

НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

РИМАН

Дифференциальная геометрия

41



Математика переходит границы

DeAGOSTINI

РИМАН дифференциальная геометрия

41



РИМАН

Дифференциальная геометрия

РИМАН

Дифференциальная геометрия

**Математика
переходит
границы**

Наука. Величайшие теории: выпуск 41: Математика переходит границы. Риман. Дифференциальная геометрия. / Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2015. — 160 с.

Бернхард Риман — одна из основных фигур научной панорамы середины XIX века. За свою короткую карьеру он внес огромный вклад в различные области математического знания. Он заложил основы дифференциальной геометрии и сформулировал гипотезу, названную его именем и признанную важнейшей нерешенной проблемой современной математики. Его вклад распространяется и на область физики, обрисовывая путь, по которому пошел Эйнштейн, прежде чем открыть общую теорию относительности. Безвременная кончина немецкого мыслителя прервала «исследовательскую программу», глобальной целью которой было понимание устройства Вселенной.

ISSN 2409-0069

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2014 (текст)

© RBA Coleccionables S.A., 2014

© ООО «Де Агостини», 2014–2015

Иллюстрации предоставлены:

A. Carse/ Берлинский университет: 87 (внизу); ConradFehr/
Прусская академия наук: 134; G.J. Stodart/FergusofGreenock:
113; G. Rondena: 149 (внизу слева); GoogleBooks: 149
(внизу слева); JoanPejoan (инфографика); JohanGørbitz/
InternetArchive: 94; JulesBoilly/Société MontyonetFranklin: 100;
Lifemagazine: 55 (внизу); Адольф Нейман: 61; Архив RBA: 23,
25 (вверху слева; вверху справа), 55 (вверху справа), 87 (ввер-
ху справа), 104, 123 (вверху справа), 144; Архив семьи Томаса
Шиллинга: 55 (вверху слева), 123 (внизу справа), 149 (вверху
слева); Бальтасар Монкорне/ Нью-Йоркская публичная
библиотека: 146; Венский университет: 125; Герман Линде/
Архив семьи Томаса Шиллинга: 149 (вверху справа); Готтлиб
Бирман/ Гёттингенский университет: 21; Готфрид Кнеллер/
Национальная портретная галерея: 123 (вверху слева);
Иоганн Рудольф Хубер/ Базельский университет: 126; Иоганн
Фридрих Венцель/Прусская академия наук: 87 (вверху
слева); Лувенский католический университет: 76; Макс Конер/
Библиотека Берлинского университета имени Гумбольдта: 123
(внизу слева); Рафаэль/Станцы Рафаэля, Музей Ватикана: 68;
Рудольф Хоффман/Бернгард Петри: 112; Франс Халс/ Лувр,
Париж: 56; Фридрих Беземан: 25 (внизу); Якоб Эммануэль
Хандман/ Базельский художественный музей: 31.

Все права защищены.

Полное или частичное воспроизведение
без разрешения издателя запрещено.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1. Риман и топология	17
ГЛАВА 2. Форма Вселенной	47
ГЛАВА 3. Интеграл Римана	81
ГЛАВА 4. Риман и физика	109
ГЛАВА 5. Гипотеза Римана	131
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	153
УКАЗАТЕЛЬ	155

Введение

Великий математик и физик Бернхард Риман родился в Германии в 1826 году, хотя ради исторической точности правильнее было бы сказать, что его родиной является Ганновер — независимое королевство, которое почти полвека спустя войдет в состав Германской империи. В те времена территории современной Германии переживали период политических потрясений. В 1806 году армия Наполеона завоевала и разрушила Священную Римскую империю — тысячелетнюю конфедерацию суверенных государств, восходящую к правлению Карла Великого (ок. 742–814). После отречения Наполеона от престола в 1814 году разделенные политически, но имеющие одни и те же историю, культуру и язык страны оказались перед необходимостью объединения — хотя общего мнения о его масштабах и структуре власти не было. Спор был долгим, бурным, и лишь в 1871 году, после двух войн, спровоцированных королевством Пруссия, объединение состоялось.

Отец Римана сражался против наполеоновской армии, а по окончании войны, в 1815 году, женился и обосновался в небольшой ганноверской деревне Брезеленц. Французская оккупация нанесла большой урон королевству, и оно пребывало в сложном экономическом положении. Эти обстоятельства повлияли на семью Риманов, которая всегда терпела лишения. Именно поэтому детство Бернхарда и его пяти братьев и сестер

прошло в условиях недоедания и отсутствия должного медицинского ухода, хотя и было исполнено любви, как признавал сам математик. Все биографы единодушны: в полуголодном детстве и заключается наиболее вероятная причина ранней смерти Бернхарда (ему было всего 39), равно как и того, что никто из его братьев и сестер не прожил дольше этого возраста.

Научная карьера Римана продлилась около десяти лет. В 1849 году в Гёттингенском университете он приступил к написанию докторской диссертации под руководством Гаусса, а в конце 1860-х годов увидели свет его последние статьи. Но за столь короткий период Риману удалось оставить значительный след в четырех областях математики — топологии, дифференциальной геометрии, анализе (действительной и комплексной переменных) и арифметике. Большой и очень важный вклад внес он и в область физики, где его работы заложили основы теории относительности и современной космологии; не будет преувеличением сказать, что сегодняшнее понятие пространства-времени берет свое начало в ранних идеях Римана.

На первый взгляд кажется, что работы этого ученого между собой не связаны, поскольку некоторые из них как будто даже относятся к различным разделам математики, а другие и вовсе углубляются в физику. Но это впечатление ложное, поскольку ни наука в целом, ни математика в частности не разделены на изолированные области. Топология, дифференциальная геометрия, анализ и арифметика имеют тесные связи. Насколько родственны математика и физика, биология и химия и другие естественные науки, настолько же эти области знания взаимонакладываются и подпитывают одна другую. Для Римана границы между математикой и физикой практически не существовало.

При этом его научные работы далеко не разрозненны: они отражают различные аспекты того, что условно называется «исследовательской программой Римана», конечной целью которой было понимание «устройства Вселенной». Чтобы рассмотреть эту взаимосвязь, мы обратимся к самым важным работам ученого.

Подобно тому, как глобальная цель руководила мыслью Римана, красной линией сквозь все его статьи проходит понятие *функции*. Для Римана функция — это прежде всего «деформация», которая применяется к поверхности или кривой. Например, если взять сферическую поверхность и деформировать ее до кубической, можно сказать, что к сферической поверхности была применена функция. Если же взять поверхность в форме идеально круглого бублика (в математике эта фигура называется «тор») и растягивать ее, пока внешняя окружность не примет форму эллипса, к ней также будет применена функция. Сходным образом можно деформировать сферическую поверхность, придавив ее и превратив в круг, или скручивать треугольник, пока он не станет похож на винтовую лестницу. Количество возможных деформаций бесконечно.

В докторской диссертации 1851 года, настоящем шедевре математической мысли, Риман анализирует функции, то есть деформации, применимые к любой евклидовой плоскости, которую можно назвать *комплексной*. То есть ранее упомянутый «анализ комплексной переменной» — это изучение функций данного типа.

Но одна из сложностей в этой области математики заключается в том, что наглядно представить деформацию, которая причудливым образом применяется к бесконечной поверхности, очень сложно. Докторская диссертация Римана представляет собой «инструмент», огромное преимущество которого состоит в «визуализации» многих характеристик функций комплексной переменной и, следовательно, в облегчении их сравнения и классификации. Математик стремился связать с каждой функцией поверхность, известную сегодня как *риманова поверхность* функции. Также в диссертации изложена идея, что при изучении поверхностей, соответствующих различным функциям, достаточно ограничиться анализом тех свойств, которые сохраняются, когда поверхность деформируется, как резиновая, если не делать разрезов и не соединять отделенные друг от друга части (технически это *взаимно непрерывные деформации*).

В середине XIX века как область математики топология только зарождалась, она подавала надежды, но была лишена связного *корпуса* успехов. Однако после опубликования диссертации Римана топология перешла именно в сферу изучения свойств, которые сохраняются (они инвариантны) после применения взаимно непрерывных деформаций. И Риман был первым, кто представил топологию как изучение основных свойств функций и связанных с ними поверхностей.

Анализ комплексной переменной и топология — это разные области математики, однако Риман свел топологию к анализу и направил первую на более глубокое изучение последнего:

анализ комплексной переменной $\leftrightarrow$ топология.

В 1854 году немецкий математик написал очередной шедевр, еще одну очень важную работу (она была опубликована лишь в 1868 году), в которой ввел основные понятия дифференциальной геометрии. Идею этой работы можно сформулировать в виде вопроса: откуда мы знаем, что Земля круглая, а не плоская? Если вдуматься, то большинство экспериментов, позволивших утверждать сферичность Земли, были связаны либо с наблюдениями «отдаления от поверхности» (например, когда корпус отдаляющегося корабля исчезает из поля нашего зрения раньше, чем мачта, или когда во время затмения тень Земли видна на Луне), либо с прохождением большого расстояния по ее поверхности (кругосветное путешествие). Уточненный вопрос будет звучать так: можно ли убедиться в сферичности Земли с помощью «локальных» наблюдений, не предполагающих, чтобы наблюдатель отдалялся от точки наблюдения, и не требующих «отделения» от поверхности планеты? Иначе говоря, будь мы двухмерными существами, ограниченными поверхностью Земли и даже не осознающими понятие «третье измерение», были бы мы способны сделать вывод, что Земля круглая?

Риман наделяет смыслом этот вопрос, привнося новое определение в первую очередь для понятия *измерение*. Почему

мы, например, говорим, что внешняя сторона сферы, или тора, или цилиндра имеет *два* измерения? Прежде всего потому, что каждое положение на плоскости определено двумя координатами (как широта и долгота на карте). Для Римана «математический объект» (точнее, *дифференциальное многообразие*) имеет два измерения, если можно покрыть его маленькими областями плоскости, которые первоначально должны быть деформированы, чтобы приспособиться к изучаемому объекту. Эти области называются *картами*, потому что, как и географические карты, они позволяют обозначить положение любой точки поверхности.

В работе 1854 года Риман дал утвердительный ответ на ранее поставленный вопрос: можно определить кривизну поверхности, действуя локально, «изнутри», не осуществляя наблюдения с внешней стороны и не совершая долгие путешествия. Следует отметить, что деформации, которые применяются к картам, относятся к тому же типу, что и участвующие в определении топологии. И если существует связь между анализом комплексной переменной и топологией, то она также наблюдается и между анализом и дифференциальным многообразием — основным объектом изучения дифференциальной геометрии:

анализ комплексной переменной ↔ топология ↔
↔ дифференциальная геометрия.

Но самое экстраординарное в этой работе то, что Риман представил в ней нашу Вселенную как дифференциальное многообразие из трех измерений: шар можно покрыть, например, деформированными круглыми картами, а Вселенную можно заполнить трехмерными шарами (которые в этом случае выполняли бы роль карт). Тогда обретает смысл вопрос: мы живем в «плоской» или в искривленной Вселенной («плоский» здесь — только антоним слова «искривленный»)? Интересно отметить, что эта проблема не была для Римана чисто теоретической, поскольку текстура, кривизна и форма Вселенной напрямую связаны с законами физики. Свет — утверж-

дал Риман — необязательно распространяется по прямой, он «путешествует» по *геодезическим линиям* пространства, то есть по самым коротким путям, соединяющим две точки. Эти геодезические прямые (понятие, введенное Риманом) — действительно прямые, если Вселенная плоская, но если Вселенная искривленная, они обретают другие формы. Данная концепция ставит под сомнение одну из центральных идей физики Ньютона, поскольку Риман понимал, что пространство — не просто пассивная сцена, на которой происходят физические явления, а также верно оценивал значимость геометрии Вселенной для объяснения этих явлений. Так что идеи Римана составляют одну из основ общей теории относительности и современной космологии.

И вот от анализа комплексной переменной мы переходим к римановым поверхностям и топологии, а от последней — к дифференциальной геометрии и проблеме кривизны Вселенной, после чего обращаемся к проблеме основополагающих законов физики:

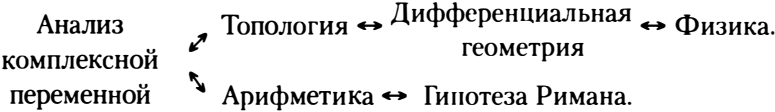
анализ комплексной переменной ↔ топология ↔
↔ дифференциальная геометрия ↔ физика.

Арифметика, то есть изучение натуральных чисел (0, 1, 2, 3, ...), их суммы, произведения и всех связанных с ними понятий и свойств, уже упоминалась выше. Она изучает свойства, определяющие делимость, квадратные числа и особенно простые числа. Кажется, что эта область математики очень далека от тем, только что затронутых нами, но в XVIII веке великий швейцарский математик Леонард Эйлер вывел следующее равенство:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \cdot \dots,$$

где $s > 1$ и произведение справа охватывает все простые числа.

Риман взял идею Эйлера и развил ее, добавив, что выражение слева может быть рассмотрено как функция комплексной переменной, поведение которой дает много информации о распределении простых чисел. В своей последней работе (1859) Риман выдвинул гипотезу относительно этой функции, известную сегодня как *гипотеза Римана*; это самая важная нерешенная проблема в этой области математики (мы рассмотрим ее в главе 5). Таким образом, перед нами следующие связи:



Следует упомянуть также и другую характеристику работ Римана. Ученый не ограничивается решением физических или математических проблем, оперируя уже существующими понятиями: он постоянно создает новые «инструменты», вводит новые понятия и таким образом расширяет круг математических методов.

Как сказал Карл Фридрих Гаусс, король математиков и один из его наставников, «Риман убедительно доказывает, что [...] обладает живым, созидательным, поистине математическим умом, а также похвальной и плодотворной оригинальностью».

Учитывая ограниченный объем этой книги, мы не сможем дать читателю полное представление о мысли столь глубокого человека, каким был Риман. Но стоит помнить, что для всех, кто воспринял его идеи, кто пытается понять, как устроена Вселенная, исследования и работы Римана по-прежнему актуальны.

- 1826** 17 сентября в Брезеленце (Германия) в семье лютеранского пастора на свет появляется Георг Фридрих Бернхард Риман. Мальчик с детства демонстрирует большие способности к математике. Вскоре Риманы перебираются в Квикборн, что неподалеку от Гамбурга.
- 1840** Поступает в Ганноверский лицей, а двумя годами позже — в гимназию в Люнебурге, где открывает для себя высшую математику.
- 1846** Поступает в Гёттингенский университет с намерением изучать философию и теологию, однако стоило ему попасть на лекцию Гаусса — и математическое призвание победило.
- 1847** Два года проводит в Берлинском университете, где знакомится с Дирихле.
- 1849** Возвращается в Гёттинген, где начинает работу над докторской диссертацией под руководством Гаусса.
- 1851** Завершает работу над докторской диссертацией — это настоящий шедевр математической мысли. В ней Риман определяет пространства, носящие сегодня его имя, и приводит топологию к современному виду.
- 1854** Защищает диссертацию на степень хабилированного доктора, в ней он вводит основные понятия дифференциальной геометрии (одной из математических основ теории относительности). Заканчивает исследование, в результате которого выводит то, что ныне известно как «интеграл Римана». Эти две работы опубликованы в 1868 году.
- 1857** Публикует *«Теорию абелевых функций»*, получившую признание среди математиков Европы.
- 1859** Риман возглавляет кафедру математики в Гёттингене, которой до него последовательно заведовали Гаусс и Дирихле. Избирается членом Берлинской академии наук и Лондонского королевского общества.
- 1862** В июне женится на Эльзе Кох. Месяц спустя заболевает плевритом, который через некоторое время переходит в туберкулез. В декабре отправляется в Италию, надеясь поправить здоровье.
- 1863** Возвращается в Гёттинген, но его состояние вновь ухудшается. Супруги снова уезжают в Италию, где на свет появляется их дочь Ида.
- 1865** В октябре в последний раз возвращается в Гёттинген.
- 1866** Умирает 20 июля в Италии, в городе Селаска.

Риман и топология

Детство Бернхарда Римана прошло в бедности, но было счастливым. Родители и учителя сделали все возможное, чтобы развить его математический талант, который он проявил в очень раннем возрасте. В университете его наставником и руководителем его докторской диссертации стал сам Гаусс. В этой работе

Риман ввел понятие, сегодня являющееся основополагающим в анализе комплексной переменной, — так называемые «римановы поверхности».

Георг Фридрих Бернхард Риман родился 17 сентября 1826 года в Брезеленце, маленькой деревне в королевстве Ганновер (Германия). Его отец, Фридрих Бернхард Риман, был лютеранским пастором. Он сражался с войсками Наполеона Бонапарта с 1806 по 1815 год, когда французская армия захватила эти территории, а по окончании войны женился на Шарлотте Эбелль, дочери простого адвоката. Чета обосновалась в Брезеленце, а через некоторое время переехала в Квикборн. У Риманов было шесть детей: два сына и четыре дочери; Бернхард был вторым ребенком и старшим из сыновей.

Риман вспоминал свое детство как очень счастливый период и всегда был близок с родителями, братьями и сестрами, которых навещал всякий раз, как только представлялась возможность. Однако жизнь в Брезеленце и Квикборне не была легкой: доходы семьи оставались более чем скромными, так что Риманы терпели множество лишений. Бернхард обладал очень хрупким здоровьем, и его биографы единодушны: основной причиной этого было недоедание в раннем детстве.

Риман и его братья и сестры получили начальное образование дома: отец научил их читать и писать, а также арифметике и истории. Но вскоре Бернхард стал проявлять способности к математике. Он не только прекрасно справлялся со всеми арифметическими проблемами, которые задавал ему отец,

но и сам придумывал задачи, каждый раз все более изощренные. По этой причине Риман-старший нанял для десятилетнего Бернхарда частного преподавателя, чтобы тот обучал мальчика геометрии и арифметике, что, конечно же, не могло не сказаться на бюджете семьи.

Его [Римана] неспособность осознать величие своего таланта была так же характерна для него, как и его почти патологическая скромность.

Эрик Темпл Белл, «Творцы математики»

В 1840 году, едва ему исполнилось 14, Бернхард перебрался к бабушке в Ганновер и поступил сразу на третий курс местного лицея. Но в 1842 году бабушка скончалась, и среднее образование Риману пришлось заканчивать в гимназии Йоханнеум в Люнебурге. Там он жил в доме одного из преподавателей, а поскольку Люнебург располагался неподалеку от Квикборна, мальчик часто ездил домой, что заметно радовало его, поскольку в Ганновере он тосковал по родителям, братьям и сестрам. Риман был очень привязан к семье, отличался застенчивостью и любил уединение, ему было сложно заводить новых друзей, ему также с трудом давались публичные выступления — даже годы спустя, когда он стал преподавателем.

ОТКРЫТИЕ МАТЕМАТИКИ

Именно в Люнебурге благодаря директору гимназии Йоханнеум, профессору Шмальфусу, Бернхард познакомился с высшей математикой. Шмальфус быстро отметил большой талант Римана и открыл ему доступ к своей библиотеке. Первой книгой, которую выбрал Риман, был «*Опыт теории чисел*» Адриена-Мари Лежандра (1752–1833). Этот 800-страничный фолиант Бернхард прочитал за каких-то шесть дней. Тогда же он по-

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС (1777–1855)

Уроженец Брауншвейга (Германия) Гаусс единодушно признан одним из величайших математиков всех времен наряду с Архимедом и Ньютоном, и это признание он получил при жизни. Свои незаурядные способности он проявил еще в детстве. Когда ему было девять лет, школьный учитель по имени Бюттнер предложил ученикам вычислить сумму всех чисел от 1 до 100. Правильный ответ Гаусс нашел за несколько секунд в результате следующей хитрости: он записал в уме искомую сумму дважды — сначала в возрастающем порядке, а затем в убывающем — и сложил записанные числа в столбик.



$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + \dots + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + \dots + & 101 & + & 101 \end{array}$$

В последнем ряду появляется число 101, суммированное 100 раз, то есть результат «удвоенной» суммы — 10 100. Следовательно, результат сложения каждого числа один раз — 5050.

В возрасте 17 лет Гаусс сделал одно из своих самых известных открытий, связанных с правильными многоугольниками. Вопрос, мучивший геометров со времен Античности, заключался в следующем: какие правильные многоугольники можно построить с помощью линейки без делений и циркуля? С III века до н.э. с использованием этих инструментов строили правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 и 20 сторонами, но такой способ не был справедлив для промежуточных значений: 7, 9, 11, 13, 14, 17 и 19. Гаусс доказал, что из последнего ряда многоугольников с помощью линейки и циркуля можно построить многоугольник только с 17 сторонами, он также объяснил, как это сделать. Это было первое достижение в области проблем с линейкой и циркулем за более чем 2000 лет. Гаусс был так горд этим открытием, что спустя годы попросил, чтобы на его могильной плите выгравировали правильный 17-угольник, вписанный в окружность. Ученый также внес существенный вклад в анализ, арифметику, классическую геометрию, дифференциальную геометрию, статистику, математическую физику и астрономию.

знакомился с классическими текстами Архимеда и Аполлония Пергского.

В 1846 году, в возрасте 19 лет, Риман с отличием окончил гимназию и поступил в Гёттингенский университет. По совету отца он намеревался изучать философию и теологию, чтобы стать затем лютеранским пастором. Но именно здесь преподавал Карл Фридрих Гаусс, *король математиков*, как его прозвали. И попав на лекции Гаусса, Риман уже не мог противиться своему призванию. Спустя некоторое время Бернхард написал отцу, прося разрешения оставить философию и теологию и посвятить себя математике, и Риман-старший без колебаний позволил ему это.

Риман был выдающимся студентом, но не задержался в Гёттингене и в 1847 году отправился в Берлинский университет, чтобы пополнить знания в тех областях, в которых его альма-матер не располагала специалистами высокого уровня. В Берлине среди прочих его наставником стал Густав Лежён Дирихле, также выдающийся математик, одна из главных фигур в дифференциальном исчислении. Как и Гаусс, Дирихле значительно повлиял на развитие математического гения Римана.

В 1849 году Бернхард вернулся в Гёттинген и приступил к написанию докторской диссертации под руководством Гаусса. Сам факт, что Гаусс, еще при жизни признанный величайшим математиком своего времени, согласился руководить докторской диссертацией Римана, говорит о том, как высоко ценил тот его способности. Работа, озаглавленная *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer verändertichen complexen Grösse* («Основания теории функций комплексной переменной»), была представлена экзаменационной комиссии в декабре 1851 года и единодушно принята. В характеристике, написанной Гауссом, говорилось:

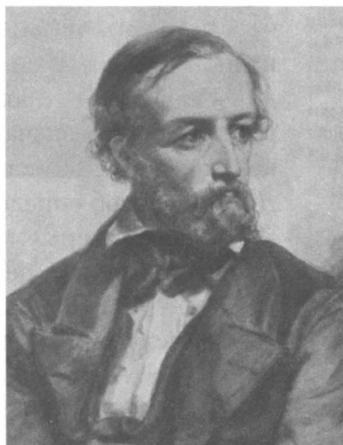
«В диссертации, представленной господином Риманом, убедительно доказывается, что он провел тщательные и скрупулезные исследования заявленных тем, что он обладает живым, созида-

тельным, поистине математическим умом, а также похвальной и плодотворной оригинальностью».

В этой диссертации Риман заложил основы современной топологии. Давайте разберемся, как он это сделал.

ПЕТЕР ГУСТАВ ЛЕЖЁН ДИРИХЛЕ (1805–1859)

Дирихле родился в Дюрене (в ту пору относившемся к территории Франции, ныне — Германия) и с детства выказывал большой интерес к математике. Эту склонность поощряли и родители, и учителя. Начальное образование он получил в Бонне, затем в Кёльне, где в числе его учителей был знаменитый Георг Симон Ом. В 16 лет Дирихле нацелился на поступление в университет, но в ту пору уровень немецких учебных заведений оставался невысоким, поэтому он предпочел перебраться в Париж. Там он познакомился с Лапласом, Лежандром и Фурье. Следует отметить, что вскоре в Германии провели ряд образовательных реформ, и в результате немецкие университеты оказались лучшими образовательными учреждениями того времени, и очень важную роль в этом процессе сыграл Дирихле. Математик вернулся в Германию в 1825 году и три года спустя стал преподавателем в Берлинском университете, а в 1835 году принял кафедру Гаусса в Гёттингене. Как математик он внес ощутимый вклад в развитие анализа и арифметики. Так, ему принадлежит теорема: если a и b — целые числа, наибольший общий делитель которых равен 1, то последовательность $a + b, 2a + b, 3a + b$ содержит бесконечное количество простых чисел.



МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В заголовок докторской диссертации Римана вынесено понятие «комплексная переменная», поэтому сперва разберемся, что такое комплексные числа. Но прежде рассмотрим различные множества, в которые группируются числа, каждое из которых содержит предыдущее. Первое из этих множеств образовано натуральными числами, то есть числами, которые получаются на основе 0 прибавлением каждый раз 1 (натуральные числа — это 0, 1, 2, 3, 4, ...). Если добавить отрицательные числа, мы получим множество целых чисел, то есть числа ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... (многоточие указывает на то, что множество бесконечно распространяется как вправо, так и влево).

Следующее множество — это множество рациональных чисел, то есть чисел, десятичная запись которых является конечной, как в случае 0,24 или 3,5, или бесконечной, но периодической, как это происходит с 1,3333 или с 0,1234343434 («периодическая» означает, что существует блок цифр, который повторяется снова и снова; во втором примере этот блок — 34). Другой способ определить рациональные числа — сказать, что это числа, которые могут быть выражены в виде дроби, образованной двумя целыми числами: $0,24 = 6/25$; $-3,5 = -7/2$; $1,3333... = 4/3$; $0,1234343434... = 611/4950...$ Целые числа — это частные случаи рациональных чисел, поскольку их также можно записать в виде дроби: например, $5 = 5/1$.

Множество, следующее за множеством рациональных чисел, которое тоже включает их, — это множество действительных чисел; оно получается добавлением иррациональных чисел, то есть тех, десятичная запись которых является бесконечной и непериодической. Среди иррациональных чисел — например, $\pi = 3,14159265...$; $\sqrt{2} = 1,414213562...$ или $-\sqrt{3} = -1,7320508...$

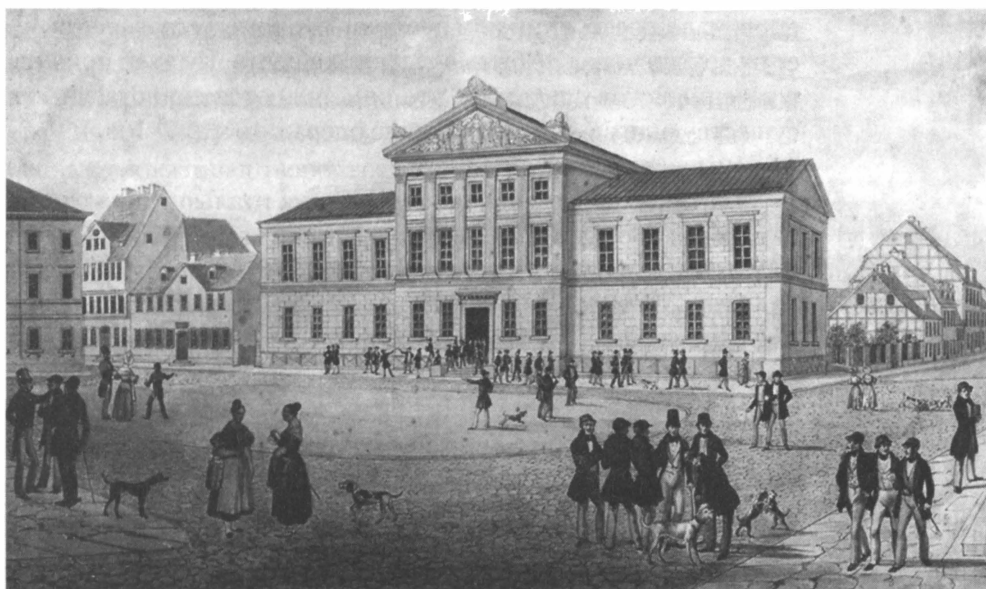
Одна из характеристик действительных чисел состоит в том, что их можно представить на прямой, называемой числовой, или действительной прямой. Каждой точке прямой со-



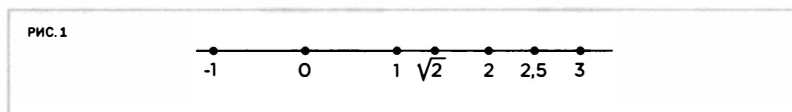
ВВЕРХУ СЛЕВА:
Портрет
молодого
Римана. Его
диссертация
1851 года
заложила
основы
современной
топологии.

ВВЕРХУ СПРАВА:
Иоганн Бенедикт
Листинг. Как
и Риман, ученик
Гаусса, ввел
термин
«топология».

ВНИЗУ:
Здание
Гёттингенского
университета,
возведено
в 1837 году
к 100-летию
учреждения.
Иллюстрация
Фридриха
Беземана.



ответствует число, и наоборот, каждому числу соответствует точка, как показано на рисунке 1.



Другая их характеристика состоит в том, что при возведении в квадрат действительного числа (то есть при умножении его само на себя) результат никогда не является отрицательным числом. Например, $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, в то время как $(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = 2$ — опять же положительное число. Одним из следствий из этого факта является то, что среди действительных чисел невозможно вычислить квадратный корень из отрицательного числа; так, $\sqrt{-1}$ или $\sqrt{-2}$ оказываются в данном контексте «запрещенными» операциями, поскольку не существует никакого действительного числа, которое при возведении в квадрат равнялось бы -1 или -2 .

Но ни одно применение математики в повседневной жизни, как, например, в случае с измерением длин, площадей, объемов, масс, расстояний или временных промежутков, не требует от других чисел не быть действительными. По этой причине в течение веков считалось, что они являются единственными существующими числами и такие операции, как $\sqrt{-1}$ или $\sqrt{-2}$, лишены всякого смысла.

Однако в первой половине XVI века итальянские математики Никколо Фонтана, более известный как Тарталья (1499–1557), и Джироламо Кардано (1501–1576), разработав метод для решения уравнений типа $x^3 + x - 10 = 0$ (то есть уравнений, в которых неизвестное возведено в куб), столкнулись с тем, что иногда этот метод в процессе вычисления обязывал их получать квадратные корни из отрицательных чисел, хотя конечный результат вычисления был действительным числом. Например, этот метод в какой-то момент мог потребовать от них вычислить $1 + \sqrt{-2}$, затем $1 - \sqrt{-2}$, чтобы в итоге сложить оба результата и таким образом получить $(1 + \sqrt{-2}) + (1 - \sqrt{-2}) = 2$. Как Тарталья, так и Кардано считали, что эти квадратные корни

из отрицательных чисел представляют собой числа, не существующие в реальности, поэтому они назвали их «мнимыми» и допускали только в качестве «полезных функций», которые позволяли им решать кубические уравнения.

Первым, кто открыто работал с этими «мнимыми» числами, в середине XVII века был Леонард Эйлер. И, возможно, чтобы сделать запись $\sqrt{-1}$ менее шокирующей, для обозначения этого математического выражения он ввел букву i (заметьте, что $i^2 = -1$). Таким образом, вместо $1 + \sqrt{-1}$ Эйлер писал $1 + i$, а вместо $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ (действительно, $(\sqrt{2}i)^2 = (\sqrt{2})^2(i)^2 = 2(-1) = -2$, то есть $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$).

Также именно Эйлер окрестил «комплексными числами» выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа. Выходит, что комплексными числами являются, например,

$$-3 + 8i, 3 - \frac{\sqrt{3}}{5}i, \text{ а также } 8 + 0i.$$

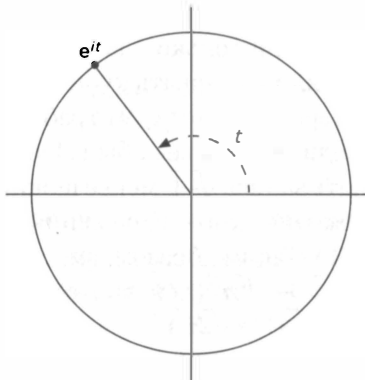
Заметьте, что $8 + 0i$ — это на самом деле 8. И как целые числа в виде частных случаев включают в себя натуральные числа, рациональные содержат целые, а действительные содержат рациональные, точно так же в качестве частного случая комплексные числа содержат действительные (см. рисунок 2).

