А. И. Сгибнев

Делимость и простые числа

Издание третье, исправленное

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1
С26

Сгибнев А. И.

С26 Делимость и простые числа.— 3-е изд., испр.— М.: МЦНМО, 2015.— 112 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0340-8

Восьмая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена основным понятиям и фактам, которые связаны с делимостью целых чисел: признакам делимости, простым и составным числам, алгоритму Евклида, основной теореме арифметике и т. п. Она предназначена для занятий со школьниками 7–9 классов. В книжку вошли разработки восьми занятий математического кружка с подробно изложенным теоретическим материалом, примерами задач различного уровня трудности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Ко всем задачам каждого занятия приведены подробные решения. Кроме того, в приложениях сформулированы две ещё не решённые проблемы из этого раздела математики, а также приведены примеры исследовательских задач.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной математики.

Второе издание книги вышло в 2013 г.

Алексей Иванович Сгибнев

Делимость и простые числа

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. Горская*, иллюстрации *Н. Неледва*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 5.02.2015 г.
Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 7 печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в типографии в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-0340-8

Предисловие

При изложении курса «Делимость и простые числа» есть два основных подхода. Первый ставит во главу угла логику изложения: все утверждения доказываются, а не доказанные не используются. См., например, [1]. Второй делает упор на задачах: основная теорема арифметики формулируется сразу и без доказательства, что позволяет не заниматься теоретическими тонкостями, а сразу же решать содержательные задачи. См., например, [5].

Я попытался пойти средним путём. Мне кажется принципиально важным в математическом курсе доказывать (раньше или позже) все утверждения. Однако без задачного подкрепления доказательства теорем часто превращаются в формальные тексты. Например, чего стоит для восьмиклассника данное без подготовки утверждение:

«Для любых взаимно простых a и b найдутся такие x и y, что $ax + by = 1$»!

Поэтому этапы доказательств растянулись на несколько занятий, в которых используемые идеи и конструкции мотивируются и используются в задачах. Кроме того, иногда я позволял себе брать утверждения «взаймы», жертвуя последовательностью изложения ради его живости[1].

В результате (как я надеюсь) этапы доказательств стали доступны, а по ходу решаются интересные задачи. Правда, в ходе «размазывания» этапов затемнилась логическая структура доказательства основной теоремы ариф-

[1] А именно, в занятии 2 формулируется теорема о взаимно простых делителях, которая используется при решении задач на признаки делимости; в занятии 6 приводится теорема о сокращении простого множителя, нужная для решения неоднородных диофантовых уравнений.

метики. Приведём краткую схему для учителя и подготовленного ученика:

1. Вводится понятие простого числа и доказывается, что любое число раскладывается на простые множители; при этом вопрос однозначности не изучается (занятие 4).

2. Вводится алгоритм Евклида (занятие 5).

3. С помощью алгоритма Евклида доказывается основная лемма (занятие 6).

4. Из основной леммы выводится теорема о простом делителе (занятие 7).

5. Из теоремы о простом делителе выводится однозначность разложения на простые множители (занятие 8).

Также в занятии 6 из основной леммы выводятся теоремы о взаимно простых делителях и о сокращении множителя (но в минимальной логической схеме они необязательны).

Теоремам о делимости даны названия, чтобы школьникам было легче «узнавать их в лицо».

При решении задач из первых занятий у школьников, возможно, будет возникать соблазн ссылаться на ещё не доказанные свойства простых чисел, однозначность разложения на простые множители и т. д. Однако все задачи можно решить, опираясь на доказанный материал в рамках того занятия, на котором они даются. Полезно требовать от школьников делать это, приучая их к «чистоте» решения.

Подавляющее большинство задач не придумано автором, а взято из литературы (зачастую с некоторыми изменениями в формулировках). Книга [1] повлияла на логическую структуру курса (доказательство основной теоремы арифметики). Книга [5] дала многие идеи задач и задачных циклов. Из книги [4] взято много ярких формулировок (особенно задач на диофантовы уравнения).

Автор благодарен А. Д. Блинкову, А. В. Забелину, И. Б. Писаренко, Е. А. Ермаковой и своим ученикам. Особенную признательность автор выражает А. В. Шаповалову, помощь которого заметно превышала обычные для редактора рамки.

Просьба присылать отзывы и замечания на электронный адрес `sgibnev@mccme.ru`.

Занятия 1–4 ориентированы на 7–8 класс, занятия 5–8 — на 8–9 класс.

Наиболее важные задачи помечены знаком «+», наиболее сложные задачи — знаком «*». Если не оговорено противное, под «числами» понимаются «целые числа».

Занятие 1

Делимость чисел

Определение. Говорят, что число a делится на число b (или a кратно b, или b делитель a), если найдётся такое целое число q, что $a = b \cdot q$. Обозначение: $a \,\vdots\, b$.

Наглядная интрепретация: если a монет можно разложить на b одинаковых стопок, то a кратно b. Другая интерпретация: если a монет можно разложить на несколько кучек по b монет в каждой, то a кратно b. Из нее следует, что на пары разбивается только чётное число.

Заметим, что если $a \,\vdots\, b$, то $a \,\vdots\, (-b)$ (докажите!). Поэтому, если не оговорено противное, мы будем искать только *положительные делители* чисел.

Задача 1.1. Найдите все делители числа 36.

Решение. Будем последовательно проверять числа 1, 2, 3, 4 и т. д.: если их произведение на какое-то число даст 36, запишем это: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 = 9 \cdot 4 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36 \cdot 1$.

Заметим, что в записи $a = bq$ оба числа b и q являются делителями числа a. Поэтому перебор можно остановить на произведении $6 \cdot 6$.

Задача 1.2^{+}. В верхней строке таблицы указано то, что **дано.** В левом столбце — то, что **спрашивается.** Заполните пустые клетки: если «да», то поставьте «+», если «нет», то «−», если данных не хватает, то знак «?». Обоснуйте свои ответы.

	$a \,\vdots\, m$ и $b \,\vdots\, m$	$a \,\vdots\, m$ и $b \not\vdots\, m$	$a \not\vdots\, m$ и $b \not\vdots\, m$
$a + b \,\vdots\, m$?			
$a - b \,\vdots\, m$?			
$a \cdot b \,\vdots\, m$?			

Решение. Рассмотрим первую строку таблицы. Так как $a = km$ и $b = lm$, то $a + b = (k + l)m$, то есть $a + b$ делится на m. С клеткой под ней (разность) всё аналогично. Возможно и такое рассуждение: поскольку $b \vdots m$, то и $-b \vdots m$, следовательно, и сумма $a + (-b)$ делится на m.

Теперь рассмотрим третью клетку в первой строке. $5 \not\vdots 3$ и $1 \not\vdots 3$, но $5 + 1 \vdots 3$. Однако $5 \not\vdots 3$ и $2 \not\vdots 3$ и также $5 + 2 \not\vdots 3$. Поэтому данных недостаточно. Аналогичные примеры можно привести и для разности.

Рассмотрим вторую клетку в первой строке. Предположим, что $c = a + b \vdots m$. Тогда и $b = c - a$ должно делиться на m как разность двух чисел, делящихся на m. Полученное противоречие показывает, что $a + b$ не делится на m. Аналогично и с разностью.

Теперь рассмотрим делимость произведения (третья строка). Поскольку $a = km$, то $ab = (kb)m \vdots m$ независимо от делимости b на m.

В последней клетке третьей строки ab может не делиться на m (например $a = b = 1$, $m = 2$), но может и делиться (например, $a = b = 2$, $m = 4$). Значит, данных не хватает.

Можно дать наглядную интерпретацию большинству ответов: если каждая из двух кучек монет раскладывается на стопки по m монет, то и объединённая кучка тоже разложится, и т. д.

Результаты этой задачи полезно запомнить:

	$a \vdots m$ и $b \vdots m$	$a \vdots m$ и $b \not\vdots m$	$a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$
$a + b \vdots m?$	+	–	?
$a - b \vdots m?$	+	–	?
$a \cdot b \vdots m?$	+	+	?

Обратите внимание учеников на то, что в первой и второй строчках ответы одинаковы (в этом смысле сумма и разность с точки зрения делимости неразличимы). На занятии 7 мы поймём, от чего зависит делимость чисел в третьем столбце.

Задача 1.3. Определите, не выполняя действий, делится ли а) $18^2 - 7^2$ на 11; б) $45^3 + 55^3$ на 2500; в) $1^3 + 2^3 + \ldots + 82^3$ на 83.

Решение. а) Делится: $18^2-7^2=(18-7)(18+7)=11\cdot 25\ \vdots$ $\vdots\ 11$.

б) Делится: $45^3+55^3=(45+55)(45^2-45\cdot 55+55^2)$. Первая скобка равна 100, вторая делится на $5^2=25$.

в) Делится: разобьём слагаемые на пары и докажем, что сумма в каждой паре делится на 83. Например, 1^3+ $+82^3\ \vdots\ 83$, $2^3+81^3\ \vdots\ 83$.

Задача 1.4. Петя считает, что если a^2 делится на $a-b$, то b^2 делится на $a-b$. Прав ли он?

Решение. Рассмотрим разность двух Петиных выражений: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\ \vdots\ (a-b)$. Поскольку уменьшаемое и разность делятся на $a-b$, то по задаче 1.2 и вычитаемое должно делиться на $a-b$. Поэтому Петя прав.

Может быть полезна такая формулировка: если сумма (разность) двух чисел делится на m, то либо оба числа делятся на m, либо оба не делятся.

Задача 1.5. а) Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечётное количество делителей. б) Верно ли обратное?

Решение. а) Сгруппируем делители числа $n=m^2$: если d — делитель числа n, то $\frac{n}{d}$ — тоже делитель; объединим их в пару. Только m попадёт в пару с самими собой, а все остальные делители n разобьются на пары. Поэтому у квадрата нечётное число делителей.

б) Если количество делителей нечётно, значит, есть пара совпадающих делителей. Следовательно, число является квадратом, то есть обратное также верно.

Прежде чем доказывать, полезно самим угадать эту закономерность, подсчитав количество делителей у чисел 15, 16, 24, 25 и т. д.

Задача 1.6. Докажите, что а) произведение двух последовательных чисел делится на 2; б) число $\frac{n^2+n}{2}$ — целое.

Решение. а) Заметим, что среди двух подряд идущих чисел хотя бы одно делится на 2. По задаче 1.2 произведение также делится на 2.

б) Разложим числитель на множители: $n^2+n=n(n+1)$.

Получим произведение двух последовательных чисел, которое чётно по п. а).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7. В каком случае два числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a? (Числа могут быть и отрицательными!)

Задача 1.8^{+}. а) Верно ли, что если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots$ $\vdots\, mn$? б) Верно ли, что если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$?

Задача 1.9. Вася считает, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ тоже делится на $a - c$. Прав ли он?

Задача 1.10. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.

Задача 1.11. а) Маша показывает такой фокус: ей называют любое трёхзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?

б) Саша заметила, что все шестизначные числа Маши делятся на 7. Почему? На какие ещё числа они делятся?

Задача 1.12. В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключённому. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте — закрывалась и т. д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает.

На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры, и т. д. Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки в камерах. Сколько узников в итоге вышло на свободу и из каких камер?

Ответы и решения

Задача 1.7. Из того, что a делится на b, следует, что $|a| \geqslant |b|$. Из того, что b делится на a, следует, что $|b| \geqslant |a|$. Два неравенства вместе дают $|a| = |b|$, то есть числа могут отличаться только знаками.

Задача 1.8. а) Верно: так как $a = lm$, а $b = kn$, то $ab = (kl)(mn)$, то есть по определению делится на mn.

б) Верно: так как $a = kb$, $b = lc$, то $a = (kl)c$, то есть по определению a делится на c.

Эти упражнения достаточно простые, однако важно, чтобы школьники привыкли корректно доказывать утверждения, ссылаясь на определение. Скажем, в предыдущем упражнении полезнее говорить «произведение кратно mn», чем «в частном будет целое число».

Задача 1.9. Действуя аналогично задаче 1.4, найдём разность двух выражений: $(ab + cd) - (ad + bc) = a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d) \vdots (a - c)$. Поэтому и второе выражение делится на $a - c$.

Задача 1.10. Заметим, что 9 и 15 делятся на 3, поэтому любая сумма, набранная такими монетами, также делится на 3. Однако 50 не делится на 3.

Задача 1.11. а) Заметим, что $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc}$. Поэтому частное просто равно исходному числу.

б) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому числа вида $\overline{abcabc}$ делятся на 7, на 11, на 13 и на их попарные произведения.

Задача 1.12. Заметим, что на свободу вышли узники из тех и только тех камер, в которых ключ повернули нечётное количество раз, то есть номера которых имеют нечётное количество делителей. По задаче 1.5 это квадраты, то есть искомые номера: 1, 4, 9, 16, $\ldots$, 100. Всего их десять.

К теме данного занятия относятся также задачи 1–7 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 2

Признаки делимости

Иногда нужно быстро определить, делится ли одно число на другое, не производя самого деления. В таких случаях полезно использовать признаки делимости.

Полезно начать занятие с такого фокуса. Учитель просит каждого школьника загадать трёхзначное число, затем вычесть из него первую его цифру, потом вторую и, наконец, третью цифру исходного числа. Если получилось двузначное число, то надо дописать в его начало ноль. Из полученного в итоге трёхзначного числа ученики называют две любые цифры, а учитель отгадывает третью цифру. Вычисления все ученики проделывают одновременно, а затем учитель по очереди выслушивает по две их цифры и называет каждому третью. Ключ к фокусу появится в ходе занятия.

Задача 2.1. а) Докажите, что число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2. б) Выведите признак делимости на 4, связанный с двумя последними цифрами.

Решение. а) Представим себе, что у продавщицы есть N яиц, которые она раскладывает в ячейки по десять, по сто, по тысяче и т. д. Останется неразложенным число яиц, равное последней цифре d числа N. В каждой ячейке число яиц делится на 2, поэтому если d чётно, то и N чётно, а если d нечётно, то и N нечётно. Короче говоря, d и N делятся или не делятся на 2 одновременно.

б) Разложим N яиц в ячейки по сто, тысяче и т. д. Останется неразложенным число яиц d, составленное из двух последних цифр числа N. В каждой ячейке число яиц делится на 4, поэтому d и N делятся или не делятся на 4 одновременно.

Приведём буквенное решение п. б) для учеников с развитой алгебраической техникой. Рассмотрим число $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Заметим, что все слагаемые, кроме двух последних, заведомо делятся на 4. Поэтому сумма делится на 4 тогда и только тогда, когда число $\overline{cd}$ делится на 4.

Аналогично выводятся признаки делимости на 8, 16 и так далее.

Задача 2.2. Петя заметил, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получится число, кратное 9. а) Докажите этот факт. б) Сформулируйте на его основе признаки делимости на 9 и на 3.

Решение. а) Проведём доказательство на примере трёхзначного числа N. Разложим N яиц в ячейки по сто штук, по десять штук и по одной штуке. После этого возьмём из каждой ячейки по одному яйцу и сложим вместе в корзину: по одному от каждой сотни, от каждого десятка и от каждой единицы. Заметим, что количество яиц в корзине как раз равно сумме цифр числа N. В больших ячейках останется по 99 яиц, в средних — по 9 яиц, в маленьких — ничего. Значит, общее число яиц в больших и средних ячейках кратно 9.

б) Таким образом, *число N делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9*. Для делимости на 3 признак формулируется аналогично (так как разность кратна также и 3).

Для учеников с развитой алгебраической техникой можно предложить такое доказательство. Рассмотрим число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Вычтем из него сумму его цифр: $\overline{abc} - (a + b + c) = 99a + 9b$. Разность кратна 9, поэтому уменьшаемое кратно 9 тогда и только тогда, когда вычитаемое кратно 9.

По приведённым примерам видна идеология признаков делимости на n: мы заменяем всё число некоторой его «частью» (например, последними цифрами или суммой цифр), которая делится (или не делится) на данное число одновременно с исходным числом.

Теперь можно объяснить наш фокус: ребята вычитали из числа сумму его цифр, значит, результат кратен 9. По двум цифрам результата учитель подбирал третью так, чтобы сумма делилась на 9. Это можно сделать однозначно, кроме того случая, когда сумма двух сообщённых цифр сама кратна 9. В этом случае учитель говорит: «0 или 9».

Задача 2.3. Вася нашёл число

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100,$$

затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?

Решение. Заметим, что $100! \vdots 9$, поэтому сумма цифр этого числа также делится на 9. Поскольку новое число делится на 9, то и его сумма цифр делится на 9, и так далее. Поэтому искомое однозначное число также должно делиться на 9, то есть равно 9 (0 получиться не может, так как сумма цифр положительна).

Обратите внимание школьников на то, что по формулировке этой задачи не видно, что она решается с помощью признаков делимости, — решающий должен сам про них подумать.

Задача 2.4. а) Разряды числа занумеровали по порядку справа налево (первый — разряд единиц, второй — разряд десятков и т. д.). После этого к числу прибавили сумму цифр в чётных разрядах и вычли сумму цифр в нечётных разрядах. Докажите, что полученное число делится на 11.

б) Сформулируйте признак делимости на 11.

Решение. а) Докажем на примере четырёхзначного числа N. Пусть продавщица раскладывает N яиц по ячейкам в тысячу, сто, десять и одно яйцо. После этого возьмём по одному яйцу из каждой ячейки в 1 яйцо и в 100 яиц и доложим по одному яйцу в каждую ячейку по 10 и по 1000 яиц. (Заметим, что это равносильно прибавлению к N суммы цифр в чётных разрядах и вычитанию суммы цифр в нечётных.) Теперь в ячейках лежит по 1001, 99 и 11 яиц. Все эти числа делятся на 11. Значит, полученное число делится на 11.

б) Свяжем с числом знакопеременную сумму цифр: поставим перед цифрами плюсы и минусы так, чтобы они чередовались и перед крайней справа цифрой стоял плюс. Например, знакопеременная сумма цифр числа 2011 равна $-2+0-1+1=-2$. Тогда получается, что в пункте а) мы просто вычитали из числа его знакопеременную сумму цифр. Поскольку найденная при этом разность всегда кратна 11, то получаем

Признак делимости на 11.
Число кратно 11 *тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр кратна* 11.

Докажем, что этот признак верен и для чисел любой длины. Для этого заметим, что $10^{2n}-1$ при любом n делится на 11 как число, составленное из чётного количества одинаковых цифр. Теперь докажем, что и $10^{2n+1}+1$ при любом n делится на 11. Сложим эти два числа: $(10^{2n}-1)+(10^{2n+1}+1)=11\cdot 10^{2n}$. Поскольку сумма и одно из слагаемых делится на 11, то и другое слагаемое делится на 11.

Задача 2.5. Верно ли, что если число делится на два других, то оно делится и на их произведение?

Решение. Неверно: $12 \vdots 6$, $12 \vdots 4$, но $12 \not\vdots (6\cdot 4)$.

Следующая теорема показывает, в каком случае это верно.

Определение. Два числа называются *взаимно простыми*, если их общим делителем является только 1.

Теорема о взаимно простых делителях. *Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на их произведение ab.*

Доказательство мы дадим на занятии 6. На основании этой теоремы можно формулировать новые признаки делимости, комбинируя уже известные. Например, $18=9\cdot 2$, а 9 и 2 — взаимно простые числа (можно проверить перебором), поэтому число делится на 18, если оно делится на 9 и на 2.

Задача 2.6. В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

Ответ: 5328, четыре вычеркнутые цифры.

Решение. Нужно получить число, которое кратно числам 4 и 9. Мы обязаны вычеркнуть цифру 9, иначе результат будет нечётным и, значит, не кратным 4. Мы обязаны также вычеркнуть 7, иначе результат будет оканчиваться на 7 или на 78 и тоже не кратен 4. Получилось число 654328. Его сумма цифр 28 не кратна 9, значит, и число не кратно 9, и надо вычеркнуть ещё хотя бы одну цифру. После вычёркивания сумма цифр станет меньше 27, но она должна быть кратна 9, то есть равна 18 или 9.

Во всех случаях нам надо уменьшить сумму 28 как минимум на 10, то есть вычеркнуть из 654328 не менее двух цифр. Итак, вычеркнуть менее 4 цифр нельзя. А ровно 4 можно: оставим число 5328. Оно кратно 4 и 9, а так как 4 и 9 взаимно просты, то оно кратно и 36.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. а) Докажите признак делимости на 5.

б) Выведите признак делимости на 25.

Задача 2.8. Автомат печатает на полоске бумаги цифры «4» по одной. Удастся ли остановить его так, чтобы было напечатано число, кратное 8?

Задача 2.9. В числе поменяли местами некоторые цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.

