleming, S. E. Shreve. Berlin: Springer, 1995.
- [755] *Rogers L. C. G., Shi Z.* The Value of an Asian Option // *J. Appl. Probab.* Vol. 32. No. 4. 1995. P. 1077—1088.
- [756] *Rogers L. C. G., Stapleton E. J.* Fast Accurate Binomial Pricing // *Finance &*

- Stochastics. Vol. 2. No. 1. 1998. P. 3—17.
- [757] *Rogers L. C. G., Zane O.* Valuing Moving Barrier Options // *J. Comp. Finance*. Vol. 1. No. 1. 1997. P. 5—11.
- [758] *Roll R.* Collateralized Mortgage Obligations: Characteristics, History, Analysis // [320, p. 7—43].
- [759] *Roll R.* U. S. Treasury Inflation-Indexed Bonds: The Design of a New Security // *J. Fixed Income*. Vol. 6. No. 3. 1996. P. 9—28.
- [760] *Roll R., Ross S. A.* On the Cross-Sectional Relation between Expected Returns and Betas // *J. Finance*. Vol. 49. No. 1. 1994. P. 101—121.
- [761] *Rose C.* Bounded and Unbounded Stochastic Processes // [854, ch. 11].
- [762] *Rose M. E.* The Effective Cash Flow Method // *J. Fixed Income*. Vol. 4. No. 2. 1994. P. 66—79.
- [763] *Ross S. M.* Stochastic Processes. NY: Wiley, 1983.
- [764] *Ross S. M.* Introduction to Probability Models. 5th ed. NY: Wiley, 1993.
- [765] *Ross S. A.* The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing // *J. Financial Econom.* Vol. 13. No. 3. 1976. P. 341—360.
- [766] *Ross S. A.* Finance // [307, p. 1—34].
- [767] *Ross S. A., Westerfield R. W., Jaffe J. F.* Corporate Finance. Burr Ridge, IL: Irwin, 1993.
- [768] *Rubinstein M.* Guiding Force // [744, ch. 4].
- [769] *Rubinstein M.* One for Another // [744, ch. 29].
- [770] *Rubinstein M.* Implied Binomial Trees // *J. Finance*. Vol. 49. No. 3. 1994. P. 771—818.
- [771] *Rubinstein M.* Edgeworth Binomial Trees // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 3. 1998. P. 20—27.
- [772] *Rubinstein M., Leland H. E.* Replicating Options with Positions in Stock and Cash // *Financial Analysts J.* Vol. 37. No. 4. 1981. P. 63—72.
- [773] *Rubinstein R. Y.* Simulation and the Monte Carlo Method. NY: Wiley, 1981.
- [774] *Rümelin W.* Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations // *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 19. No. 3. 1982. P. 604—613.
- [775] *Rumsey J.* Pricing Cross-Currency Options // *J. Futures Markets*. Vol. 11. No. 1. 1991. P. 89—93.
- [776] *Saaty T. L.* Modern Nonlinear Equations. NY: Dover, 1981.
- [777] *Sack B.* Deriving Inflation Expectations from Nominal and Inflation-Indexed Treasury Yields // *J. Fixed Income*. Vol. 10. No. 2. 2000. P. 6—17.
- [778] *Samuelson P. A.* Economics. 11th ed. NY: McGraw-Hill, 1980. [Имеется русский перевод: Самуэльсон П. Экономика. Киев: Вильямс, 2000.]
- [779] *Sandmann K.* The Pricing of Options with an Uncertain Interest Rate: A Discrete-Time Approach // *Math. Finance*. Vol. 3. No. 2. 1993. P. 201—216.
- [780] *Sandmann K., Sondermann D.* A Term Structure Model and the Pricing of Interest Rate Derivatives // *Rev. Futures Markets*. Vol. 12. No. 2. 1993. P. 391—423.
- [781] *Sandmann K., Sondermann D.* A Note on the Stability of Lognormal Interest Rate Models and the Pricing of Eurodollar Futures // *Math. Finance*. Vol. 7. No. 2. 1994. P. 119—125.
- [782] *Sandmann K., Sondermann D.* Log-Normal Interest Rate Models: Stability and Methodology. Manuscript, 10 Jan 1997.
- [783] *Schroder M.* Change of Numeraire for Pricing Futures, Forwards, and Options // *Rev. Financial Stud.* Vol. 12. No. 5. 1999. P. 1143—1163.
- [784] *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. NY: Freeman, 1991.
- [785] *Schumpeter J. A.* The Theory of Economic Development: An Inquiry into Profits, Capital, Credit, Interest, and the Business Cycle / Transl. R. Opie. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1934. [First published in 1911].
- [786] *Schumpeter J. A.* History of Economic Analysis. NY: Oxford Univ. Press, 1954.
- [787] *Schumpeter J. A.* Essays on Entrepreneurs, Innovations, Business Cycles, and the Evolution of Capitalism / Ed. K. V. Clemence.

- New Brunswick, NJ: Transaction Publishers, 1989.
- [788] *Schwartz E. S., Torous W. N.* Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities // *J. Finance*. Vol. 44. No. 2. 1989. P. 375—392.
- [789] *Schwartz E. S., Torous W. N.* Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through Securities // *J. Business*. Vol. 65. No. 2. 1992. P. 221—239.
- [790] *Scott L. O.* Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 22. No. 4. 1987. P. 419—438.
- [791] *Sedgewick R.* Algorithms. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.
- [792] *Seeman B. S.* An Introduction to Index Amortizing Swaps (IASs) // *J. Fixed Income*. Vol. 4. No. 2. 1994. P. 6—16.
- [793] *Selby M. J. P., Strickland C.* Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Price Formula // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 78—84.
- [794] *Senft D.* Parallel Processing on Wall Street // *Proceedings of the Commercial Applications of Parallel Processing Systems Conference*. Austin, Texas: MCC, Oct 1993.
- [795] *Sharpe W. F.* A Simplified Model for Portfolio Analysis // *Management Sci.* Vol. 9. No. 1. 1963. P. 277—293.
- [796] *Sharpe W. F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // *J. Finance*. Vol. 19. No. 3. 1964. P. 425—442.
- [797] *Sharpe W. F.* Investments. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [798] *Sharpe W. F.* The Sharpe Ratio // *J. Portfolio Management*. Vol. 21. No. 1. 1994. P. 49—58.
- [799] *Sharpe W. F., Alexander G. J., Bailey J. V.* Investments. 5th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [800] *Shea G. S.* Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 19. No. 3. 1984. P. 253—269.
- [801] *Shea G. S.* Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note // *J. Finance*. Vol. 40. No. 1. 1985. P. 319—325.
- [802] *Silvey S. D.* Statistical Inference. London: Chapman & Hall, 1988.
- [803] *Singh M. K.* Estimation of Multifactor Cox, Ingersoll and Ross Term Structure Model: Evidence on Volatility Structure and Parameter Stability // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 8—28.
- [804] *Singh M. K.* Value at Risk Using Principal Components Analysis // *J. Portfolio Management*. Vol. 24. No. 1. 1997. P. 101—112.
- [805] *Skidelsky R.* John Maynard Keynes: Hope Betrayed, 1883—1920. NY: Elisabeth Sifton, 1983.
- [806] *Skidelsky R.* John Maynard Keynes: The Economist as Savior, 1920—1937. NY: Penguin, 1992.
- [807] *Skidelsky R.* John Maynard Keynes: Fighting for Britain, 1937—1946. London: Macmillan, 2000.
- [808] *Smith A.* Adam Smith's Moral and Political Philosophy / Ed. H. W. Schneider. NY: Harper & Row, 1970.
- [809] *Smith C. W., jr.* Corporate Risk Management: Theory and Practice // *J. Derivatives*. Vol. 2. No. 4. 1995. P. 21—30.
- [810] *Smith G. D.* Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. 3rd ed. Oxford, U. K.: Oxford Univ. Press, 1985.
- [811] *Smithson C.* Wonderful Life // [744, ch. 2].
- [812] *Smithson C.* Path Dependency // *Risk*. Vol. 10. No. 4. 1997. P. 65—67.
- [813] *Smithson C.* Does Risk Management Work? // *Risk*. Vol. 12. No. 7. 1999. P. 44—45.
- [814] *Soner H. M., Shreve S. E., Cvitanic J.* There Is No Nontrivial Hedging Portfolio for Option Pricing with Transaction Costs // *Ann. Appl. Probab.* Vol. 5. No. 2. 1995. P. 327—355.
- [815] *Sparks A., Sung F. F.* Prepayment Convexity and Duration // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 7—11.
- [816] *Spiegel M. R.* Theory and Problems of Statistics. NY: McGraw-Hill, 1961. (Schaum's Outline Series).

