МАТЕМАТИКА В ОГНЕ

ДЖЕЙСОН УИЛКС

НЕСКУЧНЫЙ НЕУЧЕБНИК

Эту книгу хорошо дополняют:

Укрощение бесконечности
Иэн Стюарт

Удовольствие от X
Стивен Строгац

Модельное мышление
Скотт Пейдж

Красота в квадрате
Алекс Беллос

JASON WILKES

BURN MATH CLASS

AND REINVENT MATHEMATICS FOR YOURSELF

Basic Books

ДЖЕЙСОН УИЛКС

МАТЕМАТИКА В ОГНЕ

НЕСКУЧНЫЙ НЕУЧЕБНИК

Перевод с английского Евгения Поникарова

Москва
«Манн, Иванов и Фербер»
2020

УДК 510
ББК 22.1
У36

Научный редактор Константин Кноп

Издано с разрешения Jason Wilkes, c/o Brockman, Inc.

На русском языке публикуется впервые

Уилкс, Джейсон

У36 Математика в огне. Нескучный неучебник / Джейсон Уилкс ; пер. с англ. Е. Поникарова ; [науч. ред. К. Кноп]. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2020. — 512 с.

ISBN 978-5-00117-543-8

Если вам не дается математика, возможно, дело не в вас, а в том, как вам ее преподносят. Джейсон Уилкс переворачивает привычное представление о математике как о скучной и абстрактной дисциплине, которую только и остается что вызубрить, и предлагает вам изобрести свою математику. Да-да, вы правильно прочитали — изобрести.

Вместе с автором вы создадите собственную математическую вселенную, увлекательную и увлекающую, где нет будет места занудным доказательствам и вычислениям, а концепции из абстрактных и пугающих символов станут частью окружающего мира.

Книга прекрасно дополнит любой стандартный учебник.

УДК 510
ББК 22.1

ISBN 978-5-00117-543-8

СОДЕРЖАНИЕ

Акт III

Посвящение

Это труднее, чем я ожидал. Посмотрим…

Пусть J ≡ «то, что он всегда был собой».

Пусть W ≡ «то же самое».

Пусть R ≡ «всю помощь. С надеждой, что это в итоге будет иметь смысл».

Итак…

$\frac{\alpha}{2}$ (Эдвину Томпсону Джейнсу, за J)

$\frac{\alpha}{2}$ (Дэвиду Фостеру Уоллесу, за W)

$(1 - \alpha)$(читателю, за R)

где $\alpha \in [0,1]$ определяется последним из вышеуказанных*.

…(

* Обещаю, что книга не такая мудреная. *Здесь и далее примечания автора, если не указано иное.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошая литература должна утешать расстроенных и беспокоить утешенных.*

Дэвид Фостер Уоллес, интервью с Ларри Маккефери

Художественную и научно-популярную литературу не так легко разделить.

Янн Мартел, «Беатриче и Вергилий»

Сожгите кабинет математики

Ладно, не сжигайте кабинет, на самом деле. И ничего другого тоже. Поджог — нехорошо и абсолютно противозаконно. Я… Неважно. Не хочу начинать книгу так.

(Автор ненадолго задумывается.)

Ладно, я думаю… в общем, ясно. Извините.

(Кхе-кхе.)

Все мы должны сильно негодовать. У нас украли кое-что прекрасное, а мы не ощущаем его отсутствия. Ведь кража произошла, когда мы еще не родились. Вообразите, что по какой-то грандиозной исторической причине все мы убеждены, будто музыка — тупое, скучное, нетворческое

* Перифраз слов Сезара Круза: «Искусство должно утешать расстроенных и беспокоить утешенных» (1997). В свою очередь, это вариация высказывания Финли Данна: «Дело газеты — утешать огорченных и огорчать утешенных» (1902). *Прим. перев.*

занятие, от которого нужно держаться подальше, за исключением самых необходимых случаев. Предположим, все мы в юности учились ей больше десяти лет и из-за неких проявлений яркого садизма со стороны преподавателей окончили этот курс с твердым убеждением, что музыка — не более чем средство для достижения цели. Мы можем согласиться, что каждому следует в общих чертах знать предмет, но только из соображений практичности: музыка вам нужна, поскольку она может — редко — помочь вам *в чем-то другом*. Все были бы убеждены, что музыка больше напоминает работу водопроводчика, а не вид искусства.

Мир был бы по-прежнему полон творческих людей. Так же, как и сейчас. Под творческими личностями я подразумеваю не обязательно учеников школы искусств, или профессиональных художников, или парня, который написал что-то на унитазе и выставил в музее. Я имею в виду людей, которые создают вещи, доставая их из небытия; тех, кто не отказывает себе в праве быть собой; у кого есть свой путь ломки реальности, настолько подлинный, что вы можете ощутить это своими нервными окончаниями; кто входит в мир горящим и слишком часто умирает молодым. «Музыка не для них, — соглашаемся мы. — Музыка для бухгалтеров среди нас, и лучше всего, если мы оставим ее им». Какой бы надуманной ни казалась ситуация, ровно это произошло с математикой. Ее у нас украли, и сейчас самое время вернуть ее обратно.

В этой книге я защищаю процесс концептуального поджога. Состояние преподавания математики во всем мире упало до уровня, когда уже бессмысленно что-то менять. Нужно все сжечь и начать заново. Приступим прямо сейчас. В этой книге к математике подходят не как к предмету, который был создан и существовал до вас, а теперь его нужно вам объяснить. Начиная с этой страницы ее не существует. Мы сами изобретем ее с основ, без старого багажа мудреных обозначений и напыщенной терминологии, которая бродит по всем учебникам. Традиционные термины будут упоминаться и использоваться, когда в этом есть смысл, но математическая Вселенная, которую мы создаем, наша собственная, и принятые обозначения туда не допускаются, пока мы открыто не пригласим их.

Мы применим подход, который не требует зазубривания, побуждает к экспериментам и неудачам, не просит читателя принять то, чего мы не создали сами, избегает вычурных названий, которые скрывают простоту идей, и представляет математику как приключение (а она такая и есть), в разговорной форме. Книгу легко читать, как будто это роман. Основная цель нашего путешествия — удовольствие, а не практичность, но мы рады констатировать, что между ними нет никакого конфликта. Вы действительно изучите предмет — многое из него, — причем хорошо.

Если пытаться создать изложение математики, которое не требует от читателя принять факты, установленные ранее, невозможно не вспомнить о том, что я считаю фундаментальной трагедией нынешней математической педагогики. И она никогда не упоминается, даже при самой жесткой критике традиционного образования: *мы преподаем предмет задом наперед.*

Расскажу историю, которая покажет, что я имею в виду. У меня была тройка по начальной алгебре. Все, чему я научился, — ненавидеть слово «полиномиальный». У меня была тройка по тригонометрии. Все, чему я научился, — ненавидеть слова «синус», «косинус» и «гипотенуза». Математика была исключительно запоминанием, скукой и деспотичной властью, а уж это-то я люблю меньше всего. К выпускному классу школы я прошел все необходимые курсы. Не могу даже описать, насколько я был счастлив, что теперь можно до конца жизни не заходить в математический кабинет. Наконец-то свободен.

Однажды вечером в последний год учебы я, как обычно, бродил по книжному магазину и увидел книгу по математическому анализу. Я всегда слышал, что он очень труден, но у меня не было курса по анализу и не должно было быть… какое облегчение. Отсутствие обязательства изучать предмет почему-то делало книгу более привлекательной, и я подумал, что стоит полистать ее несколько секунд. Я ожидал увидеть какие-то ужасные символы, подумать: «Ну, это действительно сложно», — а затем поставить книгу на полку и закончить с этим навсегда. Но когда я открыл ее, там не было обычного мусора. Простым и незамысловатым языком автор говорил примерно так: с прямыми гораздо проще, чем с кривыми, но если вы достаточно увеличите масштаб, то любой маленький кусочек кривой выглядит почти как прямая. Поэтому каждый раз, когда у вас есть задача о кривой, мысленно увеличивайте ее до тех пор, пока она не станет выглядеть как прямая, решите проблему на микроскопическом уровне там, где это просто сделать, а затем вернитесь к первоначальному масштабу. Вы нашли ответ.

Это понятно любому и применимо не только к математике. Если у вас сложная задача, разбейте ее на несколько маленьких, решите их, а потом соберите вместе. Здесь есть изящество и необходимость, чего я никогда не чувствовал на уроках математики. Я еще немного полистал книгу и, когда увидел, что там есть раздел, где автор жалуется на то, как обычно преподают математику, я понял, что у нас с этим парнем много общего.

Я купил книгу и начинал читать ее всякий раз, когда мне было нечего делать. Мне нравилось, как пишет автор. У меня появилось лишнее оправдание тому, что мне никогда не нравилась математика в школе, и в то же время я убеждался, что ошибался по сути. Я не планировал изучать математический анализ и не помнил необходимых предварительных сведений из школы, так что я даже не знал, как решать «простые задачи» на микроскопическом уровне. Но это не проблема: у меня не было ограничений, накладываемых формальным образованием, и некому было наказывать меня, если я что-то делал неверно.

Так началось мое странное путешествие в анализ — до того, как я познакомился с алгеброй, тригонометрией, логарифмом и кучей всего, что вроде бы нужно изучить до анализа. Я купил тетрадь и стал разбираться. Каждый раз, когда я чего-то не понимал, я рисовал картинку и пытался убедить себя, что она правильная. Обычно я терпел фиаско.

Как ни странно, понятия анализа были самыми простыми частями этой книги. Намного труднее оказались так называемые необходимые предварительные области: алгебра, тригонометрия и прочий умозрительный упаковочный пенополистирол, которым набиты современные школьные курсы. Мысль об увеличении масштаба приобрела для меня смысл: производные и интегралы было не только просто вычислять, но и легко понять исходя из основных принципов. Путь от их «доматематической» мотивировки к определениям и далее к методам вычисления казался логичным и обоснованным, он связывал все воедино. Но изредка приходилось обращаться к тому, что считалось «базой», — и это я не мог понять совсем, хотя и помнил смутно, что слышал от какого-то учителя на тихом скучном уроке. Я не мог додуматься, откуда взялись все эти, казалось бы, простые штуки вроде площади круга или необъясненных «тригонометрических тождеств».

К счастью, меня никто не заставлял запоминать все это, так что я изучал фрагменты анализа, не трогая алгебру и тригонометрию. Я читал что-нибудь в книге, неплохо понимал, а затем терялся, потому что не помнил, как складывать дроби. В случаях вроде этого достаточно было пялиться некоторое время на проблемное место, чтобы наконец понять: «О, да они просто дважды умножают на 1. Как будто *лгут*, чтобы сделать задачу проще, а потом *делают поправку на ложь*, чтобы не получить неверный ответ. Интересно…» Другие трюки были не так просты, чтобы их можно было легко раскусить, просто поглядев на них, и они ставили меня в тупик. Логарифмы, синус и косинус, «формула корней квадратного уравнения» и «дополнение до полного квадрата» не входили в мой лексикон, и сами термины ощущались как похмелье от моего отрицательного опыта с математикой в школе.

Немного продвинувшись в анализе, я по-прежнему не разбирался в «предварительных областях», но начал замечать занятное. Я понял, что производная объема сферы равна площади ее поверхности, а производная площади круга — длине окружности. У меня все еще не было идей, откуда взялись сами формулы площади и объема, но таинственная операция «увеличения масштаба» предполагала, что они как-то связаны. Так я впервые столкнулся со странным фактом о математике: мы можем быть в полном тупике по двум разным вопросам и не иметь прогресса по ним в отдельности, но умудриться четко продемонстрировать, что ответ *один и тот же*, даже не зная, каков он. Этот факт, который поначалу выглядит как черная магия, — фундаментальная особенность абстрактной математики на всех уровнях. Это явно не та тупая авторитарность, которая действовала мне на нервы в школе.

Когда пришло время моего первого года в колледже, я совершил немыслимое: решил пройти курс анализа. Я, всегда ненавидевший математику всеми фибрами, из-за случая в книжном магазине ради развлечения взял курс анализа 1. Потом курс анализа 2. Потом мой профессор предложил, чтобы я на второй год взял курс математики уровня выпускника. Я сказал ему, что ничего не знаю и что он сошел с ума. Но я прошел курс и получил высшую оценку. К окончанию колледжа кафедра математики вручила мне одну из тех памятных табличек, на которых пишут что-то вроде: «Поздравляем лучшего студента по математике в нашей истории». Подчеркну: у меня нет врожденного математического таланта и ничто за 13 лет изучения дисциплины до университета не наталкивало на мысль, что я найду удовольствие в этом предмете. В любой системе образования, в которой возможна описанная последовательность событий, что-то идет ужасно неправильно.

В итоге на уроке математике — моем заклятом враге в школе — я чувствовал себя как дома*. После колледжа я собрался поступать в аспирантуру по математической физике в Университете Альберты. Летом после первого курса, следуя своему жизненному принципу заниматься чем угодно, но не тем, что требуется, я увлекся психологией и нейробиологией. В итоге я подал заявление на программы в этой области, чудом оказался принятым, оставил программу по матфизике с магистерской степенью и сейчас живу в Санта-Барбаре, изучаю мозг и поведение с помощью математики. В первый год в магистратуре факультета психологии и наук о мозге я встречал много весьма умных студентов, которые испытывали тот же неоправданный страх перед математикой, что преследовал меня в школе. Каждый раз,

* Мне повезло, что в колледже были изумительные преподаватели, — особенно запомнились Рикки и Викки Клима, Эрик Марланд и Джефф Херст. Встречались и другие чудесные учителя, но эти четверо заслуживают особой благодарности за невероятную отзывчивость и за то, что терпели, когда я врывался к ним в кабинеты с диковинными вопросами, не связанными ни с каким курсом.

когда я вижу испуг в чьих-то глазах при упоминании высшей математики, мне хочется рассказать им, что весь их опыт с этим предметом ложен. Кажущаяся трудность предмета — целиком проблема того, как нам ее преподают, и я сам оценивал себя по этому стандарту. Если в этой книге найдется то, что вы систематически пытались понять, но не смогли, то это *моя* вина, а не ваша. Базовые идеи крайне просты. Абсолютно все. Гарантирую.

В первый мой год в Санта-Барбаре я невольно задумывался, что можно было бы существенно ускорить исследования в любых научных областях, если бы все специалисты этих отраслей лучше знали математику. Я не имею в виду «в их головах было бы больше математических фактов». Речь о том, что они «были бы хорошо обучены абстрактному мышлению». И, что еще хуже, я вполне уверен, что 9 человек из 10 имеют больше «врожденных способностей» к математике, чем я (что бы под этим ни подразумевалось). И я знаю о ней больше, чем мои сокурсники, только благодаря случайному происшествию в книжном магазине, привлекшему меня к предмету, симпатии к которому я до того времени не ощущал.

Сейчас лето, и я пишу эту книгу для всех, кто когда-нибудь ненавидел математику. Не только для молодых и разочарованных, а для всех ученых, которые втайне относятся к математике как к тошнотворному, но необходимому профессиональному требованию; они добросовестно терпят ее, но никогда не чувствовали огня, анархии и гедонистического удовольствия от предмета. Если я не провалюсь с треском, мы обнаружим много занятного*. Но я должен подчеркнуть, что это не очередная надоедливая попытка «сделать математику веселее», которая обычно означает размазывание тонкого слоя глупых лиц и плохих шуток поверх старого доброго подхода. Это слабенькое улучшение стандартных учебников, и такие книги никогда не преподносят предмет так, как он должен даваться

* Вышеуказанное предложение (разумеется) написано автором этой книги, весьма пристрастным источником, мнению которого по поводу его работы доверять не стоит. Но если применить тот же принцип к предыдущему предложению, мы получим, что следует не доверять самому недоверию. Похоже, мы в тупике. Думайте что хотите.