Задача 2.10. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

Задача 2.11. Швондер придумал ребус, в котором фигурируют числа

ГЛАВРЫБААБЫРВАЛГ и БОРМЕНТАЛЬ.

Профессор Преображенский утверждает, что оба этих числа — составные. Прав ли профессор?

Задача 2.12. а) Докажите, что произведение трёх последовательных чисел делится на 6. б) Докажите, что число $\frac{n^3 - n}{6}$ — целое.

Ответы и решения

Задача 2.7. а) Разложим N яиц по ячейкам по 10, 100, 1000 и т. д. штук. Останется количество яиц d, равное последней цифре числа N. Поскольку во всех ячейках количество яиц делится на 5, то число d делится или не делится на 5 одновременно с N.

б) Разложим N яиц по ячейкам по 100, 1000 и т. д. штук. Рассуждая далее аналогично пункту а), получим, что число N делится или не делится на 25 одновременно с числом, составленным из двух его последних цифр.

Задача 2.8. Ответ: не удастся.

Сначала будет напечатано 4, потом 44, потом 444. Эти числа не делятся на 8. Дальнейшее приписывание цифр можно представить как прибавление к 444 числа, кратного 1000. Получается сумма числа, кратного 8, и числа, восьми не кратного (444). Эта сумма не кратна 8.

Задача 2.9. Пусть при перестановке цифр из числа A получилось $3A$. Но у числа $3A$ сумма цифр кратна 3, значит, у A — тоже, так как суммы цифр этих чисел одинаковы. Тогда и A кратно 3. Следовательно, $3A$ кратно 9. Значит, суммы цифр у обоих чисел кратны 9. Тогда и A кратно 9, а значит, $3A$ кратно 27.

Здесь полезно спросить у школьников, почему нельзя таким же образом доказать делимость на 81 и т. д.?

Числа, указанные в условии, существуют, например, $A = 1035$; $3A = 3105$.

Задача 2.10. Разложим 225 на взаимно простые множители: $225 = 25 \cdot 9$. Потребуем делимости на 25 и на 9.

Чтобы число делилось на 25, последние две цифры должны быть 00, 25, 50 или 75. В нашем случае возможно только 00.

Далее, чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы сумма цифр делилась на 9. Значит, сумма цифр не меньше 9, и в записи не меньше 9 единиц.

Наименьшее число, в котором 9 единиц и 00 в конце, — это 11111111100. Оно нам подходит.

Задача 2.11. Ответ: профессор прав.

Первое число кратно 11, так как в силу симметричности его знакопеременная сумма цифр равна 0. Во втором числе присутствуют 10 различных цифр по одному разу, значит, его сумма цифр равна

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Но эта сумма кратна 3, значит, и само число также кратно 3.

Задача 2.12. а) Среди трёх последовательных чисел хотя бы одно делится на 2 и одно — на 3. Значит, и произведение этих трёх чисел делится на 2 и на 3. Но 2 и 3 взаимно просты, поэтому по теореме о взаимно простых делителях это произведение делится на $2\cdot 3=6$.

б) Заметим, что $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ — произведение трёх последовательных чисел, то есть оно кратно 6.

К теме данного занятия относятся также задачи 8–22 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 3

Деление с остатком

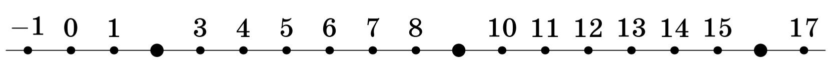
Представьте себе автомат, который разменивает данную ему сумму монетами по 5 рублей, а остаток меньше 5 рублей отдает рублями. Например, $33 = 5 \cdot 6 + 3$ — это 6 монет по 5 рублей и остаток 3 рубля. С математической точки зрения этот автомат выполняет деление на 5 с остатком.

Вспомним определение деления с остатком натуральных чисел.

> **Определение.** Если число a можно записать в виде $a = b \cdot q + r$, где $0 \leqslant r < b$, то говорят, что a даёт при делении на b (неполное) частное q и остаток r.

Полезно обсудить со школьниками, что согласно этому определению невозможно деление с остатком на $b = 0$. Кроме того, важно добиться понимания того, что деление нацело — это частный случай деления с остатком (остаток 0).

Давайте расширим это определение, разрешив делимому быть отрицательным. Заметим, что числа с одинаковым остатком располагаются на числовой прямой через равные промежутки. Например, отметим на прямой натуральные числа, которые при делении на 7 дают остаток 2.



Соседние отмеченные числа находятся на расстоянии 7 друг от друга: 2, 9, 16 и так далее. Продолжим эту картинку влево, не нарушая закономерности: отметим -5, -12, -19 и так далее. Будет удобно так определить деление с остатком отрицательных чисел, чтобы эти числа также имели остаток 2 при делении на 7, то есть чтобы записи $-5 = 7 \cdot (-1) + 2$, $-12 = 7 \cdot (-2) + 2$, $-19 = 7 \cdot (-3) + 2$ и т. д. читались как деление с остатком. Для этого достаточно взять то же самое определение, разрешив неполному частному быть отрицательным! Но остаток по-прежнему неотрицателен.

Важно подчеркнуть, что определения в случае натуральных чисел и в случае целых — одинаковы. Из нашей картинки следует, что разность чисел с равными остатками при делении на b кратна b.

Задача 3.1^{+}. Маша проболела урок и сделала примеры на деление с остатком так: а) $20 = 3 \cdot 4 + 8$; б) $19 = 3 \cdot 5 + 4$; в) $-11 = 2 \cdot (-5) - 1$. Объясните её ошибки.

Решение. а) Неверно, так как $4 < 8$ — делитель меньше остатка.

б) В таком виде неверно, так как $3 < 4$. Но если переставить сомножители: $19 = 5 \cdot 3 + 4$, то верно.

в) Неверно, так как остаток не может быть отрицательным.

Делить с остатком можно разными способами. Первый способ — это привычное деление уголком. Положительные числа делят непосредственно. Вместо отрицательных можно делить противоположные им положительные числа, а затем выполнять операцию, описанную в решении задачи 3.12.

Другой способ — графический. Нанесём на координатную ось числа 0, $\pm b$, $\pm 2b$ и так далее. Теперь нанесём на эту размеченную ось число a. Оно попадёт либо на одно из отмеченных чисел (и тогда делится на b), либо в отрезок между двумя соседними отмеченными числами. Тогда множитель при b в левом числе даст частное, а расстояние от левого числа до a — остаток (почему он будет меньше b?).

Но как узнать, всегда ли разные способы деления дают одинаковый результат? Ответ даёт следующая теорема.

Теорема об однозначности деления с остатком. *Деление с остатком осуществляется единственным образом. Иными словами, если число a записано двумя способами в требуемом виде*:

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < b,$$
$$a = bq_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < b,$$

то обе записи обязательно совпадают (*то есть* $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$).

Доказательство. Вычтем второе равенство из первого и получим $b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = 0$, то есть $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Заметим, что в силу определения остатка $-b < r_2 - r_1 < b$, то есть $-b < b(q_1 - q_2) < b$, следовательно, $-1 < q_1 - q_2 < 1$. Но это значит, что $q_1 = q_2$. Подставляя найденное соотношение в первое равенство этого абзаца, получим, что и $r_1 = r_2$.

Задача 3.2. Какой остаток даёт число 123321 при делении на 999?

Решение. $123321 = 1000 \cdot 123 + 321 = 999 \cdot 123 + (123 + 321) = 999 \cdot 123 + 444$. Остаток равен 444.

Задача 3.3. Делитель и делимое увеличили в 3 раза. Как изменятся частное и остаток?

Решение. Сначала приведём наглядное решение, а потом строгое, использующее определение.

Представим себе, что мы раскладываем орехи на равные кучки, а остаток кладём в меньшую кучку. А теперь у нас орехов стало втрое больше, но и кучки велено делать втрое больше. Очевидно, количество кучек не изменится, а в меньшей кучке станет втрое больше орехов.

Пусть $a = bq + r$, где $r < b$. Домножим обе части равенства на 3 и получим $3a = (3b) \cdot q + 3r$, где $3r < 3b$. Следовательно, частное не изменилось, а остаток увеличился в 3 раза.

Эта задача показывает, что в некоторых случаях деление с остатком удобнее записывать в виде произведения (как в определении), а не в виде частного.

Задача 3.4. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

Решение. Предположим, что может. Тогда число a можно записать в виде $3x$ и в виде $12y + 2$. Приравнивая эти величины и перенося неизвестные влево, получим $3x - 12y = 2$. Заметим, что левая часть равенства делится на 3, а правая — нет. Значит, равенство невозможно. Следовательно, остаток от деления числа a на 12 не равен 2.

Задача 3.5. а) Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое даёт остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7.

б) Найдите *все* такие числа.

Решение. а) Заметим, что если искомое число уменьшить на 1, то получится число, которое делится на 2, 3, 5 и 7. Ввиду взаимной простоты чисел 2 и 3 такое число делится на их произведение 6, ввиду взаимной простоты чисел 6 и 5 — на $6 \cdot 5 = 30$, а ввиду взаимной простоты чисел 30 и 7 — на $30 \cdot 7 = 210$. Поэтому наименьшим таким числом будет 210, а искомым — 211.

б) В силу вышесказанного это все числа вида $210k + 1$, где k — произвольное целое число.

Задача 3.6^{+}. Вернёмся к задаче 1.2. Заполните таблицу, используя остатки: «0», если число делится нацело на m, и «не 0», если не делится.

Решение. Задача сводится к следующим равенствам: $0 + 0 = 0$, 0+«не 0»=«не 0», «не 0»+«не 0»=?, $0 \cdot x = 0$, «не 0»·«не 0»=?.

Почти все равенства очевидны, что показывает силу метода остатков. Непривычно для школьников последнее равенство, которое станет яснее после занятия 7.

Задача 3.7. Каждое из чисел от 1 до 1 000 000 заменили на его сумму цифр. Каждое из полученных чисел вновь заменили на его сумму цифр. Так делали, пока не получили миллион однозначных чисел. Каких чисел среди них больше: единиц или двоек?

Решение. Заметим, что, заменяя число на сумму его цифр, мы уменьшаем его на число, кратное девяти (см. задачу 2.2). Это означает, что при этой операции остаток при делении на 9 не меняется! Тем самым, достаточно сравнить количества чисел от 1 до 1 000 000, дающих остатки 1 и 2 при делении на 9. Остатки 1 и 2 повторяются парами, начиная с первого числа. Поскольку последнее число даёт остаток 1, единиц больше.

Таким образом, по ходу решения задачи мы обобщили признак делимости: остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления его суммы цифр на 9. Последнее утверждение по аналогии с признаками делимости можно назвать признаком «равноостаточности». Если остаток равен 0, то получим признак делимости.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.8. Разделите с остатком

а) 239 на 6;

б) -239 на 6;

в) -99 на 10;

г) -101 на 100.

Надо прорешать некоторое количество простых примеров, чтобы школьники твёрдо усвоили определение. Чтобы было интересно, можно решать устно, на скорость и т. д.

Задача 3.9. Когда Скупой рыцарь раскладывает свои монеты стопками по девять штук, у него остаётся восемь монет. Сколько монет может оставаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?

Задача 3.10. Число a даёт остаток 6 при делении на 12. Может ли оно давать остаток 12 при делении на 20?

Задача 3.11. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает остаток 4 и при делении на 6 дает остаток 5.

Задача 3.12. Число a даёт при делении на b частное q и остаток r. Какие частное и остаток при делении на b даст число $-a$?

Задача 3.13. На доске написано число 2. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

Ответы и решения

Задача 3.8. а) $239 = 6 \cdot 39 + 5$;
б) $-239 = 6 \cdot (-40) + 1$;
в) $-99 = 10 \cdot (-10) + 1$;
г) $-101 = 100 \cdot (-2) + 99$.

Задача 3.9. Ответ: 8 или 17.

Будем объединять стопки по 9 монет в пары. Если стопок было чётное количество, то останется 8 монет. Если же нечётное — останется 8 монет и ещё одна стопка в 9 монет, итого 17.

Задача 3.10. Если второе утверждение верно, то a кратно 4. Однако из первого утверждения следует, что остаток при делении a на 4 равен 2. Противоречие показывает, что у a не может быть остатка 12 при делении на 20.

Это же решение может быть записано в буквах, см. решение задачи 3.4.

Задача 3.11. Ответ: 59.

Условие задачи равносильно тому, что число, увеличенное на 1, должно делиться на 2, 3, 4, 5 и 6. Ввиду взаимной простоты чисел 5 и 6 это число делится на 30. Но 30 не подходит, так как не делится на 4. Однако $2 \cdot 30 = 60$ уже подходит. Значит, искомое число равно $60 - 1 = 59$.

Задача 3.12. Ответ: если $r = 0$, частное равно $-q$, а остаток равен 0. В противном случае частное равно $(-q - 1)$, а остаток $b - r$.

Если $r = 0$, то и a, и $-a$ делятся на b, поэтому остаток равен 0. Если же $r \neq 0$, домножим обе части равенства $a = bq + r$ на -1. Получится

$$-a = b(-q) + (-r) = b(-q - 1) + (b - r).$$

Поскольку $0 < r < b$, то $0 < b - r < b$. В этом случае остаток равен $b - r$.

Задача 3.13. Так как число и его сумма цифр отличаются на число, кратное 9, они дают одинаковые остатки и при делении на 3. Нетрудно проверить, что из числа, не кратного трём, при добавлении суммы цифр снова получается число, не кратное 3. Действительно, при сложении двух чисел с остатком 1 получится число с остатком 2, а при сложении двух чисел с остатком 2 получится число с остатком 1. Так как число 123456 кратно 3, то оно получиться не может.

К теме данного занятия относятся также задачи 23–38 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 4

Простые числа

Задача 4.1. а) Площадь клетчатого прямоугольника равна 31 клетке. Чему равен его периметр?

б) Площадь клетчатого прямоугольника равна n клеток. Каким свойством должно обладать n, чтобы по этим данным можно было однозначно определить его периметр?

Решение. а) $31 = 1 \cdot 31$, и других делителей нет, поэтому длина равна 31, а ширина 1. Значит, периметр равен $(31 + 1) \cdot 2 = 64$.

б) Если n раскладывается в произведение только двух множителей, то периметр определяется однозначно. Поскольку число n всегда делится на 1 и на n, этими множителям могут быть только 1 и n.

Предположим, что есть ещё одно разложение: $n = km$, где $2 \leqslant k \leqslant m$. Тогда кроме прямоугольника $1 \times n$ с периметром $2(n+1)$ есть ещё прямоугольник $k \times m$ с периметром $2(k+m)$. Однако $k \leqslant m = \frac{n}{k} \leqslant \frac{n}{2}$, то есть второй периметр не превосходит $2n$ и не равен первому.

> **Определение.** Число $p > 1$ называется *простым*, если кроме 1 и p оно не имеет других делителей. Число называется *составным*, если у него есть делитель больше 1, но меньше самого числа.

Из определения следует, что простое число имеет ровно два делителя, а составное — больше двух.

Задача 4.2. Найдите самое большое а) двузначное; б) трёхзначное простое число.

Ответ: а) 97; б) 997.

Решение. а) Будем идти «сверху вниз». Число 99 делится на 3, 98 делится на 2. Проверим число 97. Оно не делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Это значит, что если у 97 есть делители (кроме 1), то все они больше или равны 10. Однако $10 \cdot 10 > 97$. Значит, дальше можно не проверять.

б) Ближайший «сверху» кандидат — 997. Делимость надо проверять до 31, так как $31^2 < 997$, а $32^2 > 997$. Заметим, что у каждого числа $n > 1$ есть простой делитель p. Это, например, наименьший из делителей, больших 1. Действительно, если он не простой, то его делитель ещё меньше и делит n. Поэтому если у 997 есть делитель, не превосходящий 31, то, взяв простой делитель этого делителя, найдём не больший 31 простой делитель числа 997. Итак, перебор можно сократить, проверив только, что 997 не делится на простые числа 2, 3, 5, ..., 29, 31.

Задача 4.3. а) Приведите пример трёх чисел, не делящихся друг на друга и таких, что произведение любых двух из них делится на третье. б) Тот же вопрос для чисел, больших ста.

Решение. а) 6, 10 и 15.

б) Пусть p, q, r — три различных простых числа, больших 10. Рассмотрим их попарные произведения pq, pr, qr. Они не делятся друг на друга (если бы, например, pq делилось на pr, то $pq = kpr \Leftrightarrow q = kr$, то есть простое число q делилось бы на другое простое число r). Однако произведение любых двух из этих чисел делится на третье, например $\frac{pr \cdot qr}{pq} = r^2$.

Перед следующей задачей полезно провести такую игру: каждый ученик загадывает простое число, большее трёх. Учитель просит разделить это число на 6 и сказать остаток. На доске появляются колонки из «1» и «5». (Если кто-то из учеников ошибся в вычислении, можно тут же на доске вместе посчитать заново.)

Задача 4.4^{+}. Докажите, что простое число, большее чем 3, представимо либо в виде $6n + 1$, либо в виде $6n + 5$, где n — натуральное число или 0.

Решение. Какие остатки при делении на 6 может иметь простое число, большее чем 3? Всего возможно шесть вариантов, переберём их.

Остаток 0 невозможен, так как тогда число будет делиться на 6.

Остаток 1 возможен.

Остаток 2 невозможен, так как тогда число будет делиться на 2, а такое простое число только одно — 2.

Остаток 3 невозможен, так как тогда число будет делиться на 3, а такое простое число только одно — 3.

Остаток 4 невозможен, так как тогда число будет больше 2 и делиться на 2.

Остаток 5 возможен.

Задача 4.5. Могут ли натуральные числа $n - 2012$, n и $n + 2012$ одновременно быть простыми?

Ответ: не могут.

Решение. Рассмотрим остатки от деления данных трёх чисел на 3. Поскольку 2012 при делении на 3 даёт остаток 2, то числа $n - 2012$, n и $n + 2012$ дают три различных остатка при делении на 3. Это значит, что одно из чисел заведомо делится на 3. Если это не 3, то это составное число и задача решена. Пусть это 3. Тогда $n = 2015$ — составное число.

Задача 4.6^{+}. Двое играют в такую игру: Петя диктует Васе число (на этом его роль кончается), а Вася записывает число на доске. Затем Вася заменяет число на равное ему произведение двух его множителей, отличных от 1. После этого Вася делает то же самое с одним из написанных на доске чисел, и так далее.

Сможет ли Петя выбрать исходное число так, чтобы Вася а) не мог сделать даже первого хода; б) делал ходы бесконечно?

Решение. а) Сможет, если выберет простое число.

б) Не сможет. Заметим, что если в какой-то момент у Васи получилось простое число, то оно остаётся на доске. Если же число составное, то оно по определению раскладывается в произведение двух множителей, отличных от 1. При этом на каждом шаге числа уменьшаются. Поскольку меньше 1 они стать не могут, рано или поздно процесс остановится. При этом на доске будет записано произведение простых чисел, которое называется *разложением числа на простые множители*.

Итак, в предыдущей задаче доказано, что любое число за конечное число действий можно разложить на простые множители. Вопрос об однозначности разложения (может ли Вася получить два разных разложения одного числа?) будет рассмотрен в занятии 8.

Задача 4.7$^+$. Рассмотрим множество всех простых чисел. Обозначим их через $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Построим такое число: $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

Очевидно, оно не делится ни на одно из простых чисел. Значит, оно также простое. Однако оно не входит в наше множество всех простых чисел, так как больше каждого из них. Получили противоречие. В чём ошибка?

Решение. Всё рассуждение проведено безупречно, кроме одного места. Это — предположение о конечности множества простых чисел. Поскольку мы пришли к противоречию, то *простых чисел бесконечно много* (а наше рассуждение — на самом деле доказательство от противного).

Утверждение о бесконечности множества простых чисел — одна из самых древних теорем арифметики. Такое её доказательство приведено ещё у Евклида.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.8. а) Пусть m и n — натуральные числа, а $m^2 - n^2$ — простое число. Найдите $m - n$.

б) В клетчатом квадрате закрасили меньший квадрат. Незакрашенных клеток осталось 79. Могут ли все углы большого квадрата остаться незакрашенными?

Задача 4.9. Существует ли сто подряд идущих составных чисел?

Задача 4.10. Назовём число упрощённым, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных чисел могут оказаться упрощёнными?

Задача 4.11. Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным?

Задача 4.12. а) Найдите пять таких простых чисел, что расстояние между любыми двумя соседними из них равно 6.

б) Существуют ли шесть таких чисел?