- [817] *Spitzer F.* Principles of Random Walk. Princeton, NJ: D. Van Nostrand, 1964.
- [818] *Stanton R.* Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities // *Rev. Financial Stud.* Vol. 8. No. 3. 1995. P. 677—708.
- [819] *Stanton R.* A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk // *J. Finance.* Vol. 52. No. 5. 1997. P. 1973—2002.
- [820] *Stanton R., Wallace N.* Anatomy of an ARM: The Interest-Rate Risk of Adjustable-Rate Mortgages // *J. Real Estate Finance Econom.* Vol. 19. No. 1. 1999. P. 49—67.
- [821] *Stavis R. M., Haghani V. J.* Putable Swaps: Tools for Managing Callable Assets // [321, ch. 20].
- [822] *Steele J. M., Stine R. A.* *Mathematica and Diffusions* // [854, ch. 9].
- [823] *Stein E. M., Stein J. C.* Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach // *Rev. Financial Stud.* Vol. 4. No. 4. 1991. P. 727—752.
- [824] *Steiner M., Wellmeier M., Hafner R.* Pricing Near the Barrier: The Case of Discrete Knock-Out Options // *J. Comp. Finance.* Vol. 3. No. 1. 1999. P. 69—90.
- [825] *Stewart G. W.* On the Early History of the Singular Value Decomposition // *SIAM Rev.* Vol. 35. No. 4. 1993. P. 551—566.
- [826] *Stigler G. J.* *Essays in the History of Economics: Midway Reprint.* Chicago: Univ. of Chicago Press, 1987. [First published in 1965].
- [827] *Stigum M.* *Money Market Calculations: Yields, Break-Events and Arbitrage.* Homewood, IL: Irwin, 1981.
- [828] *Stigum M.* *The Money Market.* Newly revised ed. Homewood, IL: Irwin, 1983.
- [829] *Stone C. A., Zissu A.* The Risks of Mortgage Backed Securities and Their Derivatives // *J. Appl. Corp. Finance.* Vol. 7. No. 3. 1994. P. 99—111.
- [830] *Strang G.* *Linear Algebra and Its Applications.* 2nd ed. NY: Academic, 1980.
- [831] *Streeter L. A., Kraut R. E., Lucas H. C., jr., Caby L.* How Open Data Networks Influence Business Performance and Market Structure // *Comm. ACM.* Vol. 39. No. 7. 1996. P. 62—73.
- [832] *Stroustrup B.* *The C++ Programming Language.* 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.
- [833] *Stulz R.* Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets // *J. Financial Econom.* Vol. 10. No. 2. 1982. P. 161—185.
- [834] *Sullivan M. A.* Valuing American Put Options Using Gaussian Quadrature // *Rev. Financial Stud.* Vol. 13. No. 1. 2000. P. 75—95.
- [835] *Sun T.-S.* Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and Its Continuous-Time Limit // *Rev. Financial Stud.* Vol. 5. No. 4. 1992. P. 581—611.
- [836] *Sundaram R. K.* Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing: An Expository Note // *J. Derivatives.* Vol. 5. No. 1. 1997. P. 85—98.
- [837] *Sundaresan S. M.* *Fixed Income Markets and Their Derivatives.* Cincinnati, OH: South-Western College Publishing, 1997.
- [838] *Takács L.* *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes.* NY: Wiley, 1967. [Имеется русский перевод: *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории стохастических процессов. М.: Мир, 1971.]
- [839] *Taylor S.* *Modelling Financial Time Series.* NY: Wiley, 1986.
- [840] *Taylor S. J.* Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study // *Math. Finance.* Vol. 4. No. 2. 1994. P. 183—204.
- [841] *Tian Y.* Pricing Complex Barrier Options under General Diffusion Processes // *J. Derivatives.* Vol. 7. No. 2. 1999. P. 11—30.
- [842] *Tilley J. A.* Valuing American Options in a Path Simulation Model // *Trans. Soc. Actuar.* Vol. 45. 1993. P. 83—104.
- [843] *Tobin J.* Financial Intermediaries // [307, p. 35—56].
- [844] *Tompkins R.* Behind the Mirror // [744, ch. 19].
- [845] *Tompkins R. G.* Power Options: Hedging Nonlinear Risks // *J. Risk.* Vol. 2. No. 2, 1999. P. 29—45.
- [846] *Trivedi K. S.* *Probability and Statistics with Reliability, Queueing and Computer Science Applications.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1982.

- [847] *Tsiveriotis K., Fernandes C.* Valuing Convertible Bonds with Credit Risk // *J. Fixed Income*. Vol. 8. No. 2. 1998. P. 95–102.
- [848] *Tuckman B.* Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets. NY: Wiley, 1995.
- [849] *Turnbull S. M.* Swaps: A Zero Sum Game? // *Financial Management*. Vol. 16. No. 1. 1987. P. 15–21.
- [850] *Turnbull S. M., Milne F.* A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing // *Rev. Financial Stud.* Vol. 4. No. 1. 1991. P. 87–120.
- [851] *Turnbull S. M., Wakeman L. M.* A Quick Algorithm for Pricing European Average Options // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 26. No. 3. 1991. P. 377–389.
- [852] *U. S. Department of Commerce.* The Emerging Digital Economy. Springfield, VA: National Technical Information Service, 1998.
- [853] *Varian H. R.* The Arbitrage Principle in Financial Economics // *J. Econom. Perspect.* Vol. 1. No. 2. 1987. P. 55–72.
- [854] *Varian H. R., ed.* Economic and Financial Modeling with *Mathematica*. Berlin: Springer, 1993.
- [855] *Vasicek O.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure // *J. Financial Econom.* Vol. 5. No. 2. 1977. P. 177–188.
- [856] *Vasicek O. A., Fong H. G.* Term Structure Modeling Using Exponential Splines // *J. Finance*. Vol. 37. No. 2. 1982. P. 339–348.
- [857] *Venkataraman S.* Value at Risk for a Mixture of Normal Distributions: The Use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques // *Econom. Perspect.* Vol. 21. No. 2. 1997. P. 2–13.
- [858] *Vetzal K. R.* A Survey of Stochastic Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates // *Insurance Math. Econom.* Vol. 14. No. 2. 1994. P. 139–161.
- [859] *Vetzal K. R.* An Improved Finite Difference Approach to Fitting the Initial Term Structure // *J. Fixed Income*. Vol. 7. No. 4. 1998. P. 62–81.
- [860] *Viner J.* Essays on the Intellectual History of Economics / Ed. D. A. Irwin. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1991.
- [861] *Vvedensky D.* Partial Differential Equations with *Mathematica*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1993.
- [862] *Wagner W. H.* Ten Myths and Twenty Years of Betas // *J. Portfolio Management*. Vol. 21. No. 1. 1994. P. 79–82.
- [863] *Wahba G.* Spline Methods for Observational Data. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [864] *Waldman M., Schwab A., Feigenberg A. K.* Prepayments of Fifteen-Year Mortgages // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 4. 1993. P. 37–44.
- [865] *Wall Street Journal.* The Wall Street Journal Almanac 1998. NY: Ballantine, 1997.
- [866] *Wallman S. M. H.* Technology Takes to Securities Trading // *IEEE Spectrum*. Vol. 34. No. 1. 1997. P. 60–65.
- [867] *Wang C.-L.* An Object-Oriented Framework Based on Three-Tier Client/Server Architecture for Financial Computation. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1996.
- [868] *Wang H.-W.* A Comparative Study of Numerical Algorithms for Interest Rate Models. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1997.
- [869] *Warsh D.* Convergence? Not Exactly // *Boston Globe*. 29 Sep 1998.
- [870] *Watkins D. S.* Fundamentals of Matrix Computations. NY: Wiley, 1991. [Имеется русский перевод: Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.]
- [871] *Watson R. T.* Data Management: Databases and Organizations. 2nd ed. NY: Wiley, 1999.
- [872] *Watson T. J., jr., Petre P.* Father, Son & Co.: My Life at IBM and Beyond. NY: Bantam, 1990.
- [873] *Wei J. Z.* Valuing Differential Swaps // *J. Derivatives*. Vol. 1. No. 3. 1994. P. 64–76.

- [874] *Wei J. Z.* Valuation of Discrete Barrier Options by Interpolations // *J. Derivatives*. Vol. 6. No. 1. 1998. P. 51—73.
- [875] *Weintraub K., Hogan M.* The Lognormal Interest Rate Model and Eurodollar Futures: Global Research. NY: Citicorp Securities, May 1998.
- [876] *Willard G. A.* Calculating Prices and Sensitivities for Path-Independent Derivative Securities in Multifactor Models // *J. Derivatives*. Vol. 5. No. 1. 1997. P. 45—61.
- [877] *Williams D.* Probability with Martingales. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [878] *Wilmott P.* Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering. NY: Wiley, 1998.
- [879] *Wilmott P., Howison S., Dewynne J.* The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [880] *Windas T.* An Introduction to Option-Adjusted Spread Analysis. NY: Bloomberg Magazine Publication, 1993.
- [881] *Wold H.* A Study in the Analysis of Stationary Time Series. 2nd ed. Uppsala, Sweden: Almqvist & Wiksells, 1954.
- [882] *Wolfram S.* *Mathematica*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [883] *Wong S. S. M.* Computational Methods in Physics and Engineering. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [884] *Woolley S.* Night Baseball without Lights // *Forbes*. 11 Aug 1997. P. 42—43.
- [885] *Wu C.-S.* Numerical Methods for Model Calibration under Credit Risk. Master's Thesis. Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan Univ., Taiwan, 1999.
- [886] *Xu X., Taylor S. J.* The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options // *J. Financial Quant. Anal.* Vol. 29. No. 1. 1994. P. 57—74.
- [887] *Yamamoto Y., Zenios S. A.* Predicting Prepayment Rates for Mortgages Using the Cascade-Correlation Learning Algorithm // *J. Fixed Income*. Vol. 2. No. 4. 1993. P. 86—96.
- [888] *Yarger R. J., Reese G., King T.* MySQL and mSQL. Sebastopol, CA: O'Reilly & Associates, 1999.
- [889] *Yawitz J. B.* Bonds with Embedded Options // [321, ch. 15].
- [890] *Zaretsky M.* Generation of a Smooth Forward Curve for U. S. Treasuries // *J. Fixed Income*. Vol. 5. No. 2. 1995. P. 65—69.
- [891] *Zenios S. A.* Financial Optimization. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [892] *Zenios S. A.* Parallel Monte Carlo Simulation of Mortgage-Backed Securities // [891, ch. 14].
- [893] *Zenios S. A.* A Model for Portfolio Management with Mortgage-Backed Securities // *Ann. Oper. Res.* Vol. 43. No. 1—4. 1993. P. 337—356.
- [894] *Zhang P. G.* Exotic Options: A Guide to Second Generation Options. Singapore: World Scientific, 1997.
- [895] *Zima P., Brown R. L.* Theory and Problems of Contemporary Mathematics of Finance. (Schaum's Outline Series). NY: McGraw-Hill, 1984.
- [896] *Zipkins P.* Mortgages and Markov Chains: A Simplified Evaluation Model // [891, ch. 13].
- [897] *Zvan R., Vetzal K., Forsyth P.* Swing Low Swing High // *Risk*. Vol. 11. No. 3. 1998. P. 71—75.