на мой взгляд: четкие указания на все, что субъективно и необоснованно; что выглядит так, как есть, поскольку кто-то пытался добиться причудливого звучания (осознанно или нет); отделение исторических случайностей от неподвластных времени процессов рассуждений; подтверждение оправданного презрения большинства студентов на уроках математики, где они, по сути, высмеивают способы преподавания предмета; и главное: *задом наперед*. Предмет в том виде, как он обычно представлен в нынешних образовательных учреждениях, не способен вынести ни один творческий самостоятельно мыслящий человек. Книги, которые пытаются исправить этот фундаментальный порок, с названиями вроде «Прикольные функции и их потрясающие графики», упускают бо́льшую часть причин, по которым так много учащихся считает предмет чужим*. Но сама математика, если ее очистить от лишнего, претенциозного и представить добросовестно и максимально по-человечески, несомненно, одно из самых красивых открытий нашего биологического вида. Это форма научного искусства, которую не нужно оправдывать тем, что она «полезная», хотя ее изучение — одно из самых плодотворных дел в мире.

В каждый момент нашего путешествия я буду сосредоточиваться на идеях, которые, на мой взгляд, имеют большую концептуальную важность, независимо от того, дают ли их обычно в одном курсе. Мы начнем с самых основ, но со временем приступим к изучению тем, которые преподают на последних курсах четырехлетней математической программы. Если и есть книга, которая ведет от сложения и умножения к анализу в бесконечномерных пространствах, я никогда ее не видел. И я надеюсь показать вам, что такой подход не настолько бредов, как кажется.

На каждой стадии, прежде чем демонстрировать вам какие-то идеи, я стараюсь пропускать их через мысленную центрифугу. Обычно в курсе любого предмета дается путаная смесь важного со случайным, которая скрывает простоту базовых идей даже от самых внимательных учащихся.

---

* Честно говоря, это название главы из очень хорошо написанной книги. Марк Райан, я был бы рад однажды встретиться лично. Вы невероятный преподаватель.

Я всегда хотел, чтобы преподаватели тратили намного больше времени на разделение этой смеси на составные части *до* написания учебников и чтения лекций. Я пытался сделать это в своей книге, для примера посмотрите первые несколько страниц главы 4. Также обратите внимание, что круги впервые появляются у нас намного позже того, как мы изобретем анализ. Так и должно быть; до этого они сбивают с толку.

Вот пример, как по-разному мы делаем дело. Одна из немногих штук, которые я помню со школы, — теорема Пифагора. Но я не знаю, почему она верна, не знаю, почему нас это должно волновать, и мне не нравится это вычурное название. Мы избежим всех трех проблем так: я буду использовать термин «кратчайший путь» вместо «гипотенуза», придумаю более описательный термин, чем «теорема Пифагора», предложу самое простое объяснение из тех, что знаю, почему она верна (все займет 30 секунд), и, как только мы изобретем ее для себя, я покажу простой вывод того факта, что время замедляется, когда вы двигаетесь*. Это следует из специальной теории относительности Эйнштейна, но объяснение не требует математических идей сложнее теоремы Пифагора, и вы сможете полностью понять рассуждение. При этом вывод выглядит удивительно. Причем для любого, и неважно, как долго вы всё это уже знаете! Учитывая, что рассуждение понятно, как только мы придумаем формулу для кратчайшего пути (ранее — теорема Пифагора), настоящей трагедией становится тот факт, что его не включают в обязательный школьный курс геометрии. Надо бы звонить в колокола, бросать конфетти и начинать объяснять это вам за пять секунд после изучения теоремы Пифагора. Но почему-то так не делают. А мы сделаем**.

Эта книга нарушает множество соглашений и кучу правил, вероятно, даже слишком много. Ни один метод обучения не подойдет всем сразу,

* Точнее, всякий раз, когда два объекта движутся в разных направлениях или с разными скоростями, их «часы» начинают идти по-разному. Но это не просто факт о часах. Это физическое свойство самого времени. Вселенная безумна. Подробности позже!

** Придется самим поискать колокола и конфетти. Не скажу, что не рад бы вам помочь; но, вероятно, я сейчас не там же, где и вы.

и я точно не претендую ни на то, что эта книга станет *универсальным* лекарством от болезней математического образования, ни на то, что она *гарантированно* подойдет любому. Если ее подход неэффективен для вас, пожалуйста, отложите ее и найдите то, что будет работать. Ваше время ценно, и вам не стоит тратить его на попытки продраться сквозь книгу, которая вам не по вкусу. Она была написана для души, целиком ради развлечения, а не как часть работы. В идеале ее и читать следует из тех же соображений.

И не важно, вносит ли этот эксперимент свой вклад в вечные ценности или нет. В образовании необходимы радикальные перемены. Пока все выглядит так, будто наши учебные заведения на всех уровнях — от начальной школы до докторантуры и даже стилевых требований академических журналов — призваны вызвать что-то вроде обратного стокгольмского синдрома, заставляя нас ругать то, что мы вполне могли бы любить. Учащиеся, оканчивающие школы и вузы, утомлены самыми умопомрачительными вещами, которые были открыты человечеством. Если они думают, что математика, физика, эволюционная биология, молекулярная биология, нейробиология, информатика, психология, экономика и другие области исследований скучны и неинтересны, это не их вина. Это вина системы образования, которая блестяще подходит для того, чтобы наказывать творческие способности; системы, в которой учат, как правильно писать слова, а не как думать, не одурачивая себя, что мы все неизбежно делаем; системы, в которой уравниваются законы природы и произвольные правила вроде запрета предлогов в конце предложения — как если бы и то и другое было равно обоснованным описанием Метода Устройства Мира; системы, в которой люди обязаны проводить большую часть своей молодости. Для них и для всех вас, у кого был такой опыт, эта книга — мое извинение.

ПРОФИСЛОВИЕ

> *Предисловие для профессоров*. Или профессиональных математиков, или студентов с достаточным математическим багажом для прогулок по этому разделу, или любопытных студентов без математических знаний, или школьных учителей, или кого угодно, кто думает о математике часто… или нет.*

Это не стандартное «Введение». Оно более ознакомительное и при этом более углубленное, чем в большинстве книг, с которыми вы, вероятно, сталкивались. И в таком качестве оно — своего рода эксперимент.

Эксперимент какого рода?

Эту книгу очень легко понять превратно, если кто-то возьмется за нее как за учебник математики, хотя у нее много общего с учебниками и ее можно использовать в таком качестве. Чтобы понять ее цель и структуру, придется ввести новый термин, которого сейчас в нашем лексиконе не хватает: *предматематика*. Под этим я подразумеваю не скучные предметы, вроде «начала алгебры» или «введение в анализ», которыми мы терзаем ничего не подозревающих студентов. Я буду использовать этот термин для всего комплекса идей, смешиваний, вопросов и мотиваций, которые занимают умы создателей математических понятий и заставляют их определять и испытывать строго конкретные виды математических объектов.

Например, определение производной и разных теорем, которые из него следуют, — естественная часть математики, их можно найти в любом учебнике, включающем анализ. Гораздо реже уделяется достаточно внимания *причинам, почему* это понятие определено именно так, а не любым из бесконечного множества других возможных способов, а также ходу

* В оригинале неологизм prefacer, от preface и professor. *Прим. перев.*

рассуждений, которые побудили к выбору определения из всех кандидатов (при отсутствии готового учебника математики). Именно к этому комплексу возможностей и рассуждений и относится термин «предматематика». Она включает не только все возможные альтернативные определения математических понятий, которые привели бы в целом к схожим формальным теориям, но также — что, возможно, важнее — все тупики, которые посетил бы этот человек в попытках придумать с нуля стандартные математические определения и теоремы. Это нелегкая работа, которую нужно проделать, чтобы математическое понятие возникло из небытия. Математика — это колбаса; предматематика — объяснение, как та сделана.

Это и есть главная тема книги: редко обсуждаемый процесс движения от размытого и качественного к точному и количественному, или, иными словами, «как изобрести математику для себя». Под «изобретением» я подразумеваю не только создание новых понятий, но и более нужный процесс изучения того, как заново изобретать фрагменты математики, которые уже изобретены другими, чтобы получить более глубокое, «интуитивное» понимание, чем при чтении типового учебника. Это процесс, которому мы почти никогда не обучаем в явном виде, но вынуждаем задумываться о более ценном умении, которое можно вынести из любого курса математики. Изучение того, как (заново) изобрести математику для себя, фундаментально важно и для теоретической, и для прикладной сферы. Сюда входят вопросы вроде «Как математики выяснили, каким методом нужно определять кривую, чтобы можно было говорить о ней в 17 измерениях, где мы не можем ничего нарисовать?» и прикладные типа «Как мне построить модель явления, которое я изучаю, исходя из моих знаний?». Такие вопросы нередко встречаются в учебниках в виде краткого дополнения, но намного необычнее будет поместить их в центр внимания наравне (если не выше) с теоремами и результатами.

Честное описание неформального и путаного процесса создания — отсутствующий кусочек головоломки в нашем взаимодействии с математикой на всех уровнях, от начальной школы до уровня докторов наук, а его отсутствие — одна из основных причин, почему уроки так скучны даже для самых увлеченных. Элегантность и красоту математики нельзя оценить полностью без глубокого внутреннего понимания предварительного мысленного танца, в котором создаются ее понятия. Этот процесс не так трудно объяснить, как кажется, но он требует радикальных изменений в способе преподавания предмета. Для этого надо включать в учебники и лекции минимум несколько неправильных стартов, ошибок и тупиков, которые должен пережить обычный разум, прежде чем прийти к современным определениям. Нужно писать учебники в виде повествований, в которых герои часто попадают впросак и не знают, что делать дальше. Эта книга — эксцентричная, несовершенная, глубоко личная попытка очертить некоторые, на мой взгляд, базовые концепции и стратегии толкования предматематики: те, которые профессионалы используют каждый день, но редко объясняют в своих учебниках и курсах.

Отсюда следует один важный момент. Хотя правильное акцентирование на предматематике требует радикального изменения способа ее преподавания, не нужно никаких перемен в том, как профессионалы *думают о* математике. Предматематика — их хлеб насущный. Это язык, на котором они мыслят, поскольку они по определению создают — или, если хотите, открывают — предмет. В этом смысле содержание нашей книги не ново. Новизна только в том, что на центральное место выдвигается тонкость, обычно скрытая за стеной формальных доказательств и заранее отполированных выводов (в «неудобных» учебниках) или картинками и почти не объясненными утверждениями (в «удобных» учебниках). Ни в одной точке в диапазоне между легкими ознакомительными книгами, с одной стороны, и внушающими благоговейный ужас монографиями в стиле Гротендика* — с другой, мы не представим точно процесс создания педагогически полезным способом.

* Александр Гротендик (1928–2014) — французский математик, участник группы, которая выступала под псевдонимом Николя Бурбаки. Специалист по алгебраической геометрии, теории чисел и гомологической алгебре. *Прим. перев.*

Невозможно в одной книге исследовать всю предматематику для определенного понятия перед переходом к математике, и я не пытаюсь решить эту невозможную задачу. Скорее я хочу построить повествование, которое ведет от одного понятия к другому, начиная от сложения и умножения, с немедленным переходом к анализу функций одной переменной, а затем назад через темы, которые мы обычно считаем «предварительными областями» (более глубокие!), и в итоге к анализу в многомерных и бесконечномерных пространствах. В этом повествовании очень много математики, и вы не ошибетесь, если будете использовать его как учебник. Но как только для какого-нибудь понятия подробно разработана предматематика, сама математика часто оказывается потрясающе простой. Поэтому мы будем фокусироваться в основном на первой. Это не значит, что книга содержит исчерпывающее и полное обсуждение каждой из тем, которые включены в нее. Вовсе нет! Скорее это моя оценка того, чего не хватает в части информации, мотивации и того, с какого места нам следует начинать преподавать предмет. Эта книга — грубый экспериментальный прототип, а не ограненный бриллиант. Надеюсь, что она станет началом разговора, а никоим образом не окончательным вердиктом по какой бы то ни было теме.

Кроме того, важно четко понять, что я *не* критикую. Проблема педагогического фундамента принципиально отлична от проблемы фундамента логического, хотя они по смыслу соединены в большинстве учебников. Я не намереваюсь критиковать логическую стартовую точку в данной области, под которой я подразумеваю выбор исчисления предикатов первого порядка для нашей логики; наша теория может использовать аксиоматику Цермело — Френкеля, аксиоматику Бернайса — Гёделя или вашу любимую аксиоматику теории множеств*. Критиковать я хочу *педагогическую* исходную точку в этой области. Подавляющее большинство членов нашего общества контактировало только с ней.

---

* Яркую критику стандартного теоретико-множественного подхода к логическим основаниям см. в захватывающей книге Роберта Гольдблатта «Топосы. Категорный анализ логики» (М., 1983). *Прим. перев.*

Почему предматематикой пренебрегают?

Учитывая повсеместную распространенность предматематических рассуждений в умах профессионалов, стоит поинтересоваться, почему они так редко появляются в учебниках и журнальных статьях. Тому множество причин, но мне кажется, что основная — *профессионализм*. Хотя предматематика принципиально важна для понимания нашей области, она систематически исключается из любых дискуссий, которые требуют профессионализма, включая все работы в академических журналах (и не только их). Почему? Потому что *точная* предматематика *не* формальна. Она (по определению) — набор догадок, озарений и проявлений интуиции, ведущих к разработке прежде всего формальной теории. Единственный точный и честный способ дать объяснение неточным мыслительным процессам — показать их с помощью неформальных аргументов на неформальном языке, который точно передает читателю мысль: мы не уверены на сто процентов в том, что наши догадки ведут нас по верному пути, и всегда (хотя бы отчасти) ищем дорогу в потемках. Такой неформальный язык не просто все упрощает до возможности понимания. Это четкий способ описания цепочек рассуждений, с помощью которого создаются новые математические понятия. И без четкого представления о том, как создается математика, представление о предмете будет неполноценным, не таким, каким было бы в ином случае.

Поймите правильно: это и не критика формальных объяснений математики или концепции формального доказательства. В полностью сформированном виде не возникают ни такие доказательства, ни (что важнее) *определения* математических понятий, на которых те основаны. Поверхностное формальное описание неформальных мыслительных процессов сбивает читателя с толку *доказательствами для несуществующих принципов* и тем самым запутывает его, заставляя поверить в то, что его неспособность осознать, как A следует из B, вызвана недостатком знаний, хотя на деле причина в недостаточной точности предматематических рассуждений, лежащих в их основе. Полное раскрытие требует дать неформальные описания того, что само по себе неформально. Профессионализм действительно важен, но, по существу, его функция заключается в строгой оценке правдивости. И профессионалы нещадно вымарывали чуть ли не всю предматематику.

Какой я видел книгу поначалу

Эта книга выросла из попытки объяснить одно подмножество математической Вселенной максимально честно и незамысловато, обеспечивая на каждом этапе раскрытие секретов нашего ремесла. На каждом шагу я пытаюсь отделить необходимые умозаключения от исторически сложившихся соглашений; я подчеркиваю, что обычно пугающие термины «уравнение» и «формула» — всего лишь код для «предложения»; стараюсь четко дать понять, что символы в математике — всего лишь сокращенные обозначения для вещей, которые мы могли бы назвать словами; пытаюсь вовлечь читателя в процесс изобретения хороших сокращений; всегда стремлюсь прояснить разницу между тем, что другие учебники дают на практике, и тем, как они могли бы это делать. Я стараюсь представить каждый вывод не в стандартной готовой форме, причесанной и ничего не говорящей о мыслительных процессах, приведших к ее появлению, а так, чтобы осветить хоть какие-нибудь тупики, по которым многих из нас можно было бы уговорить пройти, чтобы в конце добраться до ответа. Я стараюсь все объяснить максимально подробно без ущерба для связности повествования; и я поклялся, что скорее сожгу эту книгу, чем позволю себе хотя бы раз сказать: «Запомните это!». Многое мне хотелось бы сделать иначе, но по крайней мере в книге полным-полно всего упомянутого выше.

Я также пытаюсь объяснить странные танцы, которые исполняет наша область на границе между структурированной необходимостью и необузданной анархией. Это то, что мы практически никогда не объясняем учащимся, и я это подчеркиваю, когда только возможно. Вот что я имею в виду. С одной стороны, это анархия. Мы вольны использовать любые аксиомы, которые захотим, даже противоречивое их множество.