Эйлер оперировал комплексными числами: он установил, что $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3i + 3i \cdot 2 - 3i \cdot 3i = 4 - 6i + 6i + 9 = 13$. Он даже доказывал теоремы, связанные с комплексными чис-



ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Эйлер доказал, что если t — действительное число, то e^{it} — всегда комплексное число, расположенное на окружности с центром в 0 и радиусом 1, где t — угол, измеряемый в радианах, который это число образует с осью положительных действительных чисел (см. рисунок). Когда угол равен 180° , то есть когда $t = \pi$, рассматриваемое комплексное число равно -1 . Тогда получается, что $e^{i\pi} = -1$, откуда выводится знаменитая формула $e^{i\pi} + 1 = 0$.



лами. Например, именно в этом контексте в 1748 году он привел свою знаменитую формулу $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Однако Эйлер так и не дал четкого объяснения, что представляют собой эти «новые» числа, и поэтому вопрос, действительно ли они существуют, оставался спорным. Существование комплексных чисел было окончательно принято научным сообществом в 1799 году, когда Гаусс опубликовал докторскую диссертацию.

Как любое положение на карте может быть указано с помощью широты и долготы, так и каждая точка на плоскости определяется на основе двух координат — абсциссы и ординаты (см. рисунок 3). Идея Гаусса состояла в том, чтобы установить: каждое комплексное число на самом деле представляет собой точку на плоскости, то есть комплексное число $a + bi$ представляет собой точку с координатами (a, b) . Именно это определение в итоге дало комплексным числам «прописку» среди существующих чисел.

Обратите внимание: то, что действительные числа включены в комплексные, графически показано так, что *действительная прямая* содержится в *комплексной плоскости* (см. рисунок 4).

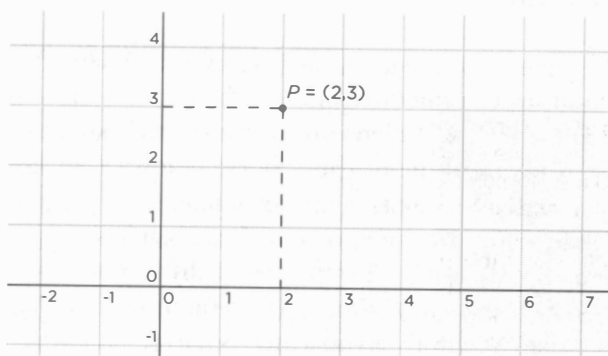


РИС. 3

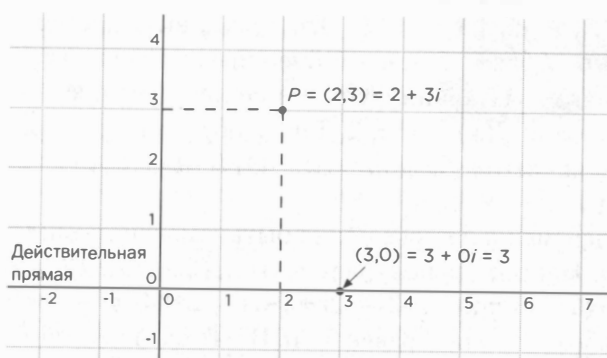


РИС. 4

Важно, что когда Риман приступил к докторской диссертации под руководством Гаусса, данное определение комплексных чисел и точек на плоскости уже закрепилось в математической науке, и Риман мог им свободно пользоваться. Как мы вскоре убедимся, Риман не только воспользовался этой идеей, но и перевел ее на более высокий уровень.

ИДЕЯ ФУНКЦИИ

Как и в случае с комплексными числами, первым, кто заговорил о функциях в относительно современном значении, был Леонард Эйлер. Для Эйлера функция — это правило, которое назначает каждому числу (действительному или комплексному) другое число (также действительное или комплексное), и правило это обязательно должно быть выражено формулой. Например, формула $x^2 + 2$ определяет функцию, которую мы можем обозначить как f . Как ведет себя эта формула, будучи правилом назначения? Чтобы вычислить, например, какое число f назначает числу 3, буква x (называемая *переменной функции*) заменяется этим числом 3; и поскольку $3^2 + 2 = 11$, то f числу 3 назначает 11. Это также выражается словами «образ 3 по f равен 11», что Эйлер представлял как $f(3) = 11$. Для общего выражения функции Эйлер писал, как это делается и сегодня, $f(x) = x^2 + 2$. Таким образом, примерами этой функции являются $f(3) = 3^2 + 2 = 11$, $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ или $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 2 = 4$.

Но переменная также может быть заменена комплексными числами. Например, получается, что $f(2 - i) = (2 - i)^2 + 2 = (2 - i)(2 - i) + 2 = 4 - 2i - 2i + (-i)^2 + 2 = 4 - 4i - 1 + 2 = 5 - 4i$; то есть образ $2 - i$ по f равен $5 - 4i$. В математической традиции для переменных, заменяемых комплексными числами, используется буква z , в то время как буква x используется для переменных, заменяемых действительными числами. Таким образом, $f(z) = z^2 + 2$ — это *функция комплексной переменной*, то есть одна из функций, о которых говорится в диссертации Римана.

Дирихле любил уяснять себе теорему на какой-либо наглядной схеме и по возможности избегал длинных выкладок. Его приемы нравились Риману, и Риман ими широко пользовался.

Феликс Клейн, «Лекции о развитии математики в XIX столетии»

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707–1783)

Эйлер родился в Базеле (Швейцария) и в 14 лет поступил в университет с намерением изучать философию и стать протестантским священником, как и отец. В 1723 году он защитил докторскую диссертацию, в которой сравнивал философию Декарта и Ньютона. Иоганн Бернулли, знаменитый математик и преподаватель университета, отметил большой математический талант Эйлера и убедил его отца позволить юноше заниматься этой наукой. Так Эйлер начал изучать математику и окончил образование в 1726 году. Большая часть карьеры Эйлера связана с Петербургской академией наук, где он занимал кафедру физики с перерывом между



1759 и 1766 годом, когда он переехал в Берлинскую академию наук, но затем отказался от должности из-за разногласий с некоторыми коллегами. Эйлер, без сомнения, был важнейшим математиком XVIII века. Это также самый плодовитый в истории науки математик. Его вклад заметен в физике, анализе, теории дифференциальных уравнений, арифметике, геометрии и алгебре, также он стал основоположником топологии, теории графов и аналитической теории чисел. Последние 13 лет своей жизни ученый провел почти незрячим, но недуг не снизил темпа его работы, поскольку Эйлер обладал выдающимися способностями к устному счету, а также фотографической памятью. Даже спустя 50 лет после его смерти Петербургская академия наук продолжала публиковать неизданные работы этого неутомимого ученого.

То есть для Эйлера функция могла быть описана только с помощью формулы. Однако полвека спустя в статье 1829 года, в которой затрагивался вопрос рядов Фурье (мы вернемся к этому в главе 3), Дирихле утверждал, что необходимо расширить класс допустимых правил. Согласно ему, правило назначения чисел может быть выражено *как угодно*, если выполняются два условия: правило должно четко и ясно указывать образ,

который назначается каждому числу; ни одно число не может иметь два или более различных образов. В качестве примера Дирихле предложил функцию — сегодня она известна как *функция Дирихле*, а мы назовем ее $D(x)$, — которая определена не формулой и назначает каждому рациональному числу число 1, а каждому иррациональному числу — число 0. Другими словами, $D(x) = 1$, если x — рациональное число, и $D(x) = 0$, если x — иррациональное число. Таким образом, $D(2) = 1$, $D(-2,3) = 1$, а $D(\sqrt{2}) = 0$. Разрешив любой тип правила, Дирихле расширил диапазон допустимых функций.

Риман, учившийся у Дирихле в Берлине, конечно же, был в курсе этих идей. Разумно было бы предположить, что он размышлял над проблемой, чем именно является функция, поскольку в докторской диссертации ему удалось дать этому понятию (особенно функциям комплексной переменной) геометрическое толкование, причем настолько богатое, что само по себе оно создало современную топологию. Начнем с того, что в своей диссертации Риман написал:

«Когда любому значению z соответствует определенное значение w [...], то любой точке плоскости A соответствует точка плоскости B , любой линии соответствует в целом линия и любой связной порции поверхности — также связная порция поверхности. Следовательно, можно рассматривать эту зависимость величины w от z как представление плоскости A на плоскости B ».

Уточним, что «связный» здесь означает, что поверхность образована единым сектором, а не отдельными секциями.

Чтобы понять идею Римана, возьмем в качестве примера функцию комплексной переменной $f(z) = 2iz$, состоящую в умножении комплексного числа z на комплексное число $2i$. Таким образом, среди прочих возможных значений получается, что $f(1) = 2i$ и $f(i) = 2i \cdot i = -2$. Риман утверждал, что функция комплексной переменной на самом деле описывает *перенос* точек плоскости. Тогда в предыдущем примере тот факт, что $f(1) = 2i$, означает, что функция f *переносит* точку $(1,0)$, которая соответствует комплексному числу

$1 = 1 + 0i$, в положение $(0,2)$, которое соответствует комплексному числу $2i$.

Аналогично, если $f(i) = -2$, то f переносит точку $A = (0,1)$ в положение $B = (-2,0)$. То есть можно доказать, что эта функция f допускает точное геометрическое описание. Как показано в предыдущих примерах, если задумать комплексное число z как точку плоскости и затем рассмотреть отрезок L , который соединяет эту точку с точкой $(0,0)$, геометрическое толкование будет следующим: то, что $f(z) = w$, означает, что w получается удвоением длины отрезка L и затем его поворотом на 90° против часовой стрелки (см. рисунок 5).

Чтобы продолжить пример, вместо изолированных точек рассмотрим целую область плоскости, или, говоря словами Римана, «любую связную порцию поверхности». Назовем R прямоугольник с вершинами в $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ и $(2,1)$. Если применить функцию f ко *всем* точкам, образующим этот прямоугольник (как к точкам периметра, так

и к внутренним), то конечным результатом будет другой прямоугольник R' , стороны которого в два раза больше сторон R и который повернут на 90° относительно него (см. рисунок 6).

Согласно идее Римана, заключенной во фразе «любой связной порции поверхности [соответствует] также связная порция поверхности», функции представляют собой *движения*,

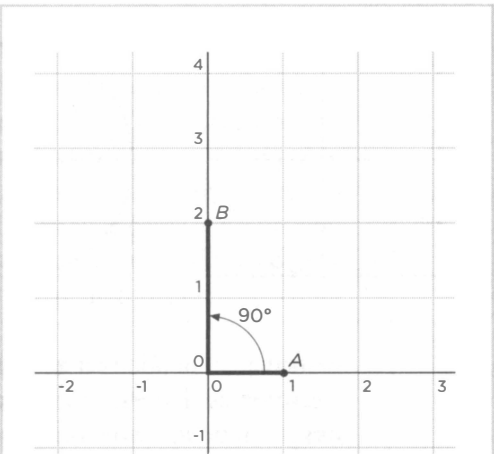


РИС. 5

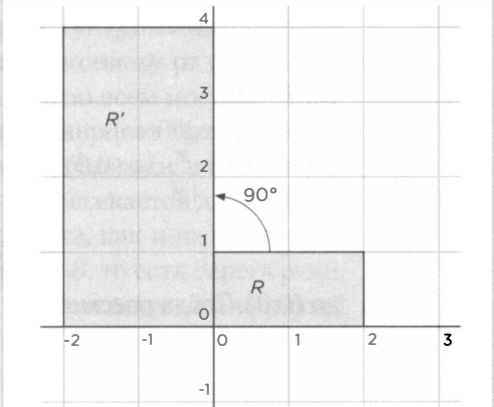
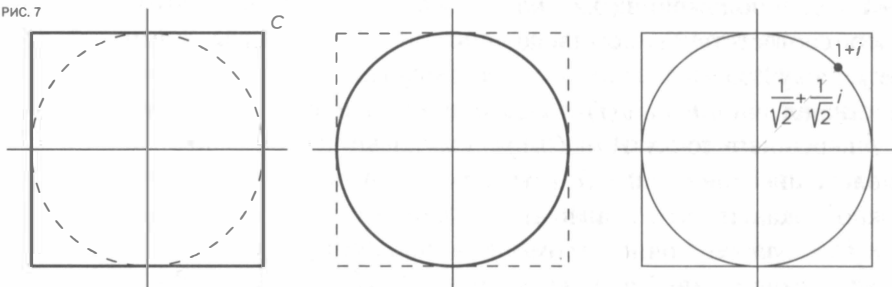


РИС. 6

Рис. 7



которые переносят и деформируют поверхности, как будто они резиновые. Но Риман также сказал, что «любой линии соответствует в целом линия». Это означает, что Риман рассматривал также деформации кривых. Как пример этой ситуации рассмотрим границу квадрата C , которую мы видели ранее (см. левую часть рисунка 7). Если z — комплексное число, называется $|z|$ (и читается «модуль z ») расстояние от точки z до $(0,0)$; если $z = a + bi$, то можно доказать, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Так, например, $|1 + i| = \sqrt{2}$.

С другой стороны, можно доказать, что если $z \neq 0$, то расстояние от $\frac{z}{|z|}$ до $(0,0)$ равно 1. Таково, например, расстояние от

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

до $(0,0)$. Тогда рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z}{|z|},$$

которую можно вычислить для любого $z \neq 0$. Если применить эту функцию к квадрату C на рисунке 7, вершины которого имеют форму $(\pm 1, \pm 1)$, в результате получается окружность с центром в $(0,0)$ и радиусом 1.

Тогда Риман утверждает, что квадрат можно деформировать, как будто он резиновый, пока не получится окружность. Чтобы понять, почему эти идеи переформулировали топологию и привели ее к сегодняшней форме, нужно понять, что изучает эта область математики.

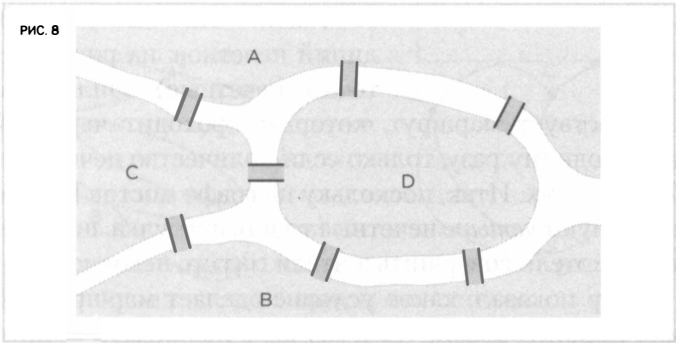
ЧТО ТАКОЕ ТОПОЛОГИЯ

Первым, кто использовал слово «топология», был немецкий математик Иоганн Бенедикт Листинг (1808–1882), как и Риман, ученик Гаусса. Листинг использовал этот термин в работе, опубликованной в 1861 году. Однако топология на самом деле возникла намного раньше, в 1736 году, в статье, в которой Леонард Эйлер решил проблему семи мостов Кёнигсберга. В чем же состояла эта проблема и как ее решение связано с идеями Римана?

Кёнигсберг (бывшую столицу Восточной Пруссии, современный Калининград) пересекает река Преголя. Во времена Эйлера берега реки с двумя островами в ее центре соединяли семь мостов (это схематично показано на рисунке 8, где острова обозначены буквами *C* и *D*).

Как писал Эйлер, жители Кёнигсберга часто задавались вопросом: возможно ли совершить прогулку, в ходе которой каждый мост пересекался бы только по одному разу? То есть требуется вычислить путь прохождения по всем мостам, не повторяя и не пропуская ни одного. На рисунке 9 (см. следующую страницу) показаны две неудачные попытки: в одной пропущен один мост, в другой один мост пересекается дважды.

Итак, в проблеме мостов Кёнигсберга, как и на рисунке 8, появляются четыре области: области *A* и *B*, то есть берега реки, и области *C* и *D*, то есть острова. Единственный значимый



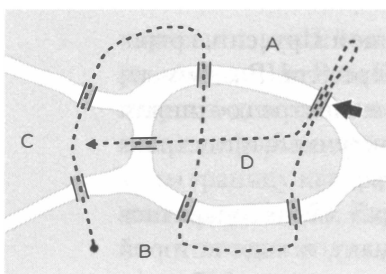
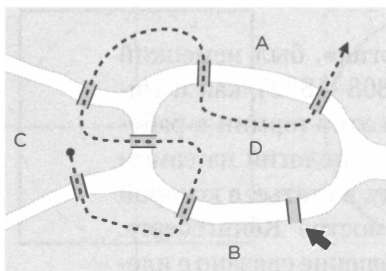


РИС. 9

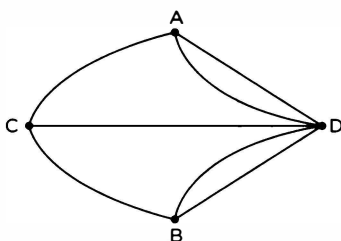


РИС. 10

аспект вопроса: какие области связаны между собой и сколькими мостами? При этом не важна их длина, форма и прочие связанные с ними характеристики. Следовательно, ситуацию на рисунке 8 без потери информации можно свести к рисунку 10.

Перед нами *граф*, то есть рисунок, образованный точками (в этом случае они соответствуют областям A, B, C и D), соединенными линиями (которые обозначают мосты). Возникает вопрос: можно ли провести по этому графу траекторию, которая включала бы в себя каждую линию по одному разу, не повторяя и не пропуская ни одной (не имеет значения, сколько раз затрагивается каждая точка)?

В статье 1736 года Эйлер заметил, что существование или отсутствие искомого маршрута зависит только от количества линий, выходящих из каждой точки (точка является *четной*, если из нее выходит четное число линий, и *нечетной*, если количество выходящих из нее линий нечетное; на рисунке 10 все точки нечетные). Эйлер доказал,

что существует маршрут, который проходит через каждую точку по одному разу, только если количество нечетных точек не больше двух. Итак, поскольку на графе мостов Кёнигсберга присутствуют *четыре* нечетные точки, прогулка, подобная той, которую хотели совершить жители города, невозможна.

Эйлер показал, какое условие делает маршрут возможным, и констатировал, что в случае с проблемой Кёнигсберга

это условие не выполняется. Но можно пойти дальше. Рисунок 11 среди прочих включает в себя граф рисунка 10 (обведенный в прямоугольник). Все они получаются в результате деформации, как будто граф резиновый. Это тот же самый тип деформации, который Риман рассмотрел в контексте своих поверхностей и кривых.

Во всех этих новых графах количество линий, выходящих из каждой точки, всегда одно и то же. Следовательно, не меняется и тот факт, что провести маршрут, который проходил бы через каждую линию по одному разу, невозможно. В диссертации Риман заметил, что существуют некоторые свойства кривых и поверхностей, которые не изменяются, когда их деформируют, как будто они резиновые. Сегодня они известны как *топологические свойства*, или *топологические инварианты*, а название продиктовано тем, что топология — это именно изучение свойств, которые не изменяются при применении к ним этого вида деформаций.

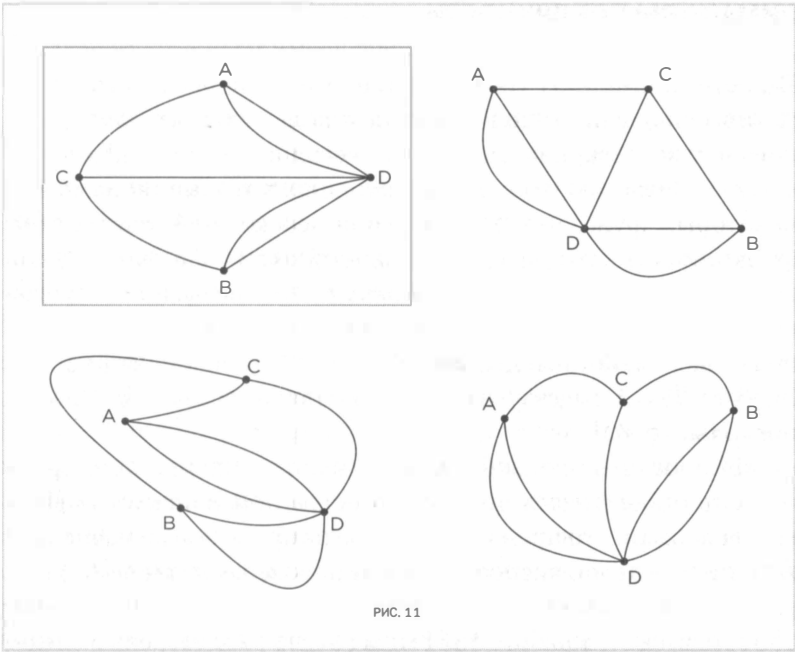
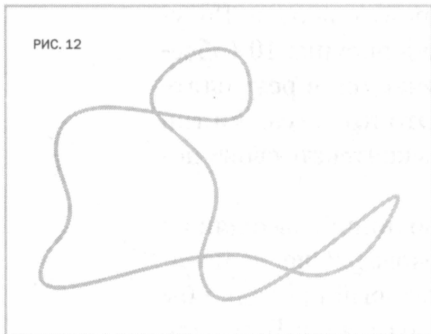


РИС. 12



Эту идею можно выразить и иначе: если поверхность (или кривая) получается из другой деформации такого рода, то обе поверхности (или кривые) имеют одинаковые топологические свойства. Так, на рисунке 7 (страница 34) показано, что края квадрата и окружности имеют одни и те же топологические свойства (они *топологически эквивалентны*). Среди топологических свойств, которыми

обладают обе кривые, содержится тот факт, что они замкнуты и не пересекают сами себя. Кривая на рисунке 12, наоборот, пересекает саму себя, поэтому не является топологически эквивалентной им.

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

В диссертации 1851 года Риман оказался первым, кто систематически изучил топологические инварианты, особенно топологические инварианты того, что сегодня известно как *римановы поверхности*, то есть поверхности, которые он назначил некоторым функциям комплексной переменной. Рассмотрим функцию действительной переменной $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (кубический корень из x). Ее *область определения* — так называется множество всех значений, которыми можно заменить переменную, — образована действительными числами. Мы знаем, что так как $2^3 = 8$, то $\sqrt[3]{8} = 2$, то есть $f(8) = 2$, и точно так же $f(-64) = \sqrt[3]{-64} = -4$, поскольку $(-4)^3 = -64$.

Вопрос: что произойдет, когда мы попытаемся расширить область определения до всей комплексной плоскости? Другими словами, что произойдет, если мы попытаемся вычислить $f(z)$, где z — комплексное число? Например, что такое $f(i)$ или $f(1 - i)$? Эта проблема занимала Римана как в диссертации 1851 года, так и в работе 1854 года (будет рассмотрена в следу-

ющей главе). Она состоит в том, чтобы проанализировать, возможно ли расширить до всей комплексной плоскости область определения функции, которая вначале была задумана только для действительных чисел. Этот вопрос, чрезвычайно важный для анализа комплексной переменной, известен как *проблема аналитического расширения*.

Гаусс предсказал, что топология станет одним из самых влиятельных методов в математике. Так и случилось.

Эрик Темпл Белл, «ТВОРЦЫ МАТЕМАТИКИ»

Когда мы работаем с действительными числами, $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$, кроме того, 2 — это *единственное действительное число*, которое при возведении в куб дает 8. Последнее гарантирует, как этого хотел Дирихле, что каждое действительное число будет иметь только один образ. Проблема, возникающая при переходе к комплексным числам, заключается в том, что в этом случае каждое комплексное число (с единственным исключением для 0) имеет *три* кубических корня. Например, поскольку $(2 + 0i)^3 = 8$, $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = 8$ и $(-1 - \sqrt{3}i)^3 = 8$, то среди комплексных чисел существуют три кубических корня из 8, то есть 2 , $-1 + \sqrt{3}i$ и $-1 - \sqrt{3}i$. Ноль, задуманный как $0 + 0i$, — это единственное комплексное число, которое имеет только один кубический корень (то есть само число 0).

Следовательно, при определении $f(z) = \sqrt[3]{z}$ при комплексном z мы получаем *двойственную* функцию, которая почти всем числам назначает больше одного образа. Риман называл *многообразными* функции, которые представляют этот тип двойственности, и *однообразными* — те, которые, как по определению Дирихле и должно быть, всегда назначают только один образ. Нередко при заданной однообразной функции действительной переменной она трансформируется (как это произошло с кубическим корнем) в многообразную — при расширении ее до комплексной области определения. Риман стремился определить поверхности, которые сегодня носят его имя, чтобы решить этот тип двойственностей. В его диссертации читаем:

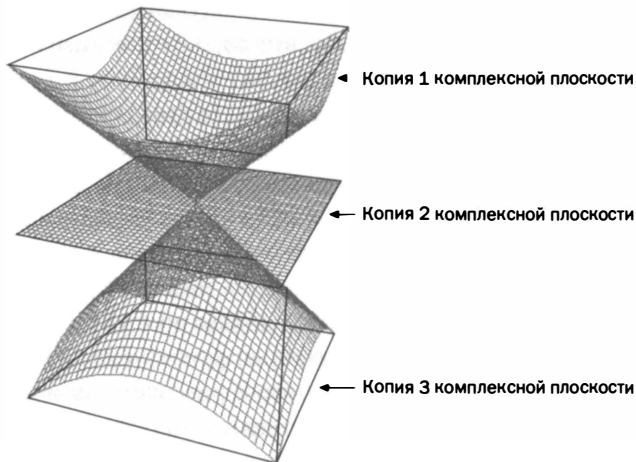
«Многообразная функция допускает в каждой точке поверхности некое разветвление, единственное определенное значение, и она может быть рассмотрена как функция, идеально определенная для этой поверхности».

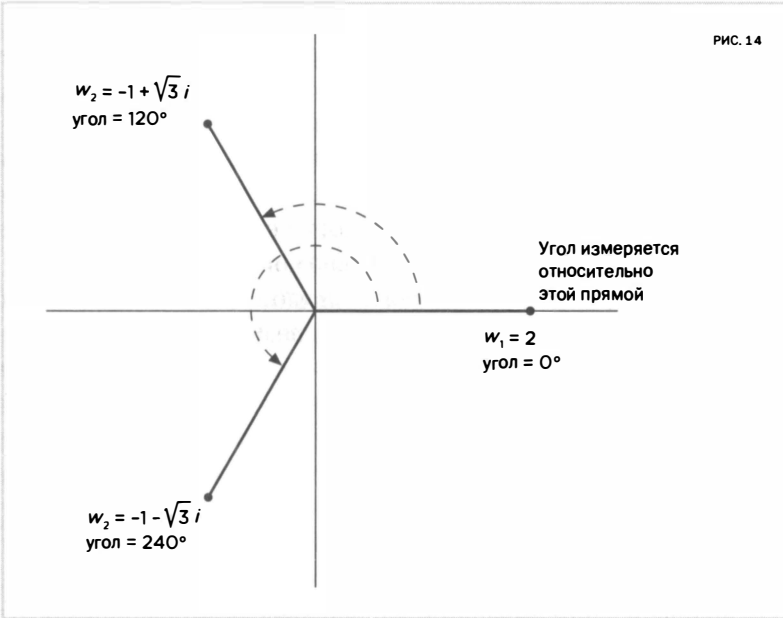
В этом абзаце выражена идея расширения области определения функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ еще дальше комплексной плоскости. Функция вычисляется для точек поверхности, специально определенной таким образом, что каждой из них соответствует только один образ. И поскольку комплексное число $z = 8$ допускает три кубических корня, $w_1 = 2$, $w_2 = -1 + \sqrt{3}i$ и $w_3 = -1 - \sqrt{3}i$, рассматривается поверхность, образованная тремя копиями комплексной плоскости (см. рисунок 13) и являющаяся римановой поверхностью функции кубического корня. Тогда эта функция вычисляется не в комплексных числах, а в точках этой новой «трехчастной» поверхности, так что числу 8 в первой копии назначается число w_1 , числу 8 во второй копии — число w_2 , а числу 8 в третьей копии — число w_3 .

Обобщая, можно сказать, что каждое z , не равное 0, имеет три кубических корня, определяющиеся углом, который они

Риманова
поверхность
функции
кубического
корня
образована
тремя копиями
комплексной
плоскости (две
из которых
деформированы),
соединенными
в начале
координат.

РИС. 13



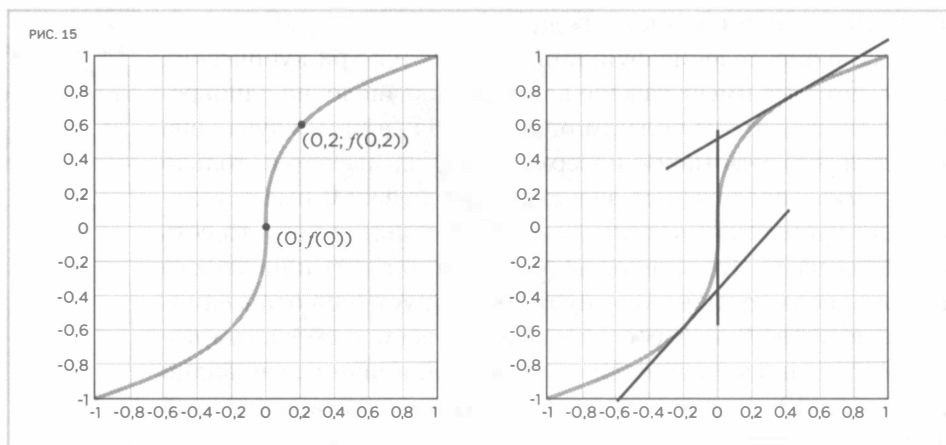


образуют с положительной частью действительной оси; w_1 — корень, имеющий наименьший угол, w_2 — следующий корень, а w_3 — корень с наибольшим углом (см. рисунок 14). Варианту z , который находится в копии 1, назначается корень w_1 , находящемуся в копии 2 назначается корень w_2 , а варианту, который находится в копии 3, — корень w_3 .

Так, в определение функции включаются три кубических корня, которые имеет каждое комплексное число, но одновременно каждой точке области определения (в этом случае она является «трехчастной» поверхностью) назначается только одно четко определенное значение. Поскольку 0 имеет только один кубический корень, нет трех копий для него, то есть несмотря на то что имеются три копии числа 8 или любого другого числа, отличного от нуля, существует, напротив, единственное число 0, которое принадлежит всем трем частям поверхности одновременно. Именно по этой причине, как видно на рисунке 13, все три копии плоскости соприкасаются в этой точке.

Можно возразить, что верхняя и нижняя копии не плоские, а деформированные, но следует помнить, что Риман изучал *топологические* свойства этих поверхностей, а эти свойства, как уже было сказано, не меняются, если поверхности деформируются как резиновые. Итак, Риман связал каждую функцию $f(z)$ комплексной переменной с поверхностью, и важность этого соответствия состоит в том, что многие свойства $f(z)$ отражаются в топологических свойствах связанной с ней поверхности. Таким образом, изучение поверхности позволяет выводить характеристики функции и служит для выявления сходства и различия между функциями через изучение сходства и различия связанных с ними поверхностей.

В случае с кубическим корнем положение числа 0 как «тройной точки» показывает, что здесь функция имеет «аномальное» поведение. Чтобы разобраться, в чем оно состоит, вернемся к функции действительной переменной $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Функция действительной переменной графически может быть представлена с помощью кривой, изображенной на плоскости. В каждой точке этой кривой первая координата — значение x из области определения f , в то время как вторая координата — образ числа x . Левая часть рисунка 15 демонстрирует график функции кубического корня действительной переменной.



В дифференциальном исчислении важно понятие касательной к кривой, которая определяется следующим образом: пусть P — неподвижная точка кривой C , а X — вторая точка кривой. Возьмем прямую, которая проходит через P и X , называемую секущей к C , которая проходит через P и X . Теперь представим, что X приближается к P . Когда X и P точно совпадают, секущая превращается в касательную к кривой C в точке P .

В правой части рисунка 15 мы видим некоторые касательные к кривой. Касательная графически представляет скорость роста функции: если касательная расположена почти вертикально, функция быстро растет в этой точке. В случае с функцией $f(x) = \sqrt[3]{x}$, как видно из рисунка 15, в точке $x = 0$ касательная идеально вертикальна. Это означает, что в этой точке едва лишь на мгновение функция имеет бесконечную скорость роста. Значит, в $x = 0$ функция имеет аномальное поведение, то есть функция *недифференцируема* в этой точке. Эта аномалия распространяется на функцию комплексной переменной: кубический корень комплексной переменной недифференцируем в $z = 0$, и это отражается в особом положении числа 0 на римановой поверхности функции.

Но почему график функции действительной переменной изображается на плоскости? Действительные числа представлены на прямой (см. рисунок 1 на странице 26), которая является одномерным геометрическим объектом. Следовательно, чтобы составить график функции действительной переменной, одно измерение необходимо для представления области определения, а другое — для образов, всего два измерения. Комплексные числа, наоборот, представлены на плоскости, имеющей два измерения. Значит, график функции комплексной переменной следует изобразить в пространстве из *четырех* измерений: два для области определения и два для образов. Но нам не вообразить себе четыре физических измерения, поэтому невозможно распространить идею графика на рисунке 14 на случай функций комплексной переменной и необходимо прибегнуть к альтернативным идеям. Римановы поверхности дают нам именно такой способ графического изображения характеристик функции.