Ответы и решения

Задача 4.8. а) $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Простое число p представимо только в виде $p \cdot 1$. Поскольку $m - n < m + n$, то $m - n = 1$.

б) Пусть m клеток — сторона большего квадрата, а n клеток — меньшего. Тогда $m^2 - n^2 = 79$ — простое число. Стало быть, по п. а) $m - n = 1$. Это значит, что размеры квадратов отличаются на 1 и меньший квадрат обязательно содержит один из углов большего.

Задача 4.9. Попробуем построить такое число N, что числа $N+2$, $N+3$, ..., $N+101$ составные (всего сто чисел). Проще всего потребовать, чтобы $N+2$ делилось на 2, $N+3$ делилось на 3, ..., $N+101$ делилось на 101. Это получится, если N будет делиться на $2, 3, \ldots, 101$. А такое число построить легко: $N = 101!$. Итак, числа $101! + 2$, $101! + 3$, ..., $101! + 101$ — искомые составные числа.

Заметим, что таким образом можно получить произвольное количество идущих подряд составных чисел!

Задача 4.10. Поскольку чётное простое число только одно — 2, то упрощённые числа не могут делиться на 4. Исключением является число $4 = 2 \cdot 2$, но соседние с ним числа 3 и 5 упрощёнными не являются. Это значит, что больше трёх идущих подряд упрощённых чисел не существует. Примеры троек упрощённых чисел существуют:

$$33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Задача 4.11. Пробы дают только простые остатки или 1. Попробуем доказать, что всегда будет так. Пусть $p = 30 \times \times k + r$, где p простое, а $0 \leqslant r < 30$. Предположим, что r составное. Тогда r делится на 2, 3 или 5 (почему?). Поскольку 30 делится на каждое из этих чисел, p также должно делиться на одно из них. Однако если $p = 2$, 3 или 5, то r простое. А если $p > 5$, то само p составное. В обоих случаях приходим к противоречию.

Задача 4.12. а) 5, 11, 17, 23, 29.

б) Заметим, что если числа отличаются на 6, то их остатки при делении на 5 отличаются на 1. Кроме того, из всех простых чисел остаток 0 при делении на 5 имеет только число 5. Следовательно, пять простых чисел должны начинаться с 5 (то есть пример из п. а) единственный), а шести идущих подряд простых чисел не существует.

К теме данного занятия относятся также задачи 39–49 из раздела «Дополнительные задачи».

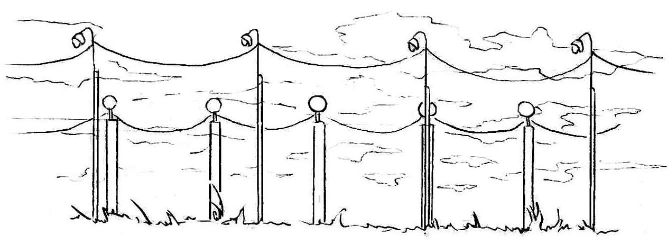
Занятие 5

Общие делители и общие кратные Алгоритм Евклида

Следующие две задачи посвящены формированию наглядного представления об общих делителях и общих кратных.

Задача 5.1. Надо замостить два участка дороги одинаковыми плитами длиной в целое число метров. Какие плиты можно заказать, если длины участков 12 м и 16 м?

Решение. Первую дорогу можно замостить плитами длиной 1, 2, 3, 4, 6, 12 м. Вторую — плитами длиной 1, 2, 4, 8, 16 м. Для обоих участков подходят длины 1, 2, 4 м. Математически задача свелась к нахождению *общих делителей* чисел 12 и 16. Заметим, что если бы требовалось использовать как можно меньше плит, то мы бы заказали плиты длиной 4 м, то есть использовали бы *наибольший общий делитель*.



Задача 5.2. Параллельно идут две линии электропередач. У одной расстояние между столбами 8 м, а у другой 12 м. Два столба «совпали». На каком расстоянии от них находятся другие пары «совпадающих» столбов?

Решение. Для первой линии расстояния между столбами равны 8, 16, 24, 32, 40, 48 м и т. д. Для второй — 12, 24, 36, 48 м и т. д. Совпадающие расстояния — 24 м, 48 м и т. д. Математически задача свелась к нахождению *общих кратных* чисел 8 и 12. Расстояние между ближайшими «совпадающими» парами столбов равно 24 м, то есть *наименьшему общему кратному* 8 м и 12 м.

Задача 5.3^{+}. Найдите общие делители чисел n и $n+1$.

Решение. Пусть d — общий делитель чисел n и $n+1$. Тогда на d должна делиться и их разность $(n+1)-n=1$. Значит, $d=\pm 1$.

Наибольший общий делитель двух чисел m и n будем обозначать через (m,n). Напомним, что если $(m,n)=1$, то числа m и n являются взаимно простыми (см. занятие 2). Предыдущая задача показывает нам, что *последовательные числа n и $n+1$ всегда взаимно простые.*

Эта же задача подсказывает следующее утверждение.

Лемма. *Пусть a и b — натуральные числа, r — остаток от деления a на b. Тогда наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r, то есть $(a,b)=(b,r)$.*

Доказательство. Из условия следует, что $a=b\cdot q+r$. Пусть c — некоторый общий делитель чисел a и b. Из равенства $r=a-bq$ следует, что r тоже делится на c, то есть c является общим делителем чисел b и r. Обратно, пусть c' — некоторый общий делитель чисел b и r. Тогда число $a=bq+r$ тоже делится на c', то есть c' является общим делителем чисел a и b. Таким образом, числа a и b имеют те же общие делители, что и числа b и r. Значит, наибольший общий делитель чисел a и b совпадает с наибольшим общим делителем чисел b и r.

Применяя лемму несколько раз, получим способ быстрого нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

Алгоритм Евклида. Сначала разделим a на b. Если разделится без остатка, то $(a, b) = b$. Если же есть ненулевой остаток r, то разделим b на этот остаток — получится новый остаток r_1. Разделим r на r_1. И так продолжаем, а остановимся тогда, когда очередной остаток поделит предыдущий нацело (почему это обязательно произойдёт?). Этот последний ненулевой остаток и будет наибольшим делителем всех чисел, включая два исходных.

Некоторым детям будет полезно геометрическое истолкование алгоритма Евклида: от прямоугольника со сторонами a и b (где $b < a$) отрезают несколько квадратов со стороной b, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше b. От полученного прямоугольника, пока возможно, отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, и т. д. Длина стороны последнего квадрата равна (a, b). См. задачу 5.9 и дополнительную задачу Д58.

Задача 5.4. Найдите $(846, 246)$.
Ответ: 6.
Решение.

$$846 = 246 \cdot 3 + 108, \quad 246 = 108 \cdot 2 + 30, \quad 108 = 30 \cdot 3 + 18,$$
$$30 = 18 \cdot 1 + 12, \quad 18 = 12 \cdot 1 + \boxed{6}, \quad 12 = \boxed{6} \cdot 2 + 0.$$

Конечно, где-то на числах 30 и 18 уже можно сообразить, какой ответ получится, и не доводить вычисления до конца.

Наименьшее общее кратное чисел a и b будем обозначать $[a, b]$.

Если числа a и b взаимно простые (то есть $(a, b) = 1$), то по теореме о взаимно простых делителях (занятие 2) любое кратное им число должно делиться на ab, поэтому $[a, b] = ab$. То есть в этом случае $(a, b) \cdot [a, b] = ab$. Оказывается, это верно и в общем случае.

Задача 5.5^{+}**.** Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b верно равенство: $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Доказательство. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Тогда числа должны иметь вид $a = dl$,

$b = dm$, где l и m — взаимно простые числа. Их наименьшее общее кратное c должно делиться на d. Рассмотрим частное $\frac{c}{d}$. Оно должно делиться на взаимно простые числа l и m. По теореме о взаимно простых делителях, $\frac{c}{d} \vdots lm$, то есть $c = dlm$. Поэтому $d \cdot c = d \cdot (dlm) = dl \cdot dm = ab$, что и даёт доказываемое равенство.

С помощью этого соотношения нетрудно найти $[a, b]$, вычислив ab непосредственно, а (a, b) по алгоритму Евклида.

Задача 5.6. Решите систему:

а) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x, y) = 1, \\ [x, y] = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 31. \end{cases}$

Решение. а) Заметим, что числа x и y оба кратны 5 и оба делят 10. Кроме того, они не равны (почему?). Таких чисел только два — 5 и 10. Значит, $x = 5$, $y = 10$, или наоборот, $x = 10$, $y = 5$.

б) Заметим, что числа x и y взаимно просты и оба делят 4. Разложим 4 на два множителя всеми возможными способами и выберем пары взаимно простых: $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$. Нам подходят 1 и 4.

в) Общее кратное двух чисел обязано делиться на общий делитель этих чисел, а $31 \not\vdots\, 5$. Следовательно, система не имеет решений.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.7. Верно ли, что являются взаимно простыми

а) два соседних нечётных числа;

б) нечётное число и половина чётного, следующего за ним?

Задача 5.8. Найдите с помощью алгоритма Евклида а) $(1960, 588)$; б) $[1960, 588]$.

Задача 5.9. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Найдите какие-нибудь два числа a и b, чтобы при разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

Задача 5.10. Найдите все значения m, для которых дробь $\dfrac{11m+3}{13m+4}$ сократима.

Задача 5.11. Решите систему:

а) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 30 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x, y) = 1, \\ [x, y] = 30. \end{cases}$

Задача 5.12. Числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … определяются равенствами $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ (следующее число равно сумме двух предыдущих) и $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. Найдите $(\varphi_{100}, \varphi_{101})$.

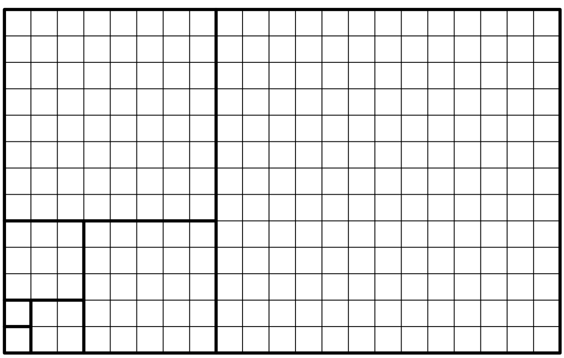
Ответы и решения

Задача 5.7. По алгоритму Евклида а) $(2n-1, 2n+1) = (2, 2n-1) = 1$ — верно; б) $(n, 2n-1) = (n, n-1) = 1$ — верно.

Заметим, что с помощью алгоритма Евклида задача решается двумя простыми равенствами.

Задача 5.8. а) $1960 = 588 \cdot 3 + \boxed{196}$, $588 = 3 \cdot \boxed{196} + 0$.

б) $[1960, 588] = 1960 \cdot 588 : (1960, 588) = 1960 \cdot 588 : 196 = 10 \cdot 588 = 5880$.



Задача 5.9. Иными словами, надо найти такие числа a и b, чтобы алгоритм Евклида останавливался через 6

шагов. Удобно начать с конца. Пусть, например, в конце было два квадрата со стороной 1 (для простоты будем брать фигуры наименьшего размера). Тогда перед этим был квадрат со стороной 2, перед ним — квадрат со стороной 3, перед ним — квадрат со стороной 5, затем 8, затем 13 (см. рисунок). Итак, исходный квадрат мог иметь размеры 21×13.

Задача 5.10. $(13m+4, 11m+3) = (11m+3, 2m+1) = (2m+1, m-2) = (m-2, 5) \neq 1$ тогда и только тогда, когда $(m-2) \vdots 5$, то есть $m = 5k+2$, где k — целое число.

Задача 5.11. а) $xy = (x, y) \cdot [x, y] = 150$. Разложим 150 на два множителя, кратных 5: $150 = 5 \cdot 30 = 10 \cdot 15$. Подходят оба варианта.

б) $xy = (x, y)[x, y] = 30$, при этом x и y взаимно просты. Разложим 30 на два взаимно простых множителя: $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$. Подходят все четыре варианта.

Задача 5.12. По алгоритму Евклида

$$(\varphi_{100}, \varphi_{101}) = (\varphi_{100}, \varphi_{101} - \varphi_{100}).$$

Но согласно определению чисел Фибоначчи $\varphi_{101} - \varphi_{100} = \varphi_{99}$. Поэтому $(\varphi_{100}, \varphi_{101}) = (\varphi_{99}, \varphi_{100})$. Заметим, что оба индекса уменьшились на 1. Многократно применяя алгоритм Евклида, получим

$$(\varphi_{100}, \varphi_{101}) = (\varphi_{99}, \varphi_{100}) = (\varphi_{98}, \varphi_{99}) = \ldots = (\varphi_1, \varphi_2) = 1.$$

Тем самым, мы доказали, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты. Заметим, что в решении задачи 5.9 мы сконструировали как раз последовательность Фибоначчи!

Другое решение основано на том, что сумма двух взаимно простых чисел взаимно проста с каждым слагаемым.

К теме данного занятия относятся также задачи 50–62 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 6

Уравнения в целых числах

Задача 6.1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Сначала он делает один или несколько прыжков длины 3 в одну сторону, а затем один или несколько прыжков длины 5 в другую сторону. Как ему попасть из точки 0 в точку 7? Найдите все варианты.

Решение. Легко найти одно из решений: один прыжок длины 3 влево и два прыжка длины 5 вправо. Чтобы получить другие варианты, заметим, что к найденному решению можно «добавлять» любые прыжки, в результате которых кузнечик остаётся на месте.

Можно прыгнуть 5, 10, 15, ... раз по 3 влево и соответственно 3, 6, 9, ... раз по 5 вправо. Можно, наоборот, прыгнуть 5, 10, 15, ... раз по 3 вправо, а затем 3, 6, 9, ... раз по 5 влево.

На самом деле в предыдущем абзаце изложен способ получения всех вариантов прыжков. Чтобы объяснить это строго, изложим всё с помощью алгебры. Обозначим число прыжков длины 3 через x, а длины 5 — через y. Договоримся, что если $x > 0$, то прыжки велись вправо, а если $x < 0$, то влево. Аналогично для y. (Тогда равенство

$$3 \cdot (-6) + 5 \cdot (+5) = 7$$

можно «прочесть» так: кузнечик прыгнул на 3 влево 6 раз и на 5 вправо 5 раз и попал в точку 7.) Получим уравнение

$$3x + 5y = 7.$$

Его *частное* решение (то есть одно из решений) нетрудно угадать: $x_0 = -1$, $y_0 = 2$. Вычтем из нашего уравнения равенство $3x_0 + 5y_0 = 7$. Получим новое уравнение: $3(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0$. Обозначим $x - x_0 = s$, $y - y_0 = t$. Имеем $3s + 5t = 0$. Отсюда видно, что $3s \vdots 5$, $5t \vdots 3$. Поскольку 3 и 5 взаимно просты, то $s \vdots 5$, $t \vdots 3$ (см. теорему о сокращении множителя в конце этого занятия). Положим $s = 5n$, $t = -3n$, где n может быть любым целым числом. Итак, $x - x_0 = 5n$, $y - y_0 = -3n$, то есть $x = -1 + 5n$, $y = 2 - 3n$, где n — любое целое число. Других решений нет.

Задача 6.2. У продавца и покупателя есть неограниченное количество монет двух достоинств. Продавец может давать сдачу. Покупатель смог заплатить 7 дублонов. Может ли покупатель заплатить

а) 14 дублонов;

б) 35 дублонов;

в) 36 дублонов?

Решение. а), б) Сможет. Покупатель и продавец просто повторяют операцию по уплате 7 дублонов два раза или пять раз соответственно.

в) Повторением операции так сделать не получится, поскольку 36 не кратно 7. Покажем, что данных недостаточно. Если есть монеты в один дублон, то заплатить и 7, и 36 дублонов конечно, можно. А если были монеты в 7 и 14 дублонов, то ими, даже со сдачей, можно заплатить только суммы, кратные 7 дублонам, поэтому 36 дублонов заплатить нельзя.

В задаче 1 мы легко смогли угадать частное решение. А как быть, если числа большие? Или как научить компьютер находить частные решения?

Задача 6.3^{+}. Найдите какое-нибудь решение уравнения в целых числах: а) $15x + 17y = 1$; б) $15x + 17y = 9$.

Решение. а) Чтобы найти частное решение, найдём $(15, 17)$ с помощью алгоритма Евклида:

$$17 = 15 \cdot 1 + 2, \quad 15 = 2 \cdot 7 + \boxed{1}.$$

Теперь выразим 1 в рамочке из второго равенства, потом 2 из первого: $\boxed{1} = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - (17 - 15) \cdot 7 = 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17$. Отсюда видно, что пара чисел $x_0 = 8$, $y_0 = -7$ является частным решением уравнения.

б) Из пункта а) мы знаем такие x_0 и y_0, что $15x_0 + 17y_0 = 1$. Домножим обе части этого равенства на 9. Получим: $15 \cdot (9x_0) + 17 \cdot (9y_0) = 9$. Поэтому пара $(9x_0, 9y_0) = (72, -63)$ является решением уравнения б).

Задачи 6.1 и 6.3 сводятся к уравнениям вида

$$ax + by = c, \tag{1}$$

где a, b, c — данные целые числа, причём a и b не равны 0 (например, в последней задаче $a = 15$, $b = 17$, $c = 1$ или 9), а x, y — *целочисленные* неизвестные.

> Такие уравнения называют *диофантовыми* (по имени древнегреческого математика Диофанта) или уравнениями в целых числах. Если $c \neq 0$, уравнение называют *неоднородным*, а если $c = 0$, то *однородным*.

В предыдущих задачах мы получили следующую схему решения диофантова уравнения.

> 1. Найти частное решение неоднородного уравнения (угадать или использовать алгоритм Евклида).
> 2. Найти общее решение однородного уравнения.
> 3. Сложить эти решения.

Задача 6.4. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим фломастером от её начала через каждые

34 см, другой мастер делает на ней пометки красным фломастером через каждые 27 см. Может ли какая-либо синяя пометка оказаться на расстоянии 2 см от какой-либо красной?

Ответ: может.

Решение. Пусть первый мастер сделал x пометок, а второй — y пометок. Если уравнение $34x - 27y = 2$ имеет положительные решения, то синяя пометка номер x отстоит на 2 см от красной пометки номер y. Будем искать частное решение с помощью алгоритма Евклида:

$$34 = 27 \cdot 1 + 7, \quad 27 = 7 \cdot 3 + 6, \quad 7 = 6 \cdot 1 + \boxed{1}.$$

Теперь «обратным ходом» выражаем 1 в рамочке:

$$1 = 7 - 6 = 7 - (27 - 7 \cdot 3) = 7 \cdot 4 - 27 = \\ = (34 - 27) \cdot 4 - 27 = 34 \cdot 4 - 27 \cdot 5.$$

Умножив равенство на 2, получим $34 \cdot 8 - 27 \cdot 10 = 2$, то есть, например, восьмая синяя пометка отстоит от десятой красной на 2 см.

Во всех предыдущих уравнениях решение существовало. Возникает вопрос, всегда ли уравнение (1) разрешимо? Мы сейчас докажем, что *при взаимно простых* a и b уравнение $ax + by = 1$ всегда разрешимо. Отсюда будет следовать и разрешимость уравнения $ax + by = c$ (домножением решения на c).

Основная лемма. *Если числа a и b взаимно просты, то найдутся такие два числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$.*

Доказательство. Найдём (a, b) по алгоритму Евклида. Поскольку числа a и b взаимно просты, в конце мы получим 1. Выражая 1 последовательно через цепочку остатков от конца к началу (как в двух предыдущих задачах), мы выразим 1 через a и b с некоторыми коэффициентами, то есть гарантированно получим числа x_0 и y_0.

Следствие. *Если числа a и b взаимно просты, то для любого целого c найдутся такие два числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = c$.*

Опираясь на эти утверждения, можно доказать ряд важных теорем о простых и взаимно простых числах (см. задачи 6.6, 6.11 и следующее занятие).

Задача 6.5. Имеют ли решение следующие диофантовы уравнения:
а) $6x + 8y = 9$;
б) $5x + 10y = 17$;
в) $25x + 10y = 55$;
г) $12x + 15y = 22$;
д) $24x + 18y = 2010$?

Решение. а) Не имеет. Левая часть при целых x и y должна быть чётной, а правая — нечётна.

б) Не имеет. Оба слагаемых в левой части кратны 5, значит, и правая часть должна быть кратна 5.

в) Имеет. Можно непосредственно угадать решение, например, $x = 3$, $y = -2$. А можно поделить обе части уравнения на 5, тогда получится уравнение $5x+2y = 11$ со взаимно простыми коэффициентами. Оно разрешимо по следствию из основной леммы.

г) Не имеет. Левая часть кратна 3, а правая — нет.