Определять противоречивую формальную систему и экспериментировать с ней — не *незаконно*, а просто *скучно*. Например, «деление на ноль» не *незаконно*, и каждый преподаватель математики это знает. Мы запросто можем определить символ ★ свойством $\star \equiv \frac{a}{0}$ для всех a, и во многих книгах по анализу так и поступают: в разделе о том, что обычно зовется «расширенной системой вещественных чисел»*. Но если вы будете настаивать на определении вышеприведенного символа, то алгебраическая структура, которую вы изучаете, не может быть полем. Вы настаиваете, что она — по-прежнему поле? Прекрасно, но тогда вы можете говорить лишь о «поле с одним элементом». Вы утверждаете, что элементов больше одного или поля по вашему определению имеют минимум два элемента? Тоже прекрасно, но тогда вы работаете в противоречивой формальной системе. Вы этого хотите? Прекрасно. Но тогда любое предложение доказуемо, и ничего с этим не поделаешь.

Важно подчеркнуть, что даже теперь, сев на мель, мы не сделали ничего *незаконного*. Скорее обсуждение стало *скучным*. Каждый математик знает, что по крайней мере при выборе объекта изучения в математике законов нет. Есть лишь более или менее элегантные и интересные структуры. Кому решать, что считать элегантным и интересным? Нам. Что и требовалось доказать.

Есть и структурированная часть математики. Как только мы завершим этап «все можно», на котором говорим, что именно представляют собой наши допущения и о чем вообще речь, *тогда* мы обнаружим, что сотворили мир независимой от нас истины, о котором мы знаем очень мало и который должны исследовать.

Что и говорить, когда мы не сообщаем учащимся это фундаментальное положение об анархии и структуре, мы дезинформируем их о сути математики. Почему-то мы почти никогда не говорим им об этом странном

* Обычно пишут ∞ вместо ★. Я использую ★, чтобы напомнить о том, что рассуждение — не проблема «бесконечности», а проблема скуки, которая корежит математическую Вселенную, когда мы предполагаем, что нулевой элемент по сложению имеет обратный по умножению.

взаимодействии между анархичным творением и структурированным умозаключением. Я убежден, что из-за подобного подхода (в частности) очень многие думают, будто математика — что-то вроде пустоши под властью тоталитаризма, где полным-полно неопределенных законов, о которых никто вам не расскажет, и где вам всегда надо опасаться случайно сделать что-то неправильно. Именно так я всегда чувствовал себя в школе, до событий, о которых я рассказал в первом предисловии. Именно это одна из тех проблем, которые я пытаюсь устранить в своей книге.

Книга тоже решает, о чем она будет

Поскольку я хотел разъяснить общие моменты, например комплексное представление о структуре математики, то собирался подойти и к объяснению концепций, которые преподаются в стандартных учебниках. Так что эта книга действительно может оказаться полезной во всем мире. Для этого мне надо было построить рассказ так, чтобы подвести ко множеству стандартных определений из учебников, прежде чем объяснить математические выводы из них. Но, с учетом заявленной цели, я пообещал себе, что не буду вводить эти термины стандартным путем: «это и это определяем так-то и так-то», часто из ниоткуда, в лучшем случае — с несколькими страницами изложения мотивов, концептуальных или исторических, за которыми идет длинный скачок к формулировке. Отказавшись от этого, я обнаружил, что попал в довольно тесные рамки. Проблему можно кратко изложить так.

> Предположим, вы не знаете ничего о математике, за исключением основ сложения или умножения. Речь не обязательно об алгоритмах их выполнения, но вы в курсе, что означают фразы вроде «вдвое больше», и осознаёте суть обеих операций. Вы живете в мире, где учебников пока нет. Как бы вы смогли открыть даже самые простые разделы математики? Конкретнее: как бы вы выясняли, что площадь прямоугольника равна «длине, умноженной на ширину»?

Было бы нелогично отвечать на этот вопрос, рассуждая, как площадь определяется в теории меры, либо говоря об аксиомах, или пятом постулате Евклида, или о том, как формула $A = lw$ не работает в неевклидовой геометрии. Это не вопрос строгости или истории. Это вопрос *создания*. Наша задача — двигаться от неясного, качественного, обиходного понятия к точному, количественному, математическому, когда вокруг никого, кто мог бы помочь или сделать вместо вас.

Вышеприведенный вопрос мне когда-то задала Эрин Горовиц. К тому времени, когда я начал писать эту книгу, у нас случались многочасовые беседы о математике. У нее нет нужной подготовки, но она крайне любопытна и всегда интересуется разными вопросами. Мы говорили о формальных языках, ряде Тейлора, понятии пространства функций и прочих безумных вещах, о которых обожаем болтать. Однажды она спросила меня, как рождаются математические идеи. В такой формулировке, с использованием площади прямоугольника в качестве примера, вопрос был несложным, и я предложил ей самый короткий вариант, который смог придумать: рассуждение о площади, которое вы найдете в главе 1. Когда я закончил говорить, она спросила, почему нас никогда не учат подобному в школе. Она уяснила это короткое рассуждение, как смог бы любой на ее месте. И вот самое странное: оно включает функциональное уравнение.

На математических кафедрах очень мало курсов, которые сосредоточены на функциональных уравнениях. Я не уверен, что их должно быть больше, но сам факт приводит в замешательство, как только его осознаешь. В конце концов, все студенты-математики, как им и положено, сталкиваются со множеством дифференциальных уравнений и неизбежно встречаются с интегральными уравнениями. Но областью математики, посвященной изучению и решению общих выражений, которая включает неизвестные функции, история в основном пренебрегала. И хотя это одна из самых старых тем в математике, нам нечасто доводится о ней слышать. В своем монументальном труде «Лекции по функциональным уравнениям и их применению» Янош Ацель* сетует, что «долгие годы не существовало систематического освещения этой области, несмотря на ее солидный возраст и практическую важность».

К своему удивлению, я начал открывать для себя, что функциональные уравнения чрезвычайно полезны для объяснения даже самых простых математических концепций, если правильно преподносить их**. Вот как это надо делать. Вы не используете термин «функциональное уравнение» и по возможности даже слово «функция». У большинства людей есть печальный опыт изучения математики в школе, их легко напугать и подавить природную изобретательность, используя нагромождения общепринятых математических терминов. Вместо этого вы рассказываете примерно так.

> У нас есть неясное обиходное понятие, которое мы хотим превратить в точное математическое. Здесь нельзя ошибиться, ведь мы сами будем решать, насколько успешно превращение. Но мы хотим втиснуть как можно больший объем обиходного понятия в математическое. Начинаем с нескольких фраз о нашем обиходном понятии. Затем придумываем сокращения для них***. Затем мысленно выкидываем все варианты, которые не обеспечивают необходимого. Теперь можем всё прополоскать и повторить еще раз (если захочется), переводя всё больше и больше неясной повседневной информации в сокращенную форму, а потом мысленно отбрасывая то, что ведет себя не как надо. Иногда, записывая примеры, мы понемногу начинаем убеждаться в том, что точное определение, которое мы ищем, должно выглядеть определенным образом. Не исключено, что мы не сведем всё к одной возможности, и даже если так произойдет, мы не узнаем, когда обнаружили эту

* Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. Dover Publications, 2006.

** Функциональные уравнения не в полной общности, как в монографии Акцеля, а в неформальной версии, аналогичной областям, которые мы преподаем до анализа.

*** В это время функциональное уравнение записывается без его осознания.

возможность, но это неважно. Если нашлось более одного кандидата-определения и все они ведут себя так, как нам хочется, мы можем поступить так, как всегда поступают математики, хотя ничего вам не говорят: выбираем то, что кажется нам симпатичнее всего. Что такое «симпатичнее всего»? Вам решать.

Как бы безумно это ни звучало, я уверен, что неформальные математические рассуждения, включающие функциональные уравнения, позволяют лучше объяснить, откуда берутся наши определения на всех уровнях математики. Они же обеспечивают что-то вроде антиавторитарного педагогического стиля, который вовлекает читателя в процесс создания математических понятий способом, не описанным во вводных курсах и учебниках. На удивление часто (хотя, разумеется, и не всегда) оказывается, что редко обсуждаемая предматематическая практика превращения неясного качественного понятия в количественное включает использование функциональных уравнений. В главе 1 мы используем эту идею для «изобретения» понятий площади и крутизны (углового коэффициента), не приходя к общепринятым определениям путем простого их постулирования, а выводя их из сопоставления с обиходными представлениями. Это иллюстрация того, как может выглядеть предматематическая педагогика, но это лишь пример, оставляющий достаточно простора для совершенствования. В тексте книги мы будем «изобретать» множество математических понятий, иногда с помощью неформального использования функциональных уравнений, иногда иначе, но всегда четко давая понять, что именно мы пытаемся сделать и какие другие варианты существуют.

Как это поможет

Чтобы увидеть, как акцент на предматематике отличается от стандартного подхода, рассмотрим конкретный пример того, как традиционное преподавание загоняет себя в угол. Изучим задачу, которая встает перед преподавателем или учебником, когда надо объяснить, откуда берется определение углового коэффициента. С одной стороны, вам хочется обосновать идею. С другой — вы хотите прийти к стандартному определению $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, или, как говорят в учебниках, к «отношению приращения функции к приращению аргумента». Все дифференциальное исчисление основано на этой формуле в сочетании с понятием предела, и едва ли найдется более важное понятие, которое нужно передать ученикам. Преподаватели и авторы учебников сталкиваются с такой проблемой. Они способны придумать набор постулатов, который выделил бы «отношение приращения функции к приращению аргумента» как уникальное определение, удовлетворяющее всем этим утверждениям, но доказательство выходит слишком сложным для ознакомительного курса и, очевидно, приведет любого читателя в гораздо большее замешательство. Поэтому они вводят «отношение приращения функции к приращению аргумента» как *определение* углового коэффициента, возможно, добавляя предварительное обоснование. С учетом ситуации эта мера кажется вполне разумной.

Но я уверен, что в данном случае (и других подобных) мы сбиваем с толку очень многих и отвращаем их от математики. Когда я впервые услышал определение углового коэффициента в школе, это только поспособствовало утрате мотивации. Введение понятия таким образом: а) оставляет множество неотвеченных вопросов; б) заставляет каждого вдумчивого учащегося чувствовать себя так, словно он что-то упустил; в) неявно предполагает, что ученик не понимает сути по своей вине. Разумеется, он что-то упустил, но *не* по своей вине, а поскольку преподаватели «что-то» от него намеренно скрыли, причем из лучших побуждений. Лично мои ощущения можно было описать примерно так: «Я бы не смог изобрести ни одного из этих определений самостоятельно, используя основные принципы, поэтому что-то я во всем этом не понимаю». В то время я, конечно, не облекал свои ощущения в такие слова. На ум приходила отчетливая мысль: «Я эту штуку не понимаю».

Годы спустя, когда я стал объяснять математику другим, я всегда старался обратить внимание на то, что мы *могли бы* определить угловой коэффициент как «три отношения приращения функции к приращению аргумента», «отношение приращения функции к приращению аргумента в пятой степени» или даже «отношение приращения аргумента к приращению функции», после чего развивать анализ на основе любого из этих определений. Наши формулы выглядели бы немного иначе (или заметно иначе, в зависимости от выбранного определения), и мы могли бы сформулировать некоторые знакомые теоремы в слегка иной или даже неузнаваемой форме, но суть теории осталась бы прежней, какой бы чуждой и отталкивающей она ни казалась. То же верно для любого математического понятия. И при объяснении этого кому-либо крайне редко меня не спрашивали, почему об этом не говорится в курсах и учебниках. Я не знаю. Должно говориться.

Математика в огне: рассказ о математическом творении

Что я, по-вашему, должен публиковать? Леонард Сэвидж (1962) задал этот вопрос, чтобы выразить легкое недоумение тем фактом, что, какую бы тему он ни взял для обсуждения, какой бы стиль изложения ни выбрал, он был уверен, что его будут критиковать за такой выбор. В этом он не одинок. Мы хотим попросить относиться чуть более терпимо к нашим индивидуальным различиям.*

Эдвин Томпсон Джейнс, «Теория вероятностей. Логика науки»**

Сочинение книги — эмоциональный опыт. В ходе подготовки к публикации мне повезло заполучить двух чудесных редакторов: Томаса Келлехера

* Леонард Джимми Сэвидж (1917–1971) — американский математик и статистик. *Прим. перев.*

** Jaynes E. T. Probability Theory: The Logic of Science. Cambridge University Press, 2003.

и Куинь До, которые все это время оказывали мне неоценимую помощь. Я имел дело в основном с Куинь. Она проявляла нескончаемое терпение, помогая мне шлифовать очень сложную для редактирования (могу только вообразить, насколько) книгу, и, хотя мы не всегда сходились во мнении, ее комментарии *чрезвычайно* улучшили результат. После упоминания редакторов обычно говорят: «В книге остались только мои огрехи», но эта традиционная фраза слишком слабо отражает истинное положение вещей.

Даже в заключительном варианте книга неизбежно имеет недостатки: опечатки, преувеличения, плохо сформулированные предложения, повторы, противоречия себе, излишне самонадеянные и рискованные высказывания, заявления типа «Я никогда не сделаю X!», после чего сразу следует X; заявления «Я никогда не сделаю X!», после чего позже (но не сразу) следует X; неожиданные шуточки, которых никто не найдет и не поймет; ненамеренное отвращение от себя или даже оскорбление ни в чем не повинных читателей; эксперименты со средствами выражения способами, которые многие сочтут слишком отвлеченными; слишком много предисловий, отступлений, диалогов; слишком мало диалогов; слишком много метакомментариев; использование заумных греческих и латинских слов (пусть и для того, чтобы посмеяться над ними, а заодно теми, кто ими пользуется) для большей вычурности, чем необходимо; и минимум одна непростительно крупная ошибка, которая, вероятнее всего, появилась при нечаянном копировании случайного абзаца в совершенно другую часть книги… и так до бесконечности.

Это моя первая книга. Я строил ее на лесах своих недостатков. Я никогда не думал, что займусь этим, и был крайне изумлен, когда это случилось. Я написал ее за четыре месяца в 2012 году, в эйфорическом возбуждении от кофе, утомляя глаза по 16 часов в день, забывая поесть и наслаждаясь каждой минутой. Мне никогда еще не было писать так весело. На тот момент мне было 25. С тех пор, кажется, я стал другим человеком. Теперь, когда перечитываешь некоторые части, скребет на душе. Когда книга создается так, как описано выше, в ней неизбежно оказываются разные недостатки, которые не изжить никаким редактированием и никакой шлифовкой.

В большинстве своем эти недостатки случайны, но некоторые заложены намеренно. Если ошибка — просто оплошность, то ее устранение не повредит делу. Когда мы убираем опечатку в предложении N, то на предложение N + 1 это не влияет. Тот же принцип применяется для неряшливых формулировок или ненужных повторов, и (хотя многие такие оплошности, безусловно, остаются в книге) это такие ошибки, которые стоит устранить.

Но порой ошибка — не просто оплошность, а в каком-то смысле ступенька. Это то, без чего мы бы никогда не добрались до нужного места. Если убрать из лестницы *N*-ю ступеньку, это повредит следующим, независимо от того, что собой представляет наша лестница: повествование или математическое рассуждение. Некоторым идеям нужны недостатки, чтобы можно было их правильно донести. Моя цель — завлечь читателя секретами процесса творения как математики, так и книг, но нельзя вообразить безукоризненный процесс творения. Если и есть тема, которая связывает вместе все выкрутасы в этой книге, то это *полное раскрытие*. Это открытость и честность — не только в отношении процесса математического творчества, но и по поводу написания книги, а также эмоционального опыта возвращения к написанному после долгого отсутствия и понимания того, что некоторые недостатки слишком глубоко укоренились, чтобы их выкорчевать. Мысли о людях, которые уделили часть своей жизни прочтению этой книги, делают меня таким счастливым, что нет желания что-либо прятать от них. Я хочу показать им все. Вообще все. И это неизбежно приводит к появлению необычной книги.

Надеюсь убедить вас далее, что причина, по которой так много членов нашего общества никогда не полюбят и не поймут математику, в том, что мы неверно общаемся на математические темы. *Это не значит, что я знаю, как это надо правильно делать!* Моя книга может оказаться грандиозным фиаско, но в одном я точно уверен: математика заслуживает лучшего, чем те методы, которые мы сейчас используем для ее преподавания на всех уровнях. Эта книга — моя личная попытка исправить некоторые из таких огрехов; я написал книгу, которую сам всегда хотел прочесть. Готовы немного позабавиться? Я тоже. Поехали.