На самом деле риманова поверхность функции кубического корня комплексной переменной немного сложнее, чем показанная на рисунке 13 (страница 40). Более приближенное к реальности изображение представлено на рисунке 16 (см. ниже).

Мы видим несколько линий, вдоль которых поверхность пересекает саму себя. Этот факт вызван тем, что называется *непрерывностью* функции. Вспомним, что различие между корнями w_1 , w_2 и w_3 задано углом, который они образуют с осью положительных действительных чисел (см. рисунок 14 на странице 41). Теперь представим, что комплексное число начинает вращаться от этой оси, увеличивая угол, как стрелка часов, которая вращается в противоположном направлении. Тогда этот угол будет увеличиваться, скажем, до 10° , 20° , 30° , дойдет до 350° , 359° , но после $359^\circ 59' 59''$ вернется в 0° , то есть при завершении оборота происходит мгновенный переход из 360° в 0° . Этот тип резкого перехода называется *разрывностью функции*.

Риманова
поверхность
функции
кубического
корня в более
детальном
изображении.

РИС. 16

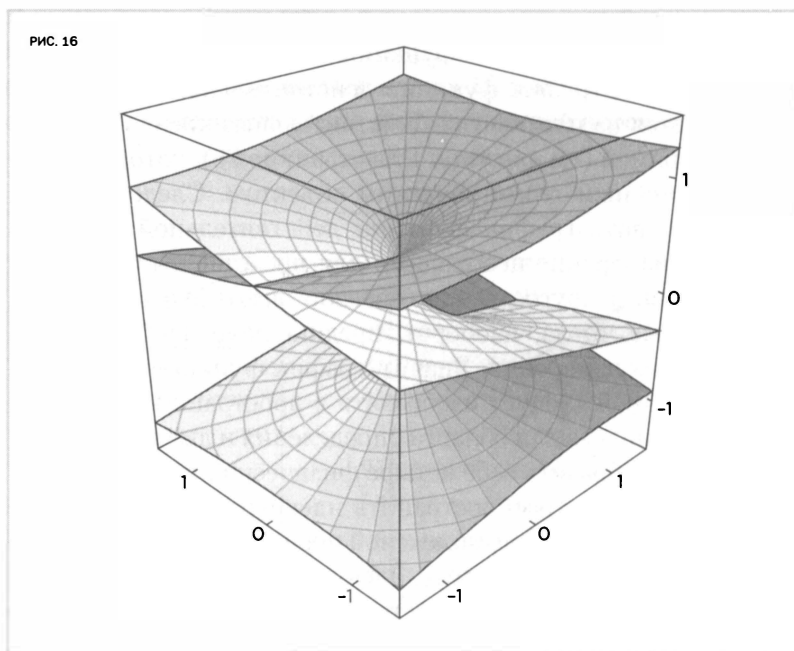
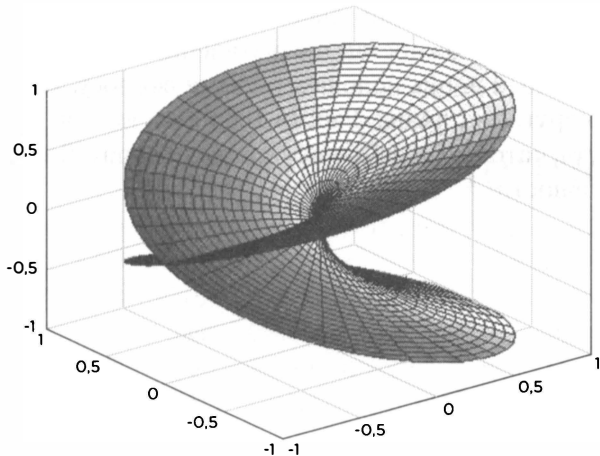


РИС. 17



Детальное изображение, соответствующее римановой поверхности функции квадратного корня.

(мы рассмотрим это понятие в главе 3). На римановой поверхности эта разрывность, существующая вдоль оси положительных действительных чисел, проявляется в виде линии, по которой можно перейти от одного слоя поверхности к другому.

Другой пример римановой поверхности представлен на рисунке 17. В этом случае речь идет о поверхности, соответствующей функции квадратного корня. Сходство и различие между поверхностями на рисунках 16 и 17 отражают сходство и различия между кубическим корнем комплексной переменной и квадратным корнем комплексной переменной. Так, каждое комплексное число, кроме 0, имеет два комплексных квадратных корня (в то время как число 0 имеет только один), и функция недифференцируема в 0. Как и в случае с кубическим корнем, это выражено в том, что поверхность, соответствующая квадратному корню, имеет два «слоя» (поверхность кубического корня имеет три), и также показано, что 0 — «двойная» точка (которая находится одновременно в обоих слоях). Как видно на рисунке 17, поверхность квадратного корня также пересекает саму себя вдоль линии. Объяснение этого явления такое же, как и для кубического корня.

Рассматриваемая тема столь обширна и глубока, что в диссертации Риману едва лишь удалось затронуть некоторые из ее многочисленных сложностей и ответвлений. И через три года, в 1854-м, ученый вновь подошел к этому вопросу, хотя и с совершенно другой стороны. Работа 1854 года начала математический путь, который со временем привел Эйнштейна к теории относительности.

Форма Вселенной

После получения докторской степени в 1851 году по требованию Гёттингенского университета Риману пришлось начать новое математическое исследование. Он предложил Гауссу три темы, и тот выбрал ту, которая предполагала пересмотр некоторых принципов ньютоновской физики. В этой работе Риман ввел новое математическое понятие — *дифференциальное многообразие*. Спустя время это понятие трансформировалось в математическую базу теории относительности Эйнштейна, а также стало важнейшим основанием многих физических теорий, разрабатываемых сегодня.

В начале 1850-х годов заветным желанием Римана было стать преподавателем математики или физики Гёттингенского университета. В этом смысле успешная защита докторской диссертации в декабре 1851 года оказалась большим шагом на пути к его цели, поскольку ученая степень — необходимое требование для получения академической должности в Гёттингене. Однако имелось и дополнительное условие. Согласно правилам того времени (они и сейчас актуальны для Германии и ряда других европейских стран), соискатель на должность преподавателя в университете должен не просто обладать степенью доктора, но также выполнить оригинальное исследование более высокого уровня, то есть пройти habilitation. По уровню сложности это исследование эквивалентно докторской диссертации, но в то время как докторская диссертация обязательно представлялась в письменном виде, процедура habilitation письменного оформления работы не предполагала. Соискатель лишь устно излагал результаты своего исследования перед университетской комиссией. То, что публикация не была обязательной, освобождало соискателя от сложностей, связанных с оформлением научной работы, которые в середине XIX века были немалыми, если учесть, что в то время любую статью писали от руки, в лучшем случае набирали на примитивной печатной машинке.

Имелось и еще одно отличие. Если в случае докторской диссертации тему запланированного исследования соискатель согласовывал с руководителем (у Римана это был Гаусс), то хабилитация, наоборот, предполагала, что соискатель посвящает несколько месяцев проведению *трех* различных предварительных исследований, тему которых выбирал он сам. В достаточной мере разработав эти темы, он демонстрировал их руководителю, и тот уже определял, какая из них должна быть закончена и представлена перед университетской комиссией.

ТРИ ТЕМЫ РИМАНА

Риман начал готовиться к хабилитации в начале 1852 года, и постепенно росли его оптимизм и уверенность в своих способностях к математике, а также к физике, которая тоже была ему очень интересна. Он нисколько не сомневался в успехе, и чтобы не отвлекаться от исследований, несмотря на постоянные финансовые трудности отказался от должности помощника в Гёттингенской астрономической обсерватории. В тот период он написал своему отцу:

«Думаю, что [докторская] диссертация улучшила мои перспективы. Я также надеюсь, что научусь писать быстрее и более связно, особенно если буду посещать академические собрания и смогу читать лекции. Поэтому я воодушевлен».

В итоге после почти двух лет поисков, в начале 1854 года, он смог изложить Гауссу три свои темы, разработанные для хабилитации. Риман представил их в порядке личного предпочтения. Первым он озвучил предложение разработать новое математическое понятие (сегодня известное как *интеграл Римана*), которое позволяло новаторски подойти к проблеме, связанной с рядами Фурье (Риман узнал об этой проблеме от Дирихле, когда был в Берлине (1847–1849)). Вторая тема сводилась к физико-математическому анализу распределения

электрических зарядов в телах, не являющихся ни абсолютными проводниками, ни абсолютными изоляторами. Третья же тема, крайне умозрительная, предполагала переформулировку принципов геометрии, а также глубокий пересмотр некоторых центральных понятий физики Исаака Ньютона (1643–1727).

Среди руководителей существовало неписаное правило не выбирать третью из предложенных тем: считалось, что ее включают в список, чтобы соблюсти регламент. По этой причине третьим пунктом Риман назвал тему, которой на самом деле в ближайшем будущем заниматься не планировал, полагая, что ее разработка потребует нескольких лет.

Однако Гаусс ясно увидел в этом третьем предложении зачаток мощной новаторской идеи. Сам он когда-то рассматривал подобную тему, хотя так и не опубликовал ничего на этот счет. К тому же наставник никогда не сомневался в математических способностях Римана. По этим причинам, к удивлению всех, и Римана прежде всего, Гаусс указал ему на третью из предложенных тем — ту, которая касалась переформулировки геометрии. Почти сразу же приступив к интенсивной работе, Риман написал отцу:

«Я пребываю в растерянности оттого, что мне предстоит заниматься этим вопросом. [...] Все больше убеждаюсь, что Гаусс разрабатывал эту тему несколько лет и говорил о ней некоторым друзьям (Веберу, среди прочих). Не хочу показаться высокомерным, но втайне надеюсь, что мне удастся снискать признание как исследователю».

Наше намерение состоит в том, чтобы отойти от предыдущей концепции явлений, основу которой заложил Ньютон, [...] и постепенно переформулировать ее из-за тех фактов, которые она не может объяснить.

БЕРНХАРД РИМАН В РАБОТЕ НА ЗВАНИЕ ХАБИЛИТИРОВАННОГО ДОКТОРА

Риман оправдал доверие Гаусса, завершив работу за несколько месяцев. Все было готово уже в начале мая, хотя уст-

ный отчет отложили из-за болезни Гаусса, вызывавшей опасения за его жизнь (ученый скончался в феврале следующего года). В итоге выступление состоялось 10 июня 1854 года и прошло успешно. Математик и историк математики Михаил Монастырский писал, что «среди слушателей Римана только Гаусс мог оценить глубину его мысли. Лекция превзошла все ожидания Гаусса и привела его в чрезвычайное удивление; возвращаясь с факультетского заседания, он говорил Вильгельму Веберу с величайшими похвалами и редким у него возбуждением о глубине мыслей, изложенных Риманом».

Работа, которую Риман представил в 1854 году (и опубликовал в 1868-м), озаглавлена *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* («О гипотезах, лежащих в основании геометрии») и, как и предрек великий Гаусс, содержит значимые идеи, приведшие к переформулированию геометрии и физики, а со временем стала одним из математических столпов теории относительности.

ПРОБЛЕМА КРИВИЗНЫ

Прежде чем познакомиться с содержанием революционной работы Римана, обратимся к вселенной, описанной в романе «Флатландия» (1884). В созданной английским писателем Эдвином Эбботтом (1838–1926) двумерной вселенной живут разумные, но также двумерные существа. Положив на стол тонкую монету и встав так, чтобы видеть только ее кромку, мы получим довольно приближенное представление о том, как жители Флатландии воспринимают своих сородичей и свое окружение.

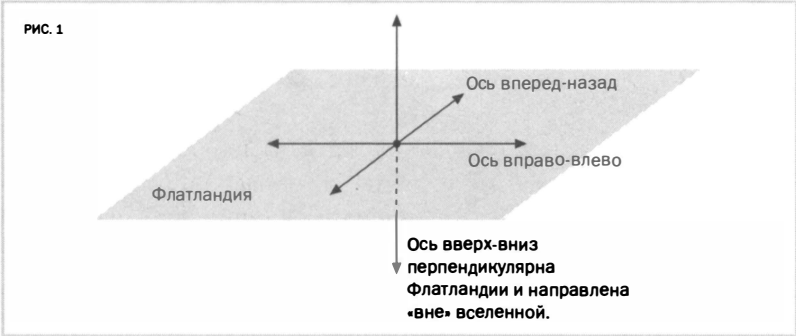
Итак, Флатландия двумерна. И как мы, обитатели трехмерного пространства, неспособны даже мысленно представить четвертое измерение (или перпендикулярное трем направлениям вперед-назад, вправо-влево и вверх-вниз), жители Флатландии не могут вообразить себе *третье* измерение. У них есть слова для обозначения «вперед или назад» или «вправо или

влево», но понятие «вверх или вниз» для них абсолютно нелегко (см. рисунок 1).

Жители Флатландии видят свою вселенную, как будто она «идеально горизонтальна», и не воспринимают существование какой-либо кривизны. Мы с вами живем на поверхности Земли, которая обладает сферической формой и, следовательно, искривленной поверхностью. Однако в нашем ближайшем окружении мы воспринимаем ее как плоскую и горизонтальную. Этот «обман чувств» происходит из-за того, что по сравнению с нами Земля настолько велика, что ее кривизна незаметна невооруженным глазом. Возможно ли, что Флатландия — это не плоская вселенная, как думают ее жители, а поверхность огромного шара (рисунок 2)?

Чтобы избежать путаницы, следует определиться с понятиями. «Шаром» мы называем *трехмерный* математический объект, образованный как «оболочкой», так и содержимым. «Оболочка» же (которая является двумерным объектом) обозначается как «сферическая поверхность», или «поверхность шара».

Если бы обитатели Флатландии жили на поверхности огромного шара, как они могли бы осознать это? Но прежде зададимся вопросом: как *мы* можем быть уверены в том, что живем на сферической поверхности? То есть как мы можем убедиться, что Земля действительно имеет сферическую форму? Один из способов — отправиться прямо вперед, не сворачивая; если Земля действительно круглая, рано или поздно мы вернемся в исходную точку. Как известно, на практике это было

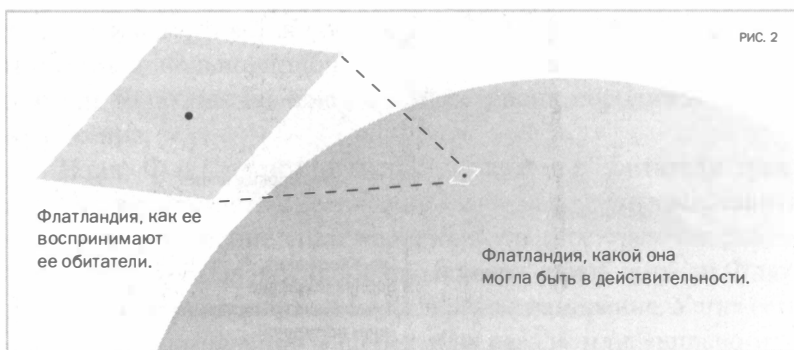


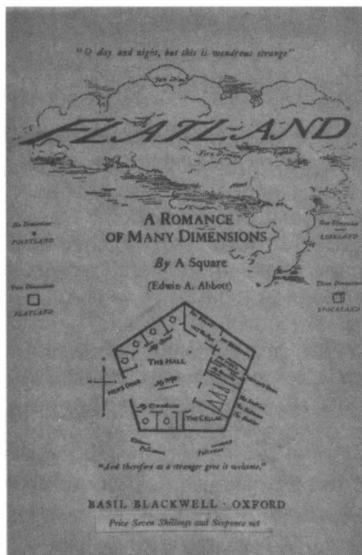
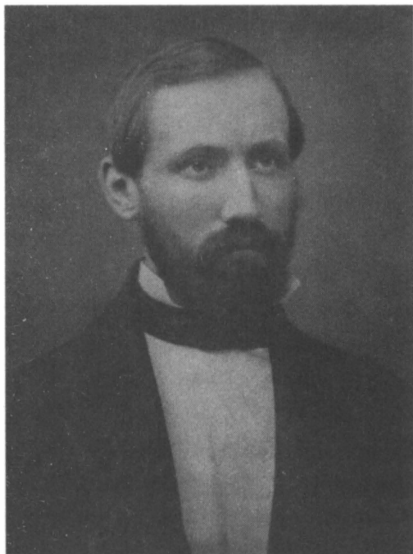
реализовано первыми мореплавателями, совершившими кругосветные путешествия. Но предположим, что Флатландия настолько огромна, что подобный метод полностью неосуществим.

Вопрос в том, могли ли жители Флатландии понять, является их мир «идеально горизонтальным» или он «искривлен», с помощью только *локальных* процедур, то есть методами, которые не вынуждали бы их отдаляться от положения, в котором они находятся. Мы вновь проецируем эту ситуацию на Землю: как мы можем убедиться, что Земля круглая, задействуя локальные процедуры? Вообще известно большое количество экспериментов, позволяющих убедиться, что Земля круглая. Стоит подчеркнуть, что так или иначе *все* они предполагают наблюдение поверхности Земли «сверху» и, следовательно, не ограничены поверхностью планеты, а содержат идею третьего измерения.

Классический эксперимент, подтверждающий кривизну Земли, состоит в наблюдении удаляющегося от берега парусника: провожающие в порту теряют из виду сначала корпус корабля, и лишь потом мачту. Это наблюдение позволяет убедиться, что поверхность Земли кривая, поскольку будь она идеально горизонтальной, постоянно были бы видны и корпус, и мачта корабля, хотя, конечно же, все в меньших размерах (см. рисунок 3).

Этот эксперимент подразумевает третье измерение, поскольку предполагается, что свет может отделяться от земной





ВВЕРХУ СЛЕВА:
Риман в период
хабилитации,
1850 год.

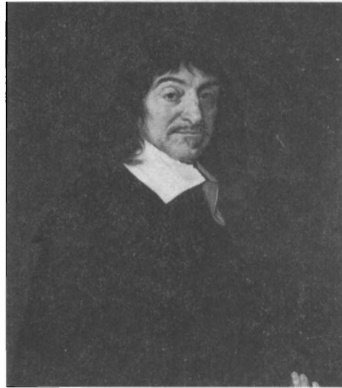
ВВЕРХУ СПРАВА:
Титульный лист
книги «Флатландия»
Эдвина Эбботта
(1884). В этом
произведении
социальной сатиры
рассматривается
также проблема
различных
измерений.

ВНИЗУ:
Альберт Эйнштейн
на параде
по случаю его
первого визита
в Нью-Йорк,
1921 год. Ученый
использовал
дифференциальное
многообразие,
разработанное
Риманом.



ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Первым, кто предложил описывать положение точек на плоскости с помощью пары координат, был французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650). И это новшество нашло свое отражение в его работе, опубликованной в 1637 году под названием «Геометрия». Однако незадолго до него французский математик и адвокат Пьер де Ферма (1601–1665) вынес это же самое предложение, хотя его работа увидела свет спустя несколько лет после публикации Декарта. В то время языком науки была латынь, но Декарт стремился донести свои идеи до как можно большего числа соотечественников, не только до эрудитов. И прекрасно зная латынь, он писал на родном языке. При переводе его трудов на латынь французское имя ученого в латинизированном виде превратилось в Ренатус Картезиус, вот почему предложенная им система координат известна и как *декартова*, и как *картезианская*.



Портрет Рене Декарта, около 1649 года.

поверхности (наблюдатель поднимает взор, чтобы увидеть отдаляющийся корабль). Подобный эксперимент немаловажен для жителя Флатландии, ведь в отличие от Земли это не плоский мир, содержащийся в большем трехмерном пространстве; Флатландия — это двумерная вселенная. Свет перемещается *внутри* Флатландии так же, как он перемещается в нашей Вселенной, и будь Флатландия искривленной, траектория света внутри нее так же искривлялась бы, подчиняясь форме вселенной (см. рисунок 4).

Вопрос заключается в следующем: было бы возможно для жителя Флатландии выяснить, является ли его вселенная «горизонтальной» или «искривленной», с помощью какого-то локального эксперимента, не подразумевающего третье измерение? Переноса эту задачу на Землю, могли бы мы убедиться, что поверхность Земли искривлена, не смотря на нее сверху

или снизу? Именно эти вопросы сформулировал Риман в своей знаменитой работе на соискание степени хабилитированного доктора. И ответ — отметил он — предполагает понятия *расстояния* и *отклонения*, существующие в контексте теоремы Пифагора.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Плоскость имеет два измерения. Это может быть очевидным на интуитивном уровне, но как определить идею *измерения* строго в математике? Математики говорят, что плоскость имеет *два* измерения, потому что положение каждой точки на ней определено *двумя* координатами. То, что необходимых координат две, есть следствие из факта, что на плоскости имеются два

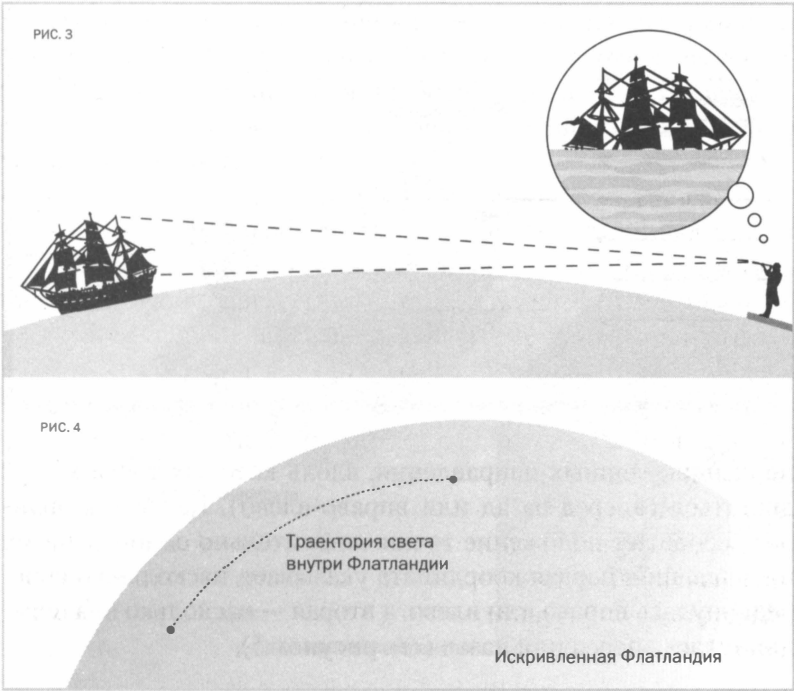
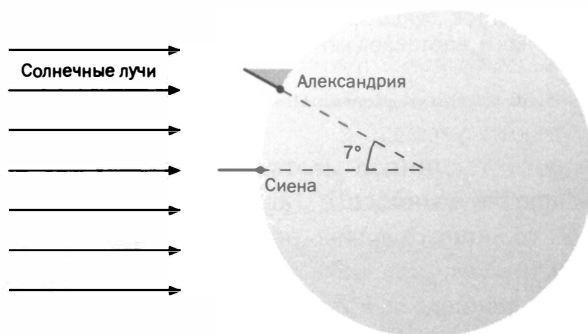


РИСУНОК 3:
Когда корабль
отдаляется
от берега,
кривизна Земли
скрывает
сначала корпус,
а затем мачту.

РИСУНОК 4:
В искривленной
вселенной
траектория
света
подчиняется
этой кривизне.

ОКРУЖНОСТЬ ЗЕМЛИ

Позицию, что Земля круглая, отстаивали некоторые греческие мыслители Античности, однако Аристотель (384–322 до н.э.) был первым, кто привел эмпирические аргументы в пользу этой идеи: например, если ехать на юг, видимые созвездия оказываются на ночном небе на высоте, отличной от той, что наблюдается в Греции. Но первым, кто измерил земную окружность, был Эратосфен Киренский (276–194 до н.э.). Будучи главой Александрийской библиотеки, он обнаружил отчеты из Сиены (ныне Асуан, город в 800 километрах к югу от Александрии, точно на тропике Рака), в которых говорилось, что в полдень 21 июня солнце отражалось в воде колодцев, а палка, воткнутая вертикально в землю, не отбрасывала никакой тени. Эратосфен выяснил, что палка, воткнутая вертикально в Александрии в тот же момент, все же отбрасывает довольно четкую тень. Измерив эту тень, Эратосфен вычислил, что земные радиусы, соответствующие Александрии и Сиене, образуют угол примерно в 7° . Зная этот угол и расстояние до Сиены, Эратосфен сделал вывод, что длина окружности Земли равна примерно 40 000 километров. Это самое точное значение, известное в Античности.

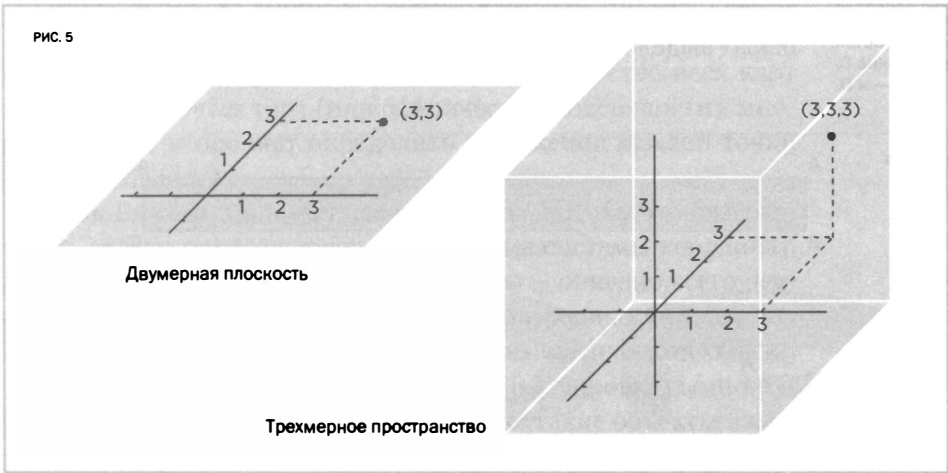


перпендикулярных направления, вдоль которых точка может двигаться (вперед-назад или вправо-влево). Каждая координата сообщает положение точки относительно одного из этих направлений: первая координата указывает, насколько она передвинулась вправо или влево, а вторая — насколько она передвинулась вперед или назад (см. рисунок 5).

Прямая имеет только одно измерение, потому что положение точки задано одним-единственным числом. Пространство, в свою очередь, имеет три измерения, поскольку, как видно на рисунке 5, положение точки описано тремя координатами, ведь в пространстве точка может двигаться в трех направлениях: вперед-назад, вправо-влево и вверх-вниз. (Стоит разъяснить, что это определение идеи измерения соответствует так называемому *топологическому измерению* математического объекта. Есть и другие определения измерения, например *фрактальное*, но их начали разрабатывать в XX веке и основываются они на понятиях, далеких от тем, рассматриваемых в данной книге.)

Однако обычно говорят, что поверхность шара также имеет два измерения, и то же относится к «оболочке» пузырька (поверхности, которая в математике известна как *тор*). Два измерения имеет и лента Мёбиуса, как это заметно в различных фазах ее построения (см. рисунок 6).

Известно, что положение каждой точки на поверхности шара (например, каждая точка на земной поверхности) определено двумя координатами: широтой и долготой. Но происходит ли то же самое с тором, с лентой Мёбиуса или с любой другой поверхностью? Ответ: да.

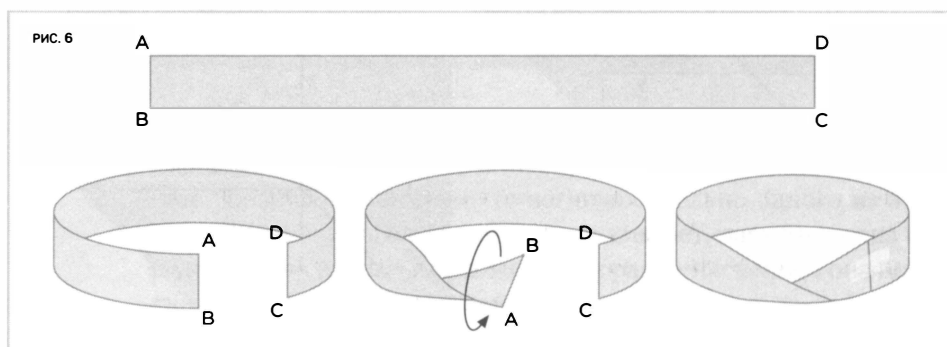


Представим, что мы «вырезаем» круглую часть плоскости (точная форма отрезка не имеет значения, поскольку мы деформируем его как резиновый, то есть применим к нему топологическую деформацию). Тор — говорит Риман — может быть полностью покрыт копиями этого отрезка, деформированными надлежащим образом, чтобы идеально соответствовать тору. На рисунке 7 (на странице 62) хорошо видно, что для покрытия тора достаточно четырех таких деформированных отрезков (на изображении выделен один из них).

И каждая из этих копий имеет координаты, которые у нее были на плоскости (см. рисунок 8). Каждая часть P тора, покрытая одной из таких копий, «наследует» эти координаты, служащие для определения положения любой точки тора (по крайней мере любой точки, которая находится в части P). Например, на рисунке 8 мы видим точку, соответствующую положению $(1,1)$. Заметьте, что эти «унаследованные» координаты не служат для тора полностью, они применяются только к части, покрытой соответствующей копией; тогда говорят, что тор имеет *локальные системы координат* (и необязательно *глобальную*, как у плоскости).

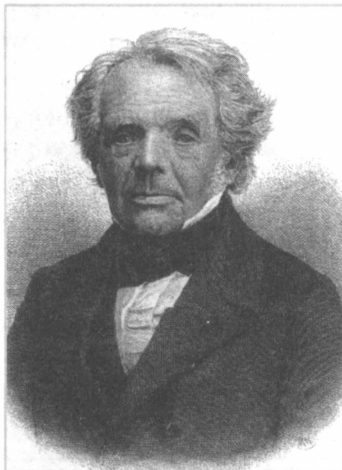
Вообще сама сферическая поверхность тоже имеет локальные системы координат. Как показано на рисунке 9, мы можем покрыть эту поверхность двумя копиями круглого отрезка плоскости: одна покрывает «северное полушарие» на поверхности шара (выделенное на изображении), а другая — «южное».

Чтобы
изготовить ленту
Мёбиуса,
возьмем
прямоугольную
полоску бумаги,
вершины
которой мы
назовем A , B , C
и D . Склеим
короткие края,
для чего один
из них
скручиваем
таким образом,
что вершина A
приклеивается
к вершине C ,
а B — к D .



АВГУСТ ФЕРДИНАНД МЁБИУС (1790–1868)

Мёбиус родился в Шюльпфорте (Германия) и, согласно воле родителей, в 1809 году поступил в Лейпцигский университет с намерением изучать право. Но вскоре стало понятно, что не это его настоящее призвание и его манят науки. В результате в 1813 году он поступил в Гёттингенский университет, где слушал курс астрономии у Гаусса и изучал математику у Иоганна Пфаффа (наставника Гаусса). В 1815 году он защитил докторскую диссертацию по астрономии, в том же году прошел хабилитацию с исследованием в области математики. В докладе, отправленном им в Парижскую академию наук (обнаруженном лишь после его смерти), Мёбиус рассуждал о свойствах некоторых поверхностей, в том числе ленты, сегодня носящей его имя. Хотя большинство работ Мёбиуса были посвящены аналитической геометрии или топологии, значительный вклад он также внес и в астрономию.



Каждая из этих копий, которые покрывают тор или поверхность шара, называется *картой* (в том же смысле, что и географическая карта в другом контексте), а множество всех карт известно как *атлас* тора (или сферической поверхности): множество карт позволяет определить положение каждой точки в каждой области.

Для Римана тор имеет два измерения, потому что благодаря его атласу, определяющему локальные системы координат, положение любой из его точек может быть описано всего *двумя* числами; то же самое происходит со сферической поверхностью и с лентой Мёбиуса. Любой математический объект, который можно полностью покрыть деформированными кругами, имеет два измерения. В математике такие объекты называются *дифференциальными многообразиями двух измерений*.