Написание этой книги было моей величайшей ошибкой. Я стыжусь ее.
 Чарльз Дарвин (1809—1882), *Автобиография*

Предметный указатель*)

Автоковариация (*autocovariance*) 364

Автокорреляция (*autocorrelation*) 364

Актив базовый (*underlying asset*) 111

Акция (*equity, stock*) 19

—, волатильность (*s. volatility*) 149

Амортизация (*amortization*) 35

—, коэффициент (*a. factor*) 539

Арбитраж (*arbitrage*) 123, 124

Арбитраж индексный (*index a.*) 220

—, принцип отсутствия (*no-a. principle*) 123

— треугольный (*triangular a.*) 283, 290

Арбитражер (*arbitrager*) 291

Арбитражная свобода слабая (*weakly arbitrage-free*) 625

— стоимость (*a. value*) 140

— теория оценки стоимости (*a. pricing theory*) 594

Базисный пункт (*basis point*) 68

—, стоимость (СБП) (*b. p. value (BPV)*) 68

—, цена (*price value of b. p.*) 68

— сдвиг ключевой ставки (*basic key-rate shift*) 518

Базовая ставка (*reference rate*) 189

— стоимость (*straight value*) 506

Базовый актив (*underlying asset*) 111

Банкнота (*note*) 500, 509

— Казначейства (БНК) (*Treasury n. (T-note)*) 47

— структурная (*structured n.*) 509

Белый шум (*white noise*) 365

Берри—Эссеена теорема (*Berry—Esseen theorem*) 328

Бескупонка (*zero*) 47

Бета (*beta*) 108, 588, 594

— доходности (*yield b.*) 68

Биномиальная модель (*binomial model*) 306, 318

— решетка (*b. lattice*) 139

Биномиальное дерево (*binomial tree*) 139

—, алгоритмы (*b. t. algorithms*) 144

— откалиброванное (*calibrated b. t.*) 423

— процентной ставки (*b. interest rate t.*) 414, 421

— расширенное (*extended b. t.*) 177

— цен состояния (*b. state price t.*) 423

Блэка модель (*Black model*) 586

Блэка—Дермана—Тоя модель (БДТ) (*Black—Derman—Toy model (BDT)*) 477

Блэка—Карасинского модель (*Black—Karasinski model*) 480

Блэка—Шоулса дифференциальное уравнение (*Black—Scholes differential equation*) 273

— модель (*B.—S. model*) 134, 197

— формула (*B.—S. formula*) 151

Бреннана—Шварца модель (*Brennan—Schwartz model*) 466

Броуновский мост (*Brownian bridge*) 249, 331

Броуновское движение (*Brownian motion*) 243

— геометрическое (*geometric B. m.*) 246

— нормированное (*normalized B. m.*) 244

— экспоненциальное (*exponential B. m.*) 246

— опущенное вниз (*tied-down B. m.*) 249

Брэдли—Крейна схема (*Bradley—Crane scheme*) 410

Бутстреп (*bootstrapping*) 76

Вальда мартингал (*Wald martingale*) 245

Валюта с премией (*premium currency*) 194

— со скидкой (*discount c.*) 194

Вариация квадратичная (*quadratic variation*) 248

— необъясненная (*unexplained v.*) 104

— объясненная (*explained v.*) 105

— полная (*total v.*) 105, 248

Варрант (*warrant*) 182

Васичека модель (*Vasicek model*) 454

— обобщенная (*extended V. m.*) 491

Вега (*vega*) 172

— нейтралитет (*v. neutrality*) 302

*) Символом * отмечены термины, относящиеся к закладным.

- Величина тика (*tick size*) 220
 Вероятность риск-нейтральная (*risk-neutral probability*) 137
 Винера теорема (*Wiener theorem*) 244
 Винера—Башелье процесс (*Wiener—Bachelier process*) 244
 Винеровский процесс (*Wiener process*) 244
 — обобщенный (*generalized W. p.*) 244
 Владение, период (*holding period*) 54
 Возвращение к среднему (*mean reversion*) 454
 Волатильность акции (*stock volatility*) 149
 —, временная структура (*time structure of v.*) 417
 — выявленная (*implied v.*) 157
 — индуцированная (*implied v.*) 156
 — историческая (*historical v.*) 156
 — «улыбка» (*«smile»*) 156
 — цены (*price v.*) 57
 Волновое уравнение (*wave equation*) 271
 *Воротник верхний (*upper collar*) 570
 * — нижний (*lower c.*) 570
 — процентных ставок (*interest rate c.*) 189
 Временная структура (*term structure*) 72
 — волатильности (*t. s. of volatility*) 417
 —, динамика (*t. s. dynamics*) 420, 461
 —, уравнение (*t. s. equation*) 443
 —, эволюция (*t. s. evolution*) 420
 Временной ряд (*time series*) 236, 361
 Время квадратичное (*quadratic time*) 27
 — кубическое (*cubic t.*) 27
 — линейное (*linear t.*) 27
 — логарифмическое (*logarithmic t.*) 27
 — экспоненциальное (*exponential t.*) 27
 Выбор времени поставки (*timing option*) 383
 — качества (*quality o.*) 383
 —, право связанное с поставкой (*delivery o.*) 383
 —, предоставление wild card (*wild card o.*) 383
 Выборка, объем (*sample size*) 328
 — расслоенная (*stratified s.*) 335
 — с учетом важности реализации (*importance s.*) 336
 Выборочная дисперсия (*sample variance*) 97
 Выборочное среднее (*sample mean*) 97
 — векторное (*s. m. vector*) 100
 — стандартное отклонение (*s. standard deviation*) 97
 Выпуклость (*convexity*) 57, 69, 71, 564
 — с учетом опциона (*option-adjusted c.*) 511
 — эффективная (*effective c.*) 69
 Гамма (*gamma*) 171
 — нейтралитет (*g. neutrality*) 300, 302
 Гаусса метод исключения неизвестных (*Gaussian elimination*) 344
 Гаусса—Маркова теорема (*Gauss—Markov theorem*) 108
 Генератор денежного потока (*cash flow generator*) 562
 Гивенса преобразования (*Givens transformations*) 354
 Гипотеза случайного блуждания (*random-walk hypothesis*) 365
 — эффективного рынка (*efficient market h.*) 366
 Гирсанова теорема (*Girsanov theorem*) 290
 Главные компоненты (*principal components*) 346
 График ЗПК (*PAC schedule*) 570
 Грэй код (*Gray code*) 339
 Грязная цена (*dirty price*) 52
 Дельта (*delta*) 136, 169, 295
 Денежный поток, генератор (*cash flow generator*) 562
 —, доходность статическая (*static c.f. yield*) 510, 547
 —, дюрация (*c.f. duration*) 558
 —, отображение (*c.f. mapping*) 605
 Денежный рынок (*money market*) 19
 —, счёт (*m. m. account*) 241
 Дерево биномиальное (*binomial tree*) 139
 —, алгоритмы (*b. t. algorithms*) 144
 — процентной ставки (*b. interest rate t.*) 414, 421
 — расширенное (*extended b. t.*) 177
 — цен состояния (*b. state price t.*) 423
 — откалиброванное (*calibrated b. t.*) 423
 — дифференциальное (*differential t.*) 427
 Детерминация, коэффициент (*coefficient of determination*) 105
 Дефолт, форвардная вероятность (*forward probability of default*) 83
 *Джамбо ссуда (*jumbo loan*) 524
 Дирака дельта-функция (*Dirac delta function*) 121
 Дисконтирование (*discounting*) 30
 Дисконтирующая функция (*discount function*) 75, 406, 454
 Дисконтирующий множитель (*discount factor*) 74
 Дисперсия (*variance*) 97, 244
 — выборочная (*sample v.*) 97
 Дифференциал Ито (*Ito differential*) 255
 Дифференциальное уравнение Блэка—Шоулса (*Black—Scholes differential equation*) 273
 — стохастическое (*stochastic d. e.*) 255
 Диффузия (*diffusion*) 255
 — логнормальная (*lognormal d.*) 246
 —, уравнение (*d. equation*) 271
 Долговое обязательство (*debt*) 18, 500

- Донскера теорема (*Donsker theorem*) 250
- Доходность (*yield*) 37
- , бета (*y. beta*) 68
 - в худшем случае (*y. to worst*) 49
 - внутренняя (ВД) (*internal rate of return (IRR)*) 39
 - *— денежного потока статическая (*static cash flow y.*) 510, 547
 - дивидендная (*dividend y.*) 159
 - — непрерывная (*continuous d. y.*) 162
 - дисконтная (*discount y.*) 38
 - до отзыва (*y. to call*) 49
 - до предполагаемого погашения (*y. to stated maturity*) 49
 - до реального погашения (*y. to effective maturity*) 49
 - за период владения (ДПВ) (*holding period return (HPR)*) 40, 516, 564
 - — до погашения (*y. to maturity*) 48
 - , кривая (*y. curve*) 72—74, 406
 - , — горбатая (*humped y. c.*) 73
 - , — нормальная (*normal y. c.*) 73
 - , — перевернутая (*inverted y. c.*) 73
 - , — плоская (*flat y. c.*) 73
 - , — своп (*y. -c. swap*) 402
 - , линейная интерполяция (*linear y. interpolation*) 407
 - номинальная (*nominal y.*) 37
 - по номиналу (*y. to parcall*) 509
 - ожидаемая (*expected return*) 137
 - продажная (*ask y.*) 39
 - , рассчитанная по банковскому дисконту (*y. on a bank discount basis*) 38
 - с учетом опциона (*option-adjusted y.*) 511
 - , СВ- (*CD-y.*) 38
 - , спрэд (*y. spread*) 74
 - текущая (*current y.*) 37
 - удобства (*convenience y.*) 221
 - , эквивалентная доходности сертификата вклада (*CD-equivalent y.*) 38
 - , — денежного рынка (*money-market-e. y.*) 38
 - , — залоговой ставке (ДЭЗ) (*mortgage-e. y. (MEY)*) 31
 - , — облигационной (ДЭО) (*bond-e. y. (BEY)*) 31
- Дюрация (*duration*) 57, 71, 89, 377, 564
- в долларах (*dollar d.*) 68
 - денежного потока (*cash flow d.*) 558
 - ключевой ставки (*key rate d.*) 91, 517
 - конца долгосрочного (*long-e. d.*) 91
 - — краткосрочного (*short-e. d.*) 90
 - модифицированная (МД) (*modified d.*) 60
 - по Бьервагу (*Bierwag d.*) 90
 - по Маклею (ДМ) (*Macaulay d. (MD)*) 59
 - — вторая (*M. second d.*) 90
- предоплаты (*prepayment d.*) 564
 - при параллельных сдвигах (*d. under parallel shifts*) 266
 - , смещение (*d. drift*) 65
 - спрэда, учитывающего опцию (*OAS duration*) 512
 - с учетом опциона (ДЮО) (*option-adjusted d. (OAD)*) 511
 - статическая (*static d.*) 558
 - Фишера—Вейля (*Fisher—Weil d.*) 94
 - эффективная (*effective d.*) 61
- З**акладная (*mortgage*) 521
- «воздушный шар» (*balloon m.*) 71
 - , заемщик (*mortgagor*) 521
 - , кредитор (*mortgagee*) 521
 - с корректируемой ставкой (ЗКС) (*adjustable-rate m. (ARM)*) 36
 - с корректируемыми выплатами (ЗКВ) (*adjustable-payment m. (APM)*) 531
 - с погашением постоянными выплатами (*level-payment (fully) amortized m.*) 35
 - — экспоненциально растущими выплатами (*graduated-p. m. (GPM)*) 37
 - согласованная (*conforming m.*) 523
 - , создатель (*m. originator*) 523
 - традиционная (*traditional m.*) 35
- Закон средней ковариации (*law of the average covariance*) 580
- Замещение, стоимость (*placement value*) 401
- Запаздывание (*lag*) 237
- Значение накопленное (НЗ) (*future value (FV)*) 30
- приведенное (*present v. (PV)*) 30
- И**ммунизация (*immunization*) 62, 71, 89, 91, 296
- полная (*full i.*) 66
- Инвестирование, период (*investment horizon*) 54
- Индексный фонд (*index fund*) 606
- Индукция обратная (*backward induction*) 139
- форвардная (*forward-i.*) 422
 - — триномиальная (*trinomial f.-i.*) 482
- Инструмент производный квантовый (*quanto derivative*) 284
- — кредитный (*credit d.*) 520
 - — многокомпонентный (*multivariate d.*) 316
 - с плавающей ставкой (*floating-rate instrument*) 66
- Интеграл стохастический (*stochastic integral*) 251
- — Ито (*Ito s. i.*) 251
 - — Стратоновича (*Stratonovich s. i.*) 254