д) Имеет. Левая и правая части кратны 6. Разделив их на 6, получим уравнение $4x+3y = 335$ со взаимно простыми коэффициентами. По следствию из основной леммы, у него есть решения.

Задача 6.6. Докажите теорему о взаимно простых делителях (занятие 2). *Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на их произведение ab.*

Доказательство. По условию $n = ka = lb$. Так как a и b взаимно просты, то верно: $ax + by = 1$. Преобразуем это равенство: умножим левую и правую части на n, а потом хитро раскроем n в левой части, чтобы получить множитель ab: $nax+nby=n$, $lbax+kaby=n$, $ab(lx+ky)=n$, тем самым n делится на ab.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.7. Проведите рассуждения, аналогичные задаче 6.5, в общем виде и докажите следующее утверждение

> **Теорема** (критерий разрешимости диофантовых уравнений). а) *Если c делится на (a,b), то уравнение* (1) *имеет бесконечно много решений.* б) *Если же c не делится на (a,b), то уравнение* (1) *не имеет решений.*

Задача 6.8. На окружности отмечены n точек на равном расстоянии друг от друга (циферблат). Одна из точек — стартовая. Её соединяют отрезком с точкой, отстоящей от неё на d дуг по часовой стрелке.

Эту новую точку также соединяем отрезком с точкой, отстоящей от неё на d дуг. Продолжаем так до тех пор, пока последняя точка не совпадёт со стартовой. Получится замкнутая ломаная (возможно, самопересекающаяся).

а) При каких d все n точек окажутся вершинами ломаной?

б) Сколько оборотов делает ломаная до замыкания?

Полезно вначале порисовать ломаные, например: $n=5$, $d=3$; $n=6$, $d=4$.

Задача 6.9. Требуется проложить трассу газопровода на участке длиной 450 м. В распоряжении строителей имеются трубы длиной 9 и 13 м. Сколько труб той и другой длины нужно взять для прокладки трассы, чтобы число сварных швов было минимальным? Трубы резать не следует.

Задача 6.10. а) Докажите, что суммы в 8, 9 и 10 рублей можно разменять трёх- и пятирублёвыми купюрами.

б) Какие бо́льшие суммы можно разменять трёх- и пятирублёвыми купюрами?

Задача 6.11. Рассуждая аналогично задаче 6.6, докажите следующее утверждение, которое мы использовали при решении однородных диофантовых уравнений.

Теорема о сокращении множителя. *Если произведение ac делится на b и если числа a и b взаимно просты, то число c делится на b.*

Задача 6.12.

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,
Две мыши поплоше несли по два гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем тащили по семь.
А остальные несли по четыре.
Сколько мышей шли без грошей?

(И. Акулич. «Квант», №4, 1995)

Ответы и решения

Задача 6.7. а) Разделим обе части уравнения (1) на (a, b). Получим уравнение $a_1x + b_1y = c_1$ со взаимно простыми коэффициентами a_1 и b_1. По основной лемме оно имеет решение (x_0, y_0). Прибавляя к этому частному решению решение $(b_1n, -a_1n)$ однородного уравнения, получаем бесконечную серию решений (n — любое целое число).

б) Пусть нашлись такие числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = c$. Тогда левая часть этого равенства делится на (a, b), а правая — нет. Полученное противоречие показывает, что уравнение неразрешимо.

Задача 6.8. Занумеруем точки по часовой стрелке, стартовую — числом 0. Тогда после x шагов мы будем находиться в точке с номером dx. Точнее, если мы прошли y оборотов по окружности, то в точке с номером $dx - ny$.

а) Вопрос переформулируется так: при каких d и n можно получить любой номер?

Ответ даёт критерий разрешимости диофантовых уравнений: при взаимно простых d и n.

б) Поскольку ломаная замкнулась, мы опять добрались до точки с номером 0. Стало быть, нам надо найти первое положительное решение диофантова уравнения $dx - ny = 0$. Сократим обе части уравнения на (d, n) и получим уравнение $d_1x - n_1y = 0$, где $d_1 = \frac{d}{(d, n)}$ и $n_1 = \frac{n}{(d, n)}$ — взаимно простые. Поскольку число d_1x должно делиться на n_1, число x также должно делиться на n_1 по теореме о сокращении множителя. Наименьшим значением является $x = n_1$, $y = d_1 = \frac{d}{(d, n)}$.

Ответ: $\frac{d}{(d, n)}$.

На занятии 8 (см. задачи 8.6, 8.13) мы сможем ответить на такой вопрос: сколько всего существует замкнутых ломаных с равными звеньями и вершинами во всех n точках?

Задача 6.9. Так как труб должно быть меньше, то длины 13 надо взять как можно больше. Число таких труб делится на 9 (докажите!). Взять их 36 нельзя, так как $13 \cdot 36 > 450$. Значит, их 27, а коротких труб $(450 - 13 \cdot 27) : 9 = 11$.

Ответ: 11 маленьких труб и 27 больших.

Задача 6.10. а) $8 = 5 + 3$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 5 \cdot 2$.

б) Можно разменять любую сумму, бо́льшую этих: будем добавлять нужное количество трёхрублёвок к одной из этих трёх сумм.

Таким образом, доказано, что любую сумму, бо́льшую семи, можно разменять трёх- и пятирублёвками.

Иначе говоря, уравнение $3x + 5y = c$ имеет решения в неотрицательных числах при всех $c \geqslant 8$.

Задача 6.11. Так как числа a и b взаимно просты, по основной лемме найдутся такие целые числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$. Умножим это равенство на c:

$$c = acx_0 + bcy_0.$$

Оба слагаемых в правой части делятся на b (почему?), а потому и их сумма, то есть c, делится на b.

Задача 6.12. Ответ: 32 мыши.

Обозначим количество мышей, которые ничего не несли, через n, больших — через b, остальных — через s. Получим уравнение $2 + n + b + s = 40$ для количество мышей и уравнение

$$40 = 2 \cdot 2 + n \cdot 0 + b \cdot 7 + s \cdot 4$$

для количества грошей. Упрощая, получаем диофантово уравнение $7b + 4s = 36$. Отсюда $b = 4k$, $s = 9 - 7k$, где k — целое. Отбирая положительные решения, получаем единственный вариант: $b = 4, s = 2$. Теперь найдём n из первого уравнения: $n = 38 - b - s = 32$.

К теме данного занятия относятся также задачи 63–75 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 7

Теорема о простом делителе

Сейчас мы докажем важную теорему о простых числах.

Теорема о простом делителе. *Если произведение ab делится на простое число p, то a или b делится на p.*

Доказательство. Если a делится на p, то цель достигнута. Предположим, что a не делится на p; тогда a и p взаимно просты (почему?). В таком случае по основной лемме найдутся такие целые числа x_0, y_0, что $ax_0 + py_0 = 1$. Умножим это равенство на b:

$$b = abx_0 + bpy_0.$$

Оба слагаемых в правой части делятся на p (почему?), а потому и их сумма, то есть b, делится на p.

Таким образом, a или b заведомо делится на p.

Заметим, что эта теорема также легко выводится из теоремы о сокращении множителя.

Полезно обсудить со школьниками, что условие простоты делителя в этой теореме существенно, то есть если его опустить, то теорема будет неверна (например, $4 \cdot 3$ делится на 6, но ни 4, ни 3 не делятся на 6).

Следствие. *Если произведение нескольких чисел делится на простое число p, то хотя бы одно из этих чисел делится на p.*

Доказательство. Пусть $a_1a_2\ldots a_n \vdots p$. Представим это произведение в виде $a_1a_2\ldots a_n = (a_1a_2\ldots a_k)\cdot(a_{k+1}\ldots a_n)$. По теореме о простом делителе одно из двух произведений делится на p. Повторим для него это рассуждение, и будем так делать, пока не останется одно число a_i.

Задача 7.1. Имеет ли решение ребус АБ $\cdot$ ВГ $=$ ДДЕЕ?

Решение. Заметим, что число справа кратно 11 по признаку делимости. Значит, по теореме о простом делителе один из множителей слева также должен быть кратен 11. Но это не так, значит, ребус не имеет решений.

Задача 7.2. Докажите, что если точный квадрат делится на простое число p, то он делится и на p^2.

Доказательство. Пусть a^2 кратно p, тогда по теореме о простом делителе a кратно p, $a = pb$. Но тогда $a^2 = p^2b^2$, то есть a^2 делится на p^2.

Задача 7.3. Коля хвастает, что может решить любую задачу. Учитель дал ему сто карточек с цифрой 0, сто карточек с цифрой 1 и сто карточек с цифрой 2 и просит составить из всех карточек число, являющееся полным квадратом. Справится ли Коля с задачей?

Решение. Заметим, что сумма цифр этого числа равна 300, то есть кратна 3, но не кратна 9. Поэтому число делится на 3, но не делится на 9. Однако по предыдущей задаче квадрат, делящийся на 3, обязан делиться и на 9. Поэтому Коля с задачей не справится.

Задача 7.4. Пусть p — простое число. Докажите, что если произведение нескольких чисел делится на p^2, то либо один из сомножителей делится на p^2, либо есть хотя бы два сомножителя, каждый из которых делится на p.

Решение. Пусть $ab\ldots h = kp^2$. Тогда $ab\ldots h$ делится и на p. По теореме о простом делителе один из множителей делится на p, пусть это будет $a = pa'$. Сократим равенство на p и получим $a'b\ldots h = kp$. Повторив рассуждение, получим, что либо a' кратно p, то есть a кратно p^2, либо какой-то другой множитель кратен p.

Задача 7.5. Три числа имеют одинаковые остатки при делении на 3. Докажите, что их произведение либо не делится на 3, либо кратно 27.

Доказательство. При делении на 3 могут быть остатки 0, 1 и 2. Если это остаток 0, то все три числа делятся на 3 и их произведение делится на 27. Если же это остатки 1 или 2, то все три числа не делятся на 3. Значит, и их произведение не делится на 3, иначе мы бы получили противоречие по теореме о простом делителе.

По ходу решения задачи мы доказали следующее утверждение: если числа не кратны простому числу p, то и их произведение не кратно p. См. задачу 3.6.

Задача 7.6. При каких n число $(n-1)!$ делится нацело на n?

Ответ: n — любое составное число, большее 5.

Решение. Если n — простое и делит $(n-1)!$, то по теореме о простом делителе, n делит и один из сомножителей. Однако это невозможно, так как все сомножители меньше n. Значит, $(n-1)!$ не делится на простое n.

Пусть n — составное. Тогда либо n представимо в виде $n = ab$, где $a > 1$, $b > 1$, $a \neq b$, либо $n = p^2$, где p — простое.

Рассмотрим первый случай. Так как числа a и b оба меньше $n-1$ и различны, то они оба есть среди сомножителей $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$. Поэтому $(n-1)!$ делится на ab.

Рассмотрим второй случай. Если $n > 5$, то $(n-1)!$ содержит множители p и $2p$ (так как $2p < p^2 = n$), то есть делится на n. Осталось проверить число 4 — единственное составное число, меньшее 5. Оно не является решением, так как $3! = 6$ не делится на 4.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.7. Может ли быть точным квадратом число, запись которого состоит из одной единицы, двух двоек, трёх троек, ..., девяти девяток?

Задача 7.8. Некоторое простое число возвели в квадрат и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть различными?

Задача 7.9. Каково наименьшее натуральное n, при котором $n!$ делится на 100?

Задача 7.10. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 — различные простые числа. Найдите (p_1p_2, p_3p_4).

Задача 7.11. а) Расставьте в вершинах квадрата натуральные числа так, чтобы в каждых двух соседних вершинах стояли не взаимно простые числа, а в каждых двух не соседних вершинах — взаимно простые.

б) Тот же вопрос для многогранника (если вершины соединены ребром, то числа должны быть не взаимно простыми, а если не соединены — то взаимно простыми).

Задача 7.12. Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

Ответы и решения

Задача 7.7. Сумма цифр этого числа равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 9 \cdot 9$, что кратно 3, но не кратно 9. По задаче 7.2 полный квадрат либо не делится на 3, либо делится на 9. Значит, это число не может быть полным квадратом.

Задача 7.8. Ответ: нет.

Если бы все цифры были различны, то их сумма равнялась бы 45 и квадрат числа делился бы на 9. Отсюда по задаче 7.4 само число делилось бы либо на 9, либо на 3. Это невозможно, так как число простое и заведомо больше 3.

Задача 7.9. Ответ: 10.

Так как число $n!$ должно делиться на 100, то в множителях должен два раза встречаться делитель 2 и два раза встречаться делитель 5. Перебирая самые первые множители $n!$, выпишем нужные нам: 2, 4, 5, 10.

Задача 7.10. Пусть p — простой общий делитель чисел p_1p_2 и p_3p_4. Тогда по теореме о простом делителе в обоих произведениях один из множителей должен делиться на p. Поскольку все множители простые, этот множитель должен быть равен p. Но это невозможно, так как все числа

p_1, p_2, p_3, p_4 различны по условию. Значит, произведения не имеют общих делителей, кроме 1.

Задача 7.11. а) Около сторон квадрата напишем числа 2, 3, 5, 7, а в каждой вершине напишем произведение чисел, указанных на сторонах, которые сходятся в ней. Тогда числа в соседних вершинах делятся на число, указанное на их общей стороне, и не являются взаимно простыми. А числа в не соседних вершинах равны произведению различных простых чисел, поэтому не могут делиться одновременно ни на какое простое число.

Если задача долго не решается, можно в вершинах написать подряд, например, числа 6, 14, 35 и 15 — пусть школьники догадаются, как их получить.

б) Повторяем ту же конструкцию: на рёбрах запишем различные простые числа, а в каждой вершине — произведения чисел, написанных на рёбрах, сходящихся в этой вершине. Доказательство аналогично п. а).

Задача 7.12. Рассмотрим остатки от деления x, y и z на 3. Возможны три случая.

1. Все три остатка одинаковы. Тогда каждая из трёх скобок в левой части делится на 3, значит их произведение также делится на 27.

2. Два остатка одинаковы. Тогда одна из скобок делится на 3, значит, $x + y + z$ делится на 3, значит, третий остаток равен первым двум, и мы приходим к случаю 1.

3. Все три остатка различны (0, 1 и 2). Тогда $x + y + z$ кратно трём. Однако левая часть не кратна трём, так как является произведением трёх чисел, которые не кратны трём. Такого быть не может.

Пример таких чисел: 15, 18, 21.

К теме данного занятия относятся также задачи 76–80 из раздела «Дополнительные задачи».

Занятие 8

Каноническое разложение
Основная теорема арифметики

Мы знаем из занятия 4, что любое число можно разложить на простые множители. Единственно ли такое разложение?

Ответ даётся следующей теоремой (для полноты картины повторим и доказательство пункта А).

> **Основная теорема арифметики.**
> А. *Каждое натуральное число, большее единицы, может быть разложено на простые множители.*
> Б. *Любые два разложения одного и того же числа могут отличаться только порядком множителей.*

Доказательство. А. Если число простое, то всё доказано. Если число составное, то по определению оно раскладывается в произведение двух меньших чисел. Если они оба простые, то всё доказано. Если же одно из них (или оба) составное, то его нужно разложить дальше. Поскольку числа натуральные и на каждом шаге уменьшаются, то рано или поздно этот процесс остановится и останутся только простые множители.

Б. Предположим, что мы получили два различных разложения числа на простые множители:

$$p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_m.$$

Поскольку первое выражение делится на p_1, то и второе обязано на него делиться. По следствию из теоремы о простом делителе одно из чисел q_1, q_2, ..., q_m должно делиться на p_1, а поскольку все они простые, оно должно быть равно p_1. Пусть $q_s = p_1$. Сократим оба части на $p_1 = q_s$ и повторим всё рассуждение с p_2, p_3 и так далее. Сократив таким образом все множители, мы придём к равенству $1 = 1$. Поэтому разложения обязаны совпадать.

Обычно разложение на простые множители записывают в виде $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Такую запись называют *каноническим разложением* числа на простые множители.

Задача 8.1. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в её концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

Решение. Пусть в вершинах были записаны числа a, b, c и d. Тогда возле сторон были записаны числа ab, bc, cd и da. Их сумма равна $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 77$. Разложим 77 на множители: $77 = 7 \cdot 11 = 1 \cdot 77$. Других разложений нет, так как 7 и 11 — простые числа. Вариант $1 \cdot 77$ не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, $a + c = 7$, $b + d = 11$ или наоборот. В обоих случаях $a + b + c + d = 7 + 11 = 18$.

Задача 8.2. Докажите, что в каноническом разложении точного куба все показатели степени кратны 3.

Доказательство. Запишем каноническое разложение для основания куба и возведём в куб полученное равенство. Тогда в разложении все показатели степени утроятся. В силу единственности полученное таким образом разложение куба является каноническим.

Задача 8.3$^+$. Найдите количество делителей числа: а) p^k; б) $p^k q^s$, где p и q — простые числа. в) Обобщите полученные результаты.

Решение. а) Перечислим все делители: $1, p, p^2, \ldots, p^k$. Всего их $k + 1$. Других делителей нет, так как ни на бóльшие степени числа p, ни на другие простые числа p^k не делится.

б) Проще всего перечислить делители через их канонические разложения: это все числа вида $p^a q^b$, где $0 \leqslant a \leqslant k$, $0 \leqslant b \leqslant s$ (в частности, $1, p, p^2, \ldots, p^k$, $q, q^2, \ldots, q^s$). Они подходят ввиду равенства $p^k q^s = p^a q^b \cdot p^{k-a} q^{s-b}$.

Почему не может быть делителей другого вида? Пусть $p^k q^s = m \cdot n$. Заменим m и n их каноническими разложениями и перемножим, складывая показатели. Ввиду единственности канонического разложения мы обязаны получить выражение $p^k q^s$. Значит, никаких других простых делителей в разложении m и n не встречается, а так как все показатели неотрицательны, p входит в разложение в степени, не превосходящей k, а q входит в степени, не превосходящей s. Итак, число делителей равно числу пар показателей, то есть $(k+1)(s+1)$.

в) Рассуждая аналогично для трёх и более простых делителей, получим, что надо перемножить увеличенные на 1 показатели степени каждого числа.

Можно сказать, что простые числа — это «кирпичики», из которых строится число. При этом «кирпичики» одного вида нельзя заменять на другой.

Задача 8.4. Пусть простой множитель p входит в каноническое разложение числа a в степени m, а в каноническое разложение b — в степени n, и пусть $m \geqslant n$. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $[a, b]$ в степени m, а в каноническое разложение числа (a, b) — в степени n.

Доказательство. Заметим, что делимость на простой множитель p (или его степень) не зависит от делимости на другие простые множители. Поэтому в наименьшее общее кратное должна входить наименьшая степень числа p, которая делится на p^m и на p^n, то есть степень m. Аналогично в наибольший общий делитель должна входить наибольшая степень числа p, на которую делится и p^m, и p^n, то есть степень n.

Задача 8.5^{+}. Назовём натуральное чётное число *чётно-простым*, если его нельзя представить в виде произведения двух меньших чётных чисел. (Например, числа 2, 6, 10 — чётнопростые, а $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$ — нет.) Сформулируйте аналог основной теоремы арифметики для чётных чисел, заменяя слова «натуральный» на «чётный», а «простой» на «чётнопростой». Проверьте обе части получившегося утверждения.

Решение. «А. Каждое чётное число может быть разложено на чётнопростые множители. Б. Любые два разложения одного и того же числа могут отличаться только порядком множителей».

Часть А верна (можно повторить доказательство основной теоремы арифметики с заменой соответствующих слов). А вот часть Б неверна! Числа 2, 6, 10 и 30 чётнопростые, но $60 = 30 \cdot 2 = 10 \cdot 6$ раскладывается двумя способами. (Причина в том, что для чётнопростых чисел неверна теорема о простом делителе.)

Обычно школьники воспринимают основную теорему арифметики как нечто само собой разумеющееся. Приведённый пример показывает, что в других арифметиках она может нарушаться.

На занятии 6 возникла задача, связанная с подсчётом чисел, меньших данного n и взаимно простых с ним (задача 6.8). Эта величина играет важную роль в теории чисел, и у неё есть специальные название и обозначение.

Определение. Количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n, называется *функцией Эйлера* $\varphi(n)$.

Задача 8.6. Найдите а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^2)$; в) $\varphi(p^k)$, где p — простое число.

Решение. Простое число имеет общие делители, отличные от 1, только с кратными ему числами. Поэтому

а) $\varphi(p) = p - 1$;

б) $\varphi(p^2) = p^2 - p$ (выкидываем числа p, $2p$, ..., $(p-1)p$ — всего $p - 1$ число);

в) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ (выкидываем числа p, $2p$, $\ldots$, $(p^{k-1} - 1)p$ — всего $p^{k-1} - 1$ число).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.7. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1990; б) 2000; в) 2010?