РИС. 7

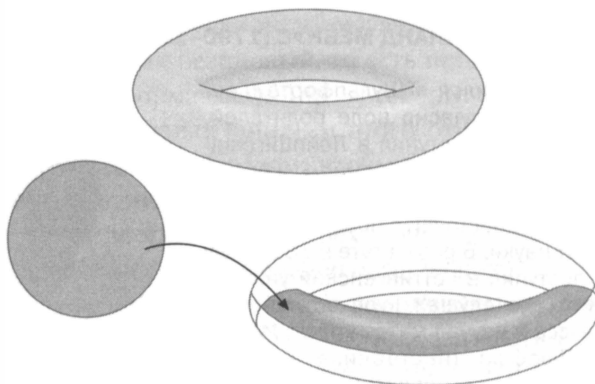
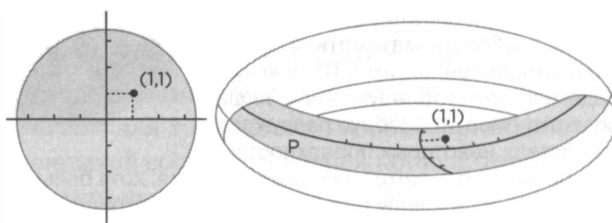


РИС. 8



Аналогичным образом окружность — это дифференциальное многообразие одного измерения, поскольку ее можно покрыть двумя копиями отрезка, то есть двумя отрезками прямой (см. рисунок 10).

Изучение дифференциальных многообразий составляет раздел математики, известный как *дифференциальная геометрия*. Интересно, что Риман установил: помимо дифференциальных многообразий одного или двух измерений, существуют также дифференциальные многообразия трех измерений, или четырех, или пяти, или шести... Действительно, согласно некоторым физическим теориям, рассматриваемым сегодня, наша Вселенная могла бы быть дифференциальным многообразием девяти или десяти измерений.

Здесь важен один технический момент. В связи с корректным определением деформаций, применяемых к «отрезкам»

плоскости, предполагается, что они не включают в себя свой собственный край; иными словами, вырезанные из плоскости круги не должны включать в себя окружность, служащую им краем. Таким образом, на рисунке 9 экватор сферической поверхности на самом деле не покрыт, поскольку экватор — это именно край как карты, которая покрывает северное полушарие, так и карты, охватывающей южное полушарие. И вот эти края не входят в состав ни одной из двух карт. Чтобы избежать подобной ситуации, отрезок, покрывающий северное полушарие, немного расширяют, чтобы покрыть часть южного полушария, и наоборот (см. рисунок 11).

Подобная ситуация происходит с тором, который показан на рисунке 7 (страница 62), где граница между каждой парой карт оказывается непокрытой, и чтобы обойти этот момент, каждый отрезок немного накладывают на соседние. Практиче-

РИС. 9

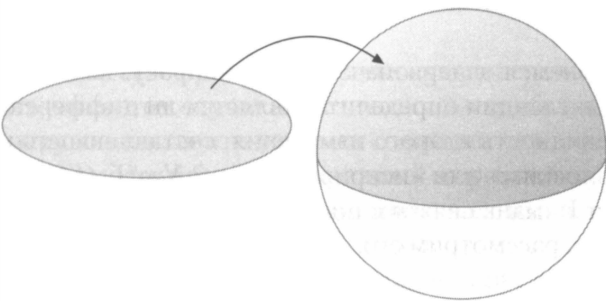
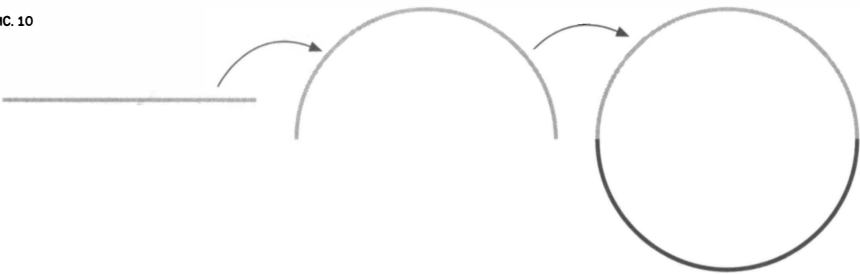


РИС. 10

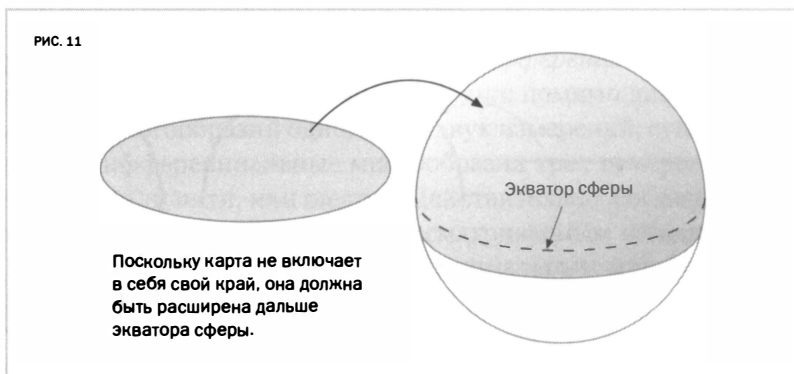


ски во всех дифференциальных многообразиях наличие накладывающихся друг на друга карт нормально.

С другой стороны, и вновь по техническим причинам, при трансформации карт для их приспособления к поверхностям недопустимо, чтобы деформация порождала «острые выступы» или «сгибы», то есть деформации должны быть «гладкими». Например, в то время как сферическая поверхность или поверхность эллипсоида (мяча для регби) — это дифференциальные многообразия, поверхность куба, напротив, *не* является дифференциальным многообразием, поскольку вдоль его ребер имеются «неразрешенные» сгибы. Поверхность куба или любого другого многогранника называется *топологическим многообразием*, и изучает его не дифференциальная геометрия, а топологии.

РАССТОЯНИЕ ПО ПИФАГОРУ

Вернемся к первоначальному вопросу: как могли бы жители Флатландии определить, является ли дифференциальная разновидность второго измерения, составляющего их вселенную, «плоским» или «искривленным»? Уже было отмечено, что ответ Римана связан с понятием «отклонений» в теореме Пифагора, рассмотрим его.



Расстояние между двумя точками A и B на плоскости — это, по определению, длина прямолинейного пути, который связывает A с B (см. рисунок 12). Но почему путь должен быть прямолинейным? Почему он не может быть другой формы? Чтобы определить расстояние между A и B , среди всех возможных путей, ведущих из одной точки в другую, нужно выбрать самый короткий, и хорошо известно, что из всех возможных путей, которые ведут от A до B , самый короткий как раз тот, что идет по прямой линии.

В исследовании для хабилизации Риману удалось распространить идею «расстояния между двумя точками» на любое дифференциальное многообразие, и для этого он ввел понятие *геодезической*. Прямая на плоскости — это кратчайший путь между двумя точками. Аналогично, в ситуации с любым дифференциальным многообразием самый короткий путь из всех, что соединяют две точки этого многообразия (путь ни в какой момент не выходит за пределы многообразия), Риман назвал «геодезической»; таким образом, прямые — это геодезические плоскости.

Рассмотрим в качестве примера сферическую поверхность. Можно доказать, что в этом случае геодезические — это *большие круги*, то есть окружности, центр которых совпадает с центром сферы (рисунок 13). Иными словами, самый короткий путь между двумя точками поверхности шара пролегает вдоль одного из его больших кругов.

На земном шаре самые известные большие круги — это экватор и меридианы; таким образом, кратчайший путь от северного полюса до любой точки экватора — это линия соединяющего их меридиана. (На самом деле каждый меридиан соответствует «половине большого круга» и образует полный большой круг только с противоположащим меридианом; так, например, большой круг образован Гринвичским меридианом и меридианом 180° , взятыми вместе.)

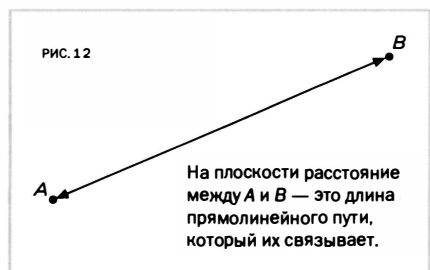
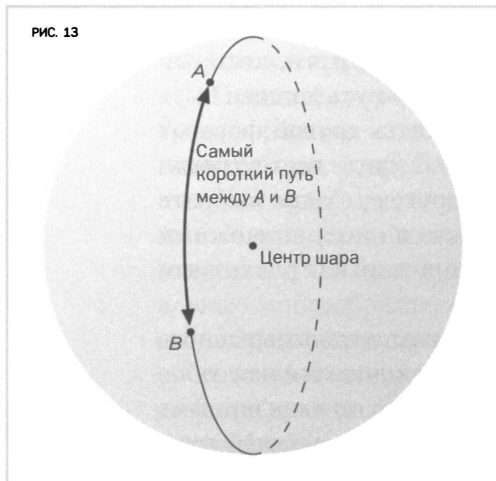


РИС. 13



Таким образом, кратчайшее расстояние между двумя точками сферической поверхности — это длина дуги большого круга, который их связывает. Риман сказал, что расстояние между двумя точками любого дифференциального многообразия — это длина дуги геодезической, которая их связывает.

Но как вычислить расстояние между двумя точками? В случае с плоскостью ответ отправляет нас к теореме Пифагора, одной из самых знаменитых

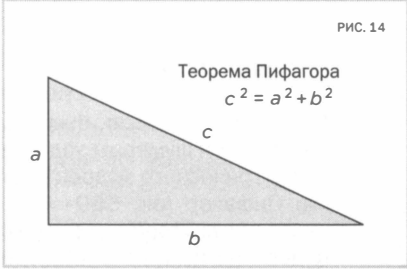
в математике. Она гласит, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рисунок 14). Предположим, что, постоянно находясь на плоскости, мы перемещаемся по прямой линии из точки с координатами (1,3) в точку (1,1), а затем немедленно перемещаемся оттуда, так же по прямой, в точку (4,1), как показано на рисунке 15. Каково расстояние между начальной и конечной точками этого маршрута?

Расстояние, пройденное на первом участке, равно 2, а на втором — 3. Как следует из рисунка 15, три рассматриваемые точки — это вершины прямоугольного треугольника, и прямая линия от начальной точки до конечной — это его гипотенуза. Значит, по теореме Пифагора, расстояние между точкой (1,3) и (4,1) равно $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$.

МАРКО ПОЛО ВО ФЛАТЛАНДИИ

Теперь представим себе, что жители Флатландии — это очень маленькие существа (занимающие площадь несколько квадратных сантиметров), в то время как их вселенная — поверхность

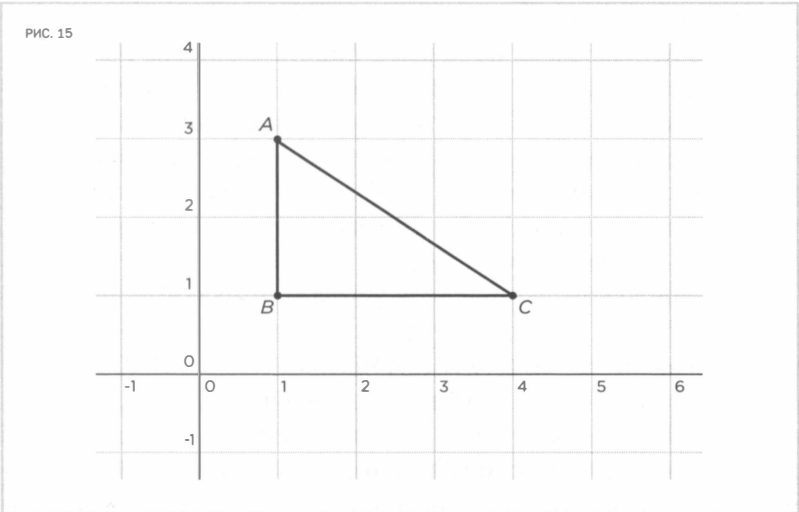
РИС. 14



шара, по размеру сопоставимого с Землей, то есть каждый большой круг Флатландии в сумме дает 40 000 километров. На самом деле это мы, трехмерные существа, наблюдающие Флатландию «извне», знаем, что речь идет о большой сферической поверхности. У обитателей Флатландии будет ощущение, что они живут на плоскости, поскольку местами поверхность шара *похожа* на часть плоскости (в человеческом масштабе поверхность Земли вообще-то тоже похожа на плоскость). Каждый меридиан этой вселенной и в целом каждый большой круг (то есть каждая геодезическая) воспринимаются жителями Флатландии как прямая линия.

Теперь представим, что флатландский путешественник перемещается вдоль одного из меридианов своей вселенной от северного полюса *N* до точки *A*, расположенной на экваторе, а затем поворачивается «перпендикулярно» на восток и далее перемещается еще 2000 километров вдоль экватора Флатландии до другой точки *B*, также расположенной на экваторе.

РИС. 15



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Теорема Пифагора была известна египтянам и шумерам задолго до рождения греческого мудреца. Считается, что Пифагор (ок. 569–475 до н.э.) узнал об этой теореме в ходе своих путешествий по Египту и Месопотамии. Однако заслуга Пифагора бесспорна и состоит в том, что он первым нашел ее доказательство, пусть и не дошедшее до нас. Неясно, было ли оно осуществлено самим Пифагором или одним из его учеников, зато достоверно известно, что в течение веков математики постепенно обнаруживали множество различных доказательств этой теоремы и по количеству возможных доказательств она не имеет себе равных. В 1927 году американец Элиша Лумис опубликовал сборник из 370 таких доказательств.



Пифагор, фрагмент «Афинской школы» Рафаэля.

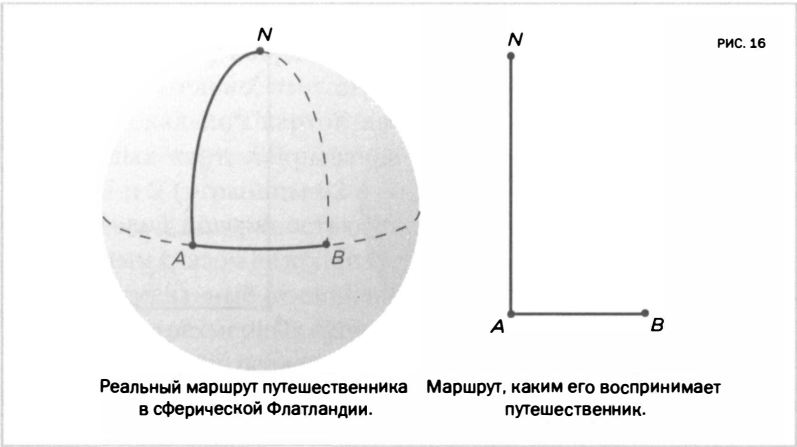
Поскольку флатландец следует все время по геодезическим своей вселенной, ему будет казаться, что между точками N и A он перемещался по прямой линии, равно как по прямой линии от A до B . И поскольку на первом участке путешественник шел прямо на юг, а затем свернул на восток, у него будет ощущение, что между первым и вторым участками маршрута он совершил разворот на 90° . То есть путешественник будет рассматривать точки N , A и B как вершины прямоугольного треугольника (см. рисунок 16).

Предположим, у путешественника есть с собой одометр, измеряющий пройденное расстояние. Очевидно, что этот инструмент покажет, что между N и A он преодолел 10 000 километров (четверть общей окружности поверхности шара), а между A и B — 2000 километров. А каково расстояние между B и N ? Путешественник, знакомый с геометрией, мог попытаться вычислить это расстояние с помощью теоремы Пифагора. Он

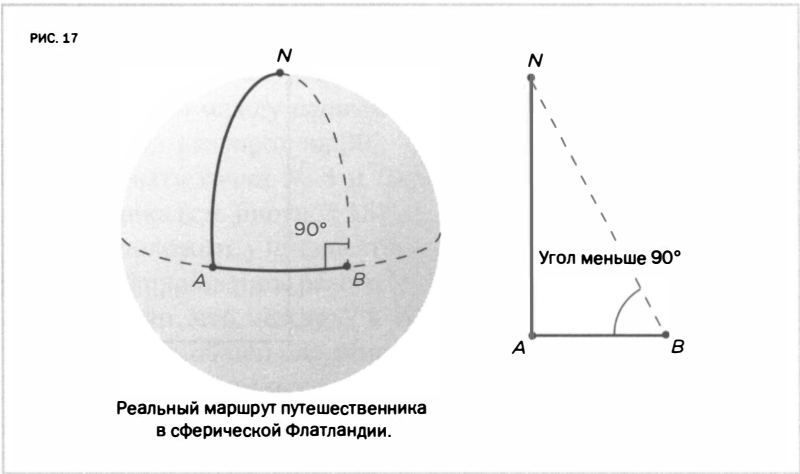
получил бы, что расстояние по «прямой линии» между *B* и *N* равно $\sqrt{10\,000^2 + 2000^2} \approx 10\,198,04$ километра. Но если путешественник переместится между точками *B* и *N* по связывающей их геодезической, одометр покажет, что он преодолел только 10 000 километров — расстояние, вычисленное по теореме, почти на 2 % больше, чем действительное.

Это расхождение объясняется тем, что теорема Пифагора справедлива только на плоскости и не действует на любой искривленной поверхности. То есть проведя вышеописанные вычисления и измерения, флатландский путешественник, пользуясь средствами, существующими в рамках его вселенной, доказал бы, что она искривленная, а не плоская. У путешественника будет еще одно явное указание на то, что его вселенная искривлена, если он заметит, что геодезическая от *B* до *N* перпендикулярна идущей от *A* до *B*, в то время как в плоской вселенной обе геодезические образовали бы угол меньше 90° (см. рисунок 17).

Проведя корректные измерения, более детальный анализ расхождений с теоремой Пифагора, а также анализ углов, которые образуют стороны треугольников, заданные геодезическими, путешественник мог бы даже определить, является ли реальная форма его вселенной сферической или она имеет форму тора, ленты Мёбиуса или любой другой поверхности.



Теоретически, чтобы узнать, является Флатландия плоской или искривленной вселенной, флатландскому ученому пришлось бы только измерить стороны прямоугольного треугольника, нарисованного в его вселенной, и проверить, соответствуют ли эти размеры предсказанным теоремой Пифагора. Если ответ положительный, вселенная плоская, если отрицательный — нет. Однако на практике осуществить это измерение непросто, поскольку в случае с искривленной поверхностью расхождение между реальным измерением гипотенузы и значением, предсказанным теоремой Пифагора, в целом пропорционально размеру рассматриваемого треугольника. Если треугольник не очень большой, то и расхождение может быть незначительным. Но в примере с флатландским путешественником расхождение очень велико, поскольку путешественник преодолел четверть общей длины своей вселенной. Вообще в треугольниках намного меньшего размера определить расхождение может оказаться делом гораздо более сложным, и позже мы вернемся к этому вопросу.



СФЕРЫ И ГИПЕРСФЕРЫ

Все это, конечно, интересно, но еще интереснее заявление Римана о том, что *наша* вселенная на самом деле является дифференциальным многообразием трех измерений, и значит, логично задаться вопросом, является она «неискривленной» или «искривленной». Проанализируем эту удивительную идею Римана.

Геометрия пространства, которую изучают в школе, — это *евклидова геометрия*, названная так, поскольку ее основные свойства были сформулированы в III веке до н.э. Евклидом Александрийским. Ранее было сказано, что как положение точки на плоскости определено двумя координатами, так и положение точки в евклидовом пространстве определено тремя координатами (см. рисунок 5). Географическая аналогия этой ситуации заключается в следующем: чтобы точно определить местонахождение альпиниста, взбирающегося на гору, нужно знать не только широту и долготу, но также на какой высоте он находится относительно земли.

Наша вселенная — это дифференциальное многообразие третьего измерения, локально она похожа на сферическую секцию евклидова пространства. Так, если взять Солнце за центр системы координат, то положение любой точки Солнечной системы (или ближайшей вселенной) идеально определено его координатами относительно этих осей, которые образуют локальную систему координат (см. рисунок 18).

Следовательно, этот огромный шар с центром в Солнце был бы локальной картой нашей вселенной, подобно одной из круглых карт, покрывающих плоские вселенные на рисунках 7 и 9 (страницы 62 и 63). Будь Флатландия огромной сферической поверхностью, ее жители не заметили бы невооруженным глазом ее кривизны, зато смогли бы определить ее, измерив локальные отклонения относительно теоремы Пифагора. У нас, трехмерных существ, похожая ситуация. Есть вероятность, что наша вселенная — на самом деле огромная *гиперсфера*, огромное трехмерное искривленное дифференциальное

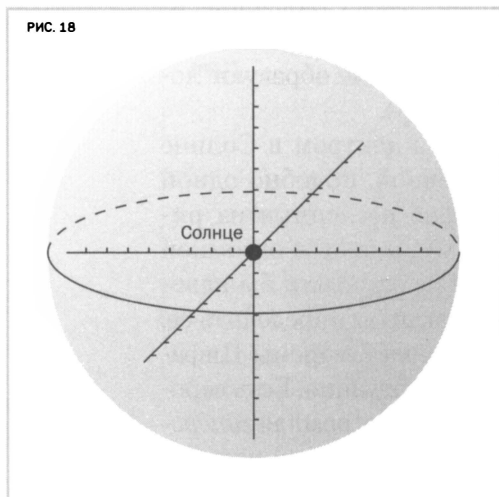
многообразие, кривизну которого мы не осознаем и не видим невооруженным глазом.

Сферическая поверхность — это «оболочка» идеально симметричного трехмерного тела, гиперсфера — это «трехмерная оболочка» четырехмерного объекта, также идеально симметричного. И хотя верно, что мы не можем вообразить четырехмерный объект, благодаря риманову понятию локальной карты мы можем составить представление о том, какова на самом деле гиперсфера.

На рисунках 9 и 19 (см. страницу 74), показано, что сферическая поверхность может быть наглядно представлена как два круга, «соединенных по краям», то есть их окружности смыкаются, образуя единую кривую, которая, в свою очередь, является экватором сферической поверхности. Причем до соединения по краю эти два круга должны быть искривлены в направлении, перпендикулярном их поверхности (см. рисунок 19), что нелегко для жителя Флатландии.

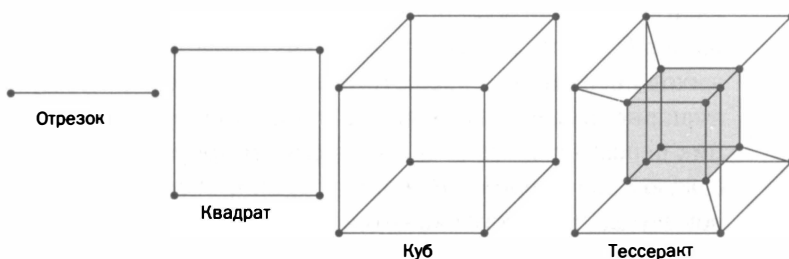
Чтобы наглядно представить *гиперсферическую* вселенную, мы должны вообразить, как два трехмерных шара, например E_1 и E_2 , «склеиваются» по их оболочкам. Это означает, что северный полюс поверхности E_1 для любого жителя

гиперсферической вселенной будет *той же самой точкой*, что и северный полюс поверхности E_2 (см. рисунок 20). Поверхность E_1 , приклеенная к E_2 , играет ту же самую роль, что и экватор для рисунков 9 и 19. Чтобы склеить сферы таким образом, нужно предположить, что E_1 и E_2 «искривлены» в направлении, графически нелегким для нас, поскольку оно одновременно перпендикулярно осям вперед-назад, вверх-вниз и вправо-влево.



ТЕССЕРАКТ

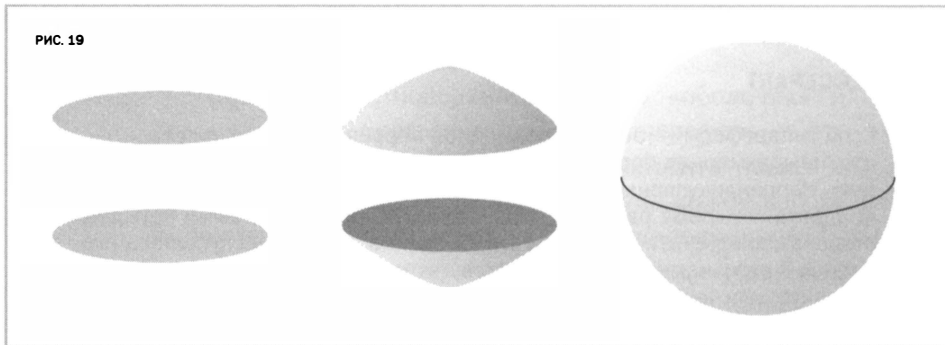
Если гиперсфера — это четырехмерная версия сферы, то тессеракт — это четырехмерная версия куба. Соединив два отрезка с помощью еще двух, перпендикулярных им, мы получим квадрат; соединив два равных квадрата четырьмя равными отрезками, перпендикулярными четырем сторонам квадрата, мы получим куб. Соединив два равных куба восьмью равными отрезками, перпендикулярными всем ребрам куба, мы получим гиперкуб, или тессеракт. Это направление, перпендикулярное одновременно всем ребрам куба, абсолютно немислимо для нас. (На изображении тессеракта внутренний и внешний кубы равны; внутренний куб кажется меньше, потому что он «дальше» в четвертом измерении.)



Итак, представим себе, что оба шара E_1 и E_2 приклеены друг к другу по их оболочкам, но при этом не приклеиваются друг к другу их внутренние точки (на рисунке 19 круги склеиваются по краям, но не склеиваются их внутренние точки). Гиперсферическая вселенная — всего лишь объединение двух шаров, склеенных подобным образом и представляющих собой две локальные карты этой вселенной.

Уже было сказано, что если бы Флатландия была сферической поверхностью, то флатландский путешественник, движущийся «по прямой линии», в итоге вернулся бы в исходную точку. То же самое произошло бы с путешественником во вселенной-гиперсфере. Обозначим как P центр шара E_1 и как Q — центр E_2 (рисунок 20) и предположим, что путешественник выходит из точки P и движется по прямой на север. Достигнув

РИС. 19



точки N , он сразу же окажется в шаре E_2 (вспомним, что точка N шара E_1 и точка N шара E_2 — это одна и та же точка). У путешественника не возникнет особенного ощущения при переходе из E_1 в E_2 , точно так же, как мы не чувствуем ничего из ряда вон выходящего, перемещаясь из северного полушария в южное полушарие Земли. Двигаясь все время по прямой, путешественник пересечет E_2 до точки S , а по пути пройдет через Q , то есть самую удаленную от P точку вселенной. Дойдя до S , он снова войдет в E_1 и в итоге окажется в исходной точке. Путешественнику будет казаться, что он вернулся в исходную точку, следуя все время по прямой линии.

Похоже, случай Римана — один из тех, когда самые оригинальные и характерные для мыслителя идеи появляются очень быстро.

ХОСЕ ФЕРРЕЙРОС, «ИЗБРАННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РИМАНА»

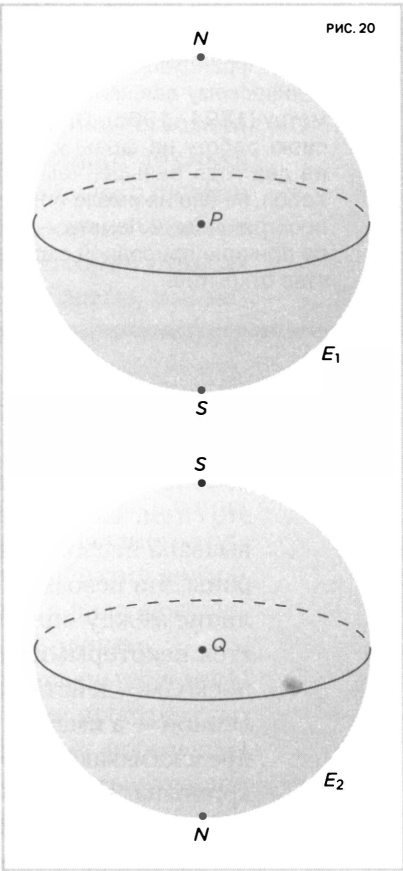
То есть наша вселенная — это «неискривленное» трехмерное евклидово пространство? Или, поскольку речь идет о гиперсфере, это, наоборот, искривленное дифференциальное многообразие? Или же это многообразие какой-то другой формы? На самом деле невозможно ответить на данные вопросы, отправив путешественника в путь по прямой линии и ожидая, вернется ли он когда-нибудь в исходную точку. Во-первых, это невозможно на практике, поскольку предполагает прохожде-

ние миллиардов световых лет. Во-вторых, сегодня мы знаем (хотя во время Римана это было невообразимо), что Вселенная расширяется и на самом деле некоторые ее области удаляются от нас на скоростях, недостижимых даже в теории.

Это означает, что оба шара на рисунке 20 «набухают» на такой скорости, что даже в теории не допускается, чтобы путешественник когда-нибудь достиг точки Q , потому что она отдаляется от P на скорости, большей, чем может развить путешественник. Существует вероятность, что когда-нибудь расширение прекратится и вселенная начнет возвращаться в прежнее состояние и войдет в фазу сжатия, в случае чего путешествие станет осуществимым по крайней мере в теории. Однако космологи еще не пришли к согласию в этом вопросе.

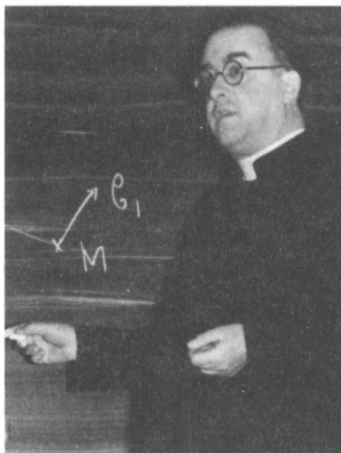
Как уже было сказано, есть и другой способ определить, является дифференциальное многообразие «искривленным» или нет: теорема Пифагора. Как и для поверхностей, теорема Пифагора справедлива и для евклидова трехмерного пространства, но не для пространств с искривлением. Так что в теории мы способны определить, является наша вселенная плоской или искривленной, проанализировав отклонения относительно этой теоремы для треугольников, проведенных между тремя точками пространства, и лучше, если бы речь шла о треугольниках большого размера.

Недавно ученые произвели измерения такого рода: были взяты треугольники, стороны которых — лучи света, испускаемые объектами, удаленными на огромные расстояния (порядка миллиардов световых лет). Однако даже результаты работы с треугольниками такой огромной величины оказались не-



РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

К началу XX века практически все ученые поддерживали идею, что Вселенная в крупном масштабе статична. Все изменилось в конце 1920-х годов с открытием расширения Вселенной. Раз она расширяется, значит в прошлом имел место момент, когда она была намного меньше. Как правило, открытие расширения Вселенной приписывают американскому астроному Эдвину Хабблу (1889–1953). Однако недавние исследования свидетельствуют о том, что на самом деле оно принадлежит французскому астроному и католическому священнику Жоржу Леметру (1894–1966). Он опубликовал свою работу на французском языке на два года раньше, чем это сделал Хаббл, но она не имела большого распространения, и Леметр — возможно, по причине природной скромности — предпочел не оспаривать первенство открытия.



Жорж Леметр в Лёвенском католическом университете, около 1933 года.

убедительными. С одной стороны, зарегистрированные значения отличаются от тех, что были бы получены при «плоской» вселенной (но эта разница настолько мала, что неясно, связано это с тем, что вселенная действительно искривлена, или же она вызвана неизбежными ошибками в измерении). С другой стороны, эта невозможность (на данный момент) установить различие между «плоской» и искривленной вселенной принимается некоторыми космологами как положительный результат, поскольку действующие сегодня теории о происхождении Вселенной — а именно так называемая «инфляционная теория» — предсказывают, что у нашей Вселенной практически нулевая кривизна. Вопрос все еще открыт, и его исследование, без сомнения, даст очень интересные результаты в ближайшие годы.

РИМАН И ЭЙНШТЕЙН

Кроме описанной выше проблемы (глобальная геометрия вселенной), Риман также интересовался вопросом возможного существования «локальных искривлений», то есть небольших «морщин» в текстуре пространства. Для Римана вопрос был принципиален, поскольку он понимал: законы физики должны выражаться не как у Ньютона — в терминах сил, мгновенно действующих между материальными объектами, которые могут располагаться на огромных расстояниях друг от друга. Они должны быть сформулированы в терминах *локальной геометрии* Вселенной. То есть для Римана в физических взаимодействиях пространство было одним из главных действующих лиц, в то время как для Ньютона оно было пассивной средой, в которой происходят явления.

Риман не пошел дальше намеков, которые присутствовали в работе на соискание степени хабилитированного доктора, но сегодня известно, что в целом его представление о физике было верным. В начале XX века эту идею подхватил Альберт Эйнштейн (1879–1955), и она легла в основу теории относительности. Благодаря Эйнштейну сегодня мы знаем, что материя локально искривляет пространство и что «сила тяготения» — лишь следствие этой кривизны.