AKT I

ГЛАВА 1
EX NIHILO

Корабль строится не потому, что ты научил их [народ] шить паруса, ковать гвозди, читать по звездам; корабль строится тогда, когда ты пробудил в них страсть к морю и все противоречия тонут в свете общей для всех любви.

Антуан де Сент-Экзюпери, «Цитадель»*

1.1. Забудьте математику

1.1.1. Всем привет!

Забудьте всё, что вам когда-либо говорили о математике. Забудьте глупые формулы, которые вам предлагали запомнить. Создайте в голове маленькую комнату с чистыми белыми стенами и без математики. Сделаем ее для себя, не покидая этой комнатки. Без груза преподавателей, классной комнаты, не обращая внимания на штуку, именуемую «математика», которую передали нам предыдущие поколения, и освободившись от смехотворной лжи, будто самое худшее — ошибиться. Только тогда мы сможем понять что-нибудь.

Я назвал эту главу Ex Nihilo по двум причинам. Первая — посмеяться над ненужной вычурной терминологией, которая есть в любой области, включая математику. Мы любим умные слова, и чушь, произнесенная на другом языке (особенно мертвом), выглядит солиднее. Но мы можем обойтись без латыни. Слова Ex Nihilo означают «из ничего», и я выбрал их для названия первой главы, чтобы подчеркнуть, что в этой книге математика *наша*. Этот термин больше не относится к тому, что вы изучали в школе. Мы заставляем ее существовать, доставая из ничего.

---

* Перевод М. Кожевниковой. *Прим. пер.*

Я предполагаю, что язык сложения и умножения достаточно знаком вам, чтобы вы могли говорить на нем бегло. Я не имею в виду, что вам должно быть очевидно, как вычислить квадрат числа 111111111, или найти квадратный корень из 12345678987654321, или еще что-то безумное вроде этого. В целом математики не любят иметь дело с числами. Но я считаю, что вы можете убедить себя в базовых моментах вроде того, что от перестановки слагаемых сумма не меняется. То же и для умножения. Скажем короче:

$$(?) + (\#) = (\#) + (?) \quad \text{и} \quad (?)\,(\#) = (\#)\,(?)$$

для любых чисел (?) и (#).

Чтобы начать путешествие в математику, *не* нужно тратить время на изучение скучных материй вроде вычисления конкретной цифры в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$. Достаточно знать, что забавный символ $\frac{1}{7}$ относится к числу, которое при умножении на 7 дает 1. Если вы видите что-то вроде $\frac{15}{72}$, не втягивайтесь глупо в раздумья, что это загадочная штука под названием «деление» и вам придется узнавать про нее какие-то случайные факты. Этот символ — просто сокращение для $(15)\left(\frac{1}{72}\right)$, а тут простое умножение. К чему относится $(15)\left(\frac{1}{72}\right)$? Понятия не имею, и вам тоже это незачем. Но мы знаем, что это число, которое при умножении на 72 даст 15. Вот и всё.

Будем считать, что вы знаете основы сложения и умножения, и отправимся в крайне извилистый путь по математике. После этой главы, которая в основном учит, как изобретать математические понятия, мы прыгнем прямо к изобретению анализа, а затем используем его, чтобы заново придумать для себя все штуки, которые обычно считаются «предварительными областями» для анализа. Перевернув предмет вверх ногами, мы обнаружим, что не только анализ — искусство бесконечно больших и бесконечно малых — может быть изобретен до «предварительных областей», но и эти области нельзя полностью понять без анализа.

Такой подход освобождает нас от необходимости запоминать что-либо. Мы никогда (намеренно) не примем ничего, что сами не создали для себя, и всегда можем посмотреть на сделанное. Поэтому мы поймем, что математика — область, которая часто ассоциируется с запоминанием — требует его меньше, чем другие предметы. В некоторых областях этого не избежать, а для математики это яд, и любого учителя математики, который заставляет вас что-то запомнить, не извиняясь при этом на коленях, следует немедленно телепортировать на биржу труда и заставить запомнить телефонный справочник*. Математика — прекрасная дисциплина, в которой ничего не нужно запоминать. Самое время начать обучать ей именно так.

Когда-нибудь наше приключение приведет нас к весьма продвинутым темам, которые обычно не преподают до второй половины четырехлетней программы бакалавриата. Мы увидим, что эти материи, по сути, ничем не отличаются от «базовых», хотя на каждой стадии учебники меняют способы описания вещей, чтобы запутать вас.

Мы почти готовы начать приключение и отправиться в прекрасный мир очевидных истин, в котором ничто не случайно. Изредка вы будете обескуражены (видимо, по моей вине). Вы можете экспериментировать с идеями самостоятельно, чтобы убедиться, что вы их понимаете. Или поразмышлять всерьез, и тогда вам придется еще больше постараться, чтобы не испугаться, когда вы увидите символы (сокращения). Но вам не нужно ничего запоминать… если только вы сами не захотите этого. Так что начнем.

---

* **Автор:** Ну ладно, это уж очень жестко. Я не всерьез. Я всего лишь считаю, что запоминание не особо полезно. Просто писать книгу — захватывающий опыт, и меня иногда заносит. Не относи́тесь к моим предложениям слишком серьезно, ладно? Я имею в виду, что я никогда раньше не писал книг и боюсь, что могу сгореть. Я знаю, что никогда не закончу, если не буду получать удовольствие от процесса. Так что, если не слишком много прошу, пожалуйста, старайтесь смягчать мои гиперболы. Они просто для смеха. Пойдемте дальше, дорогой Читатель. Могу я называть вас так?

Читатель: Годится.

Автор: Отлично! Вы можете называть меня Автором. Или как вам угодно. Я откликнусь на любой громкий шум, выбирайте то, что нравится, и продолжим. Не могу поверить, что я на самом деле пишу книгу!

1.1.2. «Функция» — смешное название

Профессор К. О. Мэй рассказал мне, что термин «функция» попал в математику из-за неверного истолкования его правильного применения Лейбницем. Но он стал фундаментальным в математике и, как его ни назови, заслуживает лучшего изложения. Поэтому, возможно, в математическом образовании нет лучшего примера упущенных возможностей, чем изложение понятия функций.

Престон Хаммер, «Стандарты
и математическая терминология»*

Машины делают самые разные предметы. Хлебопечка — машина, которая съедает ингредиенты, а выплевывает хлеб. Духовка — машина, которая будет съедать что угодно и выплевывать это же, но сильно повышенной температуры. Компьютерную программу, прибавляющую единицу к произвольному числу, можно считать машиной, которая съедает число и выплевывает другое, на единицу большее вложенного. Ребенок — машина, которая ест вещи и выплевывает их измазанными слюной.

Почему-то математики решили использовать странное слово «функция» для описания машин, которые едят одни числа и выплевывают другие. Намного лучше было бы назвать… да почти как угодно. Мы для начала поименуем их «машинами», а потом, как только привыкнем к этой идее, станем изредка называть их «функциями», но только изредка**.

Будем использовать единственные инструменты, которые у нас есть, — сложение и умножение, — чтобы изобрести несколько машин, которые едят и выплевывают числа.

---

* Hammer P. C. Standards and Mathematical Terminology. The Pennsylvania State University. http://mumble.net/~jar/articles/hammer-standards.pdf.

** Мы будем использовать некоторые нестандартные термины, но я не утверждаю, что моя терминология «лучше» стандартной, и определенно не настаиваю, чтобы другие книги использовали ее! Цель эпизодического изобретения терминов — напоминать себе, что создаваемая нами математическая Вселенная полностью *наша*. Мы строим ее с нуля, нам и решать, что и как называть. Но не думайте, пожалуйста, что моя цель — перевести все в новый набор терминов. Слово «функция», возможно, и не лучшее, но не такое уж и плохое, если вы к нему привыкнете.

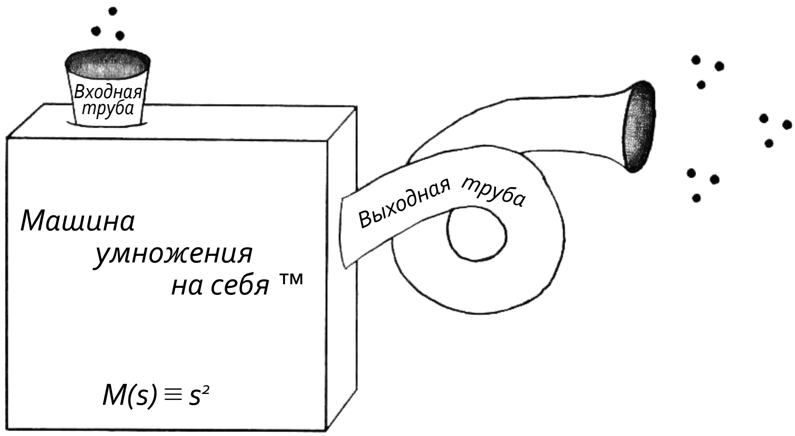


Рис. 1.1. Одна из наших машин

1. Самая скучная машина: если мы подаем в нее число, она выдает его же обратно.

2. Машина прибавления единицы: если мы подаем в нее число, она добавляет 1 к нему и выплевывает результат.

3. Машина удвоения: если мы подаем в нее число, она умножает его на 2 и выдает результат.

4. Машина умножения на себя: если мы подаем в нее число, она умножает его на это же число и выдает результат.

Нужно немало слов, чтобы говорить об этих машинах, так что давайте придумаем сокращения. Все символы в любой области математики, как бы замысловато они ни выглядели, всего лишь сокращения для того, о чем мы можем говорить словами, если мы не слишком ленивы. Большинство людей (хотя они обычно не скажут вам об этом) действительно боятся, когда видят пачку непонятных им уравнений, но пугаются меньше, когда видят какую-нибудь аббревиатуру вроде DARPA, UNICEF или SCUBA*.

* DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) — Управление перспективных исследовательских проектов Министерства обороны США, UNICEF (United Nations International Children's Emergency Fund) — Детский фонд ООН, Scuba (self-contained underwater breathing apparatus) — автономный подводный дыхательный аппарат. *Прим. перев.*

Но математика — это горка сокращений плюс рассуждения. В нашем путешествии мы изобретем много сокращений, и очень важно, чтобы мы придумывали такие, которые напомнят нам, о чем мы говорим. Например, если вы хотите говорить о круге, разумными обозначениями будут C (circle) и ○. Хорошие обозначения для квадрата — S (square) и □. Так очевидно, что вы можете удивиться, зачем я об этом говорю. Но когда вы смотрите на страницу, усыпанную уравнениями, и думаете: «Какой ужас!», на самом деле вы видите лишь кучку простых идей в сильно сокращенной форме. Это верно для любого раздела математики: разобрать аббревиатуры — больше половины успеха.

Мы хотим говорить о наших машинах, используя меньше слов, и нам нужно придумать несколько удобных сокращений. Что делает сокращение хорошим? Решать нам. Изучим наши возможности. Мы можем описать Машину удвоения так.

Если мы положим в нее 3, она выплюнет 6.

Если мы положим в нее 50, она выплюнет 100.

Если мы положим в нее 1001, она выплюнет 2002.

А потом мы можем сказать, что так будет с любым числом. Но это отнимает безумно много времени, так мы никогда не закончим. Мы можем описать весь этот бездонный мешок предложений одним махом, просто сказав: «Если мы положим в нее (*нечто*), она выплюнет 2 · (*нечто*)», причем мы так и не знаем, чему конкретно равно (*нечто*). Мы можем сократить эту идею еще больше, написав: $\textit{нечто} \mapsto 2 \cdot \textit{нечто}$.

Итак, оставаясь в неведении относительно того, какое число мы положили в машину, мы умудрились сжать бесконечный список предложений до одного. Можем ли мы так сделать всегда? Видимо, нет. Мы еще не знаем. Но сейчас мы решили размышлять только о машинах, которые можно описать целиком в терминах сложения и умножения, и это дает нам возможность объединить бесконечное количество предложений в одно. Мы можем описать наши оставшиеся машины таким же сокращенным способом.

1. Самая скучная машина: *нечто* $\mapsto$ *нечто*.

2. Машина прибавления единицы: *нечто* $\mapsto$ *нечто* $+ 1$.

3. Машина удвоения: *нечто* $\mapsto 2 \cdot$ *нечто*.

4. Машина умножения на себя*: *нечто* $\mapsto$ $(\textit{нечто})^2$.

Если это не укладывается в голове, вот еще несколько примеров:

1. Самая скучная машина:

$3 \mapsto 3$

$1234 \mapsto 1234$

2. Машина прибавления единицы:

$3 \mapsto 4$

$1234 \mapsto 1235$

3. Машина удвоения:

$3 \mapsto 6$

$1000 \mapsto 2000$

4. Машина умножения на себя:

$2 \mapsto 4$

$3 \mapsto 9$

$10 \mapsto 100$

Попробуем сократить эти машины как можно больше, но без смехотворности. Под последней я подразумеваю потерю информации. Например, мы можем обозначить полное собрание сочинений Шекспира символом ♣, но это нам особо не поможет, поскольку мы не сможем извлечь из сокращения информацию, которую в него вложили. Сколько сокращений понадобится, чтобы полностью описать наши машины? Нам нужны названия: для самой машины; для того, что мы в нее кладем; для того, что мы получаем. Кроме того, нам необходимо еще одно: описать, как машина работает.

---

* Мы пишем $(\textit{нечто})^2$ в качестве сокращения $(\textit{нечто}) \cdot (\textit{нечто})$. В более общем случае мы будем использовать сокращение $(\textit{нечто})^{\textit{число}}$ для замены фразы «Штука, которую вы получаете, когда умножите (*нечто*) на себя *число* раз». Не надо думать «я не понимаю степени», потому что сейчас нечего понимать. Это просто сокращение для умножения.

Давайте обозначать сами машины буквой M, тогда мы не забудем, о чем говорим. Возможно, мы захотим высказаться одновременно о нескольких машинах, тогда будем использовать букву M с разными шляпками (M, $\hat{M}$, $\ddot{M}$, $\bar{M}$), чтобы говорить о различных машинах. Мы назвали словом *нечто* то, что мы закладываем в машину, но давайте сократим это немного и будем писать просто *s (stuff)*. А сейчас, когда у нас есть два сокращения, мы можем *сконструировать из них третье*. Это жульническая идея, и я никогда раньше не слыхал, чтобы кто-то допускал, что мы так делаем, не говоря уже о странности самого процесса. Но именно отсюда берет начало бо́льшая часть неразберихи с «функциями».

Что значит сконструировать третью аббревиатуру из первых двух? Какое название придумать, чтобы говорить о «вещи, которую машина M выплевывает, когда я кладу в нее нечто s»? Если мы придумаем название для этого, используя сокращения M и s, нам незачем другие буквы, и мы применим минимально возможное количество символов. Давайте назовем это $M(s)$. Итак, $M(s)$ — сокращение, которое мы используем для «вещи, которую машина M выплевывает, когда я кладу в нее нечто s».

Итак, нам нужно было назвать *три* вещи, но мы назвали *две*, потом сделали паузу, оглянулись, не подсматривает ли кто, и втихомолку использовали два названия, которые уже представили «буквами», чтобы написать третье.

Это странная идея, но она весьма полезна, как только мы к ней привыкнем. Если вас смущали «функции» выше, не беспокойтесь. Это всё простые рассуждения о машинах и сокращениях. Но вам этого не говорят.

Отлично, теперь у нас есть три названия, но мы всё еще не описали никаких конкретных машин на новом языке. Давайте заново представим четыре упомянутые выше машины. Я не стану расставлять их в прежнем порядке. Посмотрим, можете ли вы разобраться, где какая из них.

1. $M(s) = s^2$.
2. $\hat{M}(s) = 2s$.
3. $\ddot{M}(s) = s$.
4. $\bar{M}(s) = s + 1$.