- Информационное множество (*information set*) 98
- Ито дифференциал (*Ito differential*) 255
- лемма (*I. lemma*) 258
- процесс (*I. process*) 254
- , дискретная аппроксимация (*discrete approximation to I. p.*) 331
- стохастический интеграл (*I. stochastic integral*) 251
- К**азначейства банкнота (БНК) (*Tresuary note (T-note)*) 47
- вексель (ВК) (*T. bill (T-bill)*) 38
- облигация (ОК) (*T. bond (T-bond)*) 47
- Калибровка модели (*calibration*) 415, 466
- — приближенная (*approximate c.*) 420
- Капитал, прирост (*capital gain/loss*) 54
- , рынок (*c. market*) 19
- , рыночная линия (*c. market line (CML)*) 587
- Каппа (*kappa*) 172
- Квадратичное программирование (*quadratic programming*) 410
- Квазиметод Монте-Карло (*quasi-Monte Carlo method*) 321
- Квант (*quanto*) 284
- Ковариационная функция (*covariance function*) 236
- Ковариация (*covariance*) 98
- , матрица (*c. matrix*) 99
- , — выборочная (*sample c. m.*) 100
- Код Грэя (*Gray code*) 339
- Кокса—Ингерсолла—Росса модель (КИР) (*Cox—Ingersoll—Ross model (CIR)*) 457
- Колл (*call*) 111
- покрытый (*covered c.*) 117
- Колмогорова уравнение обратное (*Kolmogorov backward equation*) 245
- — прямое (*K. forward e.*) 245
- Комбинация (*combination*) 117, 121
- стрип (*strip*) 121
- стрэддл (*straddle*) 121
- стрэнгл (*strangle*) 121
- стрэп (*strap*) 121
- Компенсирующее урегулирование (*settled by offset*) 116
- Компенсирующий заказ (*offsetting order*) 116
- Конверсия вынужденная (*forced conversion*) 284
- , коэффициент (*c. ratio*) 183
- , паритет (*parity*) 506
- , стоимость (*c. value*) 285
- , цена (*c. price*) 506
- , — рыночная (*market c. p.*) 507
- Конвертация (*conversion*) 128
- Контракт инвестиционный гарантируемый (ГИК) (*guaranteed investment contract (GIC)*) 398
- , объем (*c. size*) 215
- , срок оплаты (*stated payment delay*) 566
- форвардный (*forward c.*) 82, 233
- — зонный (*range f. c.*) 196
- — условный (*conditional f. c.*) 196
- — участвующий (*participating f. c.*) 196
- фьючерсный (*futures c.*) 207, 215
- Контрольные переменные (*control variates*) 334
- Корниша—Фишера разложение (*Cornish—Fisher expansion*) 606
- Корреляционная матрица (*correlation matrix*) 99
- Корреляция (*correlation*) 98, 106
- , коэффициент (*c. coefficient*) 98
- , — выборочный Пирсона (*Pearson sample c. c.*) 106
- Костантинидеса модель (*Costantinides model*) 465
- *Коэффициент амортизации (*ammortization factor*) 539
- асимметрии (*skewness*) 97, 606
- детерминации (*coefficient of determination*) 105
- задолженности (*debt-to-total-value ratio*) 179
- конверсии (*conversion ratio*) 183
- корреляции (*correlation coefficient*) 98
- — Пирсона выборочный (*Pearson sample c. c.*) 106
- *— оплаты (*payment f.*) 539
- *— пула (*pool f.*) 539
- *— разбавления (*dilution f.*) 184
- *— ренты (*annuity f.*) 539
- хеджирования (*hedge ratio*) 68, 136, 295, 320
- эксцесса (*kurtosis*) 97
- Кранка—Никольсона метод (*Crank—Nicolson method*) 324
- Кривая доходности (*yield curve*) 72, 74, 406
- — номинальной (*par y. c.*) 73
- , —, своп (*y. -c. swap*) 402
- паритета по свопу (*par swap c.*) 397
- спот-ставок (*spot rate c.*) 74, 406
- ставок свопа (*zero-coupon swap c.*) 397
- форвардных ставок (*forward rate c.*) 406
- Критерии стресса (*stress test*) 604
- Куна—Таккера условия (*Kuhn—Tucker conditions*) 692
- Купон (*coupon*) 78
- средневзвешенный (СВК) (*weighted average c. (WAC)*) 549
- *— текущий (*current c.*) 533