Задача 8.8. Даны две прямоугольные картонки размерами 49×51 и 99×101. Их разрезали на одинаковые прямоугольные, но не квадратные части с целыми сторонами. Определите размеры частей.

Задача 8.9. Существует ли такой набор из а) 2; б) 10 натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?

Задача 8.10. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, на 3 — кубом, а при умножении на 5 — пятой степенью?

Задача 8.11. Может ли число, имеющее ровно 15 делителей, делиться а) на 100; б) на 1000?

Задача 8.12. Ваш друг задумал несколько произвольных натуральных чисел, а вы хотите все их угадать, причём именно в том порядке, в каком он эти числа задумал. Вам разрешается попросить друга сделать произвольное вычисление, связанное с его числами, например, найти произведение или сумму некоторых из них, или же более сложную комбинацию и сообщить вам результат. Каждое такое вычисление назовём ходом. За какое наименьшее число ходов вы сможете наверняка определить задуманные числа?

Задача 8.13. Для взаимно простых чисел a и b рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 3, & \ldots, & b; \\
b+1, & b+2, & b+3, & \ldots, & 2b; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(a-1)b+1, & (a-1)b+2, & (a-1)b+3, & \ldots, & ab.
\end{array}$$

а) Докажите, что есть ровно $\varphi(b)$ столбцов, в которых все числа взаимно просты с b.

б) Докажите, что в каждом столбце все остатки при делении на a различны.

в) Докажите, что в каждом столбце есть ровно $\varphi(a)$ чисел, взаимно простых с a.

г) Найдите $\varphi(ab)$, зная $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$.

Ответы и решения

Задача 8.7. Разложим указанные числа на простые сомножители. Если в разложении присутствуют числа, большие 9, то числа с такими цифрами не существует, а если меньшие 9, то существует:

а) $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$ — нет;

б) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ — да, например, 2222555;

в) $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ — нет.

Задача 8.8. Площадь прямоугольника должна делить площадь каждой из картонок. Поскольку $49 \cdot 51 = 3 \cdot 7^2 \cdot 17$, а $99 \times 101 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$, по задаче 8.4 получим, что $(49 \times \times 51, 99 \cdot 101) = 3$. Поэтому площадь прямоугольника равна 1 или 3. Так как прямоугольник не является квадратом, годится лишь размер 1×3.

Задача 8.9. а) Существует: 12 и 18.

б) Число a делится на число b, если каждый простой множитель входит в разложение числа a в степени, не меньшей, чем в разложение числа b. Это подсказывает такую конструкцию. Возьмём десять различных простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ и построим числа $a_1 = p_1^2 p_2 \ldots p_{10}$, $a_2 = = p_1 p_2^2 \ldots p_{10}$, $a_{10} = p_1 p_2 \ldots p_{10}^2$. Нетрудно убедиться, что они нам подходят.

Задача 8.10. Чтобы число было квадратом, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его простых множителей делились на 2; чтобы число было кубом — делились на 3; чтобы пятой степенью — делились на 5. Пусть число имеет вид $2^a 3^b 5^c$. Тогда числа $a + 1$, b и c должны делиться на 2, числа a, $b + 1$ и c — на 3, а числа a, b и $c + 1$ — на 5. Годятся, например, $a = 15$, $b = 20$, $c = 24$. Итак, число $2^{15} 3^{20} 5^{24}$ удовлетворяет условию.

Задача 8.11. а) $15 = 15 \cdot 1 = 3 \cdot 5$. Поэтому по задаче 8.3 число, имеющее 15 делителей, имеет вид либо p^{14}, либо

p^2q^4, где p и q — простые числа. В свою очередь, $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Ясно, что годится, например, число $2^4 \cdot 5^2 = 800$.

б) Число $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ имеет $(3+1)(3+1) = 16$ делителей. Если N делится на 1000, то у N не меньше 16 делителей. Значит, не может.

Задача 8.12. Достаточно одного хода! Пусть, например, задуманы числа a, b, c. Попросим друга вычислить $2^a3^b5^c$. Согласно основной теореме арифметики мы можем однозначно восстановить степени.

Это решение можно красиво продемонстрировать: школьники называют результаты своих вычислений, а учитель с помощью компьютерной программы или онлайн-разложения на простые множители определяет загаданные числа.

Задача 8.13. а) Разности чисел в каждом столбце кратны b. Поэтому все числа одного столбца либо взаимно просты с b, либо нет, и это определяется самым первым числом столбца. Среди первых чисел имеется $\varphi(b)$ чисел, взаимно простых с b, поэтому и столбцов столько же.

б) Разность чисел в столбце кратна b. Если остатки одинаковы, то разность делится и на a, а поэтому, в силу взаимной простоты, и на ab. Это невозможно, так как разность больше 0, но меньше ab.

в) Число взаимно просто с a тогда и только тогда, когда его остаток при делении на a взаимно прост с a.

г) Если число взаимно просто с a и с b, то оно взаимно просто и с ab (почему?). Мы имеем $\varphi(b)$ столбцов, в которых числа взаимно просты с b. В каждом из них $\varphi(a)$ чисел взаимно кратно с a. Таким образом, всего есть $\varphi(a)\varphi(b)$ чисел, взаимно простых с ab.

Итак, если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Это свойство функции Эйлера называется мультипликативностью («умножительностью»). Заметим, что таким же свойством обладает и количество делителей данного числа (задача 8.3). Нетрудно доказать его и для суммы делителей. Поэтому можно упрощать задачи, связанные с этими функциями, решая их отдельно для каждого простого множителя. См. также задачу 8.4 и дополнительные задачи Д85, Д91, Д92, Д93.

К теме данного занятия относятся также задачи 81–95 из раздела «Дополнительные задачи».

Дополнительные задачи

Д1. Дробь $\frac{a}{b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a-b}{a+b}$?

Д2. а) Настя заметила, что $555 \vdots 37$ и $777 \vdots 37$. Сформулируйте и докажите общее утверждение. б) Определите без калькулятора, делятся ли числа 718718, 539539, 174174 на 77?

Д3. Существуют ли такие числа a и b, отличные от 0, что одно из них делится на их сумму, а другое — на их разность?

Д4*. В Десятичном королевстве имеют хождение монеты: 1 грош, 10 грошей, 100 грошей, 1000 грошей. Можно ли отсчитать миллион грошей так, чтобы получилось ровно полмиллиона монет?

Д5. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из чётного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Д6. В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

Д7. Правильные треугольник и n-угольник вписаны в равные окружности. При каких n треугольник можно накрыть n-угольником?

Д8. Вася придумал два признака делимости на 27:

а) если число делится на 3 и на 9, то оно делится на 27;

б) если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Проверьте справедливость Васиных признаков.

Д9. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них — 97?

Д10. Существует ли цифра (одна и та же), которую нужно приписать к числу 97 слева и справа, для того чтобы полученное четырёхзначное число делилось на 27?

Д11. На доске выписали число

$$35! = 10333147966386144929 * 66651337523200000000.$$

Цифру, помеченную звёздочкой, по ошибке стёрли. Помогите её восстановить.

Д12. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится на 12. Придумайте код, открывающий сейф.

Д13. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

Д14. Делится ли число $7 \cdot 10^{2011} + 8$ а) на 3; б) на 9?

Д15. Делится ли число а) $111\ldots1$ (9 единиц) на 9?

б) $111\ldots1$ (27 единиц) на 27?

в) Обобщите полученные утверждения и докажите общее утверждение.

Д16. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем у полученной разности вычеркнули одну цифру. Сумма оставшихся цифр разности равна 131. Какую цифру вычеркнули?

Д17. Докажите, что число $\overline{abcd}$ делится на 99 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab} + \overline{cd}$ делится на 99.

Д18. Докажите, что если $\overline{abc}$ делится на 37, то $\overline{bca} + \overline{cab}$ также делится на 37.

Д19*. Определите без прямых вычислений, делится ли

а) 256905940884 на 4930496;

б) 14035915600284 8 на 4206377084.

Д20*. В справочнике «Магия для чайников» написано: «*Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение*».

Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

Д21*. Строится числовая последовательность: первый её член равен 3^{2010}, а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Найдите десятый член этой последовательности.

Д22*. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

Д23. Найдите все числа, при делении которых на семь в частном получится то же число, что и в остатке.

Д24. Мама послала Васю в магазин купить кефира по 22 руб., насколько хватит денег. На сдачу Вася хочет купить себе леденцов по 5 руб. за штуку. На какое наибольшее количество леденцов он может рассчитывать?

Д25. Костя заметил, что в записи деления числа a на число b с остатком: $a = b \cdot q + r$ можно поменять местами b и q. Поэтому он считает, что при делении a на q частное равно b, а остаток r. Когда этот способ работает?

Д26. При делении некоторого числа m на 13 и на 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе — без остатка. Найдите число m.

Д27. Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Определите это число.

Д28. Петя утверждает, что когда он раскладывает орехи в кучки по 9 штук, то в конце остаётся 2 ореха, а когда раскладывает по 6 штук — остаётся 1 орех. Не ошибается ли Петя?

Д29. При раскладывании книг в стопки по две книги остаётся одна книга, а при раскладывании по три книги остаётся две книги. Сколько книг останется, если раскладывать в стопки по шесть книг?

Д30*. Найдите четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

Д31. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Определите это число.

Д32. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой её цифр можно получить другую степень двойки?

Д33. Малышу и Карлсону выдали по одинаковой коробке конфет и поручили разложить их на тарелочки. Малыш разложил свою коробку на 6 тарелочек поровну, а остаток — меньше шести — взял себе. Карлсон сделал то же самое с семью тарелочками.

После того как Карлсон уговорил Малыша отдать ему все конфеты с одной тарелочки, у него стало 16 конфет. Сколько конфет у Малыша?

Д34. Докажите, что ребус

$$\text{АПЕЛЬСИН} - \text{СПАНИЕЛЬ} = 2013 \cdot 2014$$

не имеет решения.

Д35. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{84x5y}$ делится на 198.

Д36. С помощью теоремы об однозначности деления с остатком докажите, что любое натуральное число можно записать в любой позиционной системе счисления и притом единственным образом.

Д37. Найдите наименьшее натуральное число, дающее остаток 22 при делении на свою сумму цифр.

Д38. Можно ли, используя только цифры 2, 3, 7, 8 (возможно, по несколько раз), составить квадрат натурального числа?

Д39. Простым или составным является число
а) 3999991;
б) 1000027;
в) $9^{10} + 6^{10} + 4^9$?

Д40. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

Д41. При каких n сумма n последовательных натуральных чисел может быть простым числом?

Д42. Назовём число *примарным*, если оно является степенью простого числа (например, 7^1 или 13^4). Найдите самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.

Д43. Четыре нечётных числа таковы, что в любой паре большее делится на меньшее и все частные различны. Докажите, что среди них есть хотя бы одно число, большее 100.

Д44. Верно ли, что все числа вида $2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, ..., $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k + 1$ являются простыми? Здесь $p_1 = 2 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ — простые числа, взятые подряд в порядке возрастания.

Д45. Существуют ли такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

Д46. При каких n число а) $|n^2 - 4|$; б) $n^4 + 4$ простое, а при каких — составное?

Д47. При каких k число $2^{4k+2} + 1$ является составным?

Д48. Может ли многочлен $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$, где p — простое число, разлагаться в произведение двух многочленов с целыми неотрицательными коэффициентами?

Д49. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Д50. Коля взял два числа a и b и нашёл, что $(a, b) = 12$, а $[a, b] = 35$. Не ошибся ли он?

Д51. Чему может быть равно $(n, n+12)$?

Д52. Программист Вася написал программу, которая находит НОК всех чисел от 1 до 100. Хакер Петя стёр числа от 1 до 50, и теперь программа считает НОК всех чисел от 51 до 100. Как изменится ответ?

Д53. Чему может быть равно $[n, n+1, n+2]$?

Д54. Придумайте формулы, дающие все возможные пары взаимно простых чисел с разностью а) 2; б) 3.

Д55. Сократите дробь $\frac{377}{261}$, предварительно вычислив НОД по алгоритму Евклида.

Д56. Докажите, что дробь $\frac{10n+2}{6n+1}$ несократима ни при каком натуральном n.

Д57. Найдите заведомо равные среди величин (a, b), (a, a), $(a, a+b)$, $(a, a-b)$, (b, b).

Д58. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Петя разрезал прямоугольник на два больших квадрата, три поменьше и пять маленьких со стороной 10 см. Найдите размеры исходного прямоугольника.

Д59*. а) Докажите, что $(a, b) = (13a + 8b, 5a + 3b)$.

б) Продолжите цепочку равенств.

Д60. Найдите

а) $(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$;

б*) $(2^a - 1, 2^b - 1)$.

Д61. а) Найдите $(\underbrace{111\ldots11}_{\text{100 единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{\text{90 единиц}})$.

б*) Обобщите полученный результат.

Д62*. Есть шоколадка в форме правильного треугольника со стороной n, разделенная бороздками на маленькие равные треугольнички со стороной 1 (каждая сторона разделена на n равных частей, точки деления на каждой паре сторон соединены линиями, параллельными третьей стороне). Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок (вдоль какой-нибудь бороздки), съесть его и передать остаток противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольничек со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает.

Для каждого n выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы не играл противник?

Д63. а) В обращении имеются только монеты в 3 и 10 дублонов. Какие суммы ими можно уплатить, если продавец может давать сдачу?

б) Можно ли уплатить без сдачи сумму в 17 дублонов монетами в 3 и 10 дублонов?

Д64. Придумайте диофантово уравнение в неотрицательных целых числах, которое имеет ровно

а) одно решение;

б) два решения;

в) n решений.

Д65. Решите в натуральных числах x и y уравнение $65x - 43y = 2$.

Д66. а) Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах системы

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 28x + 30y + 31z = 365. \end{cases}$$

б) Найдите все решения этой системы.

Д67. Найдите все натуральные числа, лежащие между 1 и 100000, которые делятся на 73, а при делении на 1000 дают в остатке 1.

Д68. Пол шириной 3 м нужно устлать досками шириной 11 см и 13 см так, чтобы между ними не оставалось промежутков. Сколько потребуется досок того и другого размера?

Д69. Решите уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

Д70. *Задача Фибоначчи.* Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трёх воробьёв заплачена 1 монета, за каждых двух горлиц — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Д71. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

Д72*. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно ровно двумя способами представить в виде $3x + 4y$, где x и y — натуральные числа.

Д73. Известно, что $56a = 65b$. Может ли число $a + b$ быть простым?

Д74. Решите уравнения в целых числах:
а) $x^2 - y^2 = 17$;
б) $x^2 = y^2 + 2010$.

Д75. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую карточку: прочитав карточку с парой $\{m; n\}$, первый автомат выдаёт карточку $\{m - n; n\}$, второй — карточку $\{m + n; n\}$, третий — карточку $\{n; m\}$. Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел $\{20; 11\}$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из неё карточку а) $\{12; 21\}$; б) $\{31; 13\}$?

Д76. Какое наименьшее натуральное число не является делителем $50!$?

Д77. Определите вид числа n (простое или составное), если $(n - 1)! + 1$ делится на n.

Д78*. Найдите все такие числа n, что число $(n - 1)!$ не делится на n^2.

Д79. Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что любые два из этих чисел взаимно просты?

Д80. Фома и Ерёма нашли на дороге по пачке одиннадцатирублёвок. В чайной Фома выпил три стакана чая, съел четыре калача и пять бубликов. Ерёма выпил девять стаканов чая, съел один калач и четыре бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Ерёма может расплатиться одиннадцатирублёвками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Фома.

Д81. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

Д82. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

Д83. Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot\ldots\times$ $\times 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

Д84. а) Докажите, что если у числа ровно 6 делителей, то оно имеет вид либо p^5, либо pq^2, где p и q — простые числа.

б) У числа ровно N делителей. Опишите его каноническое разложение.

Д85. При умножении числа a на 2 количество его делителей увеличилось на 20%. а) Докажите, что a делится на 16, но не делится на 32. б) Как увеличится число делителей, если а умножить на 4?

Д86. Найдите натуральное число вида $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть — на 35 и пятая часть — на 42 делителя меньше, чем само число.

Д87. Найдите число, кратное 12 и имеющее четырнадцать делителей.

Задача 8.88. Найдите число, равное удвоенному количеству его делителей.

Д89. а) Докажите, что среди чисел от 1 до a (включительно) имеется $\left[\frac{a}{b}\right]$ чисел, делящихся на b. *Здесь и далее* $[x]$ — *целая часть числа* x.

б) Докажите, что число 2 входит в разложение $n!$ на простые множители в степени

$$k = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \ldots$$

в) При каких n число $n!$ делится на 2^n?

г) На какую наибольшую степень 2 делится произведение натуральных чисел от $n+1$ до $2n$?

д) Обобщив формулу из п. б), докажите, что произведение n последовательных чисел делится на $n!$ (ср. с задачами 1.6 и 2.12).

Д90*. На доске было записано 17 двузначных чисел. Математик выбрал одно из них и возвёл его в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из оставшихся шестнадцати. Верно ли, что оно делится и на их произведение?

Д91. С помощью результата задачи 8.4 докажите формулу $(a, b)[a, b] = ab$.

Д92. а) Верна ли формула

$$(a, b, c)[a, b, c] = abc?$$

б) Каким неравенством всегда будут связаны числа $(a, b, c)[a, b, c]$ и abc?

в) Докажите формулу

$$(a, b, c) = \frac{abc[abc]}{[a, b][b, c][c, a]}.$$

Д93. а) Каким неравенством связаны $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ и $\varphi(ab)$, если a и b *не* взаимно просты?

б) Аналогичный вопрос для чисел $\tau(a)$, $\tau(b)$ и $\tau(ab)$, где $\tau(n)$ — количество делителей числа n.

Д94. Выпишем в ряд все правильные дроби со знаменателем n и сделаем возможные сокращения. Например, для $n = 12$ получится следующий ряд чисел:

$$\frac{0}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}.$$

Сколько получится дробей со знаменателем d, если d — некоторый делитель числа n?

Д95. Докажите тождество Гаусса:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

(сумма берётся по всем делителям числа n).


Указания

Указания к решениям задач и краткие решения

Д1. Поскольку дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то $a = kn$, $b = ln$. Но тогда дробь $\frac{a-b}{a+b} = \frac{(k-l)n}{(k+l)n} = \frac{k-l}{k+l}$ — также сократима.

Д2. а) Утверждение: число вида $\overline{aaa}$ делится на 37. Действительно, $\overline{aaa} = 111a = 37 \cdot (3a)$.

б) Обобщение: числа вида $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc}$, что делится на 77, поскольку $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Д3. Ответ: нет.

Покажите, что либо сумма, либо разность по модулю больше обоих чисел.

Д4. Ответ: нет.

Предположим противное: пусть искомый набор получен. Будем разменивать каждую крупную монету на гроши. Тогда в конце получим миллион грошей. Но количество монет с каждым шагом увеличивалось на число, кратное 3 (точнее, на 9, 99 или 999), однако в итоге увеличилось на полмиллиона, что не кратно 3. Противоречие.

Д5. Ответ: нет.

Поскольку вначале в каждой кучке нечётное количество камней, то на первом шаге мы можем только объединить какие-то две кучки в одну. Если объединить первые две кучки, получится 100 камней и 5 камней. Если вторую и третью — 51 и 54. Если первую и третью — получится 56 и 49 камней. Заметим, что во всех трёх случаях количества камней имеют общий делитель: 5, 3 и 7 соответственно. Это означает, что при дальнейшем делении нам не удастся разбить группы на более мелкие, чем по 5, 3 или 7 камней соответственно. (Строго это можно доказать, используя взаимную простоту числа 2 с числами 3, 5, 7.)

Д6. Удобно думать не про каждую корзину отдельно, а про все вместе. Просуммировав по всем корзинам первое условие, получим, что всего слив в 5 раз больше, чем яблок. Аналогично, просуммировав второе условие, получим, что всего яблок в 5 раз больше, чем груш. Поэтому всего фруктов в 31 раз больше, чем груш.

Д7. Ответ: при n, кратных 3.

Заметим, что если n кратно 3, то можно совместить вершины треугольника с некоторыми вершинами n-угольника, при этом треугольник будет покрыт. Допустим, треугольник накрыт. Если бы описанные окружности треугольника и многоугольника не совпали, то вне описанной окружности многоугольника оказалась бы дуга описанной окружности треугольника, бóльшая полуокружности. На эту дугу попала бы вершина треугольника и осталась бы не накрытой. При совпадении окружностей вершины треугольника обязаны попасть в вершины многоугольника, что возможно только при n, кратном 3.