Такие сокращения могут смущать, поскольку в каком-то смысле мы описали только выход, то, что машина выплевывает. Обе части ~~уравнения~~* предложения $M(s) = s^2$ свидетельствуют об этом. С другой стороны, оно говорит сразу о трех вещах: самой машине, том, что мы в нее кладем, и том, что мы оттуда достаем. Еще раз посмотрим на это сумасшедшее обозначение:

$$M(s) = s^2.$$

Мы говорим о выходе с обеих сторон, верно. Но наше сокращение для выхода — $M(s)$ — причудливый гибрид из двух других сокращений: для самой машины, M, и того нечто, что мы кладем туда — s. Поэтому предложение $M(s) = s^2$ имеет *три сокращения* только в левой части. Будто этого недостаточно, мы переходим к описанию работы машины. Правая часть предложения, s^2, — описание выхода, записанное в терминах входа.

Мы сказали одно и то же двумя способами: $M(s)$ в левой части — наше *название* для выхода, а s^2 в правой — его *описание*. Поэтому мы ставим знак равенства, и в итоге мы действительно описали машину таким методом, который выражает бесконечно много разных предложений в нескольких символах, поскольку говорит нам: если вы положите 2 в машину М, она выплюнет 4. Если вы положите в нее 3, она выплюнет 9. Если вы положите 4,976, она выплюнет то, что является $4{,}976 \cdot 4{,}976$, и т. д.

* Термин «уравнение» заставляет большинство людей испытывать дискомфортное сочетание страха и скуки — смесь эмоций, при которой думать невозможно. Так скажет любой, кто знаком с симпатической нервной системой. Так что же такое уравнение? Мы уже говорили, что математические символы — просто сокращения для того, что мы могли бы описать и словами. При таком подходе «уравнения» — не просто предложения, а сокращенные. Когда мы осознаем это, термин «уравнение» не выглядит таким уж плохим. В книге мы будем пользоваться обоими понятиями.

1.1.3. То, о чем мы слышим редко

Идея этих машин проста. Как я упоминал ранее, обычно они называются функциями. Странное имя, не совсем верно передающее идею. Не только слово «функция» несколько смущает поначалу, но и обычные сокращения, используемые при разговоре о ней, порой кажутся неочевидными, когда мы впервые с ними встречаемся. Вот несколько причин, по которым такая простая идея может сильно сбивать с толку.

1. Они не всегда объясняют, что мы говорим о машинах.

2. Они не всегда объясняют, что все сказанное нами о машинах *может* быть выражено словами, просто мы ленивы (в хорошем смысле слова!) и поэтому сильно сокращаем форму.

3. Они не всегда объясняют, что мы используем самые короткие сокращения из возможных или как мы построили странное гибридное сокращение из двух других.

4. Они не всегда различают название машины, M, и ее выхода, $M(s)$. Иногда книги говорят о «функции $f(x)$», а это на деле вовсе не то, что они имеют в виду. Честно говоря, порой полезно использовать наш язык неправильно, как тут (в конце концов, это *наш* язык, нам можно), но постараемся так не делать, пока поближе не познакомимся с этой идеей.

Мы редко слышали все это. Значительная часть учебников и лекций просто утверждает, что функция — «правило, которое сопоставляет одно число другому».

Потом приводится несколько графиков; немного побродив туда-сюда, начинают писать штуки вроде $f(x) = x^2$. Для некоторых (включая меня, когда я впервые столкнулся с этой идеей) это путающий понятийный прыжок.

Обратите внимание на кое-что озадачивающее в предыдущем предложении. Почему x? Мы использовали s вместо stuff (нечто), потому что устали выписывать целое слово. А сокращением чего стал x? Может, это и не сокращение вовсе. Нет такого закона, чтобы все названия, которые мы даем вещам, были сокращениями. Может, x — как среднее имя у Гарри С. Трумэна: выглядит как аббревиатура, но на деле ею не является!* Может, буква — это и есть название. Но, оказывается, буква *x является* сокращением для чего-то. Для чего? Сделаем небольшой перерыв и выясним это.

1.1.4. Невыносимая инерция человеческих соглашений

Почему в учебниках используется x? Ответ забавен**. Фактически это исковерканный перевод с арабского. Давным-давно некоторые арабские математики вели ту же нить рассуждений, что мы здесь, и решили использовать слово *кое-что* (something) по тем же причинам, по которым мы использовали *нечто*. Разумно. Идея состояла в том, чтобы всегда брать сокращения, которые напоминают вам, чтó вы сокращаете, чтобы не пришлось ничего запоминать. До того момента все было логично. Затем появилась проблема. Первая буква слова «кое-что» в арабском языке звучит аналогично звуку *sh* в английском. Выяснилось, что в испанском звука *ш* нет, и когда арабская математика была переведена на испанский, переводчики решили использовать самое близкое, что смогли придумать. Эта была греческая буква «хи», которая соответствует звуку *ch* (в слове Bach, а не в слове Cheerios)***. Буква выглядит так:

$$\chi$$

Знакомо? Потом, как вы можете догадаться, эта χ превратилась в знакомую x из латинского алфавита… и это исковерканное сокращение

* Родители дали будущему президенту США Гарри Трумэну среднее имя С. в честь двух дедушек (Shipp и Solomon), но сама по себе буква С. — не аббревиатура, она просто не расшифровывается. Строго говоря, логичнее не ставить точку после С, поскольку это буква, а не сокращение слова, начинающегося с нее. *Прим. перев.*

** Это объяснение дал парень по имени Терри Мур в своей чудесной короткой лекции «Почему x неизвестно?» Так что все лавры принадлежат ему.

*** «Ш» и «х» в русском соответственно. *Прим. перев.*

бегает по нашим учебникам как самое популярное сокращение для *нечто*.

Рис. 1.2. По большому счету люди не торопятся что-то менять

Арабские математики были умными ребятами и умело выбирали сокращения. Они могли это делать, ведь, по сути, находились в той же ситуации, что и мы: в мире, в котором не было особо много математики, где они изобретали ее. Как и они, мы можем сокращать, как хотим. Например, рассмотрим две задачи. Забудьте об их решении. Просто посмотрите на них несколько секунд.

1. Вот описание машины f:

$f(x) = x^2 - (5 \cdot x) + 17.$

Что выплюнет f, если мы вложим в нее число 1?

2. Вот описание машины $\circlearrowright$:

$\circlearrowright = \ast^2 - (5 \cdot \ast) + 17.$

Что выплюнет машина $\circlearrowright$, если мы вложим в нее 1?

Нам не нужно решать эти задачи, чтобы увидеть, что они имеют один и тот же ответ (13, но дело не в этом). Мы описываем одну машину и вкладываем туда одно и то же число в обоих случаях, поэтому знаем, что получим один ответ, даже если не дали себе труда выяснить, каков он. Каждый знает, что мы можем сокращать как хотим. И все же, когда я объясняю кому-нибудь некоторые факты математики и меняю сокращения так, чтобы мы могли помнить то, о чем говорим, то очень часто слышу: «О! Я не знал, что так можно!». Важно применять смену сокращений, ведь многие математические идеи выглядят страшно и сложно, когда мы используем один их набор, но вдруг становятся очевидными, когда мы выбираем другой. Позже мы увидим некоторые забавные примеры.

1.1.5. Разные лики равенства

Есть еще одна распространенная проблема со стандартными математическими обозначениями, которая вызывает колоссальную путаницу у новичков. Это необходимость использовать выглядящие по-разному варианты знака равенства, чтобы напоминать себе, почему вещи истинны.

Когда мы используем в этой книге обычный знак равенства $=$, мы подразумеваем то же, что все математические книги: $A = B$ означает, что A и B относятся к одной и той же вещи, даже если выглядят по-разному. Поэтому символ $=$ говорит вам, *что* кое-что верно, но не объясняет, *почему*. Мы можем поступать лучше, изредка используя символы, выглядящие по-разному. Далее в книге три этих символа

$$\equiv \qquad \overset{\textit{Требование}}{=} \qquad \overset{(2.17)}{=}$$

будут обозначать одно и то же: «штуки слева и справа от меня одинаковы». Но это разные способы показать нам, *почему* они одинаковы.

Чаще всего в качестве альтернативы для знака равенства я буду применять $\equiv$, который говорит, что две вещи равны в силу используемых обозначений. Вот несколько примеров для иллюстрации. Один из случаев, когда будет использоваться символ $\equiv$, тот, когда мы что-то определяем. Например, в вышеописанном обсуждении, когда мы писали $M(s) = s^2$, мы могли написать $M(s) \equiv s^2$. Я использовал $=$ только потому, что мы еще не говорили о знаке $\equiv$. Символ $\equiv$ во фразе выше говорит: «$M(s)$ и s^2 — одно и то же, но не потому что тут есть какая-то математика, которую вы пропустили. Мы просто используем $M(s)$ в качестве сокращения для s^2 до тех пор, пока не скажем что-то иное».

Использование символа $\equiv$ для определений — не уникальное свойство этой книги. Так делают многие*. Но в попытке получить максимум «выгоды объяснений» за наши «денежки обозначений» мы станем применять его несколько шире. Он будет присутствовать в любом равенстве, которое верно в силу выбранного сокращения, а не потому, что вы пропустили какую-то математику. Вот надуманный пример, который ни к чему не относится: используя тот факт, что $M(s) = s^2$, мы можем написать

$$1+5\left(9-\frac{72}{M(s)}\right)^{1234} = 1+5\left(9-\frac{72}{s^2}\right)^{1234}.$$

Вы можете понять все вышеуказанные символы, даже если никогда не слышали про сложение, умножение и числа! Поскольку есть $\equiv$, по факту предложение сообщает, что штуки слева и справа равны в силу какого-то сокращения, которое мы используем, а не какой-то пропущенной математики. И пусть вас не пугает такой знак равенства. Тут нечего бояться, ведь уравнения со знаком $\equiv$, по сути, ничего не сообщают. Но мы увидим,

* Как ни странно, это более свойственно углубленным руководствам, а не вводным книгам, где нужно больше всего.

насколько полезным может быть переход туда и обратно между разными сокращениями, поэтому целесообразно иметь особый вид «равенств», напоминающих нам об этом.

Еще один вид использования равенств появляется всякий раз, когда мы требуем, чтобы что-то было истинным, и смотрим, что получилось в результате. По сути, это утверждения вроде: «Приравняем бла-бла-бла к 0». Это странное понятие, имеет смысл изучить его на простом примере. Когда учебник предлагает вам «решить $x = x^2$ относительно x», не всегда ясно, что имеется в виду. Очевидно, что знак равенства тут используется ненормальным способом. Прежде всего фраза $x = x^2$ неверна — по крайней мере, это не всегда так. Ведь если бы $x = x^2$ было всегда верно, то 2 равнялось бы 4, 10 — 100 и т. д. Здесь такая идея:

Что говорят: Решите $x = x^2$ относительно x.

Что при этом подразумевают: Выясните, какое конкретное *нечто* делает фразу (*нечто*) = (*нечто*) · (*нечто*) верной. Игнорируйте все *нечто*, которые делают ее ложной.

Поскольку значение весьма отлично от ≡, мы будем писать это иначе. Скажем, так:

$$x \overset{\textit{Требование}}{=} x^2.$$

Все такие варианты знаков равенства означают то же, что и обычный =. Но новые знаки напоминают нам, почему что-то верно. Пусть разнообразие выглядит сейчас лишним, скоро мы увидим, насколько это все упрощает.

Внимание, Читатель! Это важно! Что бы вы ни делали, не углубляйтесь в тонкости того, какой именно знак равенства нужно поставить! И если учителя читают это, пожалуйста, ради любви к математике *не* придумывайте упражнений, которые требуют от учеников определять, какой знак нужно поставить в том или ином уравнении: ≡, = или $\overset{\textit{Требование}}{=}$. Это не педантичное уточнение из-за избыточного внимания к ненужным деталям. Это просто быстрый и удобный способ напомнить себе, почему что-то верно.

Из тех же соображений я буду иногда ставить номер над знаком равенства, например:

$$\text{Тили-тили} \overset{(3)}{=} \text{Трали-вали}.$$

Это значит, что «Тили-тили = Трали-вали в силу уравнения (3)». При этом с помощью такого уравнения можно проверить, поняли ли вы идею, но только если вы этого желаете. Вы можете попробовать самостоятельно выяснить, почему что-то верно, но каждый раз, когда вам от этого тошно, знаки равенства сообщат, где именно искать. Я всегда хотел, чтобы в учебниках так делалось почаще. Но хватит об обозначениях! Время созидать!

1.2. Как изобрести математическое понятие

То, что я не могу создать, я не понимаю.

Ричард Фейнман. Текст на его доске на момент смерти

Прежде чем мы создадим анализ, нужно узнать, как создавать вещи. А точнее, нам надо понять, как разработать математические понятия. Проиллюстрируем процесс на двух простых примерах: площадь прямоугольника и крутизна линии*. Не беда, если вы уже знаете, как вычислять их. Любой что-то приобретет от обсуждения этих вопросов — или в своем понимании, или в их преподавании, поскольку процесс изобретения обсуждается редко.

Когда мы изобретаем математику с нуля, мы всегда начинаем с интуитивно ясного обиходного понятия. Процесс изобретения содержит попытку перевести размытую качественную идею в точную количественную. Никто не может *по-настоящему* представить объект в пяти, семнадцати или

* Позже мы увидим, что два этих понятия образуют хребет анализа. Первое — основа для «интеграла», второе — для «производной». Эти понятия противоположны, а точный смысл, в котором они противоположны, описывается так называемой основной теоремой анализа (формулой Ньютона — Лейбница).

бесконечном числе измерений. Как же математики определят что-то вроде «кривизны» способом, который позволит им говорить о кривизне многомерных объектов? Как человек пришел к нужным определениям, когда они зачастую столь абстрактны, что вроде бы нужно иметь сверхчеловеческие способности к многомерной интуиции, чтобы «увидеть» истину?

Этот процесс вовсе не так загадочен, как кажется. Создание — просто переход от качественного к количественному. Надеюсь, явное обучение процессу создания на всех уровнях математики в один прекрасный день найдет достойное место в учебных программах вместе с менее важными вопросами вроде сложения, умножения, линий, плоскостей, окружностей, логарифмов, групп Сюлова, фракталов и хаоса, теоремы Хана — Банаха, когомологии де Рама, пучков, схем, теоремы Атьи — Зингера об индексе, вложения Йонеды, теории топосов, гипернедостижимых кардинальных чисел, реверсивной математики, конструктивного универсума и всего прочего, что мы преподаем студентам-математикам от начальной школы до докторантуры. Но это *гораздо важнее*.

1.2.1. Добыча в наших мозгах: изобретение площади

В этом разделе мы проиллюстрируем суть изобретения математических терминов, исследовав понятие площади в простейшем возможном случае: для прямоугольника. Тот факт, что прямоугольник длиной l и шириной w имеет площадь lw, прост, и вы почти наверняка это знаете. Постарайтесь забыть это. Вообразим, будто у нас нет представления, что площадь прямоугольника — произведение его длины на ширину.

Предположим, мы примерно знаем, что подразумеваем под «площадью» в нематематическом смысле. Иными словами, мы в курсе, что это слово, описывающее, насколько велика некая двумерная штука, но не знаем, как связать это понятие с чем-то математическим. На этом этапе мы можем использовать сокращение A *(area)* для площади и написать бесполезную фразу вроде $A = ?$, но не более того. Однако, исходя из нашего обиходного нематематического представления, мы доподлинно знаем следующее.

Первое соображение нашего обиходного представления. Что бы мы ни подразумевали под площадью прямоугольника, она как-то зависит от его длины и ширины. Если у кого-то есть определение площади, которое не включает длину и ширину, это, конечно, мило, но не это мы подразумеваем под площадью.

Придумаем сокращение для этих слов. Мы можем выразить вышесказанное в крайне сжатой форме, написав:

$$A(l, w) = ?$$

вместо $A = ?$, как выше. Новое нечто внутри скобок сообщает: «Это как-то зависит от длины и ширины, и мы сократим их до l и w. Я не знаю больше ничего».

Это похоже на наше сокращение для вышеописанных машин. Мы можем либо заявить: «Я не говорю о машинах, а просто сокращаю», либо провести серьезную аналогию с сокращениями для машин и заявить: «Как только мы действительно говорим, что́ точно подразумеваем под площадью, возможно построить машину, которая выплевывает площадь прямоугольника, если вложить в нее длину и ширину. Ее я назвал A». Любое из этих толкований приведет нас в искомую точку. Выбирайте, что больше нравится, и продолжим.