Лагранжа множитель (*Lagrange multiplier*) 582

Ланжевена уравнение (*Langevin equation*) 255

Лемма Ито (*Ito lemma*) 258

— Фаркаша (*Farka l.*) 625

Линейное программирование (*linear programming*) 70

Логнормальная диффузия (*lognormal diffusion*) 246

Лямбда (*lambda*) 172

Ляпунова условие (*Lyapunov condition*) 149

МакКалоча схема (*McCulloch scheme*) 410

Марграбе формула (*Margrabe formula*) 279

Маржа (*margin*) 540

Марковица модель (*Markowitz model*) 586

— проблема (*M. problem*) 581

Марковская модель (*Markov model*) 490

Марковский процесс (*Markov process*) 237

Мартингал (*martingale*) 238

— Вальда (*Wald m.*) 245

Математическое ожидание (*mean*) 97

— — полное (*iterated conditional expectation*) 99

— — условное (*conditional expectation*) 98, 334

Матрица диагональная (*diagonal matrix*) 343

— единичная (*identity m.*) 343

— квадратная (*square m.*) 343

— — симметричная (*s. symmetric m.*) 343

— ковариации (*covariance m.*) 99

— — выборочная (*sample c. m.*) 100

— ковариационная (*specific variances*) 354

— корреляционная (*correlation m.*) 99

— ленточная (*banded m.*) 345

— неотрицательно определенная (*positive semidefinite m.*) 344

— ортогональная (*orthogonal m.*) 344

— положительно определенная (*positive definite m.*) 344

— псевдообратная (*pseudoinverse m.*) 351

—, ранг (*rank of m.*) 343

—, сингулярное разложение (CPM) (*singular value decomposition (SVD)*) 348

—, собственное значение (*eigenvalue of m.*) 346

—, собственный вектор (*eigenvector of m.*) 346

Мера чувствительности (*sensitivity measure («the greek»)*) 169

— — амулет (*charm*) 170

— — вега (*vega*) 172

— — гамма (*gamma*) 171

— — дельта (*delta*) 169

— — каппа (*kappa*) 172

— — лямбда (*lambda*) 172

— — распад во времени (*time decay*) 170

— — ро (*rho*) 173

— — сигма (*sigma*) 172

— — скорость (*speed*) 174

— — тэта (*theta*) 170

— — цвет (*color*) 174

Мертонa модель (*Merton model*) 265

Метод аналоговый (*analog method*) 110

— деления пополам (*bisection m.*) 42

— дисконтный (*discount m.*) 38

— дифференциального дерева (*differential tree m.*) 427

— добавления (*add-on m.*) 38

— исключения неизвестных Гаусса (*Gaussian elimination*) 344

— конечных разностей (*finite-difference m.*) 321

— Кранка—Никольсона (*Crank—Nicolson m.*) 324

— максимального правдоподобия (МП) (*maximum likelihood m. (ML)*) 109, 368

— моментов (*m. of moments*) 110

— — обобщенный (*generalized m. m. (GMM)*) 372

— Монте-Карло (*Monte Carlo m.*) 147, 321

— — квази- (*quasi-M. C. m.*) 321

— наименьших квадратов (*least-squares principle*) 103, 105, 349, 350

— — взвешенных (*weighted l.-s. problem*) 352

— неявный (*implicit m.*) 323

— Ньютона—Рафсона (*Newton—Raphson m.*) 43

— просеяния (*polar rejection m.*) 102

— оценки финансовых активов (*capital asset pricing m. (CAPM)*) 296, 578

— Риддерса (*Ridders m.*) 45

— триномиальная (*trinomial m.*) 304

— хорд (*secant m.*) 44

— Эйлера (*Euler m.*) 255

— Эйлера—Маруямы (*Euler—Maruyama m.*) 255

— явный (*explicit m.*) 323

Мильштейна схема (*Mil'shtein scheme*) 255

Моделирование историческое (*historical simulation*) 602

Модель безарбитражная (*arbitrage-free model, no-arbitrage m.*) 415, 471

— биномиальная (*binomial m.*) 134, 268, 306, 318

— Блэка (*Black m.*) 586

— Блэка—Дермана—Тоя (БДТ) (*Black—Derman—Toy m. (BDT)*) 477

— Блэка—Карасинского (*Black—Karasin-ski m.*) 480

— Блэка—Шоулса (*Black—Scholes m.*) 134, 197

- Бреннана—Шварца (*Brennan—Schwartz m.*) 466
- Васичека (*Vasicek m.*) 454
- — обобщенная (*extended V. m.*) 491
- выбора портфеля общая (*general portfolio selection m.*) 586
- — стандартная (*standard p. s. m.*) 586
- , калибровка (*calibration*) 415, 420, 466
- Кокса—Ингерсолла—Росса (КИР) (*Cox—Ingersoll—Ross m. (CIR)*) 457
- Костантинидеса (*Costantinides m.*) 465
- краткосрочной ставки (*short rate m.*) 265
- линейная регрессионная (*linear regression m.*) 108
- логнормальная (*lognormal m.*) 477
- Марковица (*Markowitz m.*) 586
- марковская (*Markov m.*) 490
- Мертона (*Merton m.*) 265
- Огдена (*Ogden m.*) 465
- пропорциональных операционных издержек (*proportional transactions cost m.*) 264
- равновесная (*equilibrium m.*) 415
- Ритчкена—Санкарасубраманиана (РС) (*Ritchken—Sankarasubramanian m. (RS)*) 495
- с непрерывным временем (*continuous-time m.*) 268
- Тоби́на—Шарпа—Линтнера (*Tobin—Sharpe—Lintner m.*) 586
- условной неоднородности авторегрессионная (*autoregressive conditional heteroskedastic m. (ARCH)*) 370
- Фонга—Васичека (*Fong—Vasicek m.*) 466
- Чана—Каро́ли—Лонгста́фа—Сандерса (ЧКЛС) (*Chan—Karolyi—Longstaff—Sanders m. (CKLS)*) 466
- Халла—Уайта (*Hull—White m.*) 481
- Хита—Джэрроу—Мортон (ХДМ) (*Heath—Jarrow—Morton m. (HJM)*) 487
- Хо—Ли (*Ho—Lee m.*) 472
- , непрерывный аналог (*continuous-time H.—L. m.*) 476
- Модильяни—Миллера теорема непричастности (*Modigliani—Miller irrelevance theorem*) 284
- Моменты центральные (*central moments*) 100
- , производящая функция (*m. generation function*) 100
- Нагрузка переноса** (*carrying charge*) 222
- факторная (*factor loading*) 353
- Накопленное значение (НЗ) (*future value (FV)*) 30
- Нельсона—Зигеля схема (*Nelson—Siegel scheme*) 412

- Неравенство Чебышева (*Chebyshev inequality*) 249
- Несмещенная оценка (*unbiased estimator*) 98
- Нога плавающая (*floating leg*) 394
- фиксированная (*fixed l.*) 394
- Номинал (*par value, denomination, face value, maturity value, principle value*) 46, 49, 56
- Ньютона—Рафсона метод (*Newton—Raphson method*) 43
- Облигация** (*bond*) 18, 46, 500
- Американская (*Yankee b.*) 47
- без вложенных опций (*option-free b.*) 426
- * — без купона (*zero-coupon b.*) 47
- дешевая (*cheap b.*) 75
- дорогая (*rich b.*) 75
- доходная (*revenue b.*) 503
- , защита от отзыва (*call protection*) 46
- Казначейства (ОК) (*Treasury b. (T-bond)*) 47
- * — класса запланированного погашения (ЗПК) (*planned amortization class (PAC)*) 567, 574
- * — — — последовательные (*sequential PAC*) 574
- * — целевого погашения (ЦПК) (*targeted a. c. (TAC)*) 567, 575
- конвертируемая (КО) (*convertible b.*) 46, 183
- — с возможностью отзыва (*c. b. with call provisions*) 184
- корпоративная (*corporate b.*) 47, 504
- краткосрочная (*commercial paper*) 500
- купонная (*coupon b.*) 47
- муниципальная (*municipal b.*) 47
- недооцененная (*undervalued b.*) 75
- необеспеченная (*unsecured b., debenture*) 500
- номинальная (*par b.*) 51
- отзывная (*callable b.*) 46
- переоцененная (*overvalued b.*) 75
- * — плановая (*scheduled b.*) 567
- * — поддержки (*support b.*) 567
- , подлежащая обмену (*exchangeable b.*) 501
- продаваемая (*putable b.*) 505
- * — пропорциональная (*pro rata b.*) 567
- равнокупонная (*level-coupon b.*) 48
- растяжимая (*extendible b.*) 505
- * — роста (*accretion b.*) 550
- с вложенными опционами (*b. with embedded options*) 51
- * — с накоплением (*accrual b.*) 550
- с обязательствами общего плана (*general obligation b.*) 503
- * — -спутник (*companion b.*) 567
- чисто дисконтная (*pure discount b.*) 47

- Обменный курс (*exchange rate*) 194
- текущий (*spot e. r.*) 194, 210
- форвардный (*forward e. r.*) 194, 210
- Обратная индукция (*backward induction*) 139
- Обязательство второстепенное (*subordinated debt*) 182
- долговое (*d.*) 19, 500
- по залладным, исполняющим роль залога (ОЗЗ) (*collateralized mortgage obligation (CMO)*) 521, 571, 576
- подчиненное (*s. d.*) 182
- Огдена модель (*Ogden model*) 465
- Оговоренная сумма (*notional principal*) 386
- Операционные издержки (*transactions cost*) 124
- *Оплата, коэффициент (*payment factor*) 539
- *— последовательная по слоям (*sequential tranche paydown*) 528
- Опцион (*option*) 111
- Азиатский (*Asian o.*) 200
- Американский (*American o.*) 112, 125
- барьерный (*barrier o.*) 185
- — впереди-стартующий (*forward-starting-b. o.*) 188
- биржевой (*exchange-traded o.*) 115
- — акционный (*e.-t. stock o.*) 115
- в деньгах (*in the money*) 114
- вверх-и-вход (*up-and-in o.*) 185
- вверх-и-выход (*up-and-out o.*) 185
- взрывающийся колл-спред (*exploding call-spread*) 308
- вложенный (*embedded*) 51
- вне денег (*out of the money*) 114
- вниз-и-вход (*down-and-in o.*) 185
- вниз-и-выход (*down-and-out o.*) 185
- Европейский (*European o.*) 112
- —, амулет (*charm of E. o.*) 170
- —, скорость (*speed of E. o.*) 174
- —, цвет (*color of E. o.*) 174
- иностранный в местной валюте (*foreign domestic o.*) 282
- «как хотите» (*as-you-like-it o.*) 199
- катящийся (*rolling o.*) 188
- квантовый (*quanto o.*) 284
- колл (*call*) 111
- — двойной (*binary c.*) 153
- — с усредненной ценой (*average-rate c.*) 200
- — с шапкой (*capped c. o.*) 128
- , компенсирующий заказ (*offsetting order*) 116
- — корзина (*basket o.*) 316
- котируемый (*listed o.*) 115
- на большую стоимость (*o. on the best*) 317
- на индекс акции (*stock index o.*) 132
- на иностранные обычные акции (*foreign equity o.*) 282
- на кривую доходности (*yield curve o.*) 391
- на портфель из акций (*stock portfolio o.*) 132
- на процентную ставку (*interest rate o.*) 387
- на ценные бумаги с фиксированной доходностью (*fixed-income o.*) 387
- начало- (*knock-in o.*) 185
- нокаут- (*knock-out o.*) 185
- обмена (*exchange o.*) 279
- обобщенный (*generalized o.*) 128
- «оглядывающийся назад» (*lookback o.*) 201
- около денег (*at the money*) 114
- , оценка стоимости (*o. pricing*) 134
- парижский (*Parisian o.*) 188
- перекрестной валюты (*cross-currency o.*) 196, 283
- переустановки (*reset o.*) 187
- при своих (*at the money*) 114
- — форвардно (*at the m. forward*) 213
- пут (*put*) 111
- с обеспечением наличными (*cash-secured p.*) 118
- — со средневзвешенной ценой (*average-rate p.*) 200
- Русский (*Russian o.*) 201
- с выбором (*chooser o.*) 199
- с выигрышем (*in the money*) 114
- с двойным барьером (*double-barrier o.*) 188
- с корреляцией (*correlation o.*) 260
- с плавающей ценой исполнения (*floating-strike o.*) 201
- с проигрышем (*out of the money*) 114
- с расколотым вознаграждением (*split-fee o.*) 199
- с фиксированной ценой исполнения (*fixed-strike o.*) 201
- сложный (*compound o.*) 198
- со средневзвешенной ценой исполнения (*average-strike o.*) 201
- стартующий в будущем (*forward-start o.*) 288
- степенной (*power o.*) 308
- , стоимость относительная (*relative o. price*) 124
- фореxный (*foreign exchange o., forex o.*) 193
- — условный (*contingent foreign exchange o.*) 199
- , цена исполнения (*strike price*) 201
- частично-барьерный (*partial-barrier o.*) 188