Д8. Ответ: оба признака неверны.

а) Например, число 9 кратно 3 и 9, но не кратно 27. Видимо, Вася ошибся, применяя признак делимости на произведение для *не взаимно простых делителей*. (Кстати, нетрудно доказать, что если a и b не взаимно простые, то найдётся число n, которое кратно a и b, но не кратно ab.)

б) $9981 \not\vdots\, 27$.

Д9. Ответ: два числа.

Последняя цифра должна быть 0 или 5, а сумма цифр кратна 9.

Д10. Ответ: да.

Необходимо, чтобы такое число делилось на 9. Найдите все варианты и проверьте «вручную», делятся ли они на 27.

Д11. Ответ: 6.

Это число делится на 9.

Д12. Ответ: 2222232.

Чтобы код делился на 4, в конце должно стоять 32.

Д13. Легко убедиться, что n^2 оканчивается на 6, только если n оканчивается на 4 или 6. Значит, n делится на 2. Но тогда n^2 делится на 4. По признаку делимости, двумя его последними цифрами могут быть 16, 36, 56, 76 и 96.

Д14. Ответ: а) да, б) нет.

Запишите число в десятичном виде.

Д15. Ответ: а) да, б) да.

Обобщение: число, состоящее из 3^n единиц (или других одинаковых цифр), делится на 3^n. В самом деле, $111 \vdots 3$. Далее, $111111111 = 111 \cdot 1001001$, где второй множитель делится на 3 по признаку делимости. Аналогично, число $111\ldots1$ (27 единиц) раскладывается на множители 111111111, кратный 9, и число, кратное 3. И так далее.

Д16. Ответ: 4.

При вычитании из числа суммы его цифр получается число, кратное 9. У числа 131 сумма цифр равна 5, значит, вычеркнули 4.

Д17. Заметим, что $\overline{abcd} - \overline{ab} - \overline{cd} = 99 \cdot \overline{ab}$.

Д18. Догадаемся сложить все три числа:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + \\ + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c.$$

Поскольку 111 кратно 37, то и сумма кратна 37. По условию первое слагаемое делится на 37, поэтому и сумма остальных также делится на 37.

Д19. Ответ: а) нет, б) нет.

а) Заметим, что «делитель» делится на 8, а «делимое» нет.

б) Представим «делитель» в виде $4206377084 = 42 \times \times 10^8 + 63 \cdot 10^5 + 77 \cdot 10^3 + 84$. Каждое из слагаемых делится на 7, значит, и сумма делится на 7. Аналогично, 140359156002848 представляется в виде суммы слагаемых, из которых каждое, кроме последнего (48), делится на 7. Значит, это число не делится на 7.

Д20. Ответ: нет.

Подсчитаем буквы в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ. Буква Е встречается 4 раза, а остальные 9 букв встречаются по одному разу. Это значит, что в числе все 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая-то одна цифра (соответствующая букве Е) — ещё 3 раза сверх того. Сумма 10 цифр от 0 до 9 равна 45, то есть кратна 3. Сумма трёх одинаковых цифр также кратна 3. Тем самым, как бы мы ни заменяли буквы на цифры в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ, сумма цифр полученного числа будет кратна трём. Значит, по признаку делимости на 3 и полученное число будет делиться на 3. Поскольку единственное простое число, делящееся на 3, — это само число 3, а наше число заведомо его больше, полученное число не может быть простым.

Д21. Ответ: 9.

Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9. Так как 3^{2010} делится на 9, все члены данной последовательности делятся на 9. Оценим их величины. $3^{2010} = 9^{1005} < 10^{1005}$, поэтому в исходном числе не больше 1005 цифр. Значит, второй член последовательности не больше чем $9 \cdot 1005 < 10^4$, то есть в нём не больше 4 цифр. Тогда третий член последовательности не больше чем $9 \cdot 4 = 36$, а четвёртый — меньше чем 18. Поскольку четвёртый член, как и предыдущие, делится на 9, он равен 9. А значит, и все последующие равны 9.

Д22. Запись числа не должна содержать цифру 0, так как иначе можно вычеркнуть все остальные цифры, а 0 делится на 11. Также в ней не должно быть одинаковых цифр, поскольку иначе можно вычеркнуть все остальные цифры и получить число, кратное 11. Наибольшее число, удовлетворяющее этим требованиям, содержит все 9 цифр в порядке убывания: 987654321. Покажем, что оно удовлетворяет условию задачи. Пусть после вычёркивания $n \geqslant 0$ цифр из числа 987654321 получилось число

$$\overline{a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_2a_1},$$

в котором $a_{2k} > a_{2k-1} > \ldots > a_2 > a_1$ (если количество цифр в получившемся числе нечётно, то припишем в конце нуль, что не изменит делимости на 11). Тогда $(a_{2k} - a_{2k-1}) + (a_{2k-2} - a_{2k-3}) + \ldots + (a_2 - a_1) > 0$ и $a_{2k} - (a_{2k-1} - a_{2k-2}) - (a_{2k-3} - a_{2k-4}) - \ldots - a_1 \leqslant a_{2k} \leqslant 9$. Поэтому число $a_{2k} + a_{2k-2} + \ldots + a_2 - a_{2k-1} - a_{2k-3} - \ldots - a_1$ не делится на 11, а значит, не делится на 11 и число $\overline{a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_2a_1}$.

Д23. Ответ: $N = 0,\ 8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48$.

Обозначим частное через c. Тогда число равняется $N = 7c + c = 8c$. При этом c пробегает все значения от 0 до 6.

Д24. Наибольшая сдача меньше 22 руб. Поэтому наибольшее количество леденцов — 4.

Д25. Ответ: способ работает, если $r < b$ и $r < q$. Иначе какая-то из записей не прочитается как деление с остатком.

Д26. Ответ: $m = 60$.

Решите уравнение $m = 13k + 8 = 15k$.

Д27. Ответ: 503.

Подумайте, на что делится число, на 1 большее искомого. Используйте тот факт, что 7, 8 и 9 — взаимно простые числа.

Д28. Предположим, что Петя прав, и разложим орехи на кучки по 3. Тогда в силу первого условия должно остаться 2 ореха, а в силу второго — 1. То есть Петя ошибся.

Д29. Ответ: 5.

Обозначим количество книг через N. Тогда $N = 2x+1 = 3y + 2$. Домножая первое равенство на 3, получим $3N = 6x + 3$. Домножая второе равенство на 2, получим $2N = 6y + 4$. Выразим из двух последних равенств N: $N =$

$= 3N - 2N = 6(x - y) - 1 = 6(x - y - 1) + 5$. Значит, остаток равен 5.

Приведём другой способ решения. Так как при раскладывании по 3 книги оставалось 2, то при раскладывании по 6 могло оставаться либо 2, либо 5 (см. решение задачи 3.9). Из первого условия следует, что число книг нечётно, следовательно, остатка 2 быть не могло.

Д30. Ответ: 1946.

Пусть N — искомое число. По условию $N = 131k + 112 = 132l + 98$, где k и l — натуральные числа. Кроме того, $N < 10\,000$, поэтому $l = \dfrac{N - 98}{132} < \dfrac{10\,000 - 98}{132} < 76$. Далее, $131k + 112 = 132l + 98$, поэтому $131(k - l) = l - 14$. Следовательно, если $k \neq l$, то $|l - 14| \geqslant 131$. Но $l < 76$, поэтому $k = l$ и $l - 14 = 0$. Таким образом, $N = 131 \cdot 14 + 112 = 132 \cdot 14 + 98 = 1946$.

Д31. Ответ: 31.

Докажите, что каждое из чисел с 1 по 30 в любом году было всеми днями недели. Не забудьте о високосных годах.

Д32. Ответ: нет.

Числа, получаемые друг из друга перестановкой цифр, имеют одинаковый остаток при делении на 9. Рассмотрите остатки при делении на 9 степеней двойки и убедитесь, что степени с одинаковыми остатками отличаются больше чем в 10 раз.

Д33. Ответ: 2 конфеты.

Пусть N — число конфет в коробке, a — число конфет на одной тарелке у Малыша, b — у Карлсона, m — остаток Малыша, k — остаток Карлсона. Получим систему

$$6a + m = N, \quad 7b + k = N, \quad a + k = 16.$$

Сложим первое и третье уравнения и вычтем второе. Получим

$$7(a - b) + m = 16.$$

Таким образом, $16 - m \vdots 7$. Поскольку $m < 6$, получаем $m = 2$. При этом количество конфет в коробке может быть разным.

Д34. Заметим, что в обоих словах повторяется один и тот же набор букв. Следовательно, сумма цифр в обоих числах одинакова, и они имеют одинаковый остаток при делении на 9. Поэтому их разность должна делиться на 9. Однако число $2013 \cdot 2014$ на 9 не делится.

Д35. Ответ: $x = 1$, $y = 0$.

Разложим 198 на взаимно простые множители: $198 = 11 \cdot 2 \cdot 9$. Из признака делимости на 9 получим, что $8 + 4 + x + 5 + y = 17 + x + y \vdots 9$. Из признака делимости на 11 получим, что $8 - 4 + x - 5 + y = -1 + x + y \vdots 11$. Из интервала $0 < x + y < 18$ подходит только $x + y = 1$. Значит, одно из чисел равно 0, а другое 1. Из признака делимости на 2 цифра y должна быть чётной, то есть $y = 0$, следовательно, $x = 1$.

Д36. Чтобы записать число в системе счисления с основанием q, число делят на q и записывают остаток в младший разряд. Далее неполное частное делят на q, записывают остаток в следующий разряд и т. д.

Д37. Ответ: 689.

Сумма цифр должна быть не менее 23, то есть число не может быть двузначным. Из трёхзначных чисел самые маленькие с такими суммами цифр — это 599 (не подходит), затем 689 (подходит).

Д38. Ответ: нет.

Докажите перебором остатков квадратов при делении на 10, что на цифры 2, 3, 7, 8 квадрат оканчиваться не может.

Д39. Ответ: а), б), в) — составные.

Воспользуемся формулами сокращённого умножения: а) $3999991 = 4000000 - 9 = 2000^2 - 3^2 = 1997 \cdot 2003$; б) $1000027 = 1000000 + 27 = 100^3 + 3^3 = 103 \cdot (100^2 - 100 \cdot 3 + 3^2)$; в) $9^{10} + 6^{10} + 4^9 = (3^{10} + 2^9)^2$.

Д40. Ответ: опечатка.

Подумайте, на какую цифру оканчивается это число. (В действительности подразумевалось число $2^{3021377} - 1$.)

Д41. Ответ: при $n = 2$.

Сумма двух может: $2 + 3 = 5$. Сумма трёх — не может, так как она делится на 3 и больше трёх. Сумма четырёх — не может, так как она чётная и больше двух. Докажем, что далее никакие суммы не могут быть простыми числами. Пусть первое число — k, тогда последнее — $(k+n-1)$. Сумма этих чисел равна

$$nk + \frac{n(n-1)}{2} = n\left(k + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n}{2}(2k + n - 1).$$

Далее надо рассмотреть эту сумму отдельно при чётных n и при нечётных n и доказать, что при $n > 2$ она представляется в виде произведения двух целых чисел, больших 1.

Д42. Ответ: 2, 3, 4, 5.

Д43. Пусть числа $a < b < c < d$ удовлетворяют условию задачи. По условию частные $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$ — различные нечётные числа, большие 1. Их произведение не меньше $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, поэтому $d = a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} \geqslant 1 \cdot 105 > 100$.

При желании можно точно так же доказать, что $c = a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \geqslant 1 \times \times 3 \cdot 5 = 15$, $b \geqslant 3$ (и, конечно, $a \geqslant 1$). Заменив все нестрогие неравенства на равенства, получим удовлетворяющую условию четверку (1, 3, 15, 105), в некотором смысле минимальную.

Д44. Ответ: нет.

Пример: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. Из того, что число не делится на несколько первых простых чисел, не следует, что оно не делится на какое-то простое число, большее их.

Д45. Ответ: да.

Пример строится аналогично задаче 4.3.

Д46. Ответ: а) число $|n^2 - 4|$ простое при $n = \pm 1; \pm 3$, а при всех остальных n — составное; б) число $n^4 + 4$ простое при $n = \pm 1$, а при всех остальных n — составное.

Решение. б) Заметим, что

$$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=\\ =(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

(Иногда сумма квадратов тоже раскладывается на множители!) При подстановке в это равенство любого числа получим разложение числа n^4+4 на множители. Если при этом оба множителя отличны от ±1, то число — составное. При $n=0$ имеем $4=2\cdot2$ — составное. При $n=1$ имеем $5=5\cdot1$ — простое. При $n\geqslant2$ оба множителя больше 1, поэтому число составное. При $n<0$ ситуация симметрична, так как так как $(-n)^4=n^4$.

Д47. Ответ: при всех $k>0$.

Действительно,

$$2^{4k+2}+1=4^{2k+1}+1=(4+1)(4^{2k}-4^{2k-1}+\ldots-4+1).$$

Чтобы число было составным, достаточно, чтобы второй множитель был больше 1. Это достигается при $k>0$.

Д48. Ответ: нет.

Предположите обратное и подставьте в разложение $x=1$.

Этот многочлен называется многочленом деления круга. Оказывается, он не раскладывается в произведение многочленов ни с целыми, ни с рациональными коэффициентами.

Д49. Пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $b=1-x_1x_2$. Поэтому $a^2+b^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$. При ненулевых значениях x_1, x_2 это равенство даёт разложение числа a^2+b^2 на множители, отличные от 1.

Д50. Ответ: ошибся.

Любое общее кратное кратно любому общему делителю.

Д51. Ответ: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Заметим, что $(n, n+12) = (n, 12)$.

Д52. Ответ: не изменится.

Докажите, что

$$[1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n] = [n+1, n+2, \ldots, 2n].$$

Воспользуйтесь тем, что из чисел $2k$ и k достаточно оставить большее.

Д53. $[n, n+1, n+2] = [[n, n+1], n+2] = [n(n+1), n+ + 2] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}$. Далее, $(n(n+1), n+2) = (n^2+n, n+ + 2) = (|n^2+n-(n^2+2n)|, n+2) = (n, n+2) = 1$ или 2 в зависимости от чётности n. Поэтому

$$[n, n+1, n+2] = n(n+1)(n+2) \quad \text{при нечётном } n,$$

$$[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{при чётном } n.$$

Д54. а) Все пары вида $(2n-1, 2n+1)$, где n — целое (см. задачу 5.7).

б) Все пары вида $(3n-1, 3n+2)$ и вида $(3n-2, 3n+1)$, где n — целое.

Д55. $377 = 261 \cdot 1 + 116$, $261 = 116 \cdot 2 + \boxed{29}$, $116 = = \boxed{29} \cdot 4 + 0$. Поэтому $\dfrac{377}{261} = \dfrac{29 \cdot 13}{29 \cdot 9} = \dfrac{13}{9}$.

Д56. $(10n+2, 6n+1) = (4n+1, 6n+1) = (2n, 4n+ + 1) = (2n, 2n+1) = 1$.

Д57. Ответ: $(a, b) = (a, a+b) = (a, a-b)$.

Д58. Ответ: 160 см на 370 см.

Запишем алгоритм Евклида от конца к началу: $5 \cdot 10 = = 50$, $50 \cdot 3 + 10 = 160$, $160 \cdot 2 + 50 = 370$.

Д59. Рассмотрим величину в правой части. По алгоритму Евклида

$$(13a+8b, 5a+3b) = (8a+5b, 5a+3b) = (5a+3b, 3a+2b) =$$

$$= (3a+2b, 2a+b) = (2a+b, a+b) = (a+b, a) = (a, b).$$

Можно продолжить эту цепочку и в сторону увеличения. Коэффициенты будут равны последовательным числам Фибоначчи.

Д60. а) **Ответ:** $2^{20} - 1$.

Разделим $2^{120} - 1$ на $2^{100} - 1$ с остатком: $2^{120} - 1 = (2^{100} - 1) \cdot 2^{20} + 2^{20} - 1$. Действуя далее аналогично, получим: $(2^{120} - 1, 2^{100} - 1) = (2^{100} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{80} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{60} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{40} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{20} - 1, 2^{20} - 1) = 2^{20} - 1$. Обратите внимание на то, что показатели степеней в этом равенстве также «делятся с остатком».

б) **Ответ:** $(2^p - 1, 2^q - 1) = 2^{(p,q)} - 1$.

Более того, число 2 здесь можно заменить на произвольное число.

Д61. а) **Ответ:** $\underbrace{111\ldots11}_{10\text{ единиц}}$.

$$(\underbrace{111\ldots11}_{100\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{90\text{ единиц}}) = (\underbrace{111\ldots11}_{90\text{ единиц}} \cdot 10^{10} + \underbrace{111\ldots11}_{10\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{90\text{ единиц}}) = (\underbrace{111\ldots11}_{10\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{90\text{ единиц}}) = \underbrace{111\ldots11}_{10\text{ единиц}},$$

поскольку последнее число делится на предпоследнее.

б) В общем случае

$$(\underbrace{111\ldots11}_{k\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{l\text{ единиц}}) = \underbrace{111\ldots111}_{(k,l)\text{ единиц}}.$$

Д62. Ответ: если число n является простым, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок.

После первого хода образуется равнобедренная трапеция. Посмотрим, какие фигуры образуются на последующих ходах. Пусть на каком-то ходу один из игроков получил шоколадку в форме равнобедренной трапеции с меньшим основанием a и большим основанием b (длина боковой стороны такой трапеции равна $b-a$). Если он отломает треугольник, сторона которого меньше чем $b-a$, то другой игрок может отломать треугольник со стороной 1, и этот игрок проигрывает (см. рис. 1).

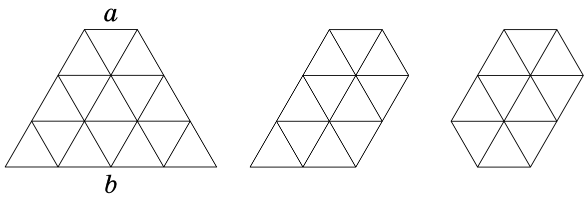


Рис. 1

Следовательно, в этой ситуации он должен отломать треугольник со стороной $b-a$. После этого хода остаётся параллелограмм, длины сторон которого равны a и $b-a$. Пусть игрок получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b, причём $a < b$. Тогда по аналогичным соображениям он должен отломать треугольник со стороной a. После этого хода остаётся равнобедренная трапеция с основаниями $b-a$ и b. Таким образом, если в некоторый момент один из игроков получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b ($a < b$), то через два хода он получит шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и $b-a$. Если же один из игроков получил параллелограмм с равными сторонами (то есть ромб), то после его хода образуется треугольник (см. рис. 2).

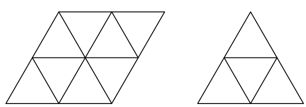


Рис. 2

Теперь приведём выигрышную стратегию для второго игрока при простом n. Ему достаточно каждый раз отламывать кусок наибольшего размера. Покажем, что эта стратегия приводит к выигрышу. Пусть первый игрок отломал треугольник со стороной k. После хода второго игрока образуется параллелограмм со сторонами k и $n-k$. Эти числа взаимно просты, так как n — простое число. Далее, после каждого хода второго игрока будет получаться параллелограмм (пока в конце концов не получится ромб). Длины сторон этого параллелограмма взаимно просты (если k и n взаимно просты, то k и $n-k$ тоже взаимно просты). Значит, длины сторон ромба тоже взаимно просты. Но это означает, что получится ромб со стороной 1! Первый будет вынужден отломать от него треугольник со стороной 1, после чего второй выигрывает. Если $n = 1$, то первый уже выиграл.

Пусть теперь число n составное. Обозначим через p любой простой делитель числа n. Пусть первый сначала отломает треугольник со стороной p, а потом каждый раз отламывает самый большой кусок. Через некоторое время второй игрок получит треугольник со стороной p и, как было разобрано выше, через несколько ходов проиграет.

Заметим, что описанный процесс есть не что иное, как алгоритм Евклида.

Д63. а) **Ответ:** любые целые суммы в силу следствия из основной леммы (10 и 3 взаимно просты).

б) **Ответ:** нельзя.

Монет по 10 дублонов должно быть либо 0, либо 1, при этом легко видеть, что добрать нужную сумму монетами по 3 дублона не удастся.

Д64. а) $x + y = 0$; б) $x + y = 1$; в) $x + y = n - 1$.

Д65. Ответ: $x = 4 + 43n, y = 6 + 65n$, где $n \geqslant 0$.