Поскольку мы строим точное математическое понятие площади, начав с интуитивного обиходного представления, у нас нет чисел, от которых можно оттолкнуться. Если у нас нет ничего количественного, с чего можно начать, приходится начинать с качественного. Поскольку нет законов, указывающих нам, что нужно делать, мы хотим обеспечить, чтобы наше точное понятие соответствовало обиходному. Посмотрим, что еще говорит наше обиходное математическое представление.

Второе соображение нашего обиходного представления. Что бы мы ни подразумевали под площадью прямоугольника, если мы удвоим ширину, не меняя длину, у нас будет две копии исходного прямоугольника, и площадь удвоится. Если у кого-то есть определение площади, которое ведет себя не так, это, конечно, мило, но не это мы понимаем под площадью.

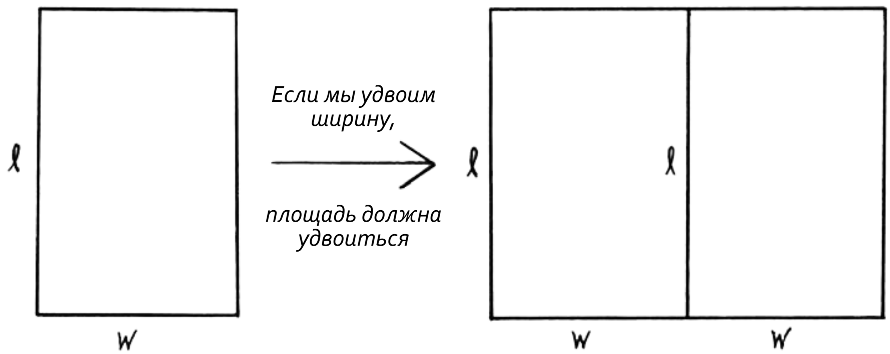


Рис. 1.3. Что бы мы ни понимали под площадью, если мы удвоим ширину прямоугольника, не меняя длину, площадь должна удвоиться

Если непонятно, посмотрите на рис. 1.3. Неясного интуитивного нематематического представления о площади недостаточно, чтобы сообщить нам, что площадь прямоугольника — произведение длины на ширину, но достаточно, чтобы показать: если мы удваиваем ширину, площадь удвоится (длину пока оставляем неизменной). Мы можем записать эту идею так:

$$A(l, 2w) = 2A(l, w).$$

По тем же соображениям, если мы удвоим длину, не меняя ширину, площадь тоже удвоится. Мы можем сократить это так:

$$A(2l, w) = 2A(l, w).$$

В этом предложении не обязательно использовать именно удвоение. Если мы утроим ширину, то получим три копии исходной штуки и площадь утроится. То же можно сказать про длину, учетверение или умножение на любое другое целое число. А как насчет нецелых чисел? Скажем, если мы изменим длину с l на «полтора l» (не меняя ширины), то получим полторы копии исходной фигуры; соответственно, и площадь должна быть в полтора раза больше оригинала. Получается, что бы мы ни подразумевали под площадью, предложения такого рода отражают наше интуитивное представление, что величина увеличения неважна. Мы можем записать сразу весь этот бесконечный набор предложений так:

$$A(\#l, w) = \#A(l, w) \tag{1.1}$$

и

$$A(l, \#w) = \#A(l, w) \tag{1.2}$$

для любого #. Но если это правда, мы можем обманом заставить математику подсказать нам площадь прямоугольника, представив l как $l \cdot 1$ и представив…

(Вдали слышится слабый громыхающий звук.)

Ах! Что это? Это вы?

Читатель: Э-э-э… Не думаю. Я думаю, это на вашей стороне.

Автор: Уверены?

Читатель: Да, вполне.

Автор: Хм… Хорошо, где мы остановились? Итак, уравнения 1.1 и 1.2 говорят нам, что мы можем вытаскивать числа из Машины вычисления площади независимо от их значения. Но если это правда, ничто не мешает нам быть ловкими и вытащить наружу сами длину и ширину! В конце концов, это просто числа. Поскольку l — то же, что $l \cdot 1$, а w — то же, что $w \cdot 1$, мы можем тишком использовать оба факта из уравнений 1.1 и 1.2 для самих чисел l и w. Получится так:

$$A(l, w) \overset{(1.1)}{=} lA(1, w) \overset{(1.2)}{=} lwA(1, 1). \tag{1.3}$$

И это показывает, что площадь прямоугольника равна длине, умноженной на ширину… и еще на что-то. Что вообще это $A(1, 1)$ тут делает?!

Оказывается, уравнение 1.3 показывает нам понятие единиц измерения. Оно сообщает, что мы можем выяснить площадь *любого* прямоугольника, но только после того, как установим площадь *единичного* прямоугольника — с длиной 1 и шириной 1 (либо любой другой). Если бы мы измеряли длины в световых годах, мы бы хотели, чтобы $A(1, 1)$ было бы площадью одного квадратного светового года. Если бы мы измеряли длины в нанометрах, мы бы хотели, чтобы $A(1, 1)$ было площадью одного квадратного нанометра.

Обычно мы выходим из этой ситуации, принимая, что $A(1, 1)$ должно быть 1. Но это просто для удобства. Мы *могли бы* выбрать, чтобы $A(1, 1)$ представлялось числом 27, если нам хочется, и тогда у нас появится формула $A(l, w) = 27lw$. Выглядит странно, но никакой ошибки тут нет. Вместо того чтобы принудительно считать $A(1, 1)$ единицей или другим числом, мы можем интерпретировать уравнение 1.3 иначе:

$$\frac{A(l, \mathrm{w})}{A(1, 1)} = lw.$$

Это показывает, что нам не нужно говорить о единицах измерения (иными словами, решать, чем должно быть $A(1, 1)$ по нашему желанию), но мы больше не можем говорить о самих площадях. Такая интерпретация сообщает, что *кое-что* равно длине, умноженной на ширину, но это не площадь. Это «отношение» площадей, или сколько раз вы можете уложить $A(1, 1)$ в $A(l, w)$.

Теперь мы видим, что математика на самом деле умнее нас: она не только пыталась рассказать нам о понятии единиц измерения, но и сообщила, как преобразовать площади из одной произвольной системы единиц в любую другую (например, из нанометров в световые годы). Это один из многих случаев, когда изобретение понятия, даже совсем простого и хорошо нам известного, может дать намного более глубокое его осмысление.

Нетрудно убедиться, что тот же аргумент будет работать в любом числе измерений. Представим, что у нас есть трехмерная штука вроде ящика, и обозначим ее длину, ширину и высоту буквами l, w и h. По тем же причинам, что и для прямоугольника, если мы удвоим, например, высоту, не меняя длину и ширину, мы получим два исходных ящика, и объем должен удвоиться. Как и ранее, не обязательно именно удваивать, можно увеличить в любое число раз. То же для длины и ширины. Соответственно, в трех измерениях такие утверждения верны для любого числа #, которое не обязательно одно и то же в трех следующих предложениях:

$$V(\#l, w, h) = \#V(l, w, h),$$
$$V(l, \#w, h) = \#V(l, w, h),$$
$$V(l, w, \#h) = \#V(l, w, h).$$

Как и ранее, мы можем использовать эти идеи для самих чисел l, w и h и написать:

$$V(l, w, h) = lwh \cdot V(1, 1, 1).$$

Сейчас можно сделать кое-что более странное и интересное: начать говорить о пространствах более высокой размерности. Если n — некое большое число, мы не можем нарисовать ничего в n-мерном пространстве. Никто *на самом деле* не может. На данном этапе мы даже не вполне уверены, что́ мы *подразумеваем* под выражением «n-мерное пространство». Отлично! Никто не мешает сказать: «Что бы я ни подразумевал под n-мерным пространством и n-мерной версией прямоугольной штуки вроде ящика, они должны вести себя достаточно похоже на „родственников“ в двух и трех измерениях, и мы можем применить те же аргументы, которые только что использовали. А если они не ведут себя так, это просто не то, что я сейчас подразумеваю под n-мерным пространством». Тогда мы можем решительно написать:

$$V\,(l_1, l_2, \dots, l_n) = l_1 l_2 \cdots l_n \cdot V\,(1, 1, \dots, 1),$$

где V заменяет «то, что мы желаем назвать объемом в n-мерном пространстве». Причем мы решили не давать всем направлениям собственные странные имена, как для двух и трех измерений. Проще сократить их до буквы l, а потом прикрепить к каждому разные номера, чтобы называть их по отдельности ($l_1, l_2, \dots, l_n$).

Мы не можем даже начать рисовать то, о чем говорим, но по-прежнему способны использовать это для вывода других вещей. Например, если все стороны n-мерного ящика имеют одну длину (назовем ее l), мы получим нечто вроде n-мерного куба. Соответственно, если мы приравняем уродливое выражение $V(1, 1, \dots , 1)$ к 1 (для удобства), мы можем вывести, что «объем» этого n-мерного куба $V = l^n$. Мы можем уверенно говорить о его «n-мерном объеме», хотя не можем даже начать визуально представлять, о чем речь!

Итак, мы видим, что в процессе размышления о нашем обиходном представлении о площади при сокращении наших мыслей способом, который сводит бесконечно много предложений в одно, наши расплывчатые идеи привели к тому, что площадь прямоугольника *должна* быть $lw\,A(1, 1)$. Так мы обнаружили не только знакомую формулу «длина, умноженная на ширину», но и еще одну вещь, которую забыли рассмотреть: понятие единиц измерения. Однако математика любезно напомнила нам об этом.

Сейчас мы будем использовать это простое изобретение, чтобы помочь себе понять и визуализировать «законы алгебры» — способом, который гарантирует, что нам не понадобится запоминать их. Вперед!

1.2.2. Как делать все неправильно: наставление о глупости запоминания

> *Но прошло несколько лет, прежде чем я понял, что преподавание науки — действительно труд. Целью должно быть не внедрение в голову ученика фактов, которые знает учитель; нужно внедрить образ мышления, который позволит в будущем освоить за один год то, что учитель изучал два года. Только так мы можем двигаться от одного поколения к следующему. И когда я осознал это, мой стиль преподавания изменился: не давать по вершкам кучки фрагментов, а анализировать всего несколько проблем, зато с настоящей глубиной.*
>
> Эдвин Джейнс, «Взгляд назад в будущее»*

Одна из худших черт многих начальных курсов математики (как минимум тех, что были у меня) в том, что преподаватели как-то становятся убежденными сторонниками мнения, будто цель курса — сообщать вам факты. Я больше не могу с этим соглашаться. Вы удивитесь: о чем же мо-

* Jaynes E. T. A Backward Look to the Future. http://bayes.wustl.edu/etj/articles/backward.look.pdf.

жет быть курс, по моему мнению, если не о математике? Это важно, давайте скажем это раз и навсегда и поместим в рамочку*.

> **Декларация независимости**
> Цель курса математики — создать не учащихся, которые знают факты, а учащихся, которые умеют думать.

Здесь нужно быть внимательными: поначалу фраза «научить думать» может воскресить в памяти образ брутального диктатора в полицейской форме, который держит хлыст и кричит: «*Думай так!*». Но речь-то вовсе не об этом.

Математика — целый мир, в котором нет ничего случайного и где разум может обучать себя так интенсивно и четко, как не выйдет с другой дисциплиной. Более того, по ходу обучения разума вы попутно изучите предмет, который — так уж сложилось — описывает все в мире. Это невероятно полезно, но такая практичность — побочный эффект тренировки ума. Если уж говорить о том, что полезно и стоит занести в рамочку, вот еще кое-что, чего вам никогда не расскажут.

> **Математика — НЕ ТО, что рассказывает**
> о линиях, плоскостях, функциях, окружностях и любых других вещах, которые вы изучали в курсе математики.
> **Математика — ТО, что рассказывает**
> о предложениях вроде такого:
> «Если это верно, то и это верно».

* Зачем писать это в рамочке с таким пафосным названием? Хороший вопрос! Полное раскрытие: когда вы пишете книгу (как я понял с тех пор, как начал писать), забавно порой проявлять уважение к чему-то, что вам нравится. Эта рамочка — знак уважения моему любимому учебнику, опубликованному после смерти автора главному труду Эдвина Джейнса «Теория вероятностей. Логика науки». Возможно, поскольку он умер, не завершив книгу, но также потому, что Джейнс был огненным человеком и этот труд полон его удивительно душевных личных острот и многого другого, что редко встречается в учебниках. Например, «Заявление об эмансипации» в приложении B. Мне всегда нравился этот раздел. Сейчас я пишу свою книгу с данью уважения Джейнсу. Он заслужил это.

Как только мы поймем это, мы сразу заметим два обстоятельства. Во-первых, очевидно, почему тренировать разум таким образом полезно, независимо от того, что вы делаете. Во-вторых, очевидно, что курсы математики сфокусированы в точности на неправильных вещах.

Изучим конкретный пример. В курсах алгебры заполнившим класс сонным ученикам рассказывают о чем-то, именуемом методом FOIL. Это расшифровывается как First, Outer, Inner, Last — «первые, внешние, внутренние, последние»*. Это правило для запоминания предложений вроде:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

или, в более общем виде,

$$(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Мы уже видим, что FOIL — способ помочь вам *запомнить факт* о математике, а не открывать его заново всякий раз, когда он вам понадобится. В чем тут суть? Большинство учащихся могут увидеть ее лучше, чем учителя: ее тут нет. Изобретем оба факта так, чтобы нам никогда не понадобилось запоминать их снова.

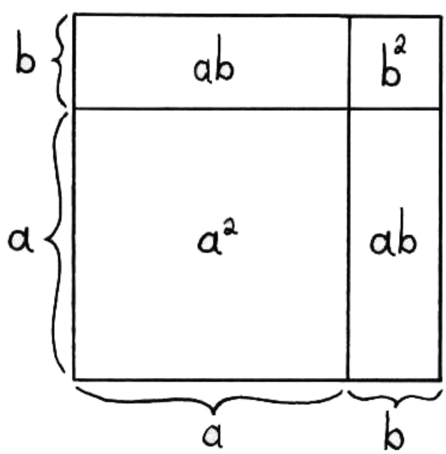


Рис. 1.4. Тут, по сути, все, что говорит правило FOIL

* Это англоязычное мнемоническое правило помогает запомнить порядок слагаемых при раскрытии произведения двучленов: сначала произведение первых слагаемых, потом внешних и т. д. *Прим. перев.*

Если мы возьмем лист бумаги и нарисуем на нем картинку, она не изменит площади листа. Не важно, что мы изобразим: домик, дракона или что-то еще. Предположим, мы экспериментируем с идеями, которые нашли, и наткнемся на то, что выглядит как $(a + b)^2$. Мы можем подумать об этом как о площади квадрата. Какого квадрата?

Если квадрат имеет длину стороны *тили-тили*, его площадь равна (*тили-тили*) · (*тили-тили*), или (*тили-тили*)^2. Поэтому мы можем думать о $(a + b)^2$ как как о площади квадрата со стороной $(a + b)$. Изобразим этот квадрат, а потом добавим на него картинку, как на рис. 1.4. Выглядит она как нечто кривобокое с подписями, но это всего лишь две прямые линии, которые делят стороны на части с длинами a и b. Это дает возможность двумя способами говорить об одном и том же. Поскольку рисование линий на квадрате не меняет его площади, мы видим, что:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Теперь вам не нужно вспоминать эту формулу. Посмотрим, нельзя ли таким же способом изобрести более сложную:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

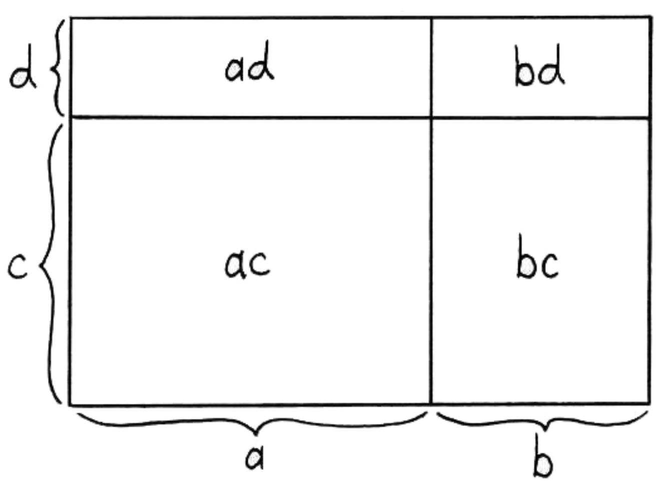


Рис. 1.5. Тут *действительно* все, что говорит правило FOIL

Два любых перемноженных числа, то есть в общем виде (*тили-тили*) · (*трали-вали*), можно представлять как площадь прямоугольника со сторонами длиной *тили-тили* и *трали-вали*. Нарисуем картинку, где (*тили-тили*) — это $(a + b)$, а (*трали-вали*) — это $(c + d)$. Посмотрите на рис. 1.5. Он показывает, что площадь большого прямоугольника — сложенные площади всех маленьких. Суть картинки можно выразить в сжатой форме:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Теперь вам не нужно вспоминать эту формулу. Если вы забудете ее, то сможете изобрести заново. Не надо даже *пытаться* запоминать эти формулы. Лучше даже попытаться немедленно забыть их! В каждом математическом кабинете над доской должна быть вывешена надпись:

Первая заповедь преподавания математики

Учитель должен побуждать учеников не запоминать, а забывать.