- Орнштейн—Уленбека процесс (*Ornstein—Uhlenbeck process*) 248, 261
- Остаток, ежемесячное сокращение (ЕО) (*single monthly mortality (SMM)*) 529, 543
- облигации, обеспеченной закладными (*CMO residual*) 576
- ссуды непогашенный (*remaining principle balance*) 35
- Отзыв (*call*) 46
- Отклонение стандартное (*standard deviation*) 97
- выборочное (*sample s. d.*) 97
- Отношение Шарпа (*Sharpe ratio*) 588
- Оценка наименьших квадратов (ОНК) (*ordinary least-square estimator (OLS)*) 350
- — — обобщённая (*generalized l.-s. e. (GLS)*) 352
- — — условная (*conditional l.-s. e.*) 108
- по методу максимального правдоподобия (*maximum likelihood estimation*) 368
- состоятельная (*consistent e.*) 109
- стоимости риск-нейтральная (*risk-neutral valuation*) 274
- финансовых активов (*capital asset pricing*) 296, 578
- Ошибка в среднеквадратическом (*mean-square error*) 108
- слежения (*tracking e.*) 298
- П**араметр нецентральности (*noncentrality parametr*) 101
- Паритет (*parity*) 506
- вход—выход (*in—out p.*) 185
- процентных ставок (*interest rate p.*) 210
- пут—колл (*put—call p.*) 126—128, 226
- Перевод, ставка (*pass-through rate*) 549
- *Переводные ценные бумаги модифицированные (*modified pass-throughs*) 526
- * — — — полностью (*fully m. p.-t.*) 526
- * — — — обеспеченные закладными (ПЦБЗ) (*mortgage p.-t. security*) 521
- * — — — условные (*conventional p.-t.*) 527
- * — — — частного типа (*private-label p.-t.*) 527
- Перенос, нагрузка (*carrying charge*) 222
- полный (*full carry*) 222
- , стоимость (*cost of carry*) 221
- , денежная (*carrying c.*) 222
- Пересчет, стратегия (*rollover strategy*) 79
- Переустановка, пункт (*refix clause*) 506
- Период владения (*holding period*) 54
- инвестирования (*investment horizon*) 54
- Пирсона выборочный коэффициент корреляции (*Pearson sample correlation coefficient*) 106
- Плавающая нога (*floating leg*) 394
- *Пловец (ПЛО) (*floaters (FLT)*) 450
- * — обратный (ОПЛ) (*inverse f. (INV)*) 450
- Плоская цена (*flat price*) 52
- Погасительный фонд (*sinking fund*) 36
- Погашение (*redemption, amortization*) 46, 537
- и проценты (ПиП) (*principal and interest (P&I)*) 537
- , график (*a. schedule*) 46, 570
- , дата (*r. date*) 46
- по номиналу (*r. at par*) 46
- , стратегия (*maturity strategy*) 79
- , цена (*r. value*) 46
- *Подстегивание кредитного рейтинга (*credit enhancement*) 527
- Позиция дельта-нейтральная (*delta-neutral position*) 169
- длинная (*long p.*) 112
- короткая (*short p.*) 112
- обеспеченная (*covered p.*) 117
- открытая (*open interest*) 116
- покрытая (*covered p.*) 117
- Пол (*floor*) 189, 391, 543
- Полик (*floorlet*) 189, 391
- Полная цена (*full price*) 52
- Полный рынок (*complete market*) 141
- Полон (*flotion*) 389
- *Порог рефинансирования (*threshold for re-financing*) 555
- Портфель (*portfolio*) 62, 94, 128, 274
- допустимый (*feasible p.*) 579
- достижимый (*feasible p.*) 579
- из опционов (*option p.*) 132
- , иммунизация (*immunization*) 296
- , конвертация (*conversion*) 128
- -копия (*replicating p.*) 136
- , принцип доминирования (*p. dominance principle*) 123
- рыночный (*market p.*) 587
- , страхование (*p. insurance*) 591
- хеджирующий (*hedging p.*) 136
- целевой (*dedicated p.*) 65
- штанга (*barbell p.*) 70, 71
- эквивалентный (*equivalent p.*) 136
- эффективный (*efficient p.*) 580
- Портфельная теория (*portfolio theory*) 578
- Последовательное приближение, алгоритмы (*approximation algorithms*) 201
- Последовательность Соболя (*Sobol' sequence*) 339
- Фора (*Faure s.*) 340
- Холтона (*Halton s.*) 338, 340
- *Предоплата (*prepayment*) 532, 533
- * — ЗПК, полоса (РАС band) 570
- * —, скорость постоянная (*constant p. rate*) 547
- * —, условная (*conditional p. r.*) 544

- Премия (*premium*) 49, 111, 568
 — за владение (*holding p.*) 87
 — за ликвидность (*liquidity p.*) 87
 — за риск (*default p.*) 179, 442
 — за срок (*term p.*) 87
- Преобразование Гивенса (*Givens transformations*) 354
- Приведенная прибыль (ПП) (*net present value (NPV)*) 41
- Приведенное значение (ПЗ) (*present value (PV)*) 30
- Принцип доминирования портфеля (*portfolio dominance principle*) 123
 — отражения (*reflection p.*) 305
 — отсутствия арбитража (*no-arbitrage p.*) 123
- Прирост капитала (*capital gain/loss*) 54
- Проблема Марковица (*Markowitz problem*) 581
 — наименьших квадратов (*least-squares (LS) p.*) 350
 — — с ограничениями (*constrained l.-s. p.*) 353, 359
 — нахождения взвешенной оценки наименьших квадратов (*weighted least-squares p.*) 352
 — неполноты (*incompleteness p.*) 76
 — составных денежных потоков (*multiple cash flow p.*) 76
- *Проводник (*conduit*) 523
- Производные ценные бумаги (*derivative securities*) 17, 111
 — — обеспеченные залоговыми (*d. mortgage-backed s.*) 531
- Производный инструмент квантовый (*quanto derivative*) 284
 — кредитный (*credit d.*) 520
 — многокомпонентный (*multivariate d.*) 316
 — с выплатой, зависящей от траектории цены (*path-dependent d.*) 199—205
- Проценты (*interest*) 537, 575
 — на проценты (*i. on interest*) 54
 — накопленные (*accrued i.*) 52
 —, начисление непрерывное (*continuous compounding*) 31
 —, периодическое (*periodic c.*) 31
 — по купонам (*coupon i.*) 54
 — простые (*simple i.*) 33
 —, ставка (*simple rate of return*) 156
 — сложные (*compound i.*) 33
- Процесс авторегрессии и скользящего среднего (*autoregressive moving average p. (ARMA)*) 367
 — авторегрессионный (*autoregressive p. (AR)*) 366
 — Винера—Башелье (*Wiener—Bachelier p.*) 244
 — винеровский (*Wiener p.*) 244
 — — обобщенный (*generalized W. p.*) 244
 — гауссовский (*Gaussian p.*) 365
 — дисконтированный (*discount p.*) 240
 — диффузионный (*diffusion p.*) 255
 — Ито (*Ito p.*) 254
 —, дискретная аппроксимация (*discrete approximation to I. p.*) 331
 — квадратного корня (*square-root p.*) 262
 — коррелированный (*correlated p.*) 365
 — логнормальная диффузия (*lognormal diffusion*) 246
 — марковский (*Markov p.*) 237
 — на банковском счете (*bank account p.*) 241
 — некоррелированный (*uncorrelated p.*) 365
 — нормальный (*normal p.*) 262
 — Орнштейна—Уленбека (*Ornstein—Uhlenbeck p.*) 248, 261
 — с постоянной и упругой дисперсией (ПУД) (*constant elasticity variance p. (CEV)*) 364
 — скачкообразный (*jump p.*) 250
 — скользящего среднего (*moving average p. (MA)*) 366
 — случайный (*stochastic p.*) 236
 — стационарный строго (*strictly stationary p.*) 364
 — условной неоднородности авторегрессионный (*autoregressive conditional heteroskedastic p. (ARCH)*) 370
 — — — обобщенный (*generalized a. c. h. p. (GARCH)*) 371
 —, эргодичность (*ergodicity*) 361
- Пуассона уравнение (*Poisson equation*) 271
- Пул, коэффициент (*pool factor*) 539
- Пункт переустановки (*refix clause*) 506
- Пут (*put*) 111
 — защитный (*protective p.*) 117
- Р**азбавление, коэффициент (*dilution factor*) 184
- Разложение Корниша—Фишера (*Cornish—Fisher expansion*) 606
 — матриц сингулярное (СРМ) (*singular value decomposition (SVD)*) 348
 — Холецкого (*Cholesky decomposition*) 346
- Разница двусторонняя (*central difference*) 61
 — правосторонняя (*forward d.*) 61
- Распад во времени (*time decay*) 170
- Распределение биномиальное (*binomial distribution*) 137
 —, дополнительная функция (*complementary b. d. function*) 138

- логнормальное (*lognormal d.*) 102
- нормальное (*normal d.*) 100
- — двумерное (*bivariate n. d.*) 101
- — многомерное (*multivariate n. d.*) 101, 347
- — стандартное (*standard n. d.*) 100
- , функция (*d. function*) 100
- хи-квадрат нецентральное (*noncentral chi-square d.*) 101
- — центральное (*central c.-s. d.*) 101
- Регрессионный анализ (*regression analysis*) 349
- Регрессия линейная (*linear regression*) 103, 411
- множественная (*multiple r.*) 105, 410
- , оцененная линия (*estimated r. line*) 104
- полиномиальная (*polynomial r.*) 106, 411
- , сумма квадратов (*r. sum of squares (SSR)*) 105
- Реинвестирование, риск (*reinvestment risk*) 40
- Ремикс (*Real Estate Mortgage Investment Conduit (REMIC)*) 567
- Рента вечная (*perpetual annuity*) 34
- ежегодная авансовая (*due a.*) 34
- — общая (*general a.*) 34
- — простая (*ordinary a.*) 33
- консолидированная (*consol*) 46
- , коэффициент (*a. factor*) 539
- Репо (*repo RP (sale and repurchase agreement)*) 208
- , индуцированная ставка (*implied r. rate*) 377
- на срок (*term r.*) 208
- обратное (*reverse r.*) 208
- *Рефинансирование, порог (*threshold for refinancing*) 555
- Решетка биномиальная (*binomial lattice*) 139
- Риддера метод (*Ridders method*) 45
- Риск валютный (*currency r.*) 194
- выкручивания (*twist r.*) 94
- диверсифицируемый (*diversifiable r.*) 595
- исполнения (*exercise r.*) 192
- несистематический (*unsystematic r.*) 579
- оперативный (*operating r.*) 179
- , премия (*default premium*) 179, 442
- процентной ставки (*interest rate r.*) 88
- *расширения (*extension r.*) 533
- реинвестирования (*reinvestment r.*) 40
- *рыночный (*market r.*) 589
- *сжатия (*contraction r.*) 533
- систематический (*systematic r.*) 579
- специальный (*specific r.*) 579
- , ставка (*hazard rate*) 622
- , управление (*r. management*) 291
- формы (*shape r.*) 94
- , цена рыночная (*market price of r.*) 287, 588
- цены (*price r.*) 88
- Риск-нейтральная вероятность (*risk-neutral probability*) 137
- оценка стоимости (*r.-n. valuation*) 274
- экономика (*r.-n. economy*) 137
- Ритченена—Санкарасубраманяна модель (PC) (*Ritchken—Sankarasubramanian model (RS)*) 495
- Ро (*rho*) 173
- Рынок внебиржевой (*over-the-counter market*) 114
- вторичный (*secondary m.*) 19
- денежный (*money m.*) 19
- дисконтный (*discount m.*) 222
- капитала (*capital m.*) 19
- наличных (*cash m.*) 193
- нормальный (*normal m.*) 222
- первичный (*primary m.*) 19
- перевернутый (*inverted m.*) 222
- полный (*complete m.*) 141
- порождающий (*origination m.*) 522
- спот- (*spot m.*) 193
- форексный (*foreign exchange m., forex m.*) 18
- эффективный, гипотеза (*efficient m. hypothesis*) 366
- Рыночная линия капитала (*capital market line (CML)*) 587
- — ценной бумаги (*security m. l.*) 587—589
- С**воп (*swap*) 208, 230
- амортизирующий (*amortizing s.*) 403
- базисный (*basis s.*) 402
- валютный (*currency s.*) 230
- дифференциальный (*differential s.*) 404
- квантовый (*quanto s.*) 405
- , кривая ставок (*zero-coupon s. curve*) 397
- кривой доходности (*yield-curve s.*) 402
- на обычную акцию (*equity s.*) 405
- облигационный (*bond s.*) 520
- обратный (*reverse s.*) 402
- отдаваемый (*putable s.*) 402
- отзывной (*callable s.*) 402
- откладываемый (*putable s.*) 402
- отложенный (*deferred s.*) 402
- «простая ваниль» (*plain vanilla s.*) 394
- процентной ставки (*interest rate s.*) 230, 397, 402
- разрастающийся (*accreting s.*) 403
- растяжимый (*extendible s.*) 402
- с индексной амортизацией (СИА) (*index-amortizing s. (IAS)*) 404
- с перекрестными ставками (*cross-rate s.*) 284
- , ставка (*s. rate*) 395
- ставки (*rate s.*) 231
- форвардный (*forward s.*) 402