Так, в 1919 году британский астрофизик Артур Эддингтон (1882–1944) выяснил, что траектория света искривляется, проходя мимо Солнца (на самом деле она искривляется, проходя мимо любого физического объекта, но огромная масса Солнца обеспечивает более заметный эффект). Во время полного солнечного затмения (см. рисунок 21) Эддингтон обратил внимание, что отклонение лучей света проявляется в виде кажущегося смещения звезд, которые видны рядом с Солнцем.

Это происходит, так как свет всегда движется по геодезическим Вселенной, и поскольку Солнце искривляет пространство вокруг себя, оно таким образом локально изменяет форму этих геодезических и, следовательно, модифицирует траекторию света. Еще более драматичные события наблюдаются вблизи черной дыры — «мертвой» звезды, материя которой сосредото-

точилась практически в математической точке. В этом случае искривление пространства настолько велико, что свет не может выйти из него.

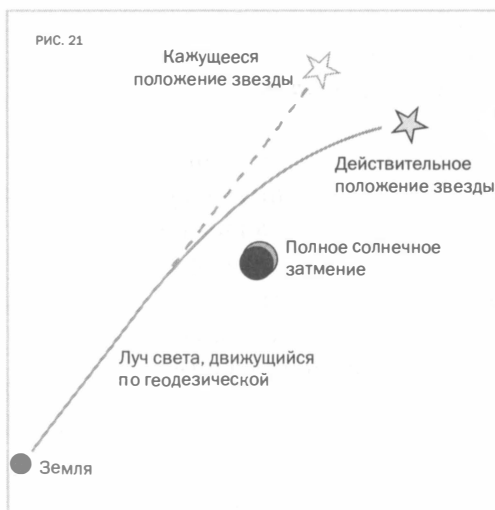
В отличие от Римана, для Эйнштейна Вселенная была не трехмерным дифференциальным многообразием, а четырехмерным многообразием. Четвертое измерение — это время. Другими словами, в пространстве-времени Эйнштейна каждая «точка» определена четырьмя координатами — тремя пространственными и одной временной. Например, если альпинист взбирается на гору, то первые три координаты сообщат нам широту, долготу и высоту относительно земли, а четвертая даст нам информацию, в какой момент альпинист находился в этом положении.

Более того, на сегодняшний день теория струн, справедливость которой все еще обсуждается, утверждает, что Вселенная — на самом деле дифференциальное многообразие *десяти* измерений: одного временного, как в теории относительности, и девяти пространственных. Но если бы это было так, почему мы воспринимаем только *три* пространственных измерения? Ответ, который дает эта теория, заключается в том, что как очень тонкий лист бумаги имеет три измерения (хотя, поскольку

третье измерение очень мало, кажется, что их два), так и мы можем воспринимать только три из девяти пространственных измерений, потому что остальные шесть слишком малы для восприятия «невооруженным глазом».

Подобные примеры демонстрируют, что понятие дифференциального многообразия по-прежнему остается центральным в математике и в физике. Не будет преувеличением сказать, что теория относительности Эйнштейна, современная космоло-

Свет, проходящий вблизи Солнца, искривляется из-за большой массы светила, и в результате изменяется кажущееся положение некоторых звезд.



гия, теория струн и ряд других физических теорий существуют в сегодняшнем виде благодаря идеям, которые по указанию Гаусса Риман разработал в начале 1854 года. Гаусс был уверен, что эти идеи блестящие и обладают мощным потенциалом. И как всегда, он не ошибся.

Интеграл Римана

Когда Риман представил Гауссу три темы для своей хабилитации, вопреки традиции пожилой профессор указал на третью из них. Интерес вызывает и первая тема — предложение решения проблемы, сформулированной Дирихле в 1829 году и связанной с тригонометрическими рядами. Это предложение заложило основы того, что сегодня называют *интегралом Римана*.

Ко второй половине XIX века немецкие математики условно разделились на две школы. Представители первой настаивали, что любое математическое исследование должно основываться на логике, что нельзя считать верным никакой шаг и никакой метод, справедливость которых не была установлена заранее. Эта точка зрения преобладала в Берлинском университете, и выражали ее среди прочих Леопольд Кронекер (1823–1891) и Карл Вейерштрасс (1815–1897). Вторая школа, напротив, помещала логическую строгость на второй план и отстаивала примат творчества и интуиции. Последователи такого толкования роли математиков утверждали, что она заключается в постановке новых проблем и введении новых понятий, которые позволят решать не только эти, но и сформулированные предыдущими поколениями проблемы. Логическая строгость при этом их мало беспокоила. Эту позицию можно выразить фразой из докторской диссертации Георга Кантора (1845–1918): *In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi* («В математике искусство постановки вопросов важнее искусства их решения»); под «решением вопросов» Кантор понимал «применение уже известных методов».

Среди сторонников второй точки зрения, которая преобладала в Гёттингене, были сам Георг Кантор, хоть он и учился в Берлине у Кронекера и Вейерштрасса, и Рихард Дедекинд

(1831–1916), друг Римана и ученик Гаусса. Сам Гаусс, пожалуй, был единственным, кто сумел одновременно удовлетворять требования обеих школ: этот великий ученый не только предлагал новые проблемы и создавал оригинальные понятия, но и подкреплял их безупречной логикой.

Метод Вейерштрасса был арифметическим, метод Римана — геометрическим и интуитивным. Говорить, что один лучше другого, бессмысленно, но нельзя рассматривать их с одной и той же позиции.

Эрик Темпл Белл, «Творцы математики»

Работы Римана, о которых мы говорили ранее, показывают, что ему была близка философия второй школы. Как в докторской диссертации, так и в исследовании на хабилитацию он формулировал абсолютно новые понятия и проблемы. Однако во всех статьях он давал объяснения, в большей степени основанные на интуиции или даже на физических опытах, чем на логичном развитии идей. Этот неформальный стиль изложения вызвал критику математиков первого «лагеря», в особенности Вейерштрасса, который даже усомнился в справедливости некоторых теорем, доказанных Риманом. Однако много лет спустя математик Давид Гильберт (1862–1943) переформулировал рассуждения Римана, чтобы те удовлетворяли требованиям строгого Вейерштрасса, и так ему удалось подтвердить, что теоремы, доказанные Риманом, действительно верны.

Исследование, проведенное Риманом для хабилитации, позволяет отнести его к той же школе, что и Дедекинда и Кантора. Но можно ли сказать то же самое о первой теме из тех, что выбрал Рима́н, о его любимой теме? Ответ вновь утвердительный, поскольку первое предложение Римана заключалось в создании нового метода, который расширял возможности другого метода, в конце XVII века выведенного Исааком Ньютоном (1643–1727) и Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем (1646–1716). Рима́н собирался решить проблему, сформули-

рованную Дирихле, который сам ему о ней и рассказал, когда с 1847 по 1849 год оба жили в Берлине. Итак, Риман предлагал ввести новое понятие для решения недавно поставленной проблемы, и это намерение возникло не без влияния второй школы.

ЛЮБИМАЯ ТЕМА РИМАНА

Готовясь к хабилитации, с 1852 по 1854 год Риман был абсолютно уверен, что Гаусс выберет первую тему из предложенных. Неудивительно, что именно ей он посвятил большую часть времени. Кроме того, развивая это направление, он получил неожиданную помощь: осенью 1852 года в Гёттинген на несколько недель приехал сам Дирихле. Тогда Риман писал отцу:

«На следующее утро [после праздника] Дирихле говорил со мной два часа. Он предоставил заметки, которые были нужны для моей работы на прохождение хабилитации, которые стоили бы мне долгих исследований в библиотеке. Он также прочитал мою диссертацию и отозвался о ней очень дружелюбно — намного дружелюбнее, чем я мог ожидать, учитывая существующую между нами дистанцию. Надеюсь, он еще вспомнит обо мне».

Обратите внимание: Риман говорит «для моей работы на прохождение хабилитации», а не «для моей *возможной* работы на прохождение хабилитации». Однако Гаусс неожиданно выбрал третье предложение, поэтому Риману не представилось случая изложить свое решение проблемы Дирихле, и по неизвестным причинам он даже не попытался опубликовать его. В итоге в 1867 году заметки Римана взял сам Дедекин и превратил их в статью, которая была опубликована через год, подписанная именем Римана и названная *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* («О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда»). На первой странице имеется подстрочное примечание Дедекинда от июля 1867 года, в котором говорится:

«Данный доклад был представлен автором в 1854 году на факультете философии для прохождения хабилитации в Гёттингенском университете. Похоже на то, что автор не имел намерения публиковать ее, но приведение этой работы без каких-либо изменений кажется нам оправданным — как ввиду значительного интереса к теме, так и из-за формы рассмотрения важнейших принципов анализа».

СИНУС И КОСИНУС

Функция — это *правило*, которое назначает в качестве соответствия каждому числу другое число (в этой главе мы будем рассматривать только действительные числа, а не комплексные). Первое современное определение функции в середине XVIII века дал Леонард Эйлер, считавший, что это правило обязательно должно быть выражено формулой, как, например, в случае $f(x) = 1 + x + x^2$.

Конечно, число различных функций бесконечно, однако среди них существует особая группа, отсылающая нас к статье Римана; речь о так называемых *тригонометрических функциях*, и самые главные здесь — *синус* и *косинус*. Обычно эти две функции применяют к внутренним углам прямоугольного треугольника, отсюда и название «тригонометрия» (от греческих слов *trigonos* «треугольник» и *metrom* «измерение», то есть «измерение углов»). Но мы обратимся к альтернативному определению, которое используется в высшей математике и больше соответствует нашим целям. Рассмотрим систему координат на плоскости (см. рисунок 1) и проведем окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

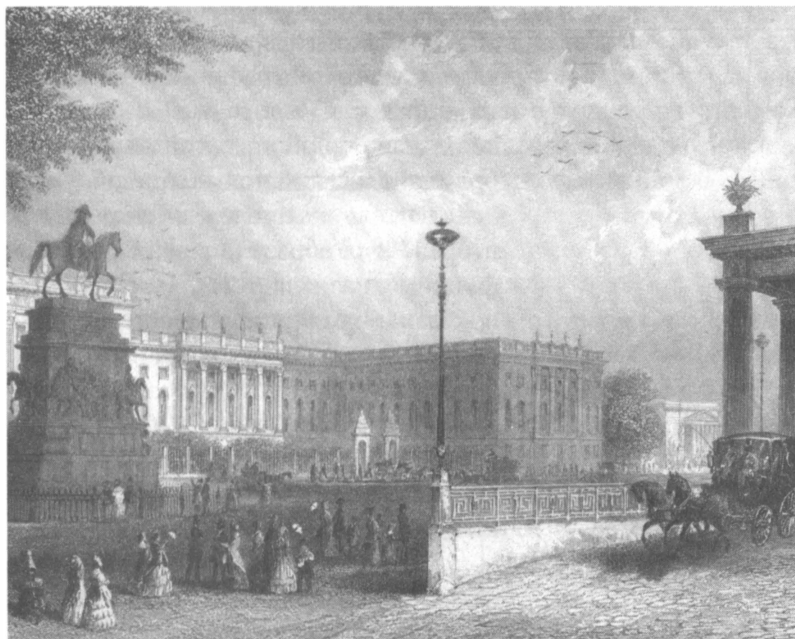
Представим себе точку P , которая движется вдоль окружности. Эта точка P начинает свой маршрут в положении $(1,0)$ и перемещается с постоянной скоростью против часовой стрелки, описывая полный круг снова и снова (см. рисунок 1). Функции синуса и косинуса определяются на основе этого движения следующим образом: если t — это расстояние, кото-



ВВЕРХУ СЛЕВА:
Готфрид Вильгельм фон Лейбниц, одновременно с Исааком Ньютоном разработавший понятие интеграла.

ВВЕРХУ СПРАВА:
Рихард Дедекинд, друг Римана, опубликовавший его статью о представлении функции посредством тригонометрического ряда.

ВНИЗУ:
Берлинский университет в середине XIX века. Риман проучился здесь два года. В этом учебном заведении отстаивалась логическая строгость математических исследований.



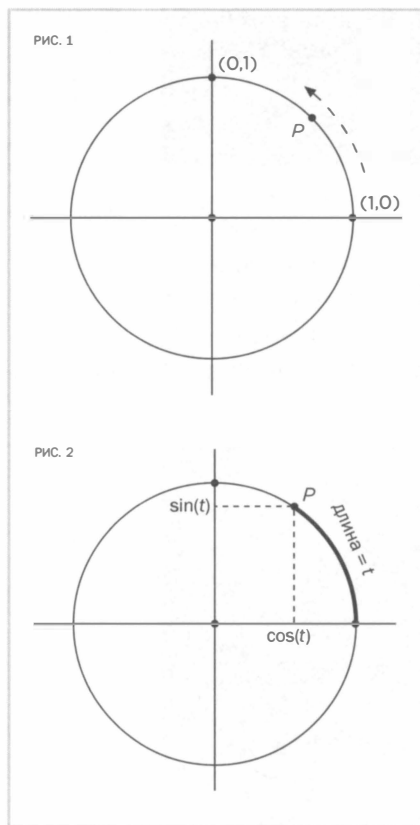
рое в определенный момент прошла точка P , то мы называем $\cos(t)$ (читается «косинус t ») первую координату положения, которое занимает точка P в это мгновение, и $\sin(t)$ (читается «синус t ») — вторую координату (см. рисунок 2).

Предположим, точка P описала четверть окружности и, следовательно, находится в положении $(0,1)$. Поскольку длина, пройденная P в этом случае, равна

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(так как *общая* длина окружности равна 2π), то

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$



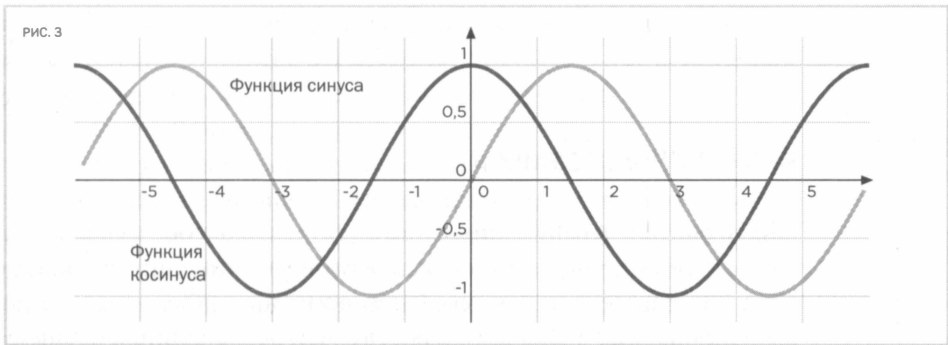
Напомним, что любая функция действительной переменной может быть представлена посредством кривой, *графика* этой функции. Напомним также, что этот график изображается на плоскости, опять же в контексте системы координат, так что первая координата каждой точки кривой — это действительное число t , в то время как вторая — это образ t (значение, которое функция назначает t). На рисунке 3 показаны графики, соответствующие синусу и косинусу. (Отрицательные значения t соответствуют расстояниям, пройденным точкой P , когда она вращается по часовой стрелке, и это направление называется *отрицательным*.)

Каждая из этих кривых имеет форму *волны*, подобно волне на поверхности воды. Среди основных характе-

ристик волны выделяют *период* и *амплитуду*. Период — это время, которое волна затрачивает на повторение, чтобы снова и снова возвращаться на одну и ту же высоту, амплитуда — это расстояние между уровнем спокойной воды и высотой самого высокого пика волны. В случае с синусом и косинусом предполагается, что точка *P* движется со скоростью, необходимой для того, чтобы за каждую пройденную секунду продвинуться на расстояние, равное 1, то есть точка *P* затрачивает 2π секунд на описание полной окружности и на последовательное возвращение в одно и то же положение. А значит, период синуса и косинуса равен 2π . На рисунке 3 показано, что амплитуда равна 1, то есть расстоянию от горизонтальной оси до наибольшей высоты, которую достигает волна.

Как период, так и амплитуда изменяются: волны на поверхности воды могут быть выше или ниже, колебание происходит медленнее или быстрее. Что касается синуса и косинуса, если бы точка *P* перемещалась с удвоенной скоростью, период волн на рисунке 3 сократился бы вдвое (поскольку точке потребовалась бы половина времени на то, чтобы совершить оборот). С другой стороны, если бы точка *P* двигалась вдоль окружности с радиусом 2 вместо окружности с радиусом 1, амплитуда увеличилась бы в два раза. Рисунок 4 — пример одной из этих «модифицированных волн», и на нем показана волна, возникшая при увеличении амплитуды вдвое и одновременном делении на 3 периода косинуса.

Графическое представление функций синуса и косинуса.



ПРОИСХОЖДЕНИЕ ТЕРМИНОВ

Слово «тригонометрия» впервые было использовано в работе *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* («Тригонометрия, или краткий и ясный трактат для решения треугольников»), опубликованной в 1595 году польским математиком, астрономом и теологом Бартоломеусом Питискусом (1561–1613). Хорду — отрезок окружности — на латыни называли *inscripta corda*, или просто *inscripta*. Половину этой хорды (на рисунке видно, что



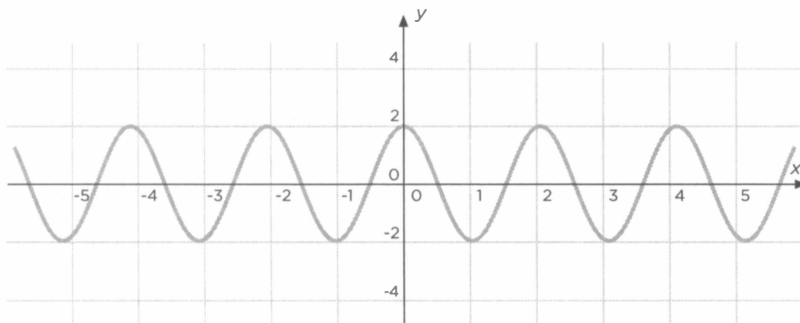
это и есть синус) называли *semis inscriptae*, что сокращалось как *s. ins.* Затем эта аббревиатура была усечена до *sins* и латинизирована — *sinus*. Слово «косинус», в свою очередь, происходит от аббревиатуры *complementi sinus*, то есть «синус дополнения». Если α — это угол между 0 и $\pi/2$, то его дополнение — это угол $\text{Хорда}/2 - \alpha$. Выходит, что $\cos(\alpha) = \sin(\text{Хорда}/2 - \alpha)$, то есть косинус угла — это действительно синус его дополнения.

Далее *базовыми волнами* мы будем называть как синус и косинус, так и все волны, получающиеся при модификации их периода и/или амплитуды. Эти базовые волны играют центральную роль в проблеме Дирихле, которую решил Риман.

БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

Эйлер считал, что функция обязательно должна быть выражена формулой. Можно ли утверждать, что функции синуса и косинуса в том виде, в каком они были описаны выше, определены таким образом? Поначалу кажется, что ответ отрицательный,

РИС. 4



поскольку оба определения касаются положений, которые постепенно занимает точка, перемещающаяся по окружности, и не похоже, чтобы здесь был задействован какой-то класс формул. Однако Эйлер доказал, что значения синуса и косинуса все-таки могут быть вычислены формулой, хотя она и включает в себя *бесконечную* сумму. Эйлер утверждал, что значения, которые принимают функции синуса и косинуса, могут быть вычислены следующим образом:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

Многоточие означает, что сумма продолжается до бесконечности. (Если n — целое число, большее или равное 1, факториалом n (записывается $n!$) называют произведение всех целых чисел от 1 до n . Так, например, $2! = 2 \cdot 1 = 2$; $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ и так далее.)

В математике сумму, образованную бесконечным числом членов, называют «рядом». Но что в действительности означает сложение *бесконечного количества* чисел? В XVIII веке операции, связанные с бесконечностью, еще не были четко определены, и для Эйлера, как и для всех его современников, сложение бесконечного количества чисел не выделялось на фоне

обычного сложения *многих* чисел — двух, ста, тысячи — и отличалось только сложностью вычисления. Однако Эйлер вскоре отметил, что такой «наивный» подход к рядам в реальности приводит к парадоксам.

Возьмем бесконечную сумму $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ и умножим ее на $1 - x$, то есть вычислим результат $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$. Каждый член из первых скобок должен быть умножен на каждый из бесконечных членов во вторых скобках:

$$\begin{aligned} & (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = \\ & = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots - x - x^2 - x^3 - x^4 - \dots = 1. \end{aligned}$$

Итак, получается, что $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$, как ни удивительно, равно 1, отсюда:

$$\begin{aligned} & (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1. \\ & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}. \end{aligned}$$

В последнем выражении возьмем $x = 2$. Тогда получаем:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots = \frac{1}{1 - 2} = -1.$$

Вывод: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$. Иными словами, сумма бесконечного количества *положительных* чисел дает *отрицательное* число -1 . Однако интуиция и здравый смысл подсказывают, что истинный результат суммы $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ должен быть бесконечным. Эйлер попытался оправдать этот парадоксальный результат, утверждая, что при некоторых обстоятельствах отрицательное число может иметь бесконечное значение, хотя, конечно же, к удовлетворительному заключению он не пришел.

Со временем благодаря выявлению подобных парадоксов математики сделали вывод, что с рядами нельзя работать как с «очень длинными суммами», что ими руководят правила, отличные от сумм, включающих только конечное число слагаемых. По этой причине в XIX веке исследования некоторых

математиков были посвящены установлению «законов», регламентирующих поведение рядов.

Норвежский математик Нильс Хенрик Абель изучал так называемые *степенные ряды*, то есть бесконечные суммы степеней x , как в случае $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$, или суммы, определяющие синус и косинус. Абель выяснил, что в этих суммах x не может быть заменен на любое число, но для каждого ряда существует довольно специфический диапазон чисел, на которые можно заменить x . В случае с $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$, например, этот диапазон предполагает все числа от -1 до 1 (исключая их оба), так что хотя в этом ряду имеет смысл заменять x на $0,5$, заменять его на 2 , напротив, смысла нет, поскольку это число находится вне установленного диапазона.

Данное условие решает приведенный выше парадокс. Ответ заключается в том, что равенство

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

просто не имеет смысла при $x = 2$. В случае с рядами, вычисляющими синус и косинус, можно доказать, что их диапазоны охватывают все действительные числа, поэтому в этих рядах переменная x может быть заменена на *любое* число. А вот работа Римана показывает очень странное свойство бесконечных сумм. Как известно, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$ дает тот же результат, что и $2 + 1 + 4 + 3 + \dots + 100 + 99$ или $100 + 97 + 99 + 98 + \dots + 3 + 1$. Другими словами, результат суммы всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке записаны слагаемые. Однако Риман доказал, что это свойство не распространяется на бесконечные суммы, по крайней мере не на *каждую* из них, поскольку некоторые ряды дают различные результаты в зависимости от того, в каком порядке записаны их члены. Рассмотрим пример.

Можно доказать, что сумма

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \dots$$

в результате дает натуральный логарифм 2 (примерно 0,693147...). Теперь перераспределим члены ряда следующим образом:

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{10}\right) + \dots$$

Вычислим результат перераспределенной суммы:

$$\begin{aligned} & 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{10}\right) + \dots = \\ & = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left[\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)\right] + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left[\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{10}\right)\right] + \dots = \\ & = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{10} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Приведенная перестановка дает результат, равный половине исходной суммы. При изменении порядка слагаемых результат суммы тоже изменился. Более того, Риман доказал, что при заданном любом действительном числе S всегда можно перераспределить сумму

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \dots$$

так, чтобы ее результат был выбранным числом S . Например, можно перераспределить слагаемые таким образом, чтобы при желании сумма была равна 0, или -287 , или числу π .

Следует подчеркнуть, что это странное свойство справедливо не для *всех* рядов. Результат многих из них будет тем же, даже если поменять местами его члены. Так происходит, например, если все слагаемые положительные или если все они отрицательные. При наличии «смешанных» положительных и отрицательных членов результат также не изменяется, если

НИЛЬС ХЕНРИК АБЕЛЬ (1802–1829)

Детство норвежского математика Абеля прошло в бедности. В то время Норвегия находилась под пятой Дании, так что ситуация в стране была неблагоприятной с политической и экономической точки зрения. Абель не имел средств на обучение в университете, но юноше помог его школьный учитель математики Бернт Микель Хольмбое (1795–1850), отметивший молодое дарование. Хольмбое хлопотал за Абеля, и тот получил стипендию, что в 1821 году позволило ему поступить в Университет Христиании в Копенгагене. Хотя Абель прожил лишь 26 лет, он успел оставить существенный след в алгебре и анализе. Так, он доказал, одновременно с Эваристом Галуа (1811–1832), невозможность решения уравнений пятой степени; он изучал так называемые «эллиптические интегралы» и внес вклад в логическое основание анализа. Абель скончался от туберкулеза в 1829 году.



ряд выполняет следующее свойство: при трансформации всех «отрицательных» знаков в «положительные» получается ряд чисел, общая сумма которых — конечное число.

Например, ряд

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{32}\right) + \dots$$

всегда будет давать один и тот же результат (равный $2/3$) вне зависимости от того, как перераспределены его члены. Это происходит из-за того, что сумма $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ дает конечный результат (равный 2). И этого не происходит в приведенном выше примере (если бы это было так, сумма при перестановке членов не изменялась бы). То есть мы

говорим, что результат от сложения $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots$ точно равен $+\infty$.

ФУРЬЕ И ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Что тогда означает термин «тригонометрический ряд»? «Ряд» — это сумма с бесконечным количеством членов; «тригонометрическими» называются функции синуса и косинуса, а значит, и все базовые волны. То есть тригонометрический ряд — это сумма, образованная бесконечным числом базовых волн. Например:

$$\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(4x) + \dots$$

Мы уже отметили, что графики базовых волн по форме напоминают волны, образующиеся на водной поверхности. Сравнение это неслучайно, поскольку все волновые, или периодические, явления математически могут быть описаны посредством подходящего сочетания базовых волн.

Первым, кто заметил связь между волновыми явлениями и базовыми волнами, был французский физик и математик Жозеф Фурье. В работе, опубликованной в 1808 году, он доказал, что любая периодическая функция $f(x)$, то есть любая функция, значения которой циклически повторяются, может быть записана в виде суммы некоего количества, конечного или бесконечного, базовых волн. Сегодня эта запись известна как *разложение $f(x)$ на ряд Фурье*, или *разложение $f(x)$ на тригонометрический ряд*.

В некотором смысле идея Фурье не была новой. В IV веке до н.э. Аристотель утверждал, что планеты (у него это были Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн) вращаются вокруг Земли по круговым орбитам. Аристотель обосновал это так: поскольку небесные объекты состоят из чистой и безупречной материи (как считалось в то время), их

движение обязательно должно быть круговым, ведь круг — это «идеальная кривая». Однако во II веке математик и астроном Клавдий Птолемей заметил, что круговая орбита не может объяснить всю сложность планетарного движения, и утверждал, что оно должно быть результатом сочетания нескольких одновременных круговых движений (см. рисунок 5).

Когда веками позже Николай Коперник (1473–1543) провозгласил, что все планеты, включая Землю, вращаются вокруг Солнца, он также развил идею, что планетарное движение включает в себе несколько круговых движений (хотя количество кругов было *меньше*, чем у Птолемея). Поскольку базовые волны на самом деле описывают круговые движения (движение точки P вокруг окружности), можно сказать, что, согласно Птолемею и Копернику, периодическое движение планет — это, как позже отметил Фурье, результат сочетания конечного количества базовых волн.

Вклад Фурье состоял в доказательстве того, что *любое* периодическое явление (а не только планетные движения) — это сумма базовых волн и эта сумма может включать бесконечное число слагаемых.

Для разложения на ряд Фурье возьмем функцию $f(x)$, ее график показан на рисунке 6. Представим, что эта функция описывает высоту, которой достигает точка, поднимающаяся и опускающаяся с постоянной скоростью по вертикальному отрезку длины 1. Точка поднимается до высоты 1, затем опуска-

ОБРАТНЫЕ КВАДРАТЫ

Эйлер доказал многие результаты, связанные с рядами. Один из них — представление синуса и косинуса в виде степенных рядов. Другой очень любопытный результат касается сумм чисел, обратных квадратным. В связи с этим Эйлер доказал, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

ется до высоты 0, затем снова поднимается и опускается, и так далее снова и снова.

Можно доказать, что разложение на ряд Фурье этой функции, то есть ее запись в виде суммы базовых волн, выглядит так:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2} \cos(5\pi x) - \frac{4}{49\pi^2} \cos(7\pi x) - \dots$$

Как видно, сумма в действительности состоит из фиксированного числа (в данном случае 1/2) и разности бесконечного количества базовых волн, каждая из которых имеет форму

$$\frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi \cdot x)$$

при нечетном n . Однако в разложении не появляется ни одной базовой волны, связанной с функцией синуса; последнее — всего лишь особенность этой функции, поскольку в других одновременно могут появляться волны синуса и косинуса.

Для Птолемея планетные движения были результатом сочетания круговых движений.

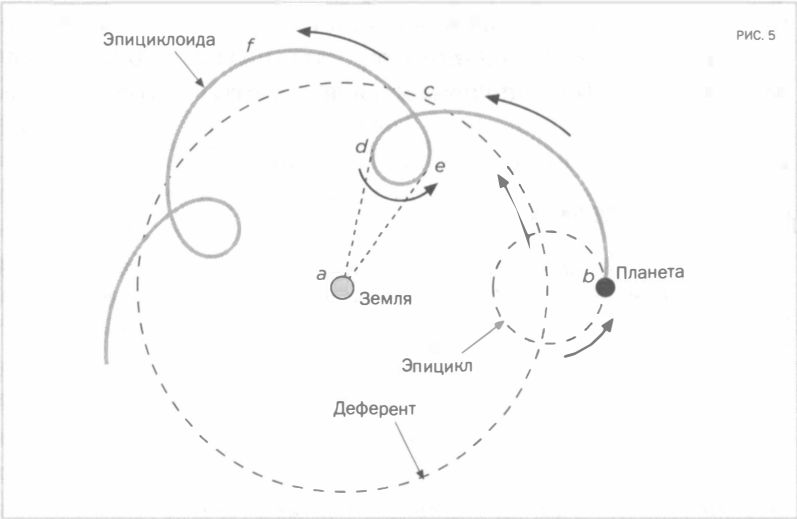


РИС. 5

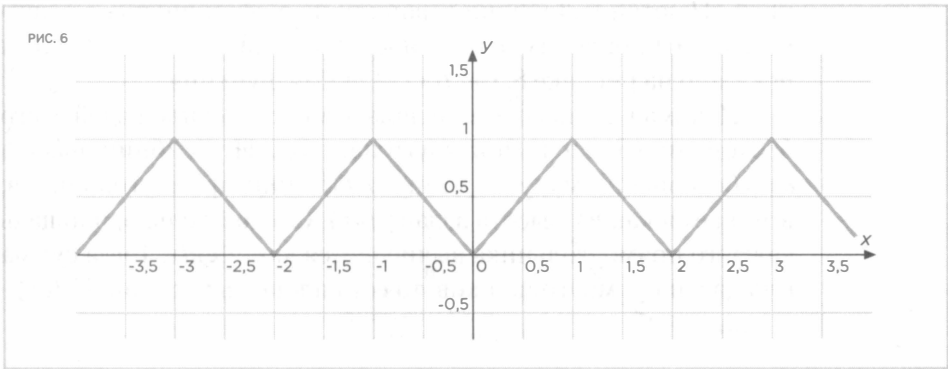
ИНТЕГРАЛ КОШИ

Любая периодическая функция, по мнению Фурье, может быть записана в виде суммы (конечного или бесконечного количества) базовых волн. Но как узнать, *каковы* эти базовые волны, которые нужно сложить? Ответ на этот вопрос слишком сложен для данной книги, но нам важно, что эта процедура включает в себя вычисление нескольких *интегралов*.

Понятие интеграла — одно из ключевых в анализе — было разработано в конце XVIII века одновременно и независимо Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем. Сегодня нахождение интеграла связано с вычислением площади области между горизонтальной осью и графиком некоторой функции $f(x)$. Например, какова площадь закрашенной области на каждом из графиков на рисунке 7?

На рисунке 7а закрашенная область — это треугольник, и, следовательно, его площадь может быть вычислена без каких-либо сложностей по хорошо известной формуле. Однако на рисунке 7б, где показана кривая косинуса, вычисление намного сложнее и совсем не поддается традиционной геометрии. Как же вычислить площадь, подобную отображенной на рисунке 7б?