Поскольку ваша цель — идти по пути рассуждений самостоятельно, не следует запоминать шаги в этом выводе, лучше хорошо понять его суть, чтобы в случае забывания любой формулы (что и *следует* сделать) вы могли тут же изобрести ее заново за несколько секунд. Когда вы делаете это, вы обнаруживаете, что «запоминаете» вещи нечаянно, просто потому, что хорошо их понимаете. Проверить, успешен ли был для вас этот дзен-процесс «изучения без запоминания», можно так: способны ли вы применить этот ход рассуждений к чему-то *новому*?

Логика такова: если вы можете применить то же рассуждение в новых областях, которые никогда не видели, вы не станете просто запоминать факты. Новый контекст действует как сито, которое отсеивает такую возможность. К несчастью, в среде, которая наказывает эксперименты и неудачи (например, в школе), проверка вещей в новых контекстах становится чаще источником беспокойства, а не интеллектуальной радующей игрой, какой должна быть. Давайте забудем все это и просто поиграем.

Изобретаем нечто

1. Выше мы обсуждали глупую аббревиатуру FOIL для конструкции First, Outer, Inner, Last. Такой метод запоминания факта, а не понимания процесса ведет нас к созданию многочисленных «методов», и нам придется запомнить их. Например, справедливо:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Это уродливое предложение, и никто в здравом уме не хотел бы его запоминать. Если бы нашей целью было просто зафиксировать это, а не понять общие стратегии рассуждений, мы могли бы использовать тот же подход, что и парень, который изобрел аббревиатуру FOIL, и назвать это методом LT.MT.RT.15.16.24.26.34.35*. Давайте так *не* делать. Вместо этого применяйте ту же стратегию, что и выше (рисуем картинку и внимательно смотрим на нее), чтобы изобрести это уродливое выражение для себя. Подсказка: нарисуйте квадрат и разделите каждую сторону на три части, а не на две, как раньше.

2. А теперь пора развлечься в трех измерениях и посмотреть, не работают ли те же рассуждения здесь. Мы действительно не хотим запоминать безобразное предложение вроде такого:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Вместо того чтобы запоминать это, изобретем его тем же способом, что и раньше: нарисуем картинку и внимательно посмотрим на нее. Подсказка: нарисуйте куб и разделите каждую его сторону на две части. Изучите рис. 1.6. Попробуйте сначала первый пример: в этом случае наглядно

* Это расшифровывается как «Левый Два, Средний Два, Правый Два, Первый и Пятый, Первый и Шестой, Второй и Четвертый, Второй и Шестой, Третий и Четвертый, Третий и Пятый». А также иллюстрирует абсурдность, к которой ведет FOIL'овский образ мышления (запоминание фактов), если сделать всего лишь один дополнительный шаг.

представлять труднее, и если вы застрянете, легко приуныть и решить, будто вы не улавливаете идею, хотя на самом деле вы ее понимаете.

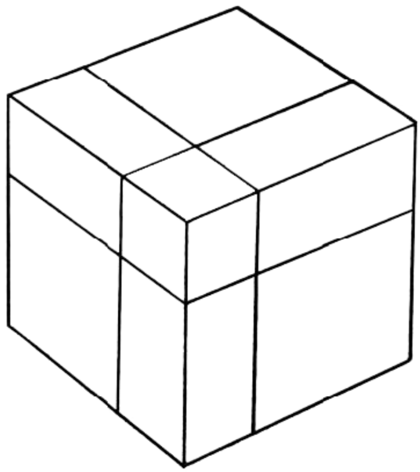


Рис. 1.6. Эта картинка может помочь при изобретении формулы в п. 2

Хотя такой метод рассуждений позволяет нам изобретать вещи, которые другие просили нас запоминать, есть два неприятных обстоятельства. Во-первых, это не так просто (вскоре я объясню, в чем дело). Во-вторых, это, по сути, бесполезно для штук вроде $(a + b)^4$ или $(a + b)^{100}$, поскольку человеческому разуму тяжело визуально представить объекты, если измерений больше трех. Оказывается, есть средство от обеих проблем.

Вместо того чтобы применять рассуждение, которое мы использовали ранее, и делить нечто вроде $(a + b)^4$ на кусочки, попробуем что-то попроще. Я знаю: странно, когда для решения более сложной задачи используется более простой метод. Но такая стратегия работает в математике сплошь и рядом. Прекрасно, когда такое происходит! Вот этот более простой способ.

Предположим, у нас есть лист бумаги. Представьте, что он рвется на две произвольные части. Даже если мы ничего не знаем о площадях численно, ясно, что площадь исходного листка равна сумме площадей двух обрывков. Мы можем открыть заново метод FOIL и все его более сложные варианты в любом числе измерений (независимо от того, способны ли мы нарисовать подходящую картинку или нет), просто применяя идею разрывания раз за разом. Запишем ее в сокращенной форме.

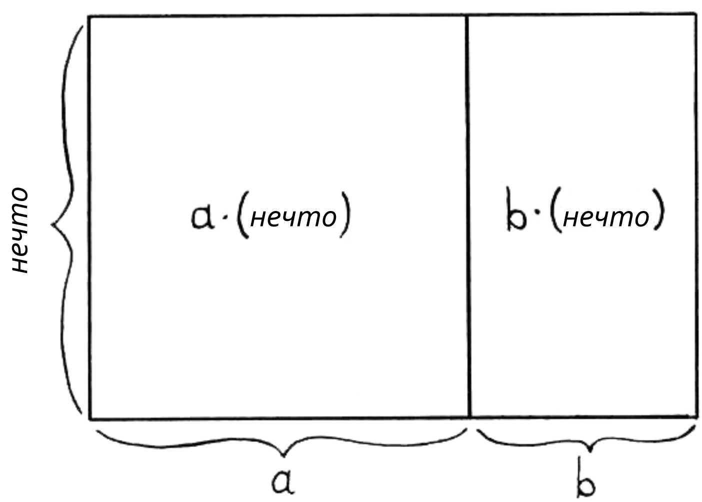


Рис. 1.7. Очевидный закон разрывания: если вы порвете что-то на две части, площадь исходного объекта будет равна сумме площадей этих двух фрагментов. Можно сказать это короче: $(a + b) \cdot (\textit{нечто}) = a \cdot (\textit{нечто}) + b \cdot (\textit{нечто})$. Учебники обычно называют это «распределительным законом»

Предположим, мы придумываем что-то и добрались до места, где написали нечто вроде $(\textit{нечто}) \cdot (a + b)$ или, возможно, $(a + b) \cdot (\textit{нечто})$. Это одно и то же, рассуждение работает для обоих случаев. Пусть, как и ранее, мы можем изобразить это в виде площади прямоугольника, две стороны которого имеют длину $(\textit{нечто})$, а две другие — $(a + b)$. Если мы порвем его точно вдоль линии, как показано на рис. 1.7, у нас получится один кусок площадью $a \cdot (\textit{нечто})$ и второй площадью $b \cdot (\textit{нечто})$. Это не меняет общей площади (мы не выбрасываем никаких частей), так что должно быть верно следующее:

$$(a + b) \cdot (\textit{нечто}) = a \cdot (\textit{нечто}) + b \cdot (\textit{нечто}).$$

Я буду называть это очевидным законом разрывания вещей, но имя здесь не важно. Называйте как угодно. В учебниках используют термин «распределительный закон». Звучит претенциозно, но такое имя тоже имеет смысл. После нескольких следующих абзацев у нас не будет особой надобности в названии для этой идеи.

Как и в случае с очевидным законом, все так называемые законы алгебры можно представлять себе сокращениями простых визуальных идей. Например, факт, что умножать можно в любом порядке ($a \cdot b = b \cdot a$), утверждает, что площадь прямоугольника не изменится, если опрокинуть его на другую сторону. Это тоже простая идея, но ее называют «коммутативным законом умножения», чтобы напугать вас. А смысл всего лишь в том, что мы можем менять порядок при умножении как нам угодно. В частности, применять очевидный закон даже тогда, когда (*нечто*) стоит слева от $(a + b)$, а не справа.

Сейчас, если мы хотим, чтобы у нас все выглядело как в учебнике, можно написать в очевидном законе букву c вместо (*нечто*). Это тоже годится, я писал (*нечто*), чтобы напоминать, что закон верен независимо от того, на что похоже (*нечто*). Если оказалось бы, что это сумма двух вещей (или если бы нам захотелось представить это так), мы могли бы заменить (*нечто*) чем-то вроде $(c + d)$ и переписать очевидный закон:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d).$$

Однако, снова используя очевидный закон (для каждой из частей справа), мы получаем:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

то есть ровно то выражение, которое мы изобрели ранее, рисуя картинки. Вышеприведенное предложение — также метод FOIL. Но поскольку мы изобрели его с помощью очевидного закона, нам не нужно запоминать его. На старт, внимание, забудьте это навсегда!

Очевидный закон выглядит обыденно. Вдобавок выясняется, что он предлагает нам окно в высшие измерения. Визуальный способ размышлений о $(a + b)^3$ требует рисовать трехмерный объект (куб), и мы быстро замечаем, что метод не особо поможет нам для $(a + b)^4$ или любых более высоких степеней, ведь мы не можем представить себе четырехмерные объекты. Но даже если нам неинтересна алгебраическая тягомотина вроде разложения $(a + b)^4$ ради нашей собственной пользы, нас могут интересовать более глубокие вопросы, например как разрезать четырехмерный куб вдоль каждой из трехмерных «поверхностей», ни одну из которых мы не можем изобразить в силу ограничений человеческого мозга. Но это мы, приматы, сталкиваемся с проблемами визуального метода, а очевидный закон не имеет такого ограничения. Поэтому, если есть желание, мы могли бы применить очевидный закон к чему-то вроде разложения $(a + b)^4$ несколько раз, и как только мы бы полностью распутали его, получившееся (надо сказать, весьма длинное) выражение обеспечило бы нам небольшое проникновение в четырехмерную геометрию. Например, число слагаемых в итоговом выражении было бы числом кусков, на которые можно разрезать четырехмерный куб по трехмерным плоскостям. Понятия не имею, как изобразить то, что я сейчас сказал, но это правда! Так *должно* быть. Всего лишь используя обиходный факт о разрывании прямоугольника надвое, мы можем уговорить математику рассказать нам то, что находится далеко за пределами возможностей визуализации человеческого мозга.

1.2.3. Не изучать деление / забыть дроби

Как мы уже видели, небольшого количества математики, которое мы уже изобрели, более чем достаточно, чтобы заново придумать многие «законы алгебры». В нескольких следующих абзацах я покажу, как еще два таких закона естественным образом вытекают из сделанного нами. Понимание, откуда они появляются, позволит нам более комфортно забыть то, что нам говорили о странных штуках, именуемых «дроби», и странном существительном «деление».

Возможно, вам говорили раньше, что мы можем (осторожно: впереди жаргон) «сократить общие множители числителя и знаменателя дроби».

Иными словами, $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$. Но в создаваемой нами Вселенной нет такой штуки, как «деление»: символ типа $\frac{5}{9}$ — не более чем сокращение для $(5)\left(\frac{1}{9}\right)$, или простого умножения одного числа на другое. Это может показаться жульничеством, поскольку символ $\frac{1}{9}$ определенно выглядит так, будто содержит деление. Но деление — понятие за рамками нашей Вселенной. Мы используем символ $\frac{1}{9}$ как сокращение для числа, которое превращается в 1 при умножении на 9. Иначе говоря, мы определяем символы вроде $\frac{1}{9}$ с точки зрения их поведения и обращаемся с числовыми значениями, которые они могут иметь, как со второстепенным добавлением, на котором лично мы предпочитаем не сосредоточиваться. Определение этих объектов на основе их поведения позволяет простым способом убедиться, что предложения вроде $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ верны. Вот как это происходит.

Мы убедились, что порядок умножения не важен, и знаем, что (#) (1/#) ≡ 1 для любого #. Только эти две идеи используются в следующем рассуждении, чтобы показать, что $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ верно. Обратите внимание, что каждый знак равенства ниже, за исключением одного, ≡. Исключение связано с перестановкой порядка умножения. Поскольку мы можем считать это поворотом прямоугольника на другую сторону (то есть перемену мест его длины и ширины без изменения площади), я напишу *поворот* над знаком равенства, когда мы используем этот факт. Поехали:

$$\frac{ac}{bc}\equiv(a)(c)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\overset{\text{Поворот}}{=}(a)(c)\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\equiv(a)\left(\frac{1}{b}\right)\equiv\frac{a}{b}.$$

Получается, вычурный «закон» о «сокращении» «общих делителей» из «числителя» и «знаменателя» «дроби» — по сути, и не закон. Или закон. Возможно, сам термин не особо осмысленный. Фактически это просто следствие простого факта: мы решили начать с того, что порядок умножения не важен, и используем $\frac{1}{\textit{нечто}}$ как сокращение для какого-то числа, которое становится равным 1 после умножения его на *нечто*.

А вот еще одна польза. В свое время всем вам, вероятно, говорили, что можно «делить дроби почленно». Иными словами, утверждалось, что предложение $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ верно, причем, возможно, без всякого обоснования.

Но это всего лишь очевидный закон разрывания, хоть и замаскированный. Посмотрим, почему так. Обратите внимание, что все знаки равенства, за исключением одного, ≡. Единственное исключение связано с применением очевидного закона разрывания, и я напишу над ним *разрывание*. Поехали:

$$\frac{a+b}{c} \equiv (a+b)\left(\frac{1}{c}\right) \overset{\text{Разрывание}}{=} (a)\left(\frac{1}{c}\right)+(b)\left(\frac{1}{c}\right) \equiv \frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Получается, почленное деление дробей — вовсе не особый «закон» о дробях. Он вообще не имеет отношения к ним. Это просто очевидный закон разрывания вещей, записанный слегка необычным способом.

Суть такова: столкнувшись с ужасно выглядящим предложением, включающим уйму делений, мы можем переписать его на языке умножения. Удивительно, но такая простая смена сокращений все упрощает, а заодно позволяет не запоминать все виды странного поведения дробей.

Наши изобретающие мускулы пока не нагружены достаточно, изучим еще один пример того, как изобретаются математические понятия, а затем закончим главу, сформулировав некоторые общие принципы таинственного процесса движения от качественного к количественному.

1.2.4. Произвольность и необходимость: изобретение крутизны

Старое определение преподавания методом чтения лекций: процесс, с помощью которого содержимое учебника преподавателя переносится в тетрадь студента, не проходя при этом через головы обоих.