- Свопцион (*swaption*) 403
 — оплачивающий (*payer s.*) 403
 — получающий (*receiver s.*) 403
 Сертификат участия (CY) (*participation certificate (PC)*) 523
 Сигма (*sigma*) 172
 Сингулярное разложение матриц (CPM) (*singular value decomposition (SVD)*) 348
 — число (*s. value*) 348
 Скидка (*discount*) 49
 Сложность вычислительная (*computational complexity*) 26
 — пространственная (*space c.*) 26
 Сложные проценты (*compound interest*) 33
 *Слой (*tranche*) 528
 Случайная величина (*random variable*) 96
 —, автоковариация (*autocovariance*) 364
 —, автокорреляция (*autocorrelation*) 364
 — бернуллиевская (*Bernoulli r. v.*) 148
 — нормальная (*normal r. v.*) 100
 Случайные величины некоррелированные (*uncorrelated random variables*) 98
 Случайное блуждание (*random walk*) 237
 —, гипотеза (*r.-w. hypothesis*) 365
 — симметричное (*symmetric r. w.*) 237
 — со сносом (*r. w. with drift*) 238
 Смещение дюрации (*duration drift*) 65
 Снос (*drift*) 238, 244, 254
 *ЗПК (*PAC d.*) 574
 Соболёва последовательность (*Sobol' sequence*) 339
 Собственное значение (*eigenvalue*) 346
 Собственный вектор (*eigenvector*) 346
 Спекулянт (*speculator*) 291
 Сплайн (*spline*) 343, 355, 411
 —, базисная функция (*basic s. function (B-s.)*) 360
 — естественный (*natural s.*) 357
 — кубический (*cubic s.*) 356, 359
 — экспоненциальный (*exponential s.*) 413
 Спот-рынок (*spot market*) 193
 Спот-ставка (*spot rate*) 74
 —, кривая (*s. r. curve*) 74, 406
 —, сдвиг непропорциональный (*non-proportional shift*) 91
 —, пропорциональный (*proportional s.*) 90
 Спот-цена (*spot price*) 216
 Спрэд (*spread*) 117, 119, 293, 426
 — бабочка (*butterfly s.*) 120
 — вертикальный (*vertical s.*) 120
 — временной (*time s.*) 120
 — горизонтальный (*horizontal s.*) 120
 — денежный (*money s.*) 120
 — диагональный (*diagonal s.*) 121
 — доходности (*yield s.*) 74
 — календарный (*calendar s.*) 120
 — колл бычий (*bull call s.*) 119
 — кредитный (*credit s.*) 83
 — медвежий (*bear s.*) 120
 *— обслуживания (*servicing s.*) 548
 — пут бычий (*bull put s.*) 120
 — спроса и предложения (*bid-ask s.*) 156
 — статический (*static s.*) 77
 — учитывающий опцию (CYO) (*option-adjusted s. (OAS)*) 512
 — форвардный (*forward s.*) 84
 — ценовой (*price s.*) 120
 Среднее (*mean*) 99
 — выборочное (*sample m.*) 97
 — векторное (*vector s. m.*) 100
 —, функция (*m. function*) 236
 *Срок жизни средневзвешенный (*weighted average life*) 554
 — завершения платежей (*redemption date, maturity d.*) 46
 — оплаты (*payment delay*) 566
 — погашения (*redemption date, maturity d.*) 46
 *— средневзвешенный (*weighted average remaining maturity (WARM)*) 547, 566
 —, расчёт в днях (*day count*) 38, 51
 —, 30/360 52
 —, реальный/реальный (*actual/actual*) 51
 *Ссуда джамбо (*jumbo loan*) 524
 — первичная (*whole l.*) 522
 —, плата за обслуживание (*servicing fee*) 524
 *— традиционная (*conventional l.*) 523
 *Ссуды согласованные (*conforming loans*) 523
 Ставка базовая (*reference rate, prime r.*) 189
 — господствующая (*prevailing r.*) 385
 — дисконта (*discount r.*) 38
 — долгосрочная (*long r.*) 435
 — «дразнящая» (*teaser r.*) 527
 — исполнения (*strike r.*) 189
 — краткосрочная (*short r.*) 74, 389, 435
 —, модель (*s. r. model*) 265
 — купонная (*coupon r.*) 37
 — основной линии (*baseline r.*) 416
 *— перевода (*pass-through r.*) 549
 — плавающая (*floating r.*) 66
 — пол (*floor r.*) 189
 — потолковая (*ceiling r.*) 189
 — промежуточных сроков (*intermediate r.*) 389
 — простых процентов (*simple r. of return*) 156
 — процентная, биномиальное дерево (*binomial interest r. tree*) 414, 421
 —, воротник (*i. r. collar*) 189
 — образцовая (*benchmark i. r.*) 74

- основная (*base i. r.*) 74
 - , паритет (*i. r. parity*) 210
 - , пол (*floor*) 189
 - , риск (*i. r. risk*) 88
 - , своп (*i. r. swap*) 230, 231
 - , шапка (*cap*) 189
 - репо индуцированная (*implied repo r.*) 377
 - риска (*hazard r.*) 622
 - свопа (*swap r.*) 395
 - спот- (*spot r.*) 74
 - , кривая (*s. r. curve*) 74, 406
 - ,—, сдвиг непропорциональный (*non-proportional shift*) 91
 - ,—, сдвиг пропорциональный (*proportional s.*) 90
 - «суперпоплавок» (*superfloater*) 569
 - существующая (*prevailing r.*) 385
 - форвардная (*forward r.*) 79
 - индуцированная (*implied f. r.*) 79
 - мгновенная (*instantaneous f. r.*) 79
 - однопериодная (*one-period f. r.*) 79
 - , кривая (*f. r. curve*) 406
 - , соглашения (СФС) (*f. r. agreements (FRA)*) 231, 385
 - шапка (*cap r.*) 189
 - Стандартное отклонение (*standard deviation*) 97
 - выборочное (*sample s. d.*) 97
 - Степень свободы (*degree of freedom*) 101
 - Стоимость арбитражная (*arbitrage v.*) 140
 - базисного пункта (СБП) (*basis point v. (BPV)*) 68
 - базовая (*straight v.*) 506
 - внутренняя (*intinsic v.*) 113
 - замещения (*placement v.*) 401
 - конверсии (*conversion v.*) 285
 - переноса (*cost of carry*) 221
 - денежная (*carrying cost*) 222
 - под риском (СпР) (*v. at risk (VaR)*) 55, 604
 - , оценка (*pricing*) 540, 578
 - , риск-нейтральная (*risk-neutral valuation*) 274
 - хранения (*storage cost*) 222
 - Стохастический интеграл (*stochastic integral*) 251
 - Ито (*Ito s. i.*) 251
 - Стратоновича (*Stratonovich s. i.*) 254
 - Стохастическое дифференциальное уравнение (*stochastic differential equation*) 255
 - Стратегия 90/10 (*90/10 strategy*) 119
 - агрессивная (*aggressive s.*) 117
 - безрисковая (*riskless s.*) 117
 - бычий спрэд-колл (*bull call spread*) 119
 - спрэд-пут (*b. put spread*) 120
 - бычья (*bullish s.*) 117
 - защитная (*defensive s.*) 117
 - комбинация (*combination*) 117, 121
 - медвежья (*bearish s.*) 117
 - нейтральная (*neutral s.*) 117
 - перекачиваний (*rollover s.*) 241
 - пересчета (*rollover s.*) 79
 - погашения (*maturity s.*) 79
 - само-финансируемая (*self-financing s.*) 140
 - спрэд (*spread*) 117, 119
 - статическая (*static s.*) 302
 - хедж (*hedge*) 117
 - Стратоновича стохастический интеграл (*Stratonovich stochastic integral*) 254
 - Страхование портфеля (*portfolio insurance*) 591
 - Стресс, критерии (*stress test*) 604
 - Стрип (*strip*) 121
 - Стрэдл (*straddle*) 121
 - Стрэнгл (*strangle*) 121
 - Стрэп (*strap*) 121
 - Суперпоплавок (*superfloater*) 569
 - Схема МакКалоча (*McCulloch scheme*) 410
 - Мильштейна (*Mil'shtein s.*) 255
 - Брэдли—Крейна (*Bradley—Crane s.*) 410
 - Нельсона—Зигеля (*Nelson—Siegel s.*) 412
 - Эллиотта—Эчолса (*Elliott—Echols s.*) 410
 - Сценарный анализ (*scenario analysis*) 55
- Текущие издержки** (*carrying cost, c. of carry*) 221
- Теорема арбитражная** (*arbitrage theorem*) 626
- Берри—Эссеена (*Berry—Esseen t.*) 328
 - Винера (*Wiener t.*) 244
 - Гаусса—Маркова (*Gauss—Markov t.*) 108
 - Гирсанова (*Girsanov t.*) 290
 - двух капиталовложений (*two-fund t.*) 582
 - Донскера (*Donsker t.*) 250
 - непричастности Модильяни—Миллера (*Modigliani—Miller irrelevance t.*) 284
 - об основных осях (*principal-axes t.*) 346
 - одного капиталовложения (*one-fund t.*) 584
 - разложения Шура (*Schur decomposition t.*) 346
 - спектральная (*spectral t.*) 346
 - фундаментальная оценки стоимости активов (*fundamental t. of asset pricing*) 142
 - центральная предельная (*central limit t.*) 102
 - Эйлера (*Euler t.*) 281