Чтобы решить эту проблему, Ньютон и Лейбниц представили, что область, площадь которой нужно вычислить, состоит из бесконечного количества прямоугольников, наложенных



ЖАН БАТИСТ ЖОЗЕФ ФУРЬЕ (1768–1830)

Сначала Фурье, уроженец Осера (Франция), интересовался литературой, но в возрасте 14 лет он прочитал шеститомный математический трактат Этьенна Безу (1730–1783), и с тех пор его призванием стала математика. Фурье был одним из многих ученых, которыми окружил себя Наполеон Бонапарт, и в результате получал не только научные, но и политические должности. В бытность свою префектом департамента Изер Фурье узнал об интересе Жана-Франсуа Шампольона (1790–1832) к египетским иероглифам, тогда он вдохновил того расшифровать их, и Шампольону это действительно удалось. Фурье внес большой вклад в физику и математику, как в чистую, так и в прикладную, в области анализа и алгебры.



один на другой. Согласно этой идее, каждый из таких прямоугольников в качестве основания имеет бесконечно малый отрезок, длина которого все же отличается от нуля. Высота каждого прямоугольника, в свою очередь, была задана самой функцией (Ньютон и Лейбниц говорили не о «функциях», а о кривых, но мы приводим эти идеи к современным понятиям), как показано на рисунке 8, где $f(x)$ — любая функция.

Искомая площадь вычислялась как сумма площадей этого бесконечного числа прямоугольников. И Лейбниц назвал dx «бесконечно малую» длину оснований прямоугольников, в то время как их высота задана $f(x)$. Следовательно, площадь каждого прямоугольника вычисляется как $f(x)dx$. Тогда сумма площадей прямоугольников, то есть площадь под кривой $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Символ слева называют «интегралом $f(x)$ » и сегодня используют для выражения площади области между горизонтальной осью и графиком $f(x)$; сам символ — это деформированная латинская буква S, начальная буква слова *summa* («сумма»). (Технически, когда график проходит под горизонтальной осью, интеграл «добавляет» площади отрицательный знак: если площадь области равна 8, интеграл дает в качестве результата -8 .)

Но что означает положительное «бесконечно малое, но отличное от нуля» число? Это сложный для понимания предмет, к тому же когда его пытаются точно определить, иногда он противоречит сам себе. С рациональной позиции это «положительное число, меньшее любого положительного числа», но это

РИС. 7

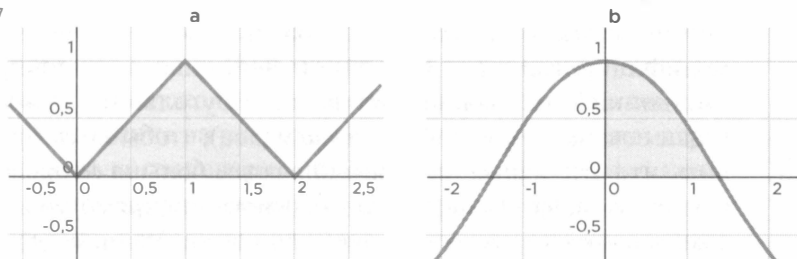


РИС. 8



приводит нас к утверждению, что оно меньше самого себя или меньше половины себя.

Ньютон и Лейбниц осознавали, что их интеграл обладает слабой логической базой, однако если принять существование этих прямоугольников с «бесконечно малым» основанием, то формулы, выводимые из этой идеи, позволяют корректно вычислять площади, которые иначе было бы невозможно найти. Более того, в течение нескольких десятилетий были обнаружены другие применения интегралам: вычисление объемов и длин кривых, решение дифференциальных уравнений и, как уже было сказано, определение базовых волн в рядах Фурье.

Параллельно росла необходимость дать интегралу строгое логическое обоснование, и первым, кому это удалось, был французский математик Огюстен Луи Коши, который дал четкое определение интегралу в 1817 году в своей книге «*Cours d'Analyse*» («Курс анализа»).

Идея Коши состояла в том, чтобы вычислить площадь под кривой с помощью последовательных приближений, и позволяла избежать «бесконечно малых» чисел». Таким образом, он модифицировал идею Ньютона и Лейбница, заменив прямоугольники с основанием dx на прямоугольники, имеющие малое основание (но не *бесконечно* малое), чтобы затем представить, что эти основания каждый раз все больше сокращаются (см. рисунок 9). По мере того как основания прямоугольников уменьшаются (а число прямоугольников увеличивается), получаются каждый раз все более точные приближения к искомой площади.

Формулы для вычисления площадей, вытекающие из определения Коши, на самом деле такие же, как и формулы, следующие из определения Ньютона и Лейбница, поэтому на практике между ними нет никакой разницы. Однако в определении Коши не упоминаются «бесконечно малые числа», и следовательно, оно логичнее. Несмотря на это преимущество, у идеи Коши есть общее слабое место с идеей Ньютона и Лейбница, поскольку ни один из троих не учел, что могут существовать *разрывные функции*, и именно поэтому, когда в 1829 году их ввел Дирихле, интеграл Коши оказался во многом устаревшим.

ПРОБЛЕМА

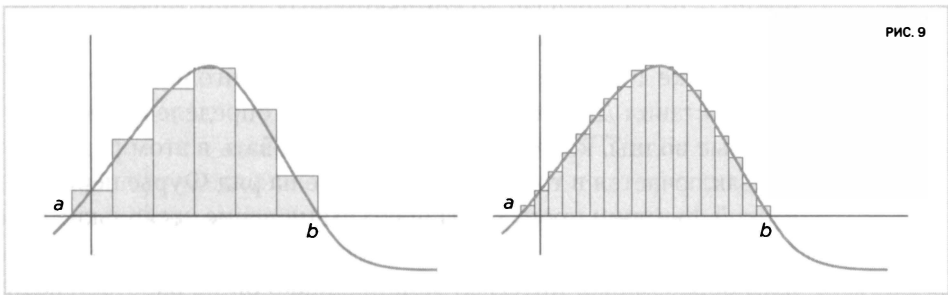
Что такое *разрывная* функция? Это функция, график которой представляет «резкие скачки», или «разрывы». Пример представлен на рисунке 10, где график образован последовательно не связанными между собой отрезков. Очевидно, что если мы попытаемся нарисовать его от точки $(0,0)$, то столкнемся с тем, что дойдя до точки $(1,0)$, карандаш должен «резко прыгнуть» вверх к точке $(1,2)$, то есть в $(1,0)$ мы натываемся на паузу, *разрыв*.

Дедекинд обычно говорил о Римане как о своем идеале в отношении математической методологии.

Хосе Феррейрос, «Теория. Журнал теории, истории и оснований науки»

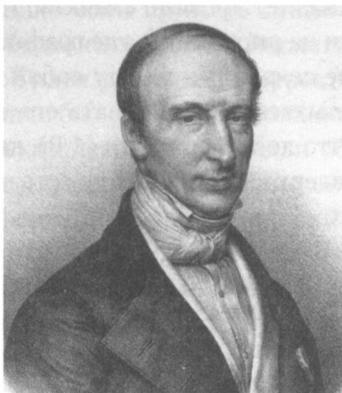
Но действительно ли мы имеем дело с графиком функции? Ответ Эйлера — нет, потому что изначально не похоже, что его удастся описать единой формулой. Однако в 1829 году Дирихле доказал, что этот график может быть получен в качестве результата суммы бесконечного числа базовых волн. Иными словами, изображение на рисунке 10 — это график тригонометрического ряда и, следовательно, *является* графиком функции. И далее Дирихле установил, что следует расширить определение функции, чтобы она включала любое правило назначения чисел, вне зависимости от того, выражена ли она формулой. Ни одно правило нельзя исключать изначально.

По мере того как основания становятся все меньше, сумма площадей прямоугольников все больше похожа на площадь под кривой.



ОГЮСТЕН ЛУИ КОШИ (1789–1857)

Коши родился в Париже, причем под счастливой звездой, ведь друзьями его отца были знаменитые французские математики Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) и Жозеф-Луи Лагранж (1736–1813), которые довольно часто у него гостили. Оба математика рано обнаружили талант Коши, и в 1805 году он поступил в Политехническую школу, которую окончил в 1807-м. В том же году юноша поступил в инженерную школу, где блистал как теоретическими знаниями, так и практическими навыками. Коши был первопроходцем в поиске логического обоснования анализа, он первым осуществил систематическое изучение условий, при которых в качестве результата ряд дает конечную сумму, а также четко определил интеграл. Коши является одним из предтеч комплексного анализа.



Сегодня функции, подобные представленной на рисунке 10, используются во многих областях инженерного дела. Для современных инженеров этот график может быть выражен последовательностью сигналов: в течение первой секунды тишина, затем сигнал постоянной интенсивности, длящийся одну секунду, затем снова тишина, затем еще один сигнал в одну секунду, и так далее. Разложение тригонометрического ряда на сигналы имеет многочисленные практические применения — от радиосвязи до компьютерных томографов.

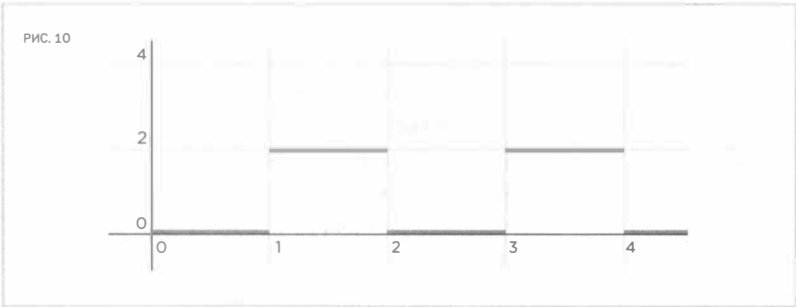
Однако факт, что функция, подобная представленной на рисунке 10, может быть разложена на тригонометрический ряд, поставил Дирихле перед проблемой определения, каковы базовые волны, которые должны участвовать в этом ряде. Ответ заключается в том, что разложение на ряд Фурье периодической функции происходит через вычисление нескольких интегралов. Но в 1829 году единственным определенным должным образом был интеграл Коши, однако он не работает, если

речь идет о разрывных функциях. При попытках применить определение Коши к функциям, подобным представленной на рисунке 10, результат, получаемый для интеграла, не всегда дает верное значение площади. Тогда Дирихле сформулировал проблему изменения определения интеграла таким образом, чтобы его можно было применять даже к случаям с разрывами. Это и стало первой темой потенциальных исследований Римана в 1852 году.

РЕШЕНИЕ РИМАНА

Риман взялся за проблему, поставленную Дирихле, и нашел определение интеграла, которое обладало смыслом, даже когда функция имела «скачки» или «разрывы». Для этого он позаимствовал идею последовательных приближений, но, в отличие от Коши, предложил брать два приближения к площади — одно *в сторону увеличения*, а другое *в сторону уменьшения* (см. рисунок 12).

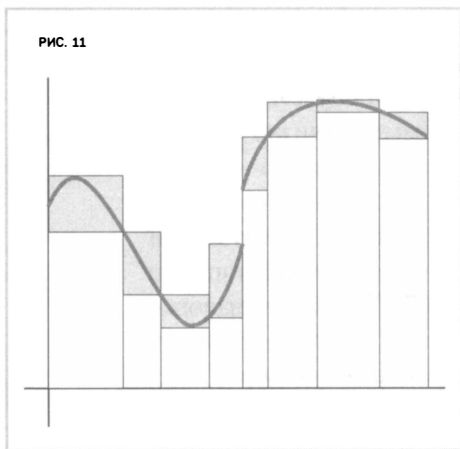
То есть Риман решил использовать *две* группы прямоугольников, чтобы приблизиться к площади. Прямоугольники одной из групп (правая часть рисунка) находятся под кривой, поэтому их площади всегда немного меньше искомых; эти прямоугольники дают нам приближение в сторону уменьшения. Прямоугольники другой группы всегда находятся над кривой (левая часть рисунка) и дают нам приближение в сторону увеличения



(площадь немного больше искомой). По мере сокращения оснований прямоугольников оба приближения все ближе подходят к значению искомой площади.

Следует уточнить, что дав определение интегралу, Риман позаимствовал идею, которую в IV веке до н. э. использовал для вычисления площади круга греческий геометр Евдокс Книдский. Чтобы произвести это вычисление, Евдокс рассматривал правильные многоугольники, вписанные в окружность и описанные вокруг нее; вписанные многоугольники дают приближение в сторону уменьшения, а вторые — приближение в сторону увеличения (рисунок 13 на странице напротив). По мере увеличения количества сторон многоугольников оба приближения все ближе подходят к искомой площади.

В работе Римана, опубликованной Дедекиндом, математик дал новое определение интегралу, изучил свойства, следующие из этого нового понятия, и доказал, что возможностей у него больше, чем у интеграла, который ввел Коши. Потому что, как этого и требовал Дирихле, определение Римана обладает смыслом и дает верное значение площади, даже когда функция имеет «скачки» (см. рисунок 11), и сегодня оно используется как в физике, так и в инженерном деле. Следовательно, *интеграл Римана*, как его называют теперь, позволяет найти разложение на ряд Фурье функций, подобных представленным на рисунке 10.



Десятилетия спустя были найдены ограничения для интеграла Римана, и как интеграл Коши терпит поражение при разрывных функциях, интеграл Римана отступает, когда количество скачков «слишком велико». И хотя функции последнего типа никогда не используются в практическом применении, француз Анри Лебег (1875–1941) в 1901 году расширил определение Римана до еще большего класса функций.

РИС. 12

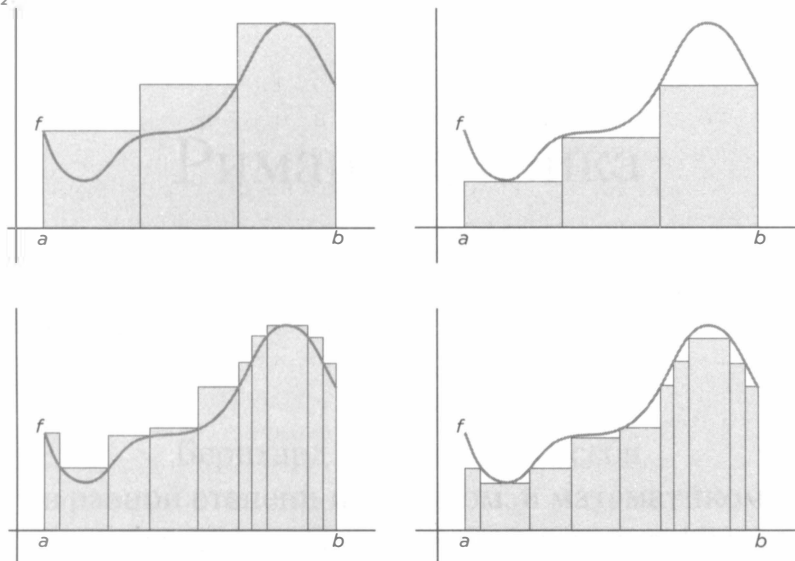
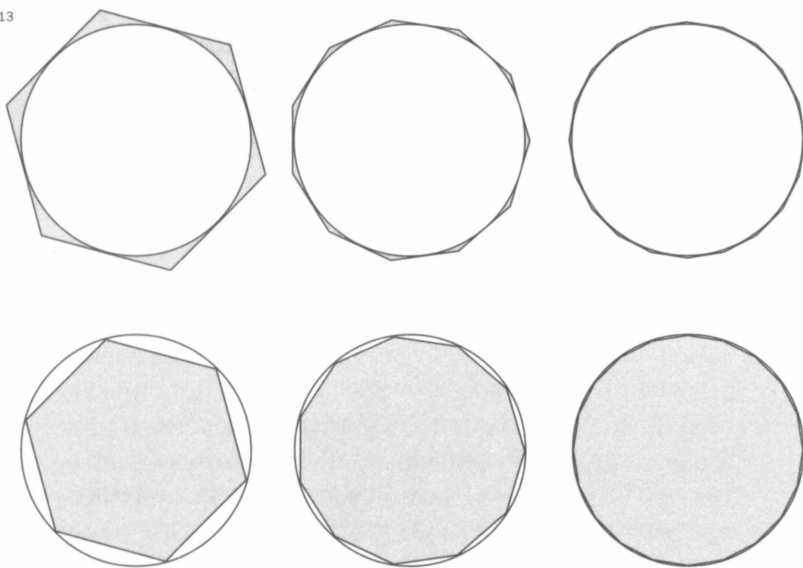


РИС. 13



Риман и физика

Бернхард Риман считал себя в равной степени и физиком, и математиком. Помимо того что большое значение для физики имеют многие из его математических трудов, довольно значительная часть работы ученого посвящена исключительно анализу физических явлений, особенно связанных с потоком электрического тока или распространением света.

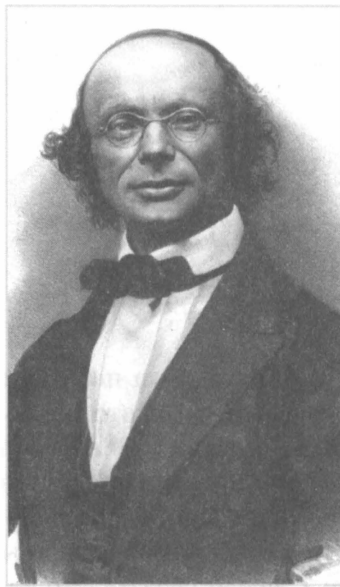
После хабилитации и небольшого отпуска в Квикборне, где жили родители и некоторые из братьев и сестер, в сентябре 1854 года Риман заступил на должность приват-доцента в Гёттингенском университете. Он не просто достиг цели, к которой стремился долгое время, но и наконец смог зарабатывать деньги, пусть небольшие, и оказывать семье материальную поддержку. Следует сказать, что из-за природной робости преподавание поначалу давалось ему нелегко, однако через некоторое время он освоился и в конце 1854 года писал сестре Иде:

«Я научился читать регулярные лекции. Моя изначальная мнительность все сокращалась, и я стал больше думать о слушателях, чем о себе, и понимать по лицам, пора переходить к другой теме или же стоит рассмотреть вопрос более подробно».

В том же письме он сообщает об успехе своего первого академического курса и о неожиданно большом числе слушателей — восемь человек, — ведь он ожидал, что их будет не больше двух. Вскоре, 23 февраля 1855 года, скончался Гаусс, и сам факт, что Риман оказался одним из кандидатов на должность главы кафедры, показывает, как уважали Римана в Гёттингене. Однако руководство университета посчитало, что он слишком

ВИЛЬГЕЛЬМ ВЕБЕР (1804–1891)

Вебер родился в Виттенберге (Германия). В 1822 году он поступил в Галльский университет, где четыре года спустя получил степень доктора физики, защитив диссертацию о механизмах воспроизведения человеческого голоса. Через год он прошел хабилитацию, исследовав ту же тему, которую он дополнил рядом статей, с 1828 по 1830 год опубликованных в журнале «*Annalen der Physik und Chemie*» («*Анналы физики и химии*»). После 1828 года его академическая репутация быстро росла, особенно когда его лекцию посетил Гаусс, который отметил выдающиеся способности молодого физика. В то время Гаусс интересовался земным магнетизмом и предложил Веберу должность в Гёттингене и совместное исследование. В результате ученые тесно сотрудничали с 1831 по 1837 год. Вдобавок к таланту ученого Вебер был блестящим лектором и имел большой успех



в этом качестве. В качестве иллюстраций к своим лекциям он показывал студентам эксперименты, что по тем временам было новинку. Он также настаивал, что в образовательных целях студенты сами должны проводить физические эксперименты, а не просто смотреть, как это делает преподаватель. Вебер был удостоен многих премий и почестей; так, в 1850 году он был избран членом Лондонского королевского общества, в 1874-м — членом Эдинбургского королевского общества, а в 1879-м — членом Американской академии искусств и наук. В 1935 году его именем была названа единица магнитного потока.

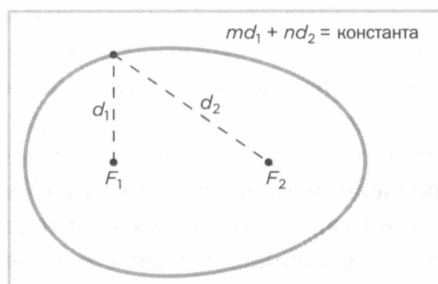
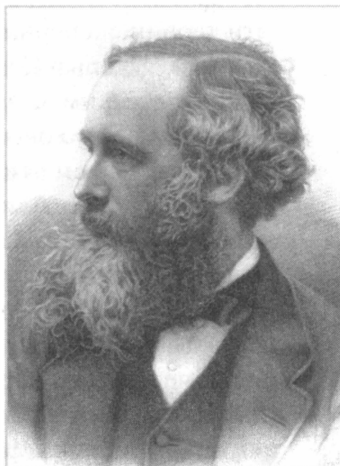
молод для такой важной должности. В итоге кафедру принял Дирихле, для чего ему пришлось переехать из Берлина.

Но вернемся в 1849 год. Напомним: Риман только что вернулся в Гёттинген, проведя два года в Берлине, и приступил

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ (1831–1879)

Математические способности шотландца Джеймса Максвелла проявились очень рано. Так, в 1846 году он написал статью об *овальных кривых*, определяя их как геометрическое место всех точек, для которых сумма расстояния до фокуса F_1 , взятого m раз, и расстояния до фокуса F_2 , взятого n раз, постоянна (см. рисунок). В этой статье Максвелл также рассматривал кривые с тремя или более фокусами. Максвелл представил работу «*Описанию овалов и многофокусных овальных кривых*» перед Эдинбургским королевским обществом 6 апреля 1846 года. И хотя многие идеи, содержащиеся в статье, не были полностью оригинальными, поскольку за два века до этого подобные темы уже изучал

Декарт, все же примечательно, что их описал и изложил 14-летний мальчик. Максвелл завершил образование в области математики в 1854 году в Кембриджском университете, где он затем вел преподавательскую и исследовательскую деятельность. Важнейшие работы ученого касаются



теории электричества и магнетизма, и пик его карьеры пришелся на 1873 год, когда он опубликовал знаменитые уравнения об отношении магнитных и электрических полей (один из столпов современной физики), сегодня они известны как *уравнения Максвелла*.

к докторской диссертации. Работая над диссертацией, Риман посещал семинар по физике, который в Гёттингенском университете вел тесно сотрудничавший с Гауссом Вильгельм Вебер.

Надо сказать, что семинар Вебера был не просто прогрессивной лекцией, это была настоящая исследовательская лаборатория. Здесь формулировали новые теории, особенно в том, что касается электромагнетизма, и проводили подкрепляющие эти теории эксперименты. Например, в 1856 году Вебер и его коллега Рудольф Кольрауш измерили отношение между электростатическим и электродинамическим зарядами частицы и выяснили, что оно равно $3,1074 \cdot 10^8$ м/сек. Именно присутствовавший при этих измерениях Риман заметил, что полученное значение близко к значению скорости света, и сделал вывод, что между распространением света и электродинамическими и электростатическими явлениями должна быть очень тесная связь. В 1905 году это было подтверждено Эйнштейном в статье «*К электродинамике движущихся тел*», в которой он впервые представил теорию относительности.

Экспериментальные данные, полученные Вебером и Кольраушем, оказались решающими и для Джеймса Клерка Максвелла, который в 1873 году разработал теорию, объясняющую связь между электричеством, магнетизмом и распространением света. Также интересно заметить, что в статье, описывающей этот эксперимент, для обозначения скорости света впервые используется буква «с», как это делается и по сей день.

ЕДИНОЕ ПОЛЕ

Риман всегда интересовался физикой. Из 14 статей (четыре были опубликованы посмертно) пять посвящены исключительно физическим явлениям, а остальные, даже если вначале затрагивают математические темы, также содержат важные выводы в области физики (в числе последних статей, например, работа по дифференциальной геометрии).

Когда в 1852 году Риман начал подготовку к habilitation, он все еще регулярно посещал семинар Вебера, но уже в качестве ассистента. Параллельно он раздумывал о выведении теории, позволившей бы разом объяснить все силы природы,

которыми на тот момент считались гравитация, электричество, магнетизм и тепло. Интенсивная работа в итоге подорвала его и без того хрупкое здоровье, и в начале 1854 года он писал сестре Иде:

«Мысль об объединении всех физических законов так поглотила меня, что когда мне сообщили тему выступления [хабилитации], оставить исследования я уже не мог. Отчасти из-за этих размышлений, отчасти из-за постоянного нахождения в замкнутых пространствах в это неприятное время года я заболел. Старые недуги вновь напомнили о себе, и продолжать работу стало невозможно. Через несколько недель, когда улучшилась погода, я почувствовал себя лучше».

Насколько известно, Риман был первым, кто решил рассмотреть все силы природы в рамках одной теории, позже Эйнштейн назвал это «проблемой единого поля». И пусть Риман так и не пришел к какому бы то ни было заключению, его физические и философские рассуждения 1852–1866 годов были собраны и опубликованы в *«Анналах физики и химии»* в 1867-м под заголовком *«Вклад в электродинамику»*.

Кроме уже упомянутого замечания, что теория электричества и магнетизма близка теории распространения света, в статье представлена идея, что любая сила, действующая между двумя частицами, должна распространяться с конечной скоростью. Это противоречило доминировавшей в то время теории Ньютона, согласно которой существует мгновенное действие — вне зависимости от того, каково расстояние. Риман отождествляет эту скорость распространения со скоростью света, и этот прогноз был подтвержден Эйнштейном и стал одним из столпов теории относительности.

В любой области математики, которую он [Риман] принимался исследовать, математический космос начинал сиять доселе невиданным светом.

ЭГМОНТ КОЛЕРУС, «КРАТКАЯ ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ»

Сегодня известно, что фундаментальных сил природы действительно четыре, но это не те силы, которых подразумевались в середине XIX века. Речь об электромагнитной силе, тяготении, а также двух силах, действующих на субатомном уровне, — сильном ядерном взаимодействии и слабом ядерном взаимодействии. Однако, несмотря на определенные достижения в области их объединения в контексте одной теории (электромагнитную силу удалось объединить со слабым ядерным взаимодействием), на момент написания этих строк проблема единого поля все еще не имеет решения.

ВТОРАЯ ТЕМА

В главе 3 была рассмотрена первая тема, которую Риман представил Гауссу в качестве варианта исследования для хабилизации. Тема заключалась в поиске решения проблемы, поставленной Дирихле, относительно рядов Фурье. Решение этой проблемы в итоге привело Римана к определению интеграла, названного его именем. В главе 2 было обрисовано содержание третьего варианта Римана, на него-то и пал выбор Гаусса; эта тема предполагала определение фундаментальных понятий дифференциальной геометрии. Таким образом, нам остается проанализировать *второй* вариант, представленный Риманом своему наставнику.

Открытие электричества, точнее электростатики, приписывают великому математику и астроному Фалесу Милетскому. Фалес первым заметил, что если натереть янтарную палочку шерстяной тканью, та начнет притягивать мелкие предметы, а если натирать ее с большей энергией в течение продолжительного времени, возникает искра. Само слово «электричество» происходит от слова *electron*, что по-гречески означает «янтарь».

Однако несмотря на столь давнее открытие, исследования, которые были бы связаны с электрическими явлениями, не проводились веками, дело не двигалось дальше отдельных

наблюдений, и лишь в начале XVIII века их стали изучать систематически. В октябре 1745 года голландец из Лейденского университета Питер ван Мушенбрук (1692–1761) и немец Эвальд Георг фон Клейст (1700–1748) одновременно и независимо разработали устройство, которое позже (из-за большей популярности ван Мушенбрука) было названо *лейденской банкой*.

Упомянутая *банка* — это механизм, способный накапливать электрические заряды. Ее первоначальная конструкция состояла из стеклянного закрытого сосуда, частично наполненного водой, с гвоздем, который выходил из крышки и одновременно контактировал с жидкостью. Банка заряжалась, соединяясь через наружный конец гвоздя с источником электростатического электричества (обычно образованного трением). Устройство было способно удерживать заряды в течение нескольких часов и производить разряды при контакте с человеком (как правило, экспериментатором).

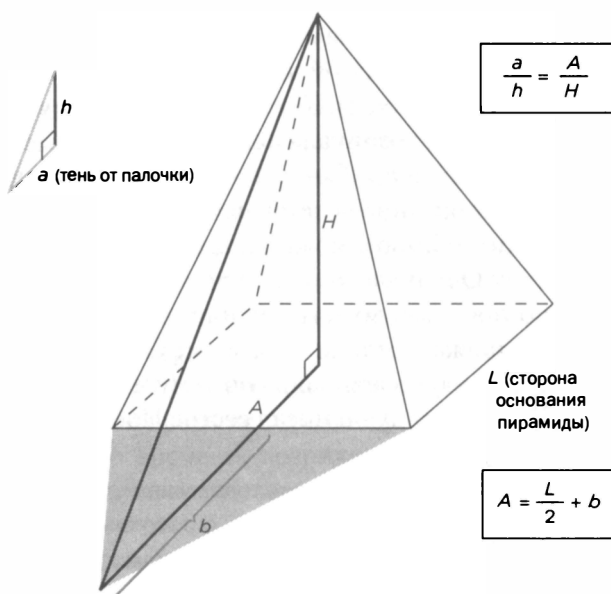
В последующих конструкциях вода была заменена металлическими пластинами (см. рисунок 1), которые покрывали внутреннюю и внешнюю поверхности сосуда. Зарядив устройство, один из концов согнутой дугой проволоки соединяли с внешней пластиной (см. рисунок 2). Когда другой конец дуги приближали к шляпке гвоздя, возникала искра.

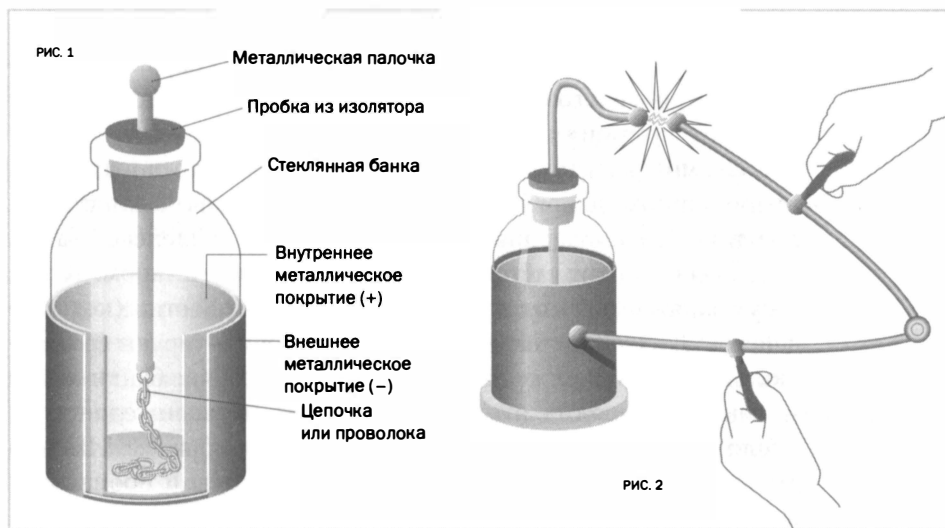
Если после разряда оставить банку в состоянии покоя на несколько минут, она спонтанно восстанавливает часть предыдущего заряда, и таким образом можно получить (не заряжая банку) вторую искру. Очень часто это явление «спонтанной подзарядки» может повторяться до четырех или пяти раз подряд. Почему банка подзаряжается таким образом? Этот вопрос Риман обозначил как вторую потенциальную тему исследования для habilitation. В 1854 году он писал сестре Иде:

«Вебер и его сотрудники выполнили очень точные измерения явления, которое до сих пор не было объяснено: остаточный заряд лейденской банки. Я сообщил им свои соображения на этот счет, ведь я разработал теорию специально для данной цели. Я нашел объяснение связи между электричеством, светом и магнетизмом

ФАЛЕС МИЛЕТСКИЙ (ОК. 624–547 ДО Н. Э.)

О Фалесе Милетском известно очень мало, поскольку самые ранние письменные свидетельства о нем и его работе восходят к авторам, жившим веками позже. Фалес родился и умер в Малой Азии, в городе Милете (территория современной Турции), который тогда был греческой колонией. Вероятно, Фалес был политиком, философом, математиком и астрономом, а также одним из семи мудрецов Древней Греции. Ему приписывают идею, что природные явления не вызваны божественными существами, а имеют рациональное объяснение, которое становится результатом наблюдения и размышления. Ему, возможно, принадлежала идея, что истинность математических утверждений должна быть доказана посредством общих рассуждений. Знания в области астрономии позволили ему предсказать полное солнечное затмение, которое наблюдали в Греции в 585 году до н.э. Фалес вычислил высоту великой пирамиды Хеопса, используя лишь палочку и знание геометрии. Решение было следующим: мы имеем $a/h = A/H$, где a и h известны, а A можно вычислить, зная L и длину тени пирамиды (см. рисунок). С помощью этих данных можно вычислить H , высоту пирамиды.