Сначала найдём по обычному алгоритму целые решения: $x = 4 + 43n, y = 6 + 65n$, где n — целое. Теперь отберём из них натуральные. Решая неравенства $x > 0$, $y > 0$, получим $n \geqslant 0$.

Д66. а) **Ответ:** $x = 1, y = 4, z = 7$.

В году 12 месяцев. Один из них — февраль — состоит из 28 дней, четыре месяца (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) состоят из 30 дней, остальные 7 месяцев — из 31 дня. Так как всего в году 365 дней, получаем

$$28 \cdot 1 + 30 \cdot 4 + 31 \cdot 7 = 365.$$

б) Есть ещё одно решение в натуральных числах: $x = 2, y = 1, z = 9$.

Д67. Составим уравнение $73x = 1000y+1$, то есть $73x - 1000y = 1$. Находя $(73, 1000)$ по алгоритму Евклида, получим частное решение: $x_0 = 137, y_0 = 10$. Общее решение имеет вид $x = 137 + 1000n$, $y = 10 + 73n$, где n — целое. Решим неравенство

$$1 \leqslant 73x \leqslant 100000 \Leftrightarrow 1 \leqslant 10001 + 73000n \leqslant \leqslant 100000 \Leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 1.$$

Вычисляя $73x$ при каждом из двух значений n, получаем ответ: 10001 и 83001.

Д68. Ответ: 19 маленьких и 7 больших или 6 маленьких и 18 больших.

Пусть у нас x досок шириной 11 см и y досок шириной 13 см. Получаем уравнение $11x + 13y = 300$. Частное решение уравнения с 1 в правой части есть $(6, -5)$. Домножая на 300, получим $x_0 = 1800$, $y_0 = -1500$. Общее решение $x = -13n + 1800$, $y = 11n - 1500$. Теперь надо подобрать такие n, при которых обе компоненты неотрицательны. Из неравенства $x \geqslant 0$ получаем $n \leqslant 138$, а из неравенства $y \geqslant 0$ получаем $n \geqslant 137$. Подставляя $n = 137$, получаем ответ: 19 маленьких досок и 7 больших. Подставляя $n = 138$, получаем ответ: 6 маленьких досок и 18 больших.

Д69. Сначала угадываем частное решение: $(1, 1, 1)$. Теперь выпишем однородное уравнение $2x + 3y + 5z = 0$. Перепишем уравнение: $2(x + y + 2z) + y + z = 0$. Обозначив выражение в скобках через t (оно, очевидно, целое), получим систему уравнений: $2t + y + z = 0$ и $x + y + 2z = t$. Выразим x и y через z и t: $y = -2t - z$, $x = 3t - z$. Чтобы не путаться, положим ещё $z = u$, где u — параметр. Придавая t и u произвольные целые значения, получим всевозможные наборы $(x, y, z) = (3t - u, -2t - u, u)$, удовлетворяющие однородному уравнению. Складывая частное решение неоднородного уравнения с общим решение однородного, получим: $x = 1+3t-u$, $y = 1-2t-u$, $z = 1+u$.

Отметим, что решение теперь зависит от двух параметров! Вообще говоря, уравнение с двумя неизвестными оставляет одну «степень свободы», а одно уравнение с тремя неизвестными оставляет две «степени свободы».

Д70. Ответ: 9 воробьёв, 10 горлиц, 11 голубей.

Д71. Ответ: 498 долларов.

Заметим, что $\text{НОД}(300, 198) = 6$, то есть, обе операции изменяют количество денег вне банка на число, кратное 6. А наибольшее число, кратное шести и не превышающее 500, — это 498. Поэтому снять больше 498 долларов не удастся. Снять 498 долларов можно, например, следующим образом. У уравнения $300y - 198x = 6$ есть решение $x = 3$, $y = 2$. Если мы сможем в некотором порядке снять дважды по 300 долларов и положить трижды по 198 долларов, то снимем ровно 6 долларов. Пусть в банке в какой-то момент есть n долларов. Снимем 300, вложим 198, снимем 300 и дважды вложим по 198. Легко проверить, что эта последовательность операций возможна, если $n \geqslant 402$. Повторив её 16 раз, мы оставим в банке 404 доллара. Теперь, проделав три первые операции из указанной последовательности, оставим в банке 2 доллара.

Д72. Ответ: 19.

Надо подобрать такое k, чтобы диофантово уравнение $3x + 4y = k$ имело два натуральных решения. Решив это уравнение в целых числах и потребовав положительности x и y, придём к условию, что в интервале $\left(\frac{k}{4}, \frac{k}{3}\right)$ должны лежать ровно две целочисленные точки. Наименьшее такое число $k = 19$.

Д73. Поскольку числа 56 и 65 — взаимно простые, по теореме о сокращении множителя $a = 65n$, а тогда $b = 56n$. Поэтому $a + b = 65n + 56n = 121n$ — составное.

Д74. а) **Ответ:** $x = \pm 9, y = \pm 8$.

Разложите левую и правую части на множители, рассмотрите возможные варианты.

б) **Ответ:** решений нет.

Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - y^2 = 2010 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 2010.$$

Заметим, что правая часть делится на 2, но не делится на 4. Однако числа в скобках в левой части либо оба чётные, либо обе нечётные.

Д75. Заметим, что все три автомата сохраняют наибольший общий делитель чисел.

а) Нельзя, поскольку исходные числа взаимно простые, а конечные числа кратны 3.

б) Применяя первый и третий автомат, можно осуществить алгоритм Евклида. И пару $\{20; 11\}$, и пару $\{31; 13\}$ можно свести к паре $\{1; 1\}$, так как они обе взаимно простые. Поскольку все шаги обратимы, пару $\{20; 11\}$ можно свести к паре $\{31; 13\}$.

Д76. Заметим, что простое число 53 не является делителем числа 50!, так как иначе один из множителей числа 50! по теореме о простом множителе делился бы на 53, а это невозможно. С другой стороны ясно, что 50! делится на $3 \cdot 17 = 51$ и на $4 \cdot 13 = 52$ (так как указанные пары чисел взаимно просты).

Д77. Ответ: простое.

Число $(n-1)!$ делится на все числа от 2 до $n-1$. Значит, число $(n-1)!+1$ не делится ни на одно из этих чисел. Тем самым, n — наименьший отличный от 1 делитель числа $(n-1)!+1$. Поэтому n не может быть составным (иначе нашлись бы простые делители меньше его).

Оказывается, годится любое простое n, а именно: если n простое, то $(n-1)!+1$ кратно n. Это утверждение называется теоремой Вильсона и доказывается заметно сложнее.

Д78. Ответ: 8, 9, а также числа вида p и $2p$, где p — простое.

Ясно, что $n = p$ и $n = 2p$ при простом p удовлетворяют условию, так как $(n-1)!$ не делится на p^2. Легко видеть также, что $7!$ не делится на 8^2, а $8!$ — на 9^2. Докажем, что для остальных n число $(n-1)!$ делится на n^2.

Первый случай. Пусть у n есть хотя бы два различных делителя. Обозначим один из них p. Тогда среди чисел $1, 2, \ldots, n-1$ есть хотя бы $\frac{n}{p} - 1$ число, делящееся на p. Если n делится на p^k, но не делится на p^{k+1}, то $\frac{n}{p} - 1 \geqslant$ $\geqslant 2p^{k-1} - 1 \geqslant 2^k - 1 \geqslant 2k - 1$. Если $n \neq 2p$, то хотя бы одно из написанных неравенств строгое. Значит, $\frac{n}{p} - 1 \geqslant 2k$, и $(n-1)!$ делится на p^{2k}. Поскольку это верно при всех p, то $(n-1)!$ делится на n^2.

Второй случай. Пусть n — степень одного простого числа: $n = p^k$. Тогда $\frac{n}{p} - 1 = p^{k-1} - 1$. При $p \geqslant 5$, а также при $p = 3$ и $k \geqslant 3$ либо при $p = 2$ и $k \geqslant 5$, это число не меньше $2k$. Значит, $(n-1)!$ делится на n^2. Случай $n = 2^4$ разбирается непосредственно.

Д79. Ответ: нет.

Среди простых сомножителей составного двузначного числа обязательно есть однозначные (произведение двух неоднозначных чисел является по крайней мере трёхзначным числом). Поскольку однозначных простых всего четыре (2, 3, 5, 7), то хотя бы в два из наших двузначных чисел попадёт одинаковый простой множитель и они не будут взаимно простыми.

Д80. Если бы Фома выпил и съел втрое больше, то получилось бы на 11 калачей и на 11 бубликов больше, чем у Ерёмы. Следовательно, утроенная порция Фомы стоит целое число рублей, кратное 11. Сокращаем на 3 по теореме о сокращении множителя.

Д81. Ответ: 19.

Пусть первый от угла дом квартала имеет номер p, а количество домов на одной стороне квартала равно k. Тогда, последовательность p, $p+2$, $p+4$, $\ldots$, $p+2(k-1)$ номеров этих домов является арифметической прогрессией. Сумма первых k членов этой прогрессии равна

$$\frac{p+p+2k-2}{2}k=(p+k-1)k.$$

По условию получим уравнение $(p+k-1)k=247$. Разложение на простые множители числа 247 имеет вид $247=13\cdot 19$. Так как $p\geqslant 1$, то $p+k-1\geqslant k$, значит, $p+k-1=19$, а $k=13$, то есть $p=7$. Следовательно, на одной стороне квартала 13 домов, а их нумерация начинается с числа 7. Таким образом, седьмой дом (от любого угла) имеет номер 19.

Можно было рассуждать и по-другому.

Сумма номеров нечётна, значит, на указанной стороне квартала находятся нечётные номера и число домов нечётно. Сумма номеров (членов арифметической прогрессии) равна произведению количества домов на номер среднего дома, а $247=13\cdot 19$. Если номер среднего дома 13, то перед ним не поместятся 8 домов. Значит, номер среднего дома 19, и он седьмой от угла. (*Случаи, когда номер среднего дома* 1 *или* 247, *отброшены за очевидностью*).

Д82. Разложим число 2007 на простые множители: $2007=3\cdot 3\cdot 223$. Отсюда можно было бы сделать вывод, что отметки Вовочки — это две двойки и три тройки. Но на самом деле надо ещё доказать, что нет других вариантов отметок. Посмотрим, как ещё можно разложить 2007 на множители: $2007=9\cdot 223=3\cdot 669$.

Поскольку отметки 9 не бывает, эти разложения числа 2007 не могли возникнуть из Вовочкиных отметок. Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители, — тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит.

Д83. Ответ: да, нужно вычеркнуть 50!.

Посмотрим, сколько раз входит каждое число от 2 до 100 в наше произведение. Число 2 входит во все факториалы, начиная со второго, то есть 99 раз; число 3 входит во все факториалы, начиная со третьего, то есть 98 раз; и так далее — каждое число входит во все факториалы, начиная со «своего», то есть n входит в произведение $101 - n$ раз:

$$1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100.$$

В частности, все нечётные числа входят в произведение чётное число раз, а чётные — нечётное число раз. Выделим отдельно произведение всех чётных чисел, взятых по одному разу:

$$1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100 =$$
$$= (2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^2 \cdot 99^2) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100).$$

В первой скобке все показатели степеней чётные, значит, произведение чисел в первых скобках — квадрат целого числа. А произведение чисел во вторых скобках равно $2 \times \times 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100 = 2^{50} \cdot 50!$. Но 2^{50} является квадратом целого числа. Значит, если зачеркнуть $50!$, то оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

Д84. б) Число N равно произведению $(a+1)(b+1) \cdot \ldots \times \times (w+1)$, где a, b, $\ldots$, w — показатели степеней простых множителей в каноническом разложении. Поэтому любому разложению числа N на множители соответствует свой набор показателей степеней в каноническом разложении.

Д85. а) Пусть число a имеет вид 2^n. Тогда делители числа a имеют вид 1, 2, ..., 2^n, а делители числа $2a$ имеют вид 1, 2, ..., 2^n, 2^{n+1}. То есть было $n+1$ делителей, а стало $n+2$ — на 1 больше. Имеем $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow n = 4$. Отсюда следует утверждение задачи.

Пусть теперь a имеет вид $2^n b$, где b — нечётное число с k делителями. Тогда a имеет $(n+1)k$ делителей, а $2a$ — $(n+2)k$ (в силу мультипликативности числа делителей). Далее рассуждаем аналогично предыдущему абзацу.

Можно и непосредственно применить формулу для количества делителей.

б) Ответ: на 40%.

Д86. Ответ: $x = 6$, $y = 5$, $z = 4$.

Д87. Ответ: $2^6 \cdot 3$.

Число с 14 делителями имеет вид либо p^{13}, либо $p^6 q$, где p и q — простые числа. Поскольку $12 = 2^2 \cdot 3$, возможен только второй вариант: число равно $2^6 \cdot 3$.

Д88. Ответ: 8, 12.

Обозначим через n искомое число, а через $\tau(x)$ — количество делителей числа x. Заметим, что по условию n кратно 2. Рассмотрим последовательно случаи $n = 2b$, $2^2 b$, $2^3 b$, $2^m b$, где b — нечётно. Решим для каждого случая уравнение $n = 2\tau(n)$. Будем использовать тот факт, что для чисел 1 и 2 количество делителей равно самому числу, а для чисел, бóльших 2, количество делителей меньше самого числа. Также учтём, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ при взаимно простых a и b.

1. Пусть $n = 2b$. Имеем $2b = 2\tau(2b) \Leftrightarrow b = 2\tau(b)$, что невозможно, так как b нечётно.

2. Пусть $n = 2^2 b$. Имеем $2b = 3\tau(b)$. Заметим, что $b = 3$ является решением. Докажем, что других решений нет. Ясно, что b кратно 3. Если $b = 3^k$, то имеем $2 \cdot 3^k = 3 \cdot (k+1)$, что выполнено только при $k = 1$ (так как при $k > 1$ левая часть больше правой). Если же $b = 3^k \cdot s$, (где s некратно 3), то имеем $2 \cdot 3^k s = 3 \cdot (k + 1)\tau(s)$, а это уравнение также не имеет решений, так как $s > \tau(s)$ при $s > 2$.

3. Пусть $n = 2^3 b$. Имеем $b = \tau(b)$, откуда $b = 1$.

4. Пусть $n = 2^m b$, где $m > 3$. Тогда $2^m b = 2\tau(2^m b) = 2(m + 1)\tau(b)$. Однако $2^m > 2(m + 1)$ при $m > 3$. Также $b > \tau(b)$ при $b > 2$. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Д89. б) Двойка входит в разложение $n!$ по одному разу от каждого чётного числа, сверх того по разу от каждого числа, делящегося на 4, сверх того по разу от каждого числа, делящегося на 8, и т. д.

в) **Ответ:** не делится ни при каких n.

Используйте неравенство $[x] \leqslant x$ и сумму бесконечной арифметической прогрессии.

г) **Ответ:** делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

Найдите показатели степеней, в которых двойка входит в разложения на простые множители чисел $n!$ и $2n!$.

д) Рассмотрите произведение $(m+1)(m+2)\ldots(m+n) = \frac{(m+n)!}{m!}$. Выразите степень каждого простого множителя для $m!$, $n!$ и $(m+n)!$ и воспользуйтесь неравенством

$$\left[\frac{a+b}{c}\right] \geqslant \left[\frac{a}{c}\right] + \left[\frac{b}{c}\right].$$

Д90. Ответ: верно.

Указания. 1. Пусть выбранное число — m. Докажите, что m^{100} содержит все простые делители остальных чисел, причём каждый с показателем степени не меньше чем 100.

2. Докажите, что показатель степени любого простого множителя в двузначном числе не превосходит 6 (тогда в произведении 16 чисел он не превосходит 96).

Д91. $p^\alpha \cdot p^\beta = p^{\min(\alpha,\beta)} \cdot p^{\max(\alpha,\beta)}$. И так с каждым простым множителем.

Д92. а) **Ответ:** нет.

Например, $(6, 10, 15)[6, 10, 15] = 1 \cdot 30 \neq 6 \cdot 10 \cdot 15$.

б) **Ответ:** «$\leqslant$».

Достаточно изучить случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда $(a, b, c)[a, b, c] = p^\alpha p^\gamma$, а $abc = p^{\alpha+\beta+\gamma}$.

в) В обозначениях и предположениях п. б) проверяется простой подстановкой.

Д93. а) **Ответ:** $\varphi(a)\varphi(b) < \varphi(ab)$.

б) **Ответ:** $\tau(a)\tau(b) > \tau(ab)$.

Д94. Ответ: $\varphi(d)$.

Д95. Используйте результат предыдущей задачи.

Приложение

Две ещё не решённые задачи о простых числах

В теории чисел встречаются задачи с очень простыми формулировками, решения которых до сих пор неизвестны. Школьников полезно знакомить с такими задачами — в частности для того, чтобы избавить их от иллюзии, что «в математике уже всё открыто».

1. Гольдбах и Эйлер заметили, что любое чётное число (кроме 2) удаётся представить в виде суммы двух простых чисел. Например, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 13 + 3$, $18 = 11 + 7$, ..., $100 = 97 + 3$ и т. д. Гипотеза Гольдбаха до сих пор не доказана, хотя проверена до $4 \cdot 10^{18}$. Можно изучать экспериментально (с помощью компьютера) количество представлений числа $2n$ в виде суммы двух простых чисел.

2. Простые числа нередко встречаются парами в виде p и $p + 2$. Таковы 3 и 5, 11 и 13, 29 и 31 и т. д. Из задачи 4.4 следует, что все пары простых-близнецов, кроме $(3, 5)$, имеют вид $(6n-1, 6n+1)$. Бесконечно ли множество таких «близнецов»? Из задачи 4.9 следует, что с возрастанием простых чисел встречаются всё бóльшие промежутки между ними, однако неизвестно, сохраняются ли маленькие промежутки. В 2013 году математик Чжан Итан доказал, что существует бесконечно большое количество простых чисел, расстояние между которыми не превышает 70 миллионов. Самые большие известные сейчас простые близнецы — это $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$ (найдены в 2011 году).

Несколько исследовательских задач, связанных с делимостью

Разрешимость линейных уравнений в неотрицательных целых числах

Основная лемма гарантирует, что выражение $ax + by$ при данных взаимно простых a и b может принять любое целое значение при надлежащем выборе целых x и y. Интересно посмотреть, что будет, если ограничиться целыми неотрицательными x и y. Например, в задаче 6.10 доказано, что уравнение $3x + 5y = N$ разрешимо в неотрицательных целых числах при всех $N > 7$. Обобщим задачу. *Даны взаимно простые a и b; при каких N разрешимо уравнение $ax + by = N$?* Удобно организовать исследование так: зафиксировав a и b, отмечать на целочисленной оси зелёным цветом все числа, представимые в виде $ax + by$, а красным — непредставимые, и искать закономерности.

Нетрудно заметить, что уравнение неразрешимо лишь для конечного количества правых частей, то есть всегда найдётся такое граничное число N_0, что все бо́льшие числа выражаются в виде $ax + by$ (как и в частном случае задачи 6.10, где $N_0 = 7$). Чтобы угадать зависимость N_0 от a и b, можно зафиксировать a и находить граничное число, последовательно увеличивая b. (Ясно, что a и b должны входить в формулу симметрично.) Далее достаточно доказать, что N_0 непредставимо в виде $ax + by$, а все $N > N_0$ представимы.

Красивую закономерность (и идею решения) можно увидеть, если посмотреть на размеченную числовую ось геометрически. См. А. В. Спивак. *Арифметика.* М.: Бюро Квантум, 2007. С. 30–32.

Квадратичные вычеты

Остатки от деления квадратов натуральных чисел на число M называются *квадратичными вычетами* числа M. Остальные числа в пределах от 0 до $M - 1$ называются *квадратичными невычетами* числа M. Например, числа 0 и 1 являются квадратичными вычетами числа 3, а число 2 — квадратичным невычетом.

а) Найдите все квадратичные вычеты для чисел $M = 2$, 5, 7, 11. Что можно сказать про их количество?

б) Сформулируйте гипотезу для всех простых $M > 2$ и докажите её.

в*) Проделайте то же для M, равного произведению различных простых чисел.

г**) Решите ту же задачу для произвольного M.

См. В. В. Острик, М. А. Цфасман. *Алгебраическая геометрия и теория чисел*: *рациональные и эллиптические кривые*. М.: МЦНМО, 2005. С. 11, 41, 42.

Первообразные корни

Возьмём простое число, например $p = 7$, и будем искать остатки от деления степеней 2 на 7:

2 даёт остаток 2, 2^2 даёт остаток 4, 2^3 даёт остаток 1, 2^4 даёт остаток 2, ...