Теория временной структуры (*term structure theory*) 85

- нормального запаздывания (*t. of normal backwardation*) 293
- оценивания в среднем доходности до погашения (*return-to-maturity expectations t.*) 88
- — — локального (*local e. t.*) 87
- — — несмещенного (*unbiased e. t.*) 86
- оценки стоимости арбитражная (*arbitrage pricing t.*) 594
- портфельная (*portfolio t.*) 578
- предпочтения ликвидности (*liquidity preference t.*) 88
- сегментации рынка (*market segmentation t.*) 89
- сложившихся предпочтений (*preferred habitats t.*) 89
- смещенного оценивания в среднем (*biased expectations t.*) 88
- среднего и дисперсии (*mean-variance t.*) 578

Тепловое уравнение (*heat equation*) 271

Тик (*tick*) 220

Тобина—Шарпа—Линтнера модель (*Tobin—Sharpe—Lintner model*) 586

Точки Холтона (*Halton points*) 338

Требование условно постоянное (*state contingent claim*) 120, 122

- условное (*c. c.*) 111

Треугольный арбитраж (*triangular arbitrage*) 283, 290

Тэта (*theta*) 170

Управление активами и обязательствами (*asset/liability management*) 62—66

- риском (*risk m.*) 291

Уравнение волновое (*wave equation*) 271

- временной структуры (*term structure e.*) 443
- дифференциальное Блэка—Шоулса (*Black—Scholes differential e.*) 273
- дифференциальное стохастическое (*stochastic d. e.*) 255
- диффузии (*diffusion e.*) 271
- Колмогорова обратное (*Kolmogorov backward e.*) 245
- прямое (*K. forward e.*) 245
- Ланжевена (*Langevin e.*) 255
- Пуассона (*Poisson e.*) 271
- тепловое (*heat e.*) 271
- Фоккера—Планка (*Fokker—Planck e.*) 245

Урегулирование компенсирующее (*settled by offset*) 116

Условная платежная единица (*numeraire*) 250

- сумма (*notional principal*) 386

Участие, сертификат (СУ) (*participation certificate (PC)*) 523

Фактор (*factor*) 353

- , бета (*f. beta*) 594

Факторная нагрузка (*factor loading*) 353

Факторный анализ (*factor analysis*) 343, 353

Фаркаша лемма (*Farka lemma*) 625

Фиксированная нога (*fixed leg*) 394

Фоккера—Планка уравнение (*Fokker—Planck equation*) 245

Фонга—Васичека модель (*Fong—Vasicek model*) 466

Фора последовательность (*Faure sequence*) 340

Форвардная индукция (*forward-induction*) 422

- — триномиальная (*trinomial f.-i.*) 482

Форвардный контракт (*forward contract*) 82, 233

Формула Блэка—Шоулса (*Black—Scholes formula*) 151

- Марграбе (*Margrabe f.*) 279

Функция дельта- Дирака (*Dirac delta function*) 121

- дисконтирующая (*discount f.*) 75, 406, 454
- дополнительная биномиального распределения (*complementary binomial distribution f.*) 138
- ковариационная (*covariance f.*) 236
- правдоподобия (*likelihood f.*) 109
- — логарифмическая (*log-l. f.*) 109
- распределения (*distribution f.*) 100
- сплайна базисная (*basic spline f. (B-spline)*) 360
- среднего (*mean f.*) 236
- целевая (*objective f.*) 70

Фьючерс (*futures*) 207, 214

- финансовый (*financial f.*) 216

Халла—Уайта модель (*Hull—White model*) 481

Хедж (*hedge*) 117, 291

- дельта- (*delta h.*) 297, 302
- дельта-вега- (*delta-vega h.*) 302
- дельта-гамма- (*delta-gamma h.*) 300
- дельта-гамма-вега- (*delta-gamma-vega h.*) 302
- длинный (*long h.*) 292
- защитный пут (*protective put*) 117
- короткий (*short h.*) 292

- обратный (*reverse h.*) 118
- перекрестный (*cross h.*) 294
- покрытый колл (*covered call*) 117
- покупки (*buying h.*) 292
- продажный (*selling h.*) 292
- пут, обеспеченный наличными (*cash-secured put*) 117
- с коэффициентом (*ratio h.*) 119
- совершенный (*perfect h.*) 169, 294
- стратегия 90/10 (*90/10 strategy*) 119
- Хеджер (*hedger*) 291
- длинный (*long h.*) 293
- короткий (*short h.*) 293
- Хеджирование (*hedging*) 68, 169, 216, 377, 384
- , коэффициент (*hedge ratio*) 68, 136, 295, 320
- Хита—Джэрроу—Мортон модель (ХДМ) (*Heath—Jarrow—Morton model (HJM)*) 487
- Хо—Ли модель (*Ho—Lee model*) 472
- , непрерывный аналог (*continuous-time H.—L. m.*) 476
- Холецкого разложение (*Cholesky decomposition*) 346
- Холтона последовательность (*Halton sequence*) 338, 340
- точки (*H. points*) 338

- Целевая функция** (*objective function*) 70
- Цена базисного пункта (*price value of basis point*) 68
- в наличных (*cash p.*) 216
 - грязная (*dirty p.*) 52
 - индексная (*index p.*) 376
 - исполнения (*exercise p.*) 111
 - плавающая (*floating-s. p.*) 201
 - фиксированная (*fixed-s. p.*) 201
 - конверсии (*conversion p.*) 506
 - рыночная (*market c. p.*) 507
 - модельная (*model p.*) 419
 - плоская (*flat p.*) 52
 - по счету (*invoice p.*) 52, 376
 - погашения (*redemption p.*) 46
 - покупки (*strike p.*) 111
 - полная (*full p.*) 52
 - поставки (*delivery p.*) 209
 - , риск (*p. risk*) 88
 - риска рыночная (*market p. of risk*) 287, 588
 - , сжатие (*p. compression*) 505
 - смоделированная (*model p.*) 419
 - состояния (*state p.*) 423
 - спот- (*spot p.*) 216
 - форвардная (*forward p.*) 211
 - фьючерсная (*futures p.*) 216
 - чистая (*clean p.*) 52

- Ценные бумаги агентств (*agency securities*) 47
- — вспомогательные (*synthetic s.*) 127
 - — дисконтные (*discount s.*) 38
 - — обеспеченные закладными (ЦБЗ) (*mortgage-backed s. (MBS)*) 521, 537
 - — — переводные (ПЦБЗ) (*m. pass-through s. (MPTS)*) 521
 - — — производные (*derivative m.-b. s.*) 17, 531
 - — — разделенные (РЦБЗ) (*stripped m.-b. s. (SMBS)*) 449
 - * — — переводные модифицированные (*modified pass-throughs*) 526
 - * — — — обеспеченные закладными (ПЦБЗ) (*mortgage p.-t. s. (MPTS)*) 521
 - * — — — условные (*conventional p.-t.*) 527
 - * — — — частного типа (*private-label p.-t.*) 527
 - — производные (*derivative s.*) 17, 111
 - — синтетические (*synthetic s.*) 127
 - — — дисконтные (*s. discount s.*) 568
 - — — с премией (*s. premium s.*) 568
 - — Эрроу (*Arrow s.*) 122
- Центральные моменты (*central moments*) 100

- Чана—Кароли—Лонгстаффа—Сандерса модель** (ЧКЛС) (*Chan—Karolyi—Longstaff—Sanders model (CKLS)*) 466
- * Часть «только погашение» (ТПО) (*principal only strip (PO)*) 449
- * — «только проценты» (ТПР) (*interest only s. (IO)*) 449
- Чебышева неравенство (*Chebyshev inequality*) 249
- Чистая цена (*clean price*) 52

- Шапка** (*cap*) 189, 391, 543
- Шапон (*caption*) 389
- Шапочка (*caplet*) 189, 391
- Шарпа отношение (*Sharpe ratio*) 588
- Шура теорема разложения (*Schur decomposition theorem*) 346

- Эйлера метод** (*Euler method*) 255
- теорема (*E. theorem*) 281
- Эйлера—Маруямы метод (*Euler—Maruyama method*) 255
- Экономика риск-нейтральная (*risk-neutral economy*) 137
- Эллиотта—Эчолса схема (*Elliott—Echols scheme*) 410
- Эрроу ценные бумаги (*Arrow securities*) 122
- Эффективная граница (*effective frontier*) 580

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для операционных систем Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «Математика и финансы»

Люу Ю-Дау

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Ведущий редактор *М. Стригунова*

Художник *Н. Лозинская*

Технический редактор *Е. Денюкова*

Оригинал-макет подготовлен *М. Пановым* в пакете $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ

Подписано к использованию 09.10.14.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Монография «Методы и алгоритмы финансовой математики» известного специалиста в области финансов и информатики профессора Тайваньского Университета Ю-Дау Люу открывает серию «Математика и финансы». Серия задумана с тем, чтобы знакомить читателей с такими проблемами современной финансовой индустрии, методы решения которых может дать только хорошо построенная математическая теория.

Именно построению математического фундамента и посвящена данная монография. В ней представлено подробное и последовательное изложение фактически всей финансовой математики: от классической и детерминированной финансовой теории до практически всех разделов современной стохастической финансовой математики. Никаких предварительных знаний из области финансов не требуется, а сложные математические факты и их интерпретация выводятся максимально упрощенно. Основной акцент в книге делается на прикладные вычисления.

Студенты, аспиранты, преподаватели и специалисты в области финансов, несомненно, найдут эту книгу полезной, а математикам она представит новую область приложений.