[речь об исследовании единого поля]. Этот вопрос очень важен для меня, поскольку я впервые сумел применить свои знания к еще не изученному явлению, и надеюсь, что публикация поспособствует благоприятной оценке моей работы».

Риман озаглавил эту работу «О законах распределения статического электрического в материальных телах, когда последние не могут рассматриваться как абсолютные проводники или изоляторы» и представил ее Гёттингенскому королевскому научному обществу в сентябре 1854 года. Позже он послал ее в журнал «*Анналы физики и химии*», однако статья так и не была опубликована, поскольку Риман не согласился с некоторыми правками, предложенными редакторами. Так что единственные письменные свидетельства об этой работе коротко обозначены лишь в документации Общества.

В этой работе Риман отказывается от дуальной теории заряда, которой придерживался Вебер и в которой утверждается, что электричество — это поток двух типов частиц: положительных и отрицательных. Риман принимает *унитарную* гипотезу, предложенную Бенджамином Франклином (1706–1790), согласно которой есть один тип электрических частиц, заряд

Принцип работы лейденской банки очень прост. Чтобы зарядить устройство, наружный конец палочки натирается сукном. Чтобы разрядить его, как показано на рисунке 2, применяется металлическая деталь, связанная с внешним покрытием банки.

которых отрицателен. Для объяснения самого явления Риман постулировал существование тенденции тел к сохранению своего электрического состояния, разновидности «электрической инерции материи».

Несмотря на то что статья Римана содержит много верных идей (например, аргументы в пользу гипотезы Франклина), сегодняшнее объяснение остаточного заряда лейденской банки существенно отличается от предложенного Риманом. Когда сосуд заряжается, молекулы металлических пластин (которые действуют здесь как маленькие магниты) ориентируют свои полюса в одном и том же направлении. При разряде банки не все молекулы «теряют» эту направленность, и значительное их число остается ориентированным таким же образом. Именно эти «сохраняющие направленность» молекулы и производят остаточный заряд.

ПОСЛЕ ХАБИЛИТАЦИИ

Пройдя хабилитацию, Риман продолжил исследования в области физики и в 1855 году опубликовал в *«Анналах физики и химии»* статью под названием *«К теории цветных колец Нобили»*. Итальянский физик Леопольдо Нобили родился в 1784 году в Трассилико (Тоскана) и скончался в 1835 году во Флоренции. Помимо прочих достижений, он изобрел ряд инструментов, которые использовались при исследовании термодинамики и электрохимии, среди них гальванометр (инструмент, служащий для обнаружения и измерения электрического тока). Ему также приписывается открытие колец, названных затем его именем и появившихся в заголовке работы Римана. Чтобы получить кольца, с помощью платиновой проволоки золотую или серебряную пластину соединяют с отрицательным полюсом батареи; далее пластина помещается перпендикулярно раствору сульфата меди (или ацетата свинца), и цепь замыкается. Тогда можно наблюдать, как на пластине образуются концентрические кольца различных цветов, очень интен-

сивные, варьирующиеся в зависимости от состава раствора или пластины.

В статье Риман предлагает объяснение явления, в основе которого — теоретическое исследование распространения и распределения электрического тока в проводнике. Он отталкивался о работ немецкого физика Эмиля Дюбуа-Реймона (1818–1896), улучшив его расчеты и пересмотрев гипотезы. Относительно этого исследования 9 октября 1854 года Риман писал сестре Иде: «Эта тема важна, поскольку можно выполнить очень точные измерения и выверить законы электричества». Однако в перспективе его работа не оказала большого влияния на теории о распространении электрических токов.

В 1856 году, спустя некоторое время после публикации статьи о кольцах Нобили, переутомление вновь сказалось на его здоровье. У Римана случился нервный срыв, и по совету врачей он отправился на несколько месяцев в горный район Гарца, примерно в 30 километрах к северо-востоку от Гёттингена. Там он прогуливался с друзьями, но поскольку многие из них, в том числе Дедекинды, были его коллегами, разговоры велись опять же о физических теориях.

После перерыва Риман вернулся в университет и на следующий год осуществил свою работу по электродинамике. О ней он писал сестре Иде:

«Мое открытие имеет отношение к тесной связи, существующей между электричеством и светом. Я послал его в [Гёттингенское] Королевское общество. Насколько мне известно, Гаусс также вывел теорию об этой тесной связи, отличную от моей, но он изложил ее только самым близким друзьям. Однако я полностью убежден, что моя теория точна и что через несколько лет она будет признана в таком виде».

Тем не менее теория Римана была отвергнута. В 1859 году он снова представил ее Гёттингенскому Королевскому научному обществу под названием «*О распространении плоских волн конечной амплитуды*» и затем опубликовал в 1860 году. Это 22-страничная статья, одна из самых объемных у Римана,

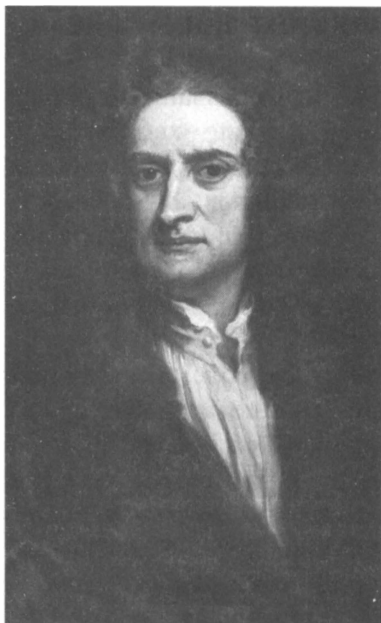
в которой он решал уравнения, описывающие движения газов в различных условиях давления и температуры.

Работа, выполненная им после 1854 года и также нацеленная на объяснение физического явления, — это *«Исследование движения однородного флюида в эллипсоиде»*, опубликованная, как и предыдущая, в 1860 году.

Эллипсоид — это тело, которое может быть описано как шар, приплюснутый или удлинённый в некоторых направлениях (см. рисунок 3), он не сильно отличается от мяча для регби (его можно описать как «трехмерную версию» эллипса, отсюда и название).

В статье Риман анализировал эллипсоиды, состоящие из гомогенного газа («однородный флюид» из заголовка), который он рассматривал как состоящий из точечных изолированных частиц, подверженных действию силы тяготения. Риман изучал эволюцию осей эллипсоида, то есть варьирование их длин с течением времени, а также вращение вокруг них различных элементов тела. Идея рассматривать газы как образованные точечными частицами предваряет идею, много лет спустя ставшую одной из основных гипотез статистической механики Людвиг Больцмана.

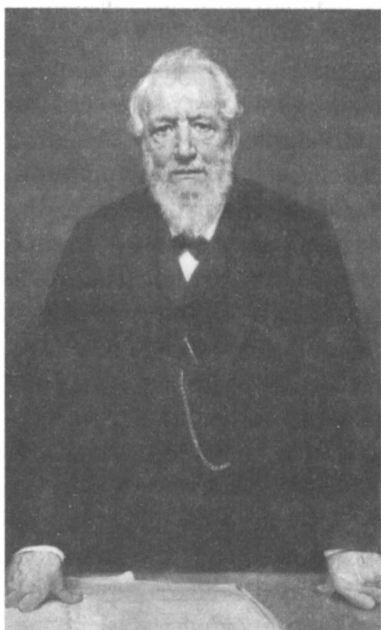
Любое облако газа или пыли, которое вращается вокруг самого себя в пространстве и в состоянии покоя имеет сферическую форму, под действием *центробежной силы* (неудачное название, поскольку речь об инерции «в действии») принимает форму эллипсоида, и именно поэтому звезды — на самом деле вращающиеся эллипсоиды. Но планеты также были образованы сгущением облаков газа и пыли эллипсоидальной формы, так что звездные скопления тоже имеют такую форму (на данном уровне можно считать, что каждая звезда действует как изолированная частица). Поэтому неудивительно, что работа Римана оказалась применима к анализу формы небесных тел и звездных скоплений.



ВВЕРХУ СЛЕВА:
Исаак Ньютон.
Среди его
многочисленных
достижений —
решение
проблемы
брахистохроны.



ВВЕРХУ СПРАВА:
Леопольдо
Нобили,
итальянский
физик,
изложивший
теорию цветных
колец, названных
его именем.

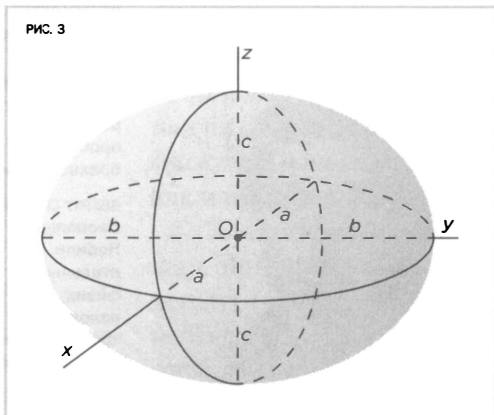


ВНИЗУ СЛЕВА:
Немецкий
физиолог Эмиль
Дюбуа-Реймон.
Риман обращался
к его работам,
готовя статью
о кольцах
Нобили.



ВНИЗУ СПРАВА:
Портрет
Римана, уже
опубликовавшего
основные
математические
работы, 1863 год.

РИС. 3



БРАХИСТОХРОННАЯ КРИВАЯ

Кроме вышеназванных произведений, после хабилитации Риман написал две работы, имеющие большую значимость для последующих десятилетий. Первая статья, опубликованная в 1857 году, посвящена *абелевым функциям*, в основе второй (1859) — проблема, связанная с тем, что сегодня известно как *дзета-функция Римана*.

Работа об абелевых функциях так и называется — *Theorie der Abel'schen Functionen* («Теория абелевых функций»). Она опубликована на страницах 101–155 тома 54 (1857) очень престижного журнала *Journal für die reine und angewandte Mathematik* («Журнал чистой и прикладной математики», более известный как «Журнал Крелля»; его основателем был немецкий математик Август Леопольд Крель).

Хотя абелевы функции и носят имя Нильса Хенрика Абеля, их история все же началась более чем за век до рождения этого норвежского математика. В конце XVII века Ньютон сформулировал закон тяготения и основные законы движения и (одновременно с Лейбницем) создал дифференциальное исчисление — математический «инструмент», который быстро стал основным для описания физических законов Ньютона, а также следствий из них. После этих открытий многие математики взялись за постановку и решение различных физических проблем, связанных с движением земных и астрономических объектов. Так с невиданной доселе точностью были вычислены орбиты комет и решены проблемы баллистики, а также ряд других проблем.

Именно в таком контексте в 1696 году швейцарский математик Иоганн Бернулли сформулировал проблему *брахистохроны* (от греческого *brachistos*, что означает «краткий», и *chronos* — «время»). В этой проблеме предлагается опреде-

ЛЮДВИГ БОЛЬЦМАН (1844–1908)

Больцман родился в Вене и получил степень доктора физики в университете этого города в 1866 году. Больцман известен своим открытием *статистической механики*, сделанным в 1870-е годы. Центральная гипотеза заключается в том, что газы и другие вещества состоят из частиц, движущихся произвольно, и именно случайное движение этих частиц определяет свойства материи. Идеи были полностью отвергнуты научным сообществом, поскольку они предполагали обратимость некоторых явлений, считавшихся необратимыми. Если мы оставляем флакон духов без пробки в закрытой комнате и позволяем духам испаряться, статистическая механика Больцмана говорит, что существует вероятность (хотя она мала), что молекулы духов в своем произвольном движении спонтанно вернуться в бутылку и она вновь заполнится. Выводы такого рода считались абсурдными, эту теорию критиковали в течение многих лет. В конце концов 5 октября 1906 года и без того склонный к депрессии Больцман покончил с собой. Он так и не узнал, что за несколько месяцев до этого Альберт Эйнштейн опубликовал статью о броуновском движении, где гипотезы Больцмана были подкреплены математически; более того, в течение следующего десятилетия благодаря развитию атомной теории их проверили экспериментально.



лить, какую форму должен иметь склон, чтобы время, затраченное на падение объекта вдоль него, было наименьшим возможным (без учета возможного трения). Другими словами, какой траектории должно следовать тело, чтобы от *A* достичь *B* (см. рисунок 4) за наименьшее возможное время, если на него будет действовать только сила тяготения?

Проблему уже формулировали различные математики и физики несколькими веками ранее, среди них Галилео Галилей (1564–1642), но ответ так и не был найден. Однако Бер-

ИОГАНН БЕРНУЛЛИ (1667–1748)

Бернулли родился в Базеле (Швейцария) и в 1683 году поступил в университет этого города с намерением изучать медицину. Но под влиянием старшего брата Якоба (также известного математика) он начал все больше интересоваться математикой, пока в итоге она не стала его профессией. Однако в докторской диссертации и первых работах ему удалось сочетать оба интереса, поскольку они были посвящены применению математики в медицине. Его долгая жизнь отмечена значительными достижениями в разработке дифференциального исчисления, которое в то время было недавним открытием; он расширил его методы и применил их к решению физических и астрономических проблем таким блестящим способом, что в итоге получил прозвище «Архимед своего времени», которое высечено на его надгробии.



нулли считал, что после открытий Ньютона и Лейбница физика и математика уже достаточно «созрели» для решения этой проблемы.

Можно было бы подумать, что путь от A до B должен быть прямолинейным, поскольку это самый короткий путь. Ответ был бы верным, если бы при падении объект все время двигался с постоянной скоростью. Однако в реальности при падении скорость увеличивается, и это происходит тем быстрее, чем более отчетлив склон. Следовательно, лучшая стратегия — взять кривую, которая была бы «более крутой» в начале, чтобы быстро набрать скорость, и только постепенно направлялась бы к конечной точке. Это общая идея решения, но в действительности проблема требовала *точного* математического описания данной кривой (Галилей ошибочно полагал, что решением является дуга окружности).

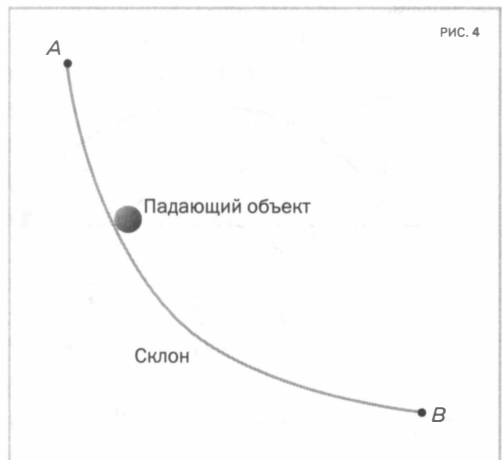
Когда в 1696 году Бернулли бросил этот вызов всем европейским математикам, он не ждал быстрого ответа. Однако, ко всеобщему удивлению, проблема была решена за очень короткое время Исааком Ньютоном. Англичанин был сердит на математиков остальной Европы, поскольку те приняли сторону Лейбница в их полемике за первенство открытия дифференциального исчисления (сегодня принято считать, что открытие сделали оба, причем независимо друг от друга). Из-за этого Ньютон предпочел представить свое решение анонимно, но Бернулли без труда опознал автора блестящего рассуждения: «льва узнают по когтям» — сказал он по этому поводу.

Ответ на проблему заключается в том, что кривая, по которой падение занимает наименьшее возможное время, — это *дуга циклоиды*, то есть кривой, описываемой точкой, которая закреплена на конце колеса, когда оно вращается по плоскому пути без скольжения (см. рисунок 5).

Интересно отметить, что сегодня этот ответ имеет конкретное практическое применение: например, надувные трапы, служащие для эвакуации пассажиров из самолета, имеют форму дуги циклоиды именно для того, чтобы сберечь драгоценные секунды в чрезвычайной ситуации.

АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Как проблема брахистохроны связана с абелевыми функциями? Математики XIX века, и Нильс Абель в их числе, серьезно пересмотрели методы дифференциального исчисления и регламентировали его возможности и реальное применение. Так, в 1826 году Абель переформулировал решение Ньютона проблемы брахистохроны, чтобы



адаптировать его к новым стандартам точности того времени, для чего он переформулировал проблему с помощью *интегрального уравнения*.

Вспомним, что если $f(x)$ — это функция действительной переменной, график которой находится над горизонтальной осью, то *интеграл* $f(x)$ вычисляет площадь области, заключенной между этой горизонтальной осью и графиком функции.

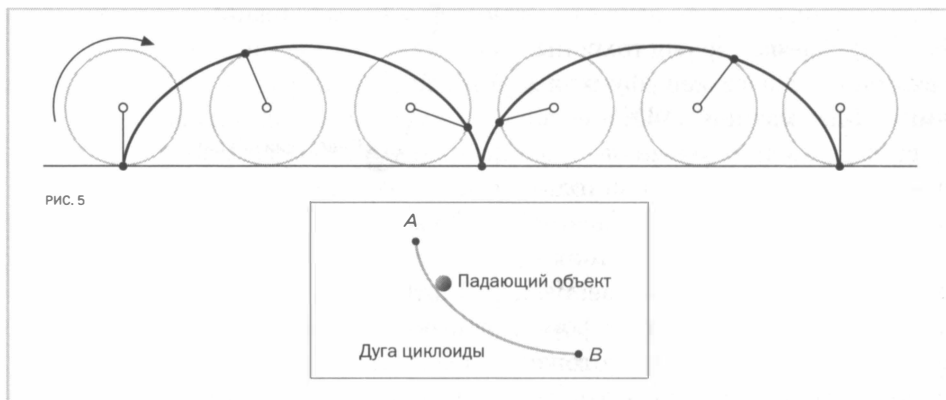
Теперь представим, что $f(x)$ — это неизвестная функция, о которой мы знаем, каким образом изменяется площадь под ее графиком по мере увеличения значения x (см. рисунок 6).

Очень вероятно, что если бы Риман прожил еще 20 или 30 лет, он стал бы Ньютоном или Эйнштейном XIX века.

Эрик Темпл Белл, «Творцы математики»

Проблема нахождения неизвестной функции $f(x)$ при известном способе изменения ее интеграла — это проблема решения *интегрального уравнения*. Позже интегралы, подобные сформулированным Абе́лем, которые нашли применение как в физике, так и в чистой математике, назвали *абелевыми интегралами*, а их решения — *абелевыми функциями*.

Циклоида
и (внизу)
решение
проблемы
брахистохроны.

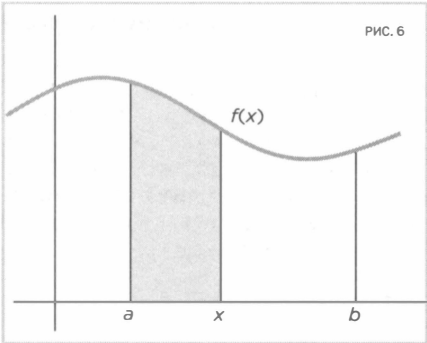


Следует сказать, что проблема брахистохроны входит в гораздо более обширную группу проблем, в каждой из которых ищут кривую или поверхность, обеспечивающую, чтобы некая величина была минимальной. В случае с брахистохрой, например, нужно, чтобы на падение объекта из точки A в точку B на рисунке 4 (страница 127) было затрачено минимальным время.

В другой знаменитой проблеме этого типа из всех поверхностей, заключающих в себе заданный объем, нужно найти ту, площадь которой минимальна. Вопрос мог быть сформулирован так: если мы хотим изготовить банку емкостью в один литр, какую форму она должна иметь, чтобы количество материала было наименьшим из возможных? Ответ на этот вопрос следующий: для достижения такой цели банка должна иметь сферическую форму; поверхность с наименьшей площадью, способная заключать в себе заранее установленный объем, — это всегда поверхность шара. Данное решение объясняет, почему мыльные пузыри имеют форму шара: потому что пузырь стремится минимизировать поверхностное натяжение, а добиться этого можно именно минимизацией площади мыльной пленки.

В работе 1857 года Риман вернулся к уравнениям Абеля и использовал их для постановки новых проблем минимизации, которые он решил, искусно сочетая физические и математические рассуждения. Риман воспользовался тем, что он назвал *принципом Дирихле*; в общих чертах принцип сводится к тому, что все физические явления всегда развиваются в сторону «приложения наименьшего возможного усилия» (например, мыльные пузыри минимизируют поверхностное натяжение, свет перемещается по самому короткому пути, и так далее). Дабы избежать путаницы, следует сказать, что только Риман называл это утверждение «принципом Дирихле».

Хотя Риман не решал проблему наименьшей поверхности, заключающей заданный объем, с ее помощью



мы можем показать ход его размышлений. Если бы Риман решал проблему наименьшей поверхности, он сформулировал бы уравнения, описывающие ее, и заметил бы, что она равносильна проблеме минимизации поверхностного натяжения мыльного пузыря, и поскольку они всегда имеют сферическую форму, он сделал бы вывод, что решение проблемы — это действительно шар. То есть физическое наблюдение позволило бы сделать вывод о математическом решении проблемы.

Важно подчеркнуть, что мы дали чрезвычайно упрощенное описание идей, содержащихся в работах Римана, а ведь были и топологические идеи, разработанные им в рамках докторской диссертации. С другой стороны, физические явления, которые Риман рассматривал в своей статье, как и во многих его работах, были связаны с распределением электрических зарядов. Риман вывел ряд теорем теории абелевых функций, размышляя над простыми экспериментами в области электрического тока в тонких пластинах.

В этой статье Риман настолько показал всю оригинальность и глубину своей мысли, что математик Феликс Клейн (1849–1925) написал в книге *«Лекции о развитии математики в XIX столетии»* следующее:

«Когда Вейерштрасс отправил в Берлинскую академию в 1857 году первое общее исследование абелевых функций, статья Римана на эту тему уже была опубликована в *«Журнале Крелля»* за номером 54. В статье присутствовало столько новых и неожиданных понятий, что Вейерштрасс отозвал свою работу и так и не опубликовал ничего на эту тему».

Гипотеза Римана

В 1900 году на вступительной лекции Второго Международного конгресса математиков Давид Гильберт озвучил 23 проблемы, которые, по его мнению, должны были направлять математические исследования в XX веке. Одна из них известна как гипотеза Римана, поскольку в 1859 году ее сформулировал Бернхард Риман. Эта проблема не решена и по сей день и является ключом к доказательству ряда гипотез, связанных с простыми числами.

Густав Лежён Дирихле скончался 5 мая 1859 года, и его кафедра в Гёттингене, которую до 1855 года занимал Гаусс, снова оказалась вакантной. Напомним, что в 1855 году руководство университета посчитало Римана недостаточно зрелым для вступления в эту должность. Однако в 1859 году ситуация была уже другой, поскольку публикация исследования абелевых функций прославила его в кругах европейских математиков. Так что руководство Гёттингена пересмотрело свое отношение к Риману, и в результате 30 июля 1859 года он стал ординарным профессором математики в Гёттингенском университете.

Но это стало не единственным академическим достижением Римана в тот год: чуть позже его избрали членом Берлинской академии наук. Одним из тех, кто предоставил ему свою рекомендацию, был Карл Вейерштрасс, он писал:

«До публикации своей последней работы [«Теория абелевых функций»] Рيمان был почти неизвестен математикам. В некоторой степени это обстоятельство освобождает от необходимости более детально анализировать его работы, чтобы обосновать настоящее ходатайство. Считаем своим долгом привлечь внимание Академии к нашему коллеге, в лице которого мы рекомендуем не юное дарование, подающее большие надежды, а полностью

сформировавшегося и независимого исследователя в нашей области науки, прогресс в которой во многом им и обеспечен».

Может показаться странным, что Вейерштрасс отметил, будто Риман был «почти неизвестен», и не упомянул его работы в области дифференциальной геометрии или ту, в которой он определил *интеграл Римана*. Однако следует учесть, что хотя обе статьи были закончены в 1854 году, опубликовал их он лишь в 1868-м.

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС (1815–1897)

Вейерштрасс родился в Остенфельде (Германия) и уже в школе проявил незаурядные способности к математике. Он регулярно читал «Журнал Крелля» и обучал братьев. Однако отец хотел, чтобы юноша посвятил себя экономике, и в 1834 году Вейерштрасс поступил в Боннский университет, чтобы изучать право, финансы и экономику. И все же математическое призвание одержало верх, Вейерштрасс оставил университет и занялся предметом самостоятельно: читал работы Лапласа, Якоби и других знаменитых математиков. В итоге, получив разрешение отца, в 1839 году он поступил в Мюнстерскую академию теологии и философии, чтобы стать преподавателем математики в средней школе. Вейерштрасс начал работать учителем в 1842 году и одновременно занялся исследовательской деятельностью, отправив ряд



статей в «Журнал Крелля». Успех его работ был столь велик, что даже несмотря на отсутствие степени доктора наук ему предложили в 1856 году должность преподавателя в Берлинском университете, и Вейерштрасс немедленно согласился. Его работы, которые стали большим вкладом в обоснование анализа, отличались высокими требованиями к логической строгости.

Через год после этих событий, в 1860 году, Риман отправился в Париж, где познакомился с известными французскими математиками, в числе которых был Шарль Эрмит (1822–1901), одобрительно высказавшийся о его работах. Кроме того, он стал членом Французской академии наук, а также Лондонского королевского общества.

Таким образом, к Риману пришло заслуженное признание. Личная жизнь также вселяла надежды. Увеличенное в связи с получением новой должности жалование позволило ему усилить материальную помощь семье. В июне 1862 года он женился на подруге своих сестер Эльзе Кох, и спустя год родилась дочь, которую в честь сестры Бернхарда назвали Идой. Итак, 1860-е дарили добрые предзнаменования, но, к сожалению, счастье Римана длилось недолго.

ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ

Здоровье Римана и всех его братьев и сестер всегда было хрупким, и обычно это объясняется недоеданием и недостатком медицинского ухода в детстве. Какой бы ни была причина, ни один из пяти братьев и сестер Римана не дожил до преклонных лет. Самого его пережила только Ида, Клара умерла в 1855 году, Мария и единственный брат (который работал на почте в Бремене и, следовательно, был еще одним кормильцем семьи) скончались в 1857 году, а его сестра Елена — в 1864-м. Всем было около 40 лет.

Через месяц после женитьбы, в июле 1862 года, Бернхард заболел плевритом, который через некоторое время перешел в туберкулез. И так как ситуация не улучшалась, врачи посоветовали ему поехать в Италию, надеясь, что более благоприятный климат ускорит выздоровление. Материальное положение Римана, хотя и было намного лучше, чем в предыдущие годы, не позволяло ему подобной роскоши, и поездка стала возможной только благодаря помощи друзей, одолживших необходимую сумму.

Гипотеза Римана — не просто проблема, это важнейшая проблема чистой математики.

Энрико Бомбиери, математик Института перспективных исследований в Принстоне

В условиях более теплого климата Риман почувствовал себя лучше и, перезимовав, в марте 1863 году вернулся в Гёттинген с намерением вновь приступить к академическим обязанностям. Но через несколько месяцев болезнь обострилась, и в августе ему пришлось вернуться в Италию, где родилась его дочь Ида. Материальное положение ухудшилось, но его пригласили возглавить кафедру Пизанского университета, однако принять это предложение ему не позволило состояние здоровья. Тут вмешались немецкие друзья, и Гёттингенский университет выделил ученому значительную сумму денег, и тогда он смог снять загородный дом.

Двумя годами позже, в октябре 1865 года, Риман в последний раз вернулся в Гёттинген. Там он встретился с коллегами, привел в порядок бумаги и возвратился в Италию. В то время Дедекин написал: «Его силы быстро угасали, и он понимал, что конец близок». В Италии Риман обосновался в городе Селаска, на севере страны. Там он и умер на руках супруги 20 июля 1866 года, ему было 39 лет. Надгробная надпись, составленная его итальянскими друзьями, подчеркивает, что духовный аспект в жизни Римана всегда был выше научного (он был очень верующим человеком). Надпись гласит: «Все вокруг работает на благо тех, кто любит Господа».

Сегодня Риман живет в своих работах, в идеях, которые принадлежали ему, во всем том, во что они выросли, а также в сформулированных им проблемах, особенно в той, которая была и последние 150 лет все еще остается самой важной из всех нерешенных математических проблем. Речь о вопросе, известном как *гипотеза Римана*, — ключевом для раскрытия тайны *распределения простых чисел*.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

В 1859 году Риман был избран членом Берлинской академии наук. В то время существовала традиция, согласно которой новый член Академии излагал перед коллегами некий результат собственного оригинального исследования, и естественно, Риман выполнил это условие. Его выступление, которое было внесено в ноябрьский отчет Академии, носит название *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* («О числе простых чисел, не превышающих данной величины»). В ней-то и была сформулирована знаменитая гипотеза Римана. Рассмотрим сначала понятие *простых чисел*.

Простыми называются все числа, которые делятся только на 1 и сами на себя. Например, 3 — простое число, поскольку делится только на 1 и на 3, в то время как 9 таковым не является, потому что кроме 1 и 9 оно также делится на 3. Первые простые числа — это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... Ни 1, ни 0 не считаются простыми числами. С другой стороны, существуют также отрицательные простые числа, то есть $-2, -3, -5, -7, -11, -13, -17, -19, -23, \dots$, но мы не будем отвлекаться на них, поскольку они являются лишь «отражением» положительных простых чисел.

Первый логичный вопрос: заканчиваются ли они когда-нибудь? То есть существует последнее простое число или же они продолжаются до бесконечности? Ответ на этот вопрос в III веке до н.э. дал еще Евклид Александрийский. В теореме 20 Книги IX «Начал» он доказывает, что существует бесконечное количество простых чисел, то есть простые числа *никогда* не заканчиваются. Одна из самых важных характеристик простых чисел состоит в том, что они являются «базовыми кирпичиками» натуральных чисел — в том смысле, что любое натуральное число, большее 1, либо является простым, либо записывается единственным образом в виде произведения простых; например, $6 = 2 \cdot 3$, и это единственный способ записать его в качестве произведения простых чисел (оставив в стороне очевидный факт, что его также можно записать как $6 = 3 \cdot 2$). Другие примеры: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $15 = 3 \cdot 5$ и $21 = 3 \cdot 7$.

Свойство простых чисел, вызывавшее основной интерес математиков в течение веков, — это их внешне «хаотическое» и «произвольное» поведение. Что это означает? *Интервалом между простыми числами* называется любая последовательность, образованная следующими друг за другом натуральными числами, среди которых *не* встречается ни одного простого (см. рисунок 1), то есть последовательность, которая предполагает именно «интервал» или разрыв в последовательности простых чисел. Один из этих интервалов, например, образован числами 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 (расположенный как раз между простыми числами 89 и 97), и это первый интервал длиной 7, который появляется в последовательности натуральных чисел.

Также можно доказать, что при любом заданном числе N , каким бы большим оно ни было, всегда существует интервал, длина которого больше или равна N . Другими словами, есть пары последовательных простых чисел, сколь угодно удаленных друг от друга. Расстояние между 89 и 97 равно 8, но существуют последовательные простые числа, расстояние между которыми больше миллиона, или миллиарда, или триллиона.

СУЩЕСТВУЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

При любом заданном конечном количестве простых чисел всегда существует еще одно простое число (это означает, что не существует *последнего* простого числа). Возьмем конечное количество простых чисел, скажем $p_1, p_2, \dots, p_n$, и определим число N как результат прибавления 1 к произведению их всех: $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Заметим, что если разделить N на p_1 , то остаток — 1, и то же самое происходит, если разделить его на любое другое число $p_2, \dots, p_n$. И число N , как любое простое число, имеет некий простой делитель (если N простое, то делитель равен самому числу N). Назовем q простой делитель числа N . Может ли выполняться $q = p_1$? Нет, поскольку q — делитель числа N , в то время как p_1 — нет (N при делении на p_1 дает в остатке 1). По той же причине q не может быть ни одним из чисел $p_2, \dots, p_n$; то есть q — простое число, отличающееся от всех тех, что были в начале. Таким образом, доказано, что при заданных простых числах $p_1, p_2, \dots, p_n$ существует простое число q , отличное от всех них.

В то же время считается, что существует бесконечное количество пар *простых чисел-близнецов*, то есть бесконечных пар простых чисел, разница между которыми равна точно 2. Это такие пары простых чисел-близнецов, как, например, (3,5), (11,13), (71,73) и также $(2003663613 \cdot 2^{195000} - 1; 2003660613 \times 2^{195000} + 1)$, последние два числа содержат более 58 000 цифр каждое. Первые 15 пар простых чисел-близнецов следующие: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73), (101,103), (107,109), (137,139), (149,151), (179,181), (191,193), (197,199).

Эти два факта демонстрируют то, что мы назвали «хаотичным поведением» простых чисел. В последовательности простых чисел существуют последовательные члены, сколь угодно удаленные друг от друга (до миллионов и миллионов чисел расстояния, например), и одновременно считается, что существует бесконечное число пар простых чисел, расстояние между которыми равно всего лишь 2. В целом не существует никакого способа узнать, является заданное простое число началом длиннейшего интервала из сотен миллионов чисел или очень короткого, всего лишь из нескольких чисел.