Теперь посмотрим на остатки от деления степеней 3 на 7:

3 даёт остаток 3, 3^2 даёт остаток 2, 3^3 даёт остаток 6, 3^4 даёт остаток 4, 3^5 даёт остаток 5, 3^6 даёт остаток 1, ...

Нетрудно понять, что последовательность рано или поздно зациклится. Для $a = 3$ остатки успели пробежать все возможные числа $1, 2, \ldots, p-1$. В этом случае число a называют первообразным корнем по модулю p. Для $a = 2$ цикл состоит всего из трёх чисел.

Возникают вопросы:

а) У любого ли простого p есть первообразный корень?

б) Какую длину может иметь цикл степеней числа a по модулю p?

в) Каково количество первообразных корней для данного простого p?

Разумно продолжить эксперимент: выбираем простое p и рассматриваем последовательно степени $a = 2, 3, \ldots p-2$ (для $a = 1$, $p-1$ всё понятно). Гипотезы и доказательство п. б) найти несложно, а вот доказательство п. а) весьма трудно.

Пасхалия

Один из главных праздников христиан — Пасха — является переходящим, то есть в каждый год выпадает на новую дату. Православные празднуют Пасху в первое воскресенье после первого полнолуния, бывшего после 21 марта[2]. Важность знания даты Пасхи в средние века показывает, например, шотландская сказка, в которой жители Шотландии каждый год отправляли гонца в Ватикан, чтобы узнать дату очередной Пасхи. Герой сказки прославился тем, что смог узнать не только дату, но и сам способ вычисления.

Гаусс нашёл простой алгоритм вычисления дня православной Пасхи, который записывается в несколько строк. Обозначим через a остаток от деления числа года на 19, через b — остаток от деления его на 4 и через c — от деления на 7. Далее, остаток от деления величины $19a + 15$ на 30 назовем d, а остаток от деления $2b + 4c + 6d + 6$ на 7 пусть будет e. День Пасхи будет $22 + d + e$ марта, или, что то же самое, $d + e - 9$ апреля (по юлианскому календарю!).

По этому алгоритму можно сделать небольшую исследовательскую работу, руководствуясь следующим планом.

а) Периодична ли дата Пасхи? Найдите период (он называется великий индиктион).

б) Проверьте, что в 2010 году была самая ранняя Пасха. Когда будет следующая самая ранняя Пасха? Когда будет ближайшая самая поздняя Пасха? Сколько раз за период они встречаются?

в) Все ли промежуточные даты встречаются? Какие даты встречаются чаще всего, какие — реже всего?

г) Может ли одна и та же дата Пасхи выпадать два года подряд?

д*) (для любителей астрономии). Докажите алгоритм Гаусса.

Можно с помощью компьютера составить вечную пасхалию, то есть даты Пасхи на полный период.

---

[2]По юлианскому календарю, отстающему сейчас на 13 дней от григорианского, по которому мы живём.

Раздаточный материал

Занятие 1. Делимость чисел

Задача 1.1. Найдите все делители числа 36.

Задача 1.2^{+}. В верхней строке таблицы указано то, что **дано**. В левом столбце — то, что **спрашивается**. Заполните пустые клетки: если «да», то поставьте «+», если «нет», то «–», если данных не хватает, то знак «?». Обоснуйте свои ответы.

	$a \vdots m$ и $b \vdots m$	$a \vdots m$ и $b \not\vdots m$	$a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$
$a + b \vdots m$?			
$a - b \vdots m$?			
$a \cdot b \vdots m$?			

Задача 1.3. Определите, не выполняя действий, делится ли
а) $18^2 - 7^2$ на 11;
б) $53^3 + 67^3 + 2^3$ на 60;
в) $1^3 + 2^3 + \ldots + 82^3$ на 83.

Задача 1.4. Петя считает, что если a^2 делится на $a - b$, то b^2 делится на $a - b$. Прав ли он?

Задача 1.5. а) Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечётное количество делителей.

б) Верно ли обратное?

Задача 1.6. Докажите, что:
а) произведение двух последовательных чисел делится на 2;
б) число $\dfrac{n^2 + n}{2}$ — целое.

Задача 1.7. В каком случае два числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a? (Числа могут быть и отрицательными!)

Задача 1.8^{+}. а) Верно ли, что если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$?

б) Верно ли, что если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$?

Задача 1.9. Вася считает, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ тоже делится на $a - c$. Прав ли он?

Задача 1.10. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.

Задача 1.11. а) Маша показывает такой фокус: ей называют любое трёхзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?

б) Саша заметила, что все шестизначные числа Маши делятся на 7. Почему? На какие ещё числа они делятся?

Задача 1.12. В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключённому. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте — закрывалась и т. д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает.

На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры и т. д.

Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки в камерах. Сколько узников в итоге вышло на свободу и из каких камер?

Занятие 2. Признаки делимости

Задача 2.1. а) Докажите, что число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2.

б) Выведите признак делимости на 4, связанный с двумя последними цифрами.

Задача 2.2. Петя заметил, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получится число, кратное 9.

а) Докажите этот факт.

б) Сформулируйте на его основе признаки делимости на 9 и на 3.

Задача 2.3. Вася нашёл число

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100,$$

затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?

Задача 2.4. а) Разряды числа занумеровали по порядку справа налево (первый — разряд единиц, второй — разряд десятков и т. д.). После этого к числу прибавили сумму цифр в чётных разрядах и вычли сумму цифр в нечётных разрядах. Докажите, что полученное число делится на 11.

б) Сформулируйте признак делимости на 11.

Задача 2.5. Верно ли, что если число делится на два других, то оно делится и на их произведение?

Задача 2.6. В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

Задача 2.7. а) Докажите признак делимости на 5.

б) Выведите признак делимости на 25.

Задача 2.8. Автомат печатает на полоске бумаги цифры «4» по одной. Удастся ли остановить его так, чтобы было напечатано число, кратное 8?

Задача 2.9. В числе поменяли местами некоторые цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.

Задача 2.10. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

Задача 2.11. Швондер придумал ребус, в котором фигурируют числа

ГЛАВРЫБААБЫРВАЛГ и БОРМЕНТАЛЬ.

Профессор Преображенский утверждает, что оба этих числа — составные. Прав ли профессор?

Задача 2.12. а) Докажите, что произведение трёх последовательных чисел делится на **6**.

б) Докажите, что число $\frac{n^3 - n}{6}$ — целое.

Занятие 3. Деление с остатком

Задача 3.1^{+}. Маша проболела урок и сделала примеры на деление с остатком так:
а) $20 = 3 \cdot 4 + 8$;
б) $19 = 3 \cdot 5 + 4$;
в) $-11 = 2 \cdot (-5) - 1$.

Объясните её ошибки.

Задача 3.2. Какой остаток даёт число 123321 при делении на 999?

Задача 3.3. Делитель и делимое увеличили в 3 раза. Как изменятся частное и остаток?

Задача 3.4. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

Задача 3.5. а) Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое даёт остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7.

б) Найдите *все* такие числа.

Задача 3.6^{+}. Вернёмся к задаче 1.2. Заполните таблицу, используя остатки: «0», если число делится нацело на m, и «не 0», если не делится.

Задача 3.7. Каждое из чисел от 1 до 1 000 000 заменили на его сумму цифр. Каждое из полученных чисел вновь заменили на его сумму цифр. Так делали, пока не получили миллион однозначных чисел. Каких чисел среди них больше: единиц или двоек?

Задача 3.8. Разделите с остатком
а) 239 на 6;
б) -239 на 6;
в) -99 на 10;
г) -101 на 100.

Задача 3.9. Когда Скупой рыцарь раскладывает свои монеты стопками по девять штук, у него остаётся восемь монет. Сколько монет может оставаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?

Задача 3.10. Число a даёт остаток 6 при делении на 12. Может ли оно давать остаток 12 при делении на 20?

Задача 3.11. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает остаток 4 и при делении на 6 дает остаток 5.

Задача 3.12. Число a даёт при делении на b частное q и остаток r. Какие частное и остаток при делении на b даст число $-a$?

Задача 3.13. На доске написано число 2. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

Занятие 4. Простые числа

Задача 4.1. а) Площадь клетчатого прямоугольника равна 31 клетке. Чему равен его периметр?

б) Площадь клетчатого прямоугольника равна n клеток. Каким свойством должно обладать n, чтобы по этим данным можно было однозначно определить его периметр?

Задача 4.2. Найдите самое большое

а) двузначное;

б) трёхзначное простое число.

Задача 4.3. а) Приведите пример трёх чисел, не делящихся друг на друга и таких, что произведение любых двух из них делится на третье.

б) Тот же вопрос для чисел, больших ста.

Задача 4.4^{+}. Докажите, что простое число, большее чем 3, представимо либо в виде $6n + 1$, либо в виде $6n + 5$, где n — натуральное число или 0.

Задача 4.5. Могут ли натуральные числа $n - 2012$, n и $n + 2012$ одновременно быть простыми?

Задача 4.6^{+}. Двое играют в такую игру: Петя диктует Васе число (на этом его роль кончается), а Вася записывает число на доске. Затем Вася заменяет число на равное ему произведение двух его множителей, отличных от 1. После этого Вася делает то же самое с одним из написанных на доске чисел, и так далее.

Сможет ли Петя выбрать исходное число так, чтобы Вася а) не мог сделать даже первого хода, б) делал ходы бесконечно?

Задача 4.7^{+}. Рассмотрим множество всех простых чисел. Обозначим их через $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Построим такое число:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Очевидно, оно не делится ни на одно из простых чисел. Значит, оно также простое. Однако оно не входит в наше множество всех простых чисел, так как больше каждого из них. Получили противоречие. В чём ошибка?

Задача 4.8. а) Пусть m и n — натуральные числа, а $m^2 - n^2$ — простое число. Найдите $m - n$.

б) В клетчатом квадрате закрасили меньший квадрат. Незакрашенных клеток осталось 79. Могут ли все углы большого квадрата остаться незакрашенными?

Задача 4.9. Существует ли сто подряд идущих составных чисел?

Задача 4.10. Назовём число упрощённым, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных чисел могут оказаться упрощёнными?

Задача 4.11. Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным?

Задача 4.12. а) Найдите пять таких простых чисел, что расстояние между любыми двумя соседними из них равно 6.

б) Существуют ли шесть таких чисел?

Занятие 5. Общие делители и общие кратные. Алгоритм Евклида

Задача 5.1. Надо замостить два участка дороги одинаковыми плитами длиной в целое число метров. Какие плиты можно заказать, если длины участков 12 м и 16 м?

Задача 5.2. Параллельно идут две линии электропередач. У одной расстояние между столбами 8 м, а у другой 12 м. Два столба «совпали». На каком расстоянии от них находятся другие пары «совпадающих» столбов?

Задача 5.3$^+$. Найдите общие делители чисел n и $n+1$.

Задача 5.4. Найдите $(846, 246)$.

Задача 5.5$^+$. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b верно равенство $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Задача 5.6. Решите систему:

а) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x, y) = 1, \\ [x, y] = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 31. \end{cases}$

Задача 5.7. Верно ли, что являются взаимно простыми

а) два соседних нечётных числа;

б) нечётное число и половина чётного, следующего за ним?

Задача 5.8. Найдите с помощью алгоритма Евклида а) $(1960, 588)$; б) $[1960, 588]$.

Задача 5.9. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Найдите какие-нибудь два числа a и b, чтобы при разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

Задача 5.10. Найдите все значения m, для которых дробь $\dfrac{11m+3}{13m+4}$ сократима.

Задача 5.11. Решите систему:

а) $\begin{cases} (x, y) = 5, \\ [x, y] = 30 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x, y) = 1, \\ [x, y] = 30. \end{cases}$

Задача 5.12. Числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … определяются равенствами $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ (следующее число равно сумме двух предыдущих) и $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. Найдите $(\varphi_{100}, \varphi_{101})$.

Занятие 6. Уравнения в целых числах

Задача 6.1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Сначала он делает один или несколько прыжков длины 3 в одну сторону, а затем один или несколько прыжков длины 5 в другую сторону. Как ему попасть из точки 0 в точку 7? Найдите все варианты.

Задача 6.2. У продавца и покупателя есть неограниченное количество монет двух достоинств. Продавец может давать сдачу. Покупатель смог заплатить 7 дублонов. Может ли покупатель заплатить

а) 14 дублонов;

б) 35 дублонов;

в) 36 дублонов?

Задача 6.3^{+}**.** Найдите какое-нибудь решение уравнения в целых числах:

а) $15x + 17y = 1$;

б) $15x + 17y = 9$.

Задача 6.4. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим фломастером от её начала через каждые 34 см, другой мастер делает на ней пометки красным фломастером через каждые 27 см. Может ли какая-либо синяя пометка оказаться на расстоянии 2 см от какой-либо красной?

Задача 6.5. Имеют ли решение следующие диофантовы уравнения:

а) $6x + 8y = 9$;

б) $5x + 10y = 17$;

в) $25x + 10y = 55$;

г) $12x + 15y = 22$;

д) $24x + 18y = 2010$?

Задача 6.6. Докажите теорему о взаимно простых делителях (занятие 2). *Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на их произведение ab.*

Задача 6.7. Проведите рассуждения, аналогичные задаче 6.5, в общем виде и докажите следующее утверждение.

Теорема (критерий разрешимости диофантовых уравнений). а) *Если c делится на (a, b), то уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много решений.* б) *Если же c не делится на (a, b), то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений.*

Задача 6.8. На окружности отмечены n точек на равном расстоянии друг от друга (циферблат). Одна из точек — стартовая.

Её соединяют отрезком с точкой, отстоящей от неё на d дуг по часовой стрелке. Эту новую точку также соединяем отрезком с точкой, отстоящей от неё на d дуг. Продолжаем так до тех пор, пока последняя точка не совпадёт со стартовой. Получится замкнутая ломаная (возможно, самопересекающаяся).

а) При каких d все n точек окажутся вершинами ломаной?

б) Сколько оборотов делает ломаная до замыкания?

Задача 6.9. Требуется проложить трассу газопровода на участке длиной 450 м. В распоряжении строителей имеются трубы длиной 9 и 13 м. Сколько труб той и другой длины нужно взять для прокладки трассы, чтобы число сварных швов было минимальным? Трубы резать не следует.

Задача 6.10. а) Докажите, что суммы в 8, 9 и 10 рублей можно разменять трёх- и пятирублёвыми купюрами.

б) Какие бо́льшие суммы можно разменять трёх- и пятирублёвыми купюрами?

Задача 6.11. Рассуждая аналогично задаче 6.6, докажите следующее утверждение, которое мы использовали при решении однородных диофантовых уравнений.

Теорема о сокращении множителя. *Если произведение ac делится на b и если числа a и b взаимно просты, то c делится на b.*

Задача 6.12.

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,
Две мыши поплоше несли по два гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем тащили по семь.
А остальные несли по четыре.
Сколько мышей шли без грошей?

Занятие 7. Теорема о простом делителе

Задача 7.1. Имеет ли решение ребус АБ · ВГ = ДДЕЕ?

Задача 7.2. Докажите, что если точный квадрат делится на простое число p, то он делится и на p^2.

Задача 7.3. Коля хвастает, что может решить любую задачу. Учитель дал ему сто карточек с цифрой 0, сто карточек с цифрой 1 и сто карточек с цифрой 2 и просит составить из всех карточек число, являющееся полным квадратом. Справится ли Коля с задачей?

Задача 7.4. Пусть p — простое число. Докажите, что если произведение нескольких чисел делится на p^2, то либо один из сомножителей делится на p^2, либо есть хотя бы два сомножителя, каждый из которых делится на p.

Задача 7.5. Три числа имеют одинаковые остатки при делении на 3. Докажите, что их произведение либо не делится на 3, либо кратно 27.

Задача 7.6. При каких n число $(n-1)!$ делится нацело на n?

Задача 7.7. Может ли быть точным квадратом число, запись которого состоит из одной единицы, двух двоек, трёх троек, ..., девяти девяток?

Задача 7.8. Некоторое простое число возвели в квадрат и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть различными?

Задача 7.9. Каково наименьшее натуральное n, при котором $n!$ делится на 100?

Задача 7.10. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 — различные простые числа. Найдите (p_1p_2, p_3p_4).

Задача 7.11. а) Расставьте в вершинах квадрата натуральные числа так, чтобы в каждых двух соседних вершинах стояли не взаимно простые числа, а в каждых двух не соседних вершинах — взаимно простые.

б) Тот же вопрос для многогранника (если вершины соединены ребром, то числа должны быть не взаимно простыми, а если не соединены — то взаимно простыми).

Задача 7.12. Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

Занятие 8. Каноническое разложение
Основная теорема арифметики

Задача 8.1. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в её концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

Задача 8.2. Докажите, что в каноническом разложении точного куба все показатели степени кратны 3.

Задача 8.3^{+}**.** Найдите количество делителей числа: а) p^k; б) $p^k q^s$, где p и q — простые числа. в) Обобщите полученные результаты.

Задача 8.4. Пусть простой множитель p входит в каноническое разложение числа a в степени m, а в каноническое разложение b — в степени n, и пусть $m \geqslant n$. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $[a, b]$ в степени m, а в каноническое разложение числа (a, b) — в степени n.

Задача 8.5^{+}**.** Назовём натуральное чётное число *чётнопростым*, если его нельзя представить в виде произведения двух меньших чётных чисел. (Например, числа 2, 6, 10 — чётнопростые, а $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$ — нет.) Сформулируйте аналог основной теоремы арифметики для чётных чисел, заменяя слова «натуральный» на «чётный», а «простой» на «чётнопростой». Проверьте обе части получившегося утверждения.

Задача 8.6. Найдите а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^2)$; в) $\varphi(p^k)$, где p — простое число.

Задача 8.7. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1990; б) 2000; в) 2010?

Задача 8.8. Даны две прямоугольные картонки размерами 49×51 и 99×101. Их разрезали на одинаковые прямоугольные, но не квадратные части с целыми сторонами. Определите размеры частей.

Задача 8.9. Существует ли такой набор из а) 2; б) 10 натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?

Задача 8.10. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, при умножении на 3 — кубом, а при умножении на 5 — пятой степенью?

Задача 8.11. Может ли число, имеющее ровно 15 делителей, делиться а) на 100; б) на 1000?

Задача 8.12. Ваш друг задумал несколько произвольных натуральных чисел, а вы хотите все их угадать, причём именно в том порядке, в каком он эти числа задумал. Вам разрешается попросить друга сделать произвольное вычисление, связанное с его числами, например, найти произведение или сумму некоторых из них, или же более сложную комбинацию, и сообщить вам результат. Каждое такое вычисление будем называть ходом. За какое наименьшее число ходов вы сможете наверняка определить задуманные числа?

Задача 8.13. Для взаимно простых чисел a и b рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & b; \\ b+1, & b+2, & b+3, & \ldots, & 2b; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a-1)b+1, & (a-1)b+2, & (a-1)b+3, & \ldots, & ab. \end{array}$$

а) Докажите, что есть ровно $\varphi(b)$ столбцов, в которых все числа взаимно просты с b.

б) Докажите, что в каждом столбце все остатки при делении на a различны.

в) Докажите, что в каждом столбце есть ровно $\varphi(a)$ чисел, взаимно простых с a.

г) Найдите $\varphi(ab)$, зная $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$.

Список литературы и веб-ресурсов

1. В. Г. Болтянский, Г. Г. Левитас. *Делимость чисел и простые числа.* // В книге: *Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7–8 классов.* — М.: Просвещение, 1974.

2. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. *Заочные математические олимпиады.* — М.: Наука, 1986.

3. Н. Н. Воробьёв. *Признаки делимости.* — М.: Наука, 1988.

4. Е. В. Галкин. *Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами.* — Челябинск: Взгляд, 2005.

5. С. А. Генкин и др. *Ленинградские математические кружки.* — Киров: АСА, 1994.

6. *Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса* 57 *школы* (*выпуск* 2000 *года, класс «В»*) // Под ред. А. Шеня. — М.: МЦНМО, 2000.

7. *Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса* 57 *школы* (*выпуск* 2004 *года, класс «Д»*) // Под ред. В. Доценко. — М.: МЦНМО, 2004.

8. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. *Алгебра.* 8 *кл.: Задачник для кл. с углуб. изуч. математики.* — М.: Мнемозина, 2002.

9. Р. Курант, Г. Роббинс. *Что такое математика?* — М.: МЦНМО, 2004.

10. *Московские математические регаты.* Составители А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.

11. А. В. Спивак. *Арифметика.* — М.: Бюро Квантум, 2007.

12. А. Шень. *Простые и составные числа.* — М.: МЦНМО, 2005.

Список веб-ресурсов

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

Оглавление