ГИПОТЕЗЫ

Такое «странное» поведение простых чисел завораживало математиков в течение веков, были сформулированы десятки проблем, связанных с ними, многие из них все еще не решены.



В целом эти проблемы провозглашены в виде *гипотезы*, то есть математического утверждения, которое полагается истинным, но которое никто еще не смог ни доказать, ни опровергнуть.

Например, ранее была упомянута гипотеза о простых числах-близнецах, допускающая, что существует бесконечное количество пар простых чисел, разность между которыми равна 2. Интересно отметить, что хотя проблема не была решена, в этом направлении отмечается несколько достижений.

В 1973 году китайский математик Чэнь Цзинжунь (1933–1996) доказал, что существует бесконечное количество таких простых чисел p , что $p + 2$ либо простое, либо является произведением двух простых чисел. То есть существует бесконечное количество пар, в которых один из двух «близнецов» — простое число, а другой либо является простым числом, либо настолько «похож» на простое число, насколько возможно.

С другой стороны, в мае 2013 года Итан Чжан (р. 1955), также китайский математик, доказал, что существует бесконечное количество пар простых чисел, разделенных расстоянием,

ИНТЕРВАЛЫ МЕЖДУ ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

При заданном любом числе N всегда можно найти N последовательных чисел, ни одно из которых не является простым (то есть существует интервал между простыми числами длиной N). Вспомним, что если M — целое число, большее 1, то $M!$ (читается «факториал M ») определяется как произведение всех натуральных чисел между 1 и M , то есть $M! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot M$. При заданном N рассмотрим последовательность, образованную N последовательных чисел, которые получаются прибавлением к факториалу $N + 1$ чисел 2, 3, 4, ..., $N + 1$. То есть возьмем последовательность $(N + 1)! + 2$, $(N + 1)! + 3$, $(N + 1)! + 4$, ..., $(N + 1)! + (N + 1)$. Последовательность образована количеством N чисел, и ни одно из них не является простым: $(N + 1)! + 2$ не является простым, поскольку делится на 2, $(N + 1)! + 3$ не является простым, поскольку делится на 3, и так далее. Хотя мы только что показали способ нахождения интервала длиной N , найденный — не единственный возможный интервал. Так, если бы мы искали интервал длиной 7, данный метод привел бы нас к выводу, что это интервал от $8! + 2 = 40\,322$ до $8! + 8 = 40\,328$; однако другой интервал той же длины появляется от 90 до 96.

меньшим 70 000 000. Иными словами, существует бесконечное число интервалов, длина которых меньше этого количества. Через некоторое время данный результат был улучшен, когда появилось доказательство, что существует бесконечное количество пар простых чисел, разделенных расстоянием, меньшим 10 206.

Поскольку в проблеме требуется доказать, что существует бесконечное количество пар простых чисел, расстояние между которыми равно 2, возможно, доказательство того, что существует бесконечное количество пар простых чисел, расстояние между которыми меньше 10 206, покажется незначительным достижением. Но на самом деле это огромное достижение, поскольку до того как Итан Чжан доказал свою теорему, не было известно, существует ли бесконечное количество пар простых чисел, разделенных *конечным* расстоянием, вне зависимости от того, какое оно. Вполне могло оказаться, что с какого-то момента расстояния между последовательными простыми числами начнут возрастать до неопределенности, но сейчас мы знаем, что существует бесконечное количество пар простых чисел, разделенных установленным конечным расстоянием, и можно представить, что когда-нибудь это расстояние от 10 206 будет сокращено до 2 (хотя необязательно теми методами, которые использовал Итан Чжан).

Другая знаменитая проблема, связанная с простыми числами, — это *гипотеза Гольдбаха*, названная так, поскольку была сформулирована немецким математиком Кристианом Гольдбахом (1690–1764) в письме Леонарду Эйлеру от 7 июня 1742 года. В этой гипотезе сказано, что любое четное число, большее двух, является суммой двух простых чисел, например $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$...

Ученые убедились, что любое четное число, меньшее 10^{18} (1 с 18 нулями), является суммой двух простых чисел, но все еще не смогли доказать, что это верно для *всех* бесконечных четных чисел, и также не было найдено четного числа, для которого это утверждение было бы неверным.

Но удалось доказать несколько утверждений в связи с этой гипотезой. Например, в 1937 году советский математик Иван

Виноградов (1891–1983) доказал, что «почти все» нечетные числа, большие 5, являются суммой *трех* простых чисел. Это «почти все» означает, что если утверждение ложное для некоторых нечетных чисел, то оно может быть ложным лишь для конечного их количества.

«ДРУГАЯ» ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА

Гольдбах внес разносторонний вклад в арифметику, бoльшая часть которого впервые была изложена в переписке.

Эту переписку с 1729 по 1764 год он вел со своим другом Леонардом Эйлером (они отправили друг другу более 150 писем). Именно в одном из этих писем, датированном июнем 1742 года, Гольдбах сформулировал гипотезу, названную его именем, но она не была единственной. В более позднем письме, датированном 18 ноября 1752 года, Гольдбах утверждал, что любое нечетное число, большее 3, может быть записано в виде суммы удвоенного квадрата и простого числа; например:

5 = 2 · 1² + 3
7 = 2 · 1² + 5
9 = 2 · 1² + 7
11 = 2 · 2² + 3
17 = 2 · 0² + 17.



Фрагмент письма Гольдбаха Эйлеру, в котором сформулирована знаменитая гипотеза.

Эйлер и Гольдбах были убеждены, что гипотеза верна, однако оказалось, что это не так. В 1856 году Мориц Абрахам Штерн (1807–1894), преподаватель математики в Гёттингене, выяснил, что гипотеза ложная для чисел 5777 и 5993, поскольку ни одно из этих двух чисел не может быть записано в виде суммы удвоенного квадрата и простого числа. На сегодняшний день это единственные известные числа, для которых гипотеза не выполняется.

Последняя нерешенная проблема, которую мы прокомментируем, связана с *простыми числами Мерсенна*, названных так в честь французского математика и монаха Марена Мерсенна, который изучал их в начале XVII века. «Простым числом Мерсенна» называется любое простое число вида $2^n - 1$, то есть любое простое число, которое получается вычитанием 1 из степени числа 2. Например, простыми числами Мерсенна являются $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$; $31 = 2^5 - 1$...

В данном случае в гипотезе говорится, что количество простых чисел Мерсенна бесконечно, то есть они никогда не заканчиваются. На момент написания этих строк известно 48 чисел, являющихся простыми числами Мерсенна, наибольшее из которых имеет более 17 миллионов цифр. Однако еще не известно, существует ли бесконечное их количество.

Многие из упомянутых проблем, как и другие, связанные с простыми числами, могли бы быть решены, если бы было точно известно, каково *распределение* простых чисел. То есть при двух заданных натуральных числах n и m проблема распределения простых чисел требует установить, сколько простых чисел существует на промежутке между n и m . Очевидно, что это количество зависит от того, каковы точно числа n и m ; с учетом «блуждающего» поведения простых чисел это количество изменяется очень сложным образом.

Заметьте, например, что наличие точного знания о распределении простых чисел дало бы нам ценную информацию для решения проблемы простых чисел-близнецов, поскольку она может быть переформулирована следующим образом: существует ли бесконечное количество таких нечетных чисел n , что промежуток между n и $n + 2$ (включительно) содержит ровно два простых числа?

ПИ-ФУНКЦИЯ

Если n — натуральное число, обычно называют $\pi(n)$ количество простых чисел, существующих между 1 и n включительно;

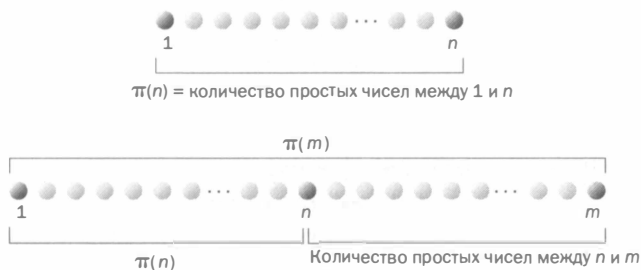
МАРЕН МЕРСЕНН (1588–1648)

Мерсенн родился в Уазе (Франция) и учился в иезуитской школе Ла-Флеш, в которую детей принимали независимо от материального положения родителей (у Мерсенна они были очень бедными). Там он познакомился с Рене Декартом, который также учился в этой школе, и с тех пор они долго оставались друзьями. Мерсенн завершил образование в Королевском колледже в Париже, где обучался философии и теологии. После этого, в 1611 году, он вступил в братство минимов, члены которого посвящают себя исследованиям и образованию. В 1616 году его избрали настоятелем одного из монастырей Парижа, где, не считая кратких поездок, он оставался до своей смерти. В 1623 году Мерсенн начал интенсивно переписываться с большим количеством ученых со всей Европы, а с некоторыми даже встречался в Париже: с Рене Декартом, Жилем де Робервалем, Пьером де Ферма, Христианом Гюйгенсом, Галилео Галилеем, Томасом Гоббсом, Этьеном Паскалем и его сын Блезом Паскалем. Мерсенн был связующим звеном между ними в деле поддержания научной и философской беседы, особенно математической, поскольку именно эта наука сыграла важную роль в его жизни. В этой области он публиковал исследования, в том числе о свойствах циклоиды и простых чисел, названных его именем. Он также интересовался музыкой и много времени посвятил исследованиям порождения и измерения скорости звука. Об этом — одна из самых известных его работ, «Универсальная гармония», опубликованная в 1627 году, в которой он первым описал законы, управляющие поведением колеблющихся пружин. Мерсенн выслал эту работу Христиану Гюйгенсу, который положил ее в основу своей теории музыки и волновой теории света. В октябре 1644 года он отправился в Италию, где познакомился с Эванджелистой Торричелли и узнал о его исследованиях с барометром. По возвращении в Париж Мерсенн стал распространять информацию об упомянутом эксперименте во Франции и воодушевлять местных исследователей на его воспроизведение. Свое тело этот незаурядный ученый завещал науке.



Портрет Мерсенна кисти французского художника и гравера Бальтазара Монкорне, 1654 год.

РИС. 2



например, $\pi(9) = 4$, поскольку между 1 и 9 существует четыре простых числа: 2, 3, 5 и 7, в то время как $\pi(11) = 5$, поскольку к четырем предыдущим добавляется 11. Как видно из рисунка 2, если для каждого натурального числа n известно точное значение $\pi(n)$, то можно узнать количество простых чисел, существующее между n и m .

Значение $\pi(n)$ может быть вычислено пересчетом по одному из простых чисел, существующих между 1 и n , как показано для $\pi(9)$ и $\pi(11)$. Проблема в том, что на практике этот метод абсолютно нежизнеспособен. Предположим, мы задаемся вопросом, чему равно $\pi(10^{100})$, где 10^{100} — это 1 со 100 нулями, и собираемся ответить на этот вопрос, рассматривая одно за другим все числа между 1 и 10^{100} , определяя в каждом случае, какое из них простое, а какое нет. Предположим, что мы способны определить всего лишь за секунду, является рассматриваемое число простым или нет. При всех этих предположениях на определение значения $\pi(10^{100})$ у нас ушло бы 10^{100} секунд, что соответствует чуть большему времени, чем $3 \cdot 10^{92}$ лет. Чтобы представить, насколько огромен этот промежуток времени, отметим, что Вселенная живет не более $2 \cdot 10^{10}$ лет.

Следовательно, необходим более «умный» способ вычисления значения $\pi(n)$. Ряд математиков XVIII и XIX веков, среди них Гаусс, предположили, что хорошее приближение к значению $\pi(n)$ задано формулой $n / \ln(n)$, где $\ln(n)$ — это «натуральный логарифм» n . Этот факт, известный как *теорема о распределении простых чисел*, в 1896 году был независимо доказан

французскими математиками Жаком Адамаром (1865–1963) и Шарлем-Жаном де ла Валле Пуссенсом (1866–1962). Это приближение позволяет сказать, что $\pi(10^{100})$ равно приблизительно $4,34 \cdot 10^{97}$.

В таблице ниже показаны некоторые значения $\pi(n)$ с приближениями, которые дает формула $n / \ln(n)$. Однако приближение, предоставляемое этой формулой, пусть и очень хорошее, все же не является единственным и необязательно самое лучшее.

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\ln(n)}$
10	4	4,34
100	25	21,71
1000	168	144,76
10000	1229	1085,74

Итак, существует множество способов приближения количества простых чисел, существующих между 1 и n ; формула $n/\ln(n)$ — одна из них, но в работе 1859 года Риман предложил намного лучшую оценку, и исходил он из равенства, которое было сформулировано Эйлером за век до этого:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \dots$$

Слева возникает бесконечная сумма, в то время как справа представлено бесконечное *произведение*, множители которого содержат все простые числа (2, 3, 5, 7, ...). Эйлер использовал это равенство, чтобы привести доказательство существования бесконечного количества простых чисел, отличное от того, что в свое время предложил Евклид. В своем рассуждении Эйлер принимает $s = 1$ в предыдущем равенстве, откуда получает:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \dots$$

Если бы существовало только конечное количество простых чисел, то произведение справа обязательно давало бы конечный результат (ведь это было бы произведение *конечного* количества чисел). Но произведение равно сумме

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

результат которой, как уже было отмечено в главе 3, бесконечен. Следовательно, произведение

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \dots$$

дает «бесконечный» результат и, значит, должно включать бесконечное количество множителей; следовательно, существует бесконечное количество простых чисел.

В то время как Эйлер рассматривал s только как действительное число, большее 1, Риман, напротив, распространил идею на всю комплексную плоскость. Так он определил то, что сегодня известно как *дзета-функция Римана* («дзета» здесь — название греческой буквы ζ). Если s — действительное число, большее 1 (случай, рассмотренный Эйлером), то $\zeta(s)$ (читается «дзета от s ») определяется как результат бесконечной суммы, которую мы записали ранее:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots$$

Например, $\zeta(3)$ — это результат

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} \dots,$$

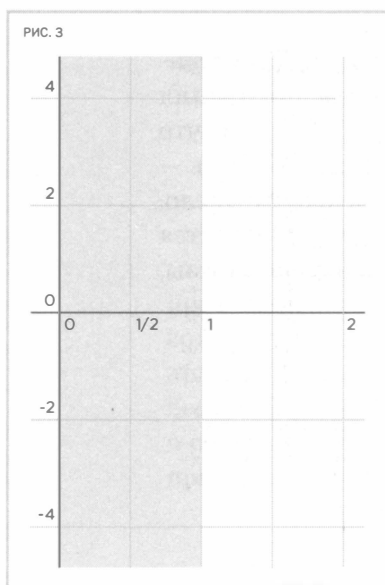
который равен приблизительно 1,202056903... Чтобы распространить функцию на всю плоскость, Риман основывался на теоремах о функциях комплексной переменной, которые он доказал в своей диссертации 1851 года. Эти теоремы позволили ему доказать, что функция $\zeta(s)$ может быть вычислена для *любого* действительного или комплексного числа. То есть если s — действительное или комплексное число, то $\zeta(s)$ всегда будет давать в результате также действительное или комплексное число (кроме случая $s = 1$, когда функция «равна бесконечности»).

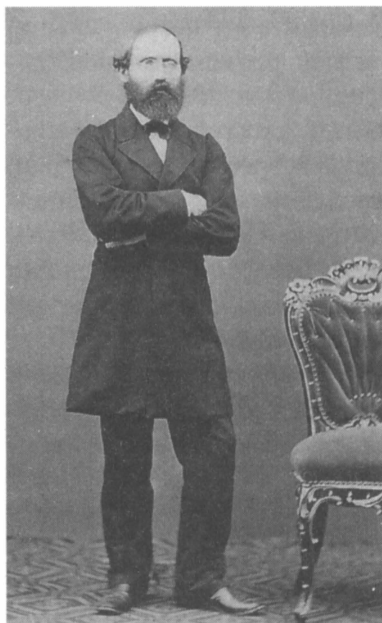
Оказывается, что поведение функции комплексной переменной определено значением ее *корней*, то есть чисел, при которых функция равна 0. Например, корни функции $f(z) = 1 + z^2$ — это i и $-i$, поскольку $f(i) = 1 + i^2 = 1 + (-1) = 0$ и $f(-i) = 1 + (-i)^2 = 1 + (-1) = 0$.

Что происходит с корнями дзета-функции? Можно доказать, что эта функция равна 0 во всех целых отрицательных четных числах; другими словами, получается, что $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(-4) = 0$, $\zeta(-6) = 0$ и так далее. Отрицательные четные числа — это *тривиальные корни* дзета-функции, поскольку они все

хорошо известны. Но существует также бесконечное количество *нетривиальных* корней, то есть другое бесконечное количество комплексных чисел, при которых функция равна нулю и значения которых не известны полностью.

Поведение дзета-функции определено ее корнями; с другой стороны, дзета-функция, как мы видим, тесно связана с простыми числами. Следовательно, точное знание, каковы корни дзета-функции, дало бы нам много информации о распределении простых чисел. Например, как доказал Риман, $\pi(n)$ можно вычислить точно как $R(n) - (R(n^1) + R(n^2) + R(n^3) + \dots)$, где R — известная функция, а r_1, r_2, r_3 — корни дзета-функции.



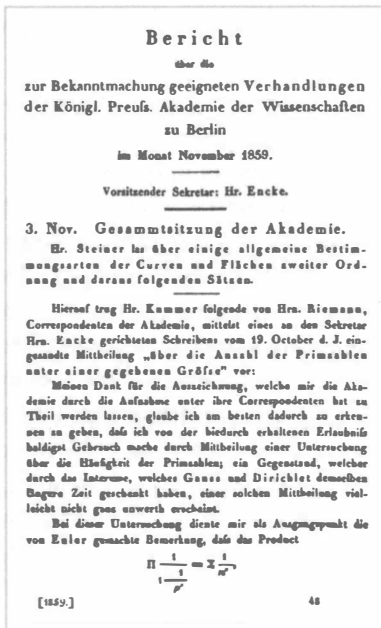


ВВЕРХУ СЛЕВА:
Риман
во Флоренции,
1863 год.

ВВЕРХУ СПРАВА:
Эльза Кох,
на которой
математик
женился
в 1862 году.

ВНИЗУ СЛЕВА:
Надгробная
плита Римана
на кладбище
Биганцоло
в Селаске.

ВНИЗУ СПРАВА:
Страница
из отчета
Берлинской
академии наук
о выступлении
Римана,
в котором он
сформулировал
свою
знаменитую
гипотезу.



В работе 1859 года Риман доказал, что все нетривиальные корни расположены на вертикальной полосе комплексной плоскости, заключенной между 0 и 1 (см. рисунок 3).

Однако большинство применений дзета-функции к проблемам, связанным с простыми числами, требуют более точной информации. На самом деле они требуют, чтобы все эти нетривиальные корни находились на вертикальной прямой, играющей роль оси симметрии полосы. В работе 1859 года Риман предполагает, что это верно, и именно данное предположение и составляет знаменитую проблему *гипотезы Римана*:

«Все нетривиальные корни дзета-функции находятся на вертикальной прямой, соответствующей значению $\frac{1}{2}$ ».

Сегодня все еще не известно, является гипотеза истинной или ложной. С помощью компьютеров было найдено более 150 миллионов нетривиальных корней дзета-функции, все они расположены на «правильной» вертикальной прямой; однако не удалось доказать, что все они находятся на ней, также не было найдено ни одного нетривиального корня вне этой прямой.

Почему гипотеза Римана — такая важная проблема? Потому что, как уже было сказано, многие проблемы, касающиеся распределения простых чисел, связаны с ней. Например, можно доказать, что есть прямая связь между размером областей комплексной плоскости, «лишенных корней», и интервалами между простыми числами. Точнее, знание расстояния между двумя нетривиальными корнями, последовательно лежащими на «критической» прямой, дает представление о возможных размерах интервалов между простыми числами.

Другой пример важности гипотезы Римана заключается в том, что в 1997 году было доказано: если одна из версий гипотезы Римана верна (версия, известная как *обобщенная гипотеза Римана*), то любое нечетное число, большее 5, является суммой трех простых чисел (а не только «почти все», как доказал Виноградов).

Есть и другие примеры, но большинство из них слишком сложны. Добавим только, что было доказано: если p и q — последовательные простые числа и гипотеза Римана верна, то разность $q - p$ (то есть расстояние между p и q) всегда меньше $\sqrt{p} \ln(p)$; этот результат снова дает информацию о возможных длинах интервалов между простыми числами.

Из всего вышесказанного вытекает следствие, что гипотеза Римана — это самая важная из нерешенных проблем, связанных с арифметикой, одна из самых важных нерешенных проблем всей математики. В 1900 году в Париже состоялся Второй Международный конгресс математиков, и во вступительной лекции Давида Гильберта прозвучали 23 проблемы, которые, по его мнению, должны были определить математические исследования всего XX века. Восьмую позицию в списке Гильберта занимает гипотеза Римана.

Один журналист спросил Давида Гильберта, каким был бы его первый вопрос, проспи он по какой-то причине 500 лет, на что тот без колебаний ответил: «Доказал ли кто-нибудь гипотезу Римана?»

ХОСЕ МАНУЭЛЬ САНЧЕС МУНЬОС, «История математики, Риман и простые числа»

Век спустя, в 2000 году, Математический институт Клэя в Кембридже (Массачусетс), следуя примеру Гильберта, сформулировал то, что называли *семью проблемами тысячелетия*, — семь самых важных нерешенных проблем математики — и предложил премию в миллион долларов тому, кто решит одну из них. Гипотеза Римана — четвертая в этом списке.

Уже 150 лет проблема остается без решения, и в этот самый миг исследователи заняты его поиском, потому что математики упорны и никогда не сдаются.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МЫСЛИ

За свою научную карьеру Риман, помимо прочих достижений, обеспечил невиданный до той поры толчок топологии (крайне плодотворной области математики), заложил одну из математических основ теории относительности и современной космологии, сформулировал понятие интеграла, который сегодня используется в практической деятельности (в физике и инженерном деле), предвосхитил многие из аспектов, связанных со светом, электричеством и магнетизмом, а также сформулировал одну из «проблем тысячелетия», которая в случае решения станет ключом к пониманию того, как распределяются простые числа. Подобный успех сделал бы честь любому ученому, еще большее впечатление он производит с учетом столь короткой карьеры.

Невозможно вообразить, какие еще победы мог одержать Риман, проживи он более долгую жизнь. Хотя это не только невозможно, но и абсолютно ненужно, ведь вместо того, чтобы жалеть, что ему не удалось сделать, мы должны воздать должное всему тому, что Риман завещал нам, — идеям, которые он разработал, понятиям, которые он создал. Риман живет в своих интеллектуальных свершениях.

Список рекомендуемой литературы

- BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.
- BOYER, C.B., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 2007.
- BROCKMAN, J. (editor), *Universo*, Barcelona, Crítica, 2012.
- COLLETTE, J.P., *Historia de las matemáticas*, México, Siglo XXI, 2007.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (compilador), *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910*, Madrid, Alianza, 1980.
- O'SHEA, D., *La conjetura de Poincaré (En busca de la forma del universo)*, Barcelona, Tusquets, 2007.
- RIEMANN, B., *Riemanniana selecta* (Selección, traducción y comentarios de José Ferreirós), Madrid, CSIC, 2000.
- STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

Указатель

- Абель, Нильс Хенрик 93, 95, 124
Аристотель 58, 96
атлас 61
- базовая волна 90, 96–99, 102–104
Бернулли, Иоганн 31, 124, 127
Больцман, Людвиг 122, 125
большой круг 65–67
брахистохрона 123, 124, 127–129
- ван Мушенбрук, Питер 117
Вебер, Вильгельм 51, 52, 112–114, 117, 119
Вейерштрасс, Карл 83, 84, 133, 134
Виноградов, Иван Матвеевич 142, 150
- Галилей, Галилео 125, 126, 144
Гаусс, Карл Фридрих 8, 13, 15, 17, 21–23, 25, 28, 29, 35, 39, 47, 50–52, 61, 79, 81, 84–85, 111, 112, 113, 116, 121, 133, 145
геодезическая 65–69, 77
Гильберт, Давид 84, 131, 151
гиперсфера 71–73
гипотеза Римана 13, 131, 136, 150–151
Гольдбах, Кристиан 141, 142
Гольдбаха гипотеза 141, 142
граф 36, 37
Гюйгенс, Христиан 144
- Дедекинд, Рихард 83, 85, 87, 103, 106, 121
Декарт, Рене 31, 56, 113, 144
Дирихле, Петер Густав Лежён 15, 22, 23, 30–32, 39, 50, 81, 85, 90, 102–106, 112, 116, 133
принцип 129
функция *см.* функция Дирихле
дифференциальное многообразие 11, 12, 47, 55, 57–67, 71–74, 75, 78
- Евдокс Книдский 106
Евклид Александрийский 71, 137, 146
единого поля проблема 115–116, 119

- интеграл
 Коши 99, 102–104, 106
 Римана 15, 51, 81, 106, 116, 134
- Кардано, Джироламо 26
 карта 11, 12, 61–64, 71–73
 координаты 11, 28, 40, 42, 56–61, 66, 71, 78, 86, 88
 Коперник, Николай 97
 корни (функции) 38–45, 148, 150
 космология 8, 12, 152
 Коши, Огюстен Луи 66, 102, 104–106
- Лежандр, Адриен-Мари 20, 23
 Лейбниц, Готфрид Вильгельм фон 84, 87, 99–102, 124–127
 лейденская банка 117, 119–120
 Леметр, Жорж 76
- Максвелл, Джеймс Клерк 113
 Мерсенн, Марен 143, 144
 Мерсенна простые числа 144
 Мёбиус, Август Фердинанд 61
 Мёбиуса лента 59–61, 69
 мостов Кёнигсберга проблема 35, 36
- Нобили, Леопольдо 120, 123
 кольца 120–123
 Ньютон, Исаак 12, 21, 31, 47, 51, 77, 85, 87, 99–102, 123, 124–128
- Питискус, Бартоломеус 90
 Пифагора теорема 57, 64–71, 75
 Птолемей, Клавдий 97
- расширение Вселенной 76
 риманова поверхность 10, 12, 15, 17, 38–45
 ряд 92–97, 104
- тригонометрический (Фурье) 31, 50, 81, 96, 97, 98, 102, 104, 106, 116
- силы природы 114
- Тарталья, Никколо Фонтана 26
 тессеракт 73
 топология 8, 10–13, 15, 17, 23, 25, 31, 32, 34–39, 61, 64, 152
 тор (математический) 9, 59–63
- Фалес Милетский 116, 118
 Флатландия 54–57, 66–73
 функция
 абелева 15, 124, 127, 128–130, 133
 действительной переменной 39, 42, 43, 89, 128
 дзета Римана 124, 147
 Дирихле 32, 104
 комплексной переменной 10, 13, 22, 30, 32, 39, 42–45, 148
 косинуса 89, 90
 однообразная 39
 определение 9, 29–34, 40, 41, 86
 пи 145
 синуса 89, 90
- Фурье, Жан Батист Жозеф 23, 96–100
 ряды *см.* тригонометрический ряд
- Хаббл, Эдвин 76
 реабилитация 49, 50, 51, 61, 77, 84–86, 111, 112, 114–117, 120, 124
- циклоида 127, 128, 144

числа

действительные 24, 26–28, 30,
38, 39, 43–45, 86, 89, 94, 95,
147, 148

квадратные 13

комплексные 24, 27–30, 32–34,
38–41, 43–45, 86, 148

натуральные 12, 24, 27, 137–
140, 143, 145

простые 12, 23, 133, 137–152

близнецы 139, 143

интервалы 138–141, 150

Мерсенна 144

распределение 133

теорема о распределении
143

рациональные 24, 27, 32

целые 23, 24, 27, 92, 148

Эйлер, Леонард 13, 27, 30, 31,
35–37, 86, 90–92, 97, 103, 141,
142, 146, 147

Эйлера формула 28

Эйнштейн, Альберт 46, 47, 55,
77–78, 114–116, 125, 130

эллипсоид 64, 124

Эратосфен Киренский 58

Эрмит, Шарль 135

Наука. Величайшие теории
Выпуск № 41, 2015
Еженедельное издание

РОССИЯ

Издатель, учредитель, редакция:
ООО «Де Агостини», Россия
Юридический адрес: Россия, 105066,
г. Москва, ул. Александра Лукьянова,
д. 3, стр. 1

*Письма читателей по данному адресу
не принимаются.*

Генеральный директор: Николаос Скилакис
Главный редактор: Анастасия Жаркова
Старший редактор: Дарья Клинг
Финансовый директор: Полина Быстрова
Коммерческий директор: Александр Якутов
Менеджер по маркетингу: Михаил Ткачук
Младший менеджер по продукту:
Елизавета Чижикова

**Для заказа пропущенных выпусков
и по всем вопросам, касающимся
информации о коллекции, обращайтесь
по телефону «горячей линии» в Москве:**
☎ 8-495-660-02-02

**Телефон бесплатной «горячей линии»
для читателей России:**
☎ 8-800-200-02-01

Адрес для писем читателей:
Россия, 150961, г. Ярославль, а/я 51,
«Де Агостини», «Наука. Величайшие
теории»

*Пожалуйста, указывайте в письмах свои кон-
тактные данные для обратной связи (теле-
фон или e-mail).*

Распространение: ООО «Бурда Дистрибью-
шен Сервисиз»

Свидетельство о регистрации СМИ в Феде-
ральной службе по надзору в сфере связи, ин-
формационных технологий и массовых ком-
муникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-
56146 от 15.11.2013

УКРАИНА

Издатель и учредитель:
ООО «Де Агостини Паблшинг», Украина
Юридический адрес:
01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского,
119
Генеральный директор: Екатерина Клименко

**Для заказа пропущенных выпусков
и по всем вопросам, касающимся информа-
ции о коллекции, обращайтесь по телефону
бесплатной горячей линии в Украине:**
☎ 0-800-500-8-40

Адрес для писем читателей:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Наука. Величайшие теории»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Свидетельство о регистрации печатного
СМИ Государственной регистрационной
службой Украины
КВ № 20525-10325Р от 13.02.2014

БЕЛАРУСЬ

Импортер и дистрибьютор в РБ:
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,
ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,
тел./факс: + 375 (17) 331 94 41
Телефон «горячей линии» в РБ:
☎ + 375 17 279-87-87
(пн-пт, 9.00–21.00)

Адрес для писем читателей:
Республика Беларусь, 220040, г. Минск,
а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,
«Наука. Величайшие теории»

КАЗАХСТАН

Распространение:
ТОО «Казакско-Германское предприятие
БУРДА-АЛАТАУ ПРЕСС»
Казахстан, г. Алматы, ул. Зенкова, 22
(уг. ул. Гоголя), 7 этаж.
☎ +7 727 311 12 86, +7 727 311 12 41
(вн. 109), факс: +7 727 311 12 65

Издатель оставляет за собой право изменять
розничную цену выпусков. Издатель остав-
ляет за собой право изменять последователь-
ность выпусков и их содержание.

**Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного
электронного оригинал-макета
в ООО «Ярославский полиграфический
комбинат»**

150049, Ярославль, ул. Свободы, 97
Формат 70 x 100 / 16.
Гарнитура Petersburg
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Печ. л. 5. Усл. печ. л. 6,48.
Тираж: 20 000 экз.
Заказ № 1512760.

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2014 (текст)
© RBA Coleccionables S.A., 2014
© ООО «Де Агостини», 2014–2015

ISSN 2409-0069



Данный знак информационной про-
дукции размещен в соответствии с требова-
ниями Федерального закона от 29 декабря
2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от ин-
формации, причиняющей вред их здоровью
и развитию».

Коллекция для взрослых, не подлежит обя-
зательному подтверждению соответствия
единым требованиям установленным Тех-
ническим регламентом Таможенного союза
«О безопасности продукции, предназначен-
ной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011
от 23 сентября 2011 г. № 797

Дата выхода в России 17.10.2015

Бернхард Риман — одна из основных фигур научной панорамы середины XIX века. За свою короткую карьеру он внес огромный вклад в различные области математического знания. Он заложил основы дифференциальной геометрии и сформулировал гипотезу, названную его именем и признанную важнейшей нерешенной проблемой современной математики. Его вклад распространяется и на область физики, обрисовывая путь, по которому пошел Эйнштейн, прежде чем открыть общую теорию относительности. Безвременная кончина немецкого мыслителя прервала «исследовательскую программу», глобальной целью которой было понимание устройства Вселенной.



Рекомендуемая розничная цена: 289 руб.