Даррелл Хафф, «Как лгать с помощью статистики»*

Когда мы впервые слышим об идее «углового коэффициента» в математике, обычно нам говорят, что это «отношение приращения функции к приращению аргумента», кратко сообщают, что это значит, а потом начинают

* Издана на русском языке: Хафф Д. Как лгать с помощью статистики. М.: Альпина Паблишер, 2018. Здесь приводится новый вариант перевода. *Прим. ред.*

приводить примеры. Я никогда не слышал, чтобы кто-нибудь объяснил, почему не «отношение приращения аргумента к приращению функции» или «отношение 52 приращений функции к 38 приращениям аргумента»; вероятно, вы тоже. Хотите знать, *почему* нам этого не рассказывают? Поскольку мы *могли бы* определить, что угловой коэффициент — «отношение приращения аргумента к приращению функции», или «отношение 76 приращений функции к 38 приращениям аргумента», или это какая-нибудь другая безумная числовая конструкция! Все зависит от того, сколько нашего неясного обыденного представления о «крутизне» мы захотим вложить в математическое понятие, как мы это сделаем и что, на наш взгляд, будет разумно звучать в итоге. Более того, наш выбор формального определения часто зависит (больше, чем мы готовы признать) от субъективных эстетических предпочтений, то есть от того, что нам кажется красивым.

Цель этого раздела — увидеть, почему сказанное в предыдущем абзаце верно, изобретя понятие крутизны, или, как обычно это называют, «угловой коэффициент». Это немного сложнее, чем площадь, но не бойтесь. В обоих случаях процесс изобретения идет фактически по одному образцу.

Мы знаем, что значит слово «крутизна» в бытовом (нематематическом) смысле, и хотим использовать это представление для построения строгого математического понятия. На время мы сосредоточимся на прямых — просто чтобы облегчить себе жизнь. С кривыми будем работать, когда изобретем анализ в главе 2 (главным образом путем увеличения до такой степени, что они начнут выглядеть прямыми). И всякий раз, когда я в этом разделе говорю о «холме» или «крутом месте», речь о прямых линиях.

На этом этапе мы можем обозначить крутизну буквой S (steepness), но не знаем ничего математического о ней, так что не в курсе, что можно написать, кроме:

$$S = ?$$

Как работает обиходное представление? Какие свойства у него есть? Какое поведение мы неявно приписываем «крутизне», когда рассуждаем об этом понятии в нематематической обстановке? Перед тем как решать, что делать математически, нужно изучить обиходное понятие подробнее. Представьте, что вы проснулись на другом материке. Вокруг никого. Вы даже приблизительно не знаете своей широты, долготы, высоты над уровнем моря. Вы видите невдалеке холм и решаете забраться на него, чтобы увидеть, что на другой его стороне. Когда вы начинаете подниматься, обнаруживается, что склон весьма крут, и вы задумываетесь, не повернуть ли обратно и не поискать ли помощи в другом направлении.

Вышеприведенный абзац способен рассказать о нашем бытовом представлении, которое интуитивно, но настолько очевидно, что обычно мы не удосуживаемся упоминать об этом, хотя это было бы большим подспорьем при переходе от качественного к количественному. Иными словами, хотя вы не имели понятия, где вы были, когда забирались на холм, вы всё же знали, что он крут. Крутое место остается одинаково крутым, когда вы выбираетесь из ямы или находитесь в самолете.

Еще один способ выразить ту же идею — сказать, что крутизна не зависит от вашего вертикального или горизонтального положения *как таковых*. Крутизна холма — не внутреннее свойство местоположения по вертикали или горизонтали. Это свойство *изменения* по вертикали, когда мы поднимаемся по холму, но не *только*. Если вы пройдете 16 км по пешеходной дорожке, вы можете закончить прогулку на высоте на 300 м выше, чем в месте старта, но подъем на 300 м практически невозможен, если у вас для этого есть всего 3 м по горизонтали. Итак, на основании нашего неясного качественного доматематического представления о крутизне мы знаем следующее.

Первое соображение нашего обиходного представления. Крутизна зависит только от *изменений* положения по вертикали и горизонтали, но не от самих этих положений.

Придумаем какие-нибудь сокращения для этого. Мы можем переписать предыдущее предложение так:

$$S(h, v) = ?$$

Здесь S — крутизна, а новые символы h и v обозначают разницу в горизонтальном и вертикальном положении. Например, если вы прошли 6 м по земле, а потом забрались на трехметровое дерево, h между точками, где вы начали и где прекратили двигаться, составляет 6 м, а v — 3 м. Обратите внимание, что сокращения h и v имеют смысл только тогда, когда вы выбрали *две точки*: где начнете и где закончите. О каких точках мы говорили, когда написали $S(h, v) = ?$ в вышеприведенном предложении? Мы не знаем. В тот момент мы экспериментировали с сокращениями. Но предложение $S(h, v) = ?$ отражает идею, что крутизна зависит только от *изменений* положения по горизонтали h и вертикали v, а не от самих положений.

Теперь, поскольку h и v — величины, которые сравнивают две точки, нам нужно взять две точки на холме, прежде чем говорить о его крутизне, так как (насколько нам известно сейчас) крутизна линии может меняться в зависимости от нашего выбора. Но это выглядит абсолютно верным, ведь прямые линии — прямые. Как минимум в обиходном смысле прямая имеет только одну крутизну. Та не зависит от выбранных точек. Попробуем выразить математически это интуитивное представление.

Второе соображение нашего обиходного представления. Что бы мы ни понимали под «крутизной», у прямой она одинаковая в любом месте. Если у кого-нибудь есть определение «крутизны», при котором прямые изменяют ее посередине, то это, конечно, мило, но не это мы понимаем под крутизной.

Отлично! Это то, что верно для нашего обиходного представления, и мы хотим *потребовать*, чтобы наше математическое понятие крутизны вело себя так же.

Рисунок 1.8 позволяет наглядно представить эту идею. Поскольку крутизна основана на разностях, нужны две точки, чтобы ее вычислить. Вообразим, будто мы смотрим на две точки на линии так, что h откладывается горизонтально, а v — вертикально. По сути, мы глядим на маленький треугольник в левой нижней части рис. 1.8. Если бы мы взглянули на *другую* пару точек на той же линии, крутизна должна была бы остаться той же. Представьте, что мы смотрим на две точки той же линии, расположенные друг от друга на расстоянии $2h$ по горизонтали (то есть величина эта вдвое больше, чем расстояние между исходными двумя точками). Нетрудно увидеть, что, поскольку мы на прямой, расстояние по вертикали тоже удвоится: станет равно $2v$. (Убедитесь, что вы понимаете, почему это так. Рисунок 1.8 вам в помощь.) Но в соответствии с вышеуказанным «вторым соображением нашего обиходного представления» крутизна должна быть одной и той же для обоих случаев. Мы можем математически выразить это, написав так:

$$S(h, v) = S(2h, 2v).$$

Обратим внимание, что в этом рассуждении не обязательно использовать число 2. Если мы утроим h, то по аналогии v утроится, а крутизна остается прежней, поскольку мы говорим об одной и той же прямой. Мы можем повторить это для других величин и получить $S(h, v) = S(\#h, \#v)$ для любого целого числа #.

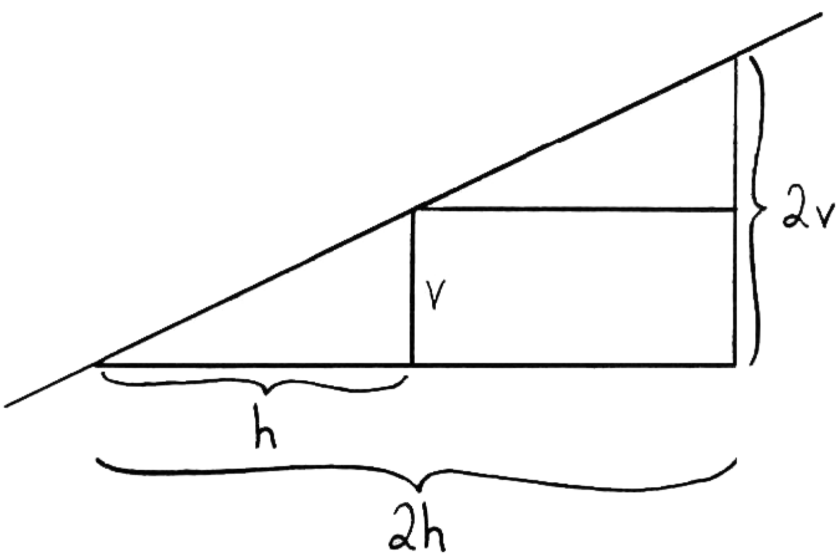


Рис. 1.8. Иллюстрация ко второму соображению нашего обиходного представления о крутизне. Что бы мы ни понимали под крутизной, у прямой она одинакова в любом месте. В частности, удвоение расстояния по горизонтали между двумя точками ведет к удвоению расстояния по вертикали. При этом мы хотим, чтобы крутизна была одинаковой в обоих случаях. В сокращенной форме это $S(h, v) = S(2h, 2v)$

Более того, та же идея должна работать, когда # — не целое число. Например, если вы уменьшите h вдвое, то и v уменьшится вдвое, то есть $S(h,v)=S\left(\frac{1}{2}h,\frac{1}{2}v\right)$. Это дополнительный факт о нашей интуитивной идее крутизны, и он приближает нас на шаг к точному определению, которое мы ищем. Зафиксируем его раз и навсегда:

$$S(h, v) = S(\#h, \#v), \tag{1.4}$$

где # — не обязательно целое число. Это здорово и немало говорит нам о том, что мы могли бы назвать крутизной. Например, возможное определение $S(h, v) = h$ не работает, ведь в этом случае получается, что $h = \#h$ для любых чисел # и h, а это неверно. Из тех же соображений искомым определением крутизны не может быть $S(h, v) = hv$, $S(h, v) = h + v$, $S(h, v) = 33h^{42}v^{99}$ и еще много других выражений.

Чем дольше мы смотрим на уравнение 1.4, тем яснее, насколько это сильное утверждение. Получается, произвольное число # как-то «уничтожается». Если бы мы поэкспериментировали, мы бы могли проверить несколько идей и составить список тех, которые работают (ведут себя так, что уравнение 1.4 выполняется).

Вот несколько примеров. (Внимание: в следующем списке символ $\stackrel{?}{=}$ просто означает «это определения, которые мы *можем* выбрать, но пока мы ничего из этого не выбрали».)

1. $S(h,v)\stackrel{?}{=}\frac{v}{h}$ работает. Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали»*.

2. $S(h,v)\stackrel{?}{=}\frac{h}{v}$ тоже работает. Это «отношение приращения по горизонтали к приращению по вертикали».

3. $S(h,v)\stackrel{?}{=}\left(\frac{v}{h}\right)^2$ работает. Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали» в квадрате.

4. $S(h,v)\stackrel{?}{=}3\left(\frac{v}{h}\right)+14\left(\frac{v}{h}\right)^2-\left(\frac{h}{v}\right)^{79}$ работает. Это просто безумная штука.

* Отношение приращения функции к приращению аргумента. *Прим. перев.*

После подобных экспериментов становится ясно, что работать должна любая машина, которая зависит только от $\frac{h}{v}$ или $\frac{v}{h}$*. Иначе говоря, любая, описание которой не содержит отдельно h или v, но обязательно включает выражение $\frac{h}{v}$ или $\frac{v}{h}$. Почему так? Потому что трудно понять, как иначе заставить «уничтожиться» произвольное число, что нужно для выполнения уравнения 1.4. Возможно, есть какой-то другой способ заставить его исчезнуть, но нам это безразлично!

1.2.5. Это не та анархия, что в старые добрые времена

Наука представляет собой, по сути, анархистское предприятие: теоретический анархизм более гуманен и прогрессивен, чем его альтернативы, опирающиеся на закон и порядок. Единственным принципом, не препятствующим прогрессу, является принцип «все дозволено».

Пол Фейерабенд, «Против метода»**

Стоит шагнуть чуть в сторону и поразмышлять, что именно мы пытаемся сделать. Мы пробуем глубже погружаться в наше интуитивное представление, добывая ограничения, и в итоге обрезать все возможности, кроме одной? Не обязательно! Выбор «того, что мы пытаемся сделать» целиком в нашем распоряжении.

Постоянно переводя словесные идеи о нашем повседневном представлении о крутизне в сокращенную форму, мы решили, что наше математическое понятие крутизны должно: а) зависеть только от изменений положения v и h, а не от самих положений; б) зависеть только от $\frac{v}{h}$ и $\frac{h}{v}$. Но это по-прежнему не объясняет, почему в учебниках пишут про «отношение

* Поскольку $\frac{h}{v} = \left(\frac{v}{h}\right)^{-1}$, мы можем записать предложение так: «любая машина, которая зависит только от величины $\frac{v}{h}$». Но мы еще не говорили об отрицательных показателях степени, поэтому действуем, будто не знаем об их существовании. В нашей Вселенной их пока нет.

** Издана на русском языке: Фейерабенд П. Против метода. Очерк анархистской теории познания // Фейерабенд П. Избранные труды по методологии науки. М., 1986. С. 125–467. *Прим. ред.*

приращения по вертикали к отношению приращения по горизонтали» (то есть $\frac{v}{h}$), а не любую величину, кратную этой, например $3\frac{v}{h}$ или $\frac{17v}{92h}$. Следует ли нам сдаться (и когда именно) и просто счесть это философской проблемой, с которой мы вынуждены иметь дело? Это иллюстрирует проблему, которая возникает всякий раз, когда мы изобретаем какое-то математическое понятие. Здесь есть две стратегии.

1. **Стратегия несгибаемой стойкости.** Мы можем продолжить попытки урезать воображаемый набор кандидатов в определения: а) размышляя о качественных характеристиках нашего понятия крутизны; б) сокращая их; в) отбрасывая в уме те из них, что не работают; г) повторяя этот процесс до тех пор, пока не получим одно и только одно возможное определение. Конечно, разглядывая список наложенных требований, мы можем не понять, что осталась лишь одна возможность. Так что придется убедиться, что действительно есть единственный кандидат. Это было бы здорово, ведь в таком случае мы бы *точно*, до мельчайших подробностей знали, откуда взялось наше определение.

2. **Стратегия сдачи.** Мы также можем решить, что нас утомили процесс добычи полезных ископаемых в наших мозгах и попытки выжать последние капли из нашей интуиции. Может, нашего обиходного представления недостаточно, чтобы однозначно прийти к единственному определению. Так что есть вариант сдаться, сказать: «Смотрите на это именно так. Мне нужно *какое-то* определение крутизны, которое делает все, что я прошу. У меня несколько вариантов, и я просто выберу одно». Кто или что будет определять выбор? Конечно, мы. Мы могли бы просто выбрать кандидата, который, на наш взгляд, самый красивый или элегантный по какому-нибудь стандарту. Это встречается в математике чаще, чем многие готовы признать. Мы изобретаем это нечто сами. Мы можем это сделать любым способом, каким захотим. Мы можем вызывать сущности из ничего и оживлять их, давая им имена. Если анархия существует, вот она!

Стоп. Последнее предложение может создать у вас впечатление, будто я утверждаю, что такого понятия, как «математическая истина», не существует, поскольку все эти штуки мы выдумываем. Но я явно имею в виду другое. Анархия в обычном смысле относится к отсутствию законов для людей, а не законов физики. В анархии нет «законов», но вы все равно не можете летать из-за закона всемирного тяготения. Это два совершенно разных понятия. Математика вне рамок учебного класса анархична в первом смысле: мы можем делать все, что хотим, но не способны заставить что-то быть истинным. У нас есть выбор: определить вещи так, как нам хочется, или экспериментировать с тем, с чем нам хочется. Но как только мы достигаем соглашения по тому, о чем мы говорим, мы обнаруживаем, что есть уже существующий набор истин о наших новых изобретенных объектах и мы должны открывать эти истины для себя*.

Подводя итог, мы можем выбрать путь сдачи и «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали» как определение, которое, на наш взгляд, самое симпатичное, и отправляться изобретать анализ. Однако важно подчеркнуть, что мы можем *также* сдаться, но выбрать как самое симпатичное «отношение приращения по горизонтали к приращению по вертикали» (перевернутый вариант) или «42, умноженное на (отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали) в кубе»! Если мы далее начнем разрабатывать анализ на основе таких нестандартных определений, наши формулы будут выглядеть чуть иначе, чем в стандартных учебниках, но по сути говорить то же.

1.2.6. Вперед! Смеха ради

Суть математики целиком заключается именно в ее свободе.

Георг Кантор, Gesammelte Abhandlungen

Сейчас, когда мы обсуждаем, что в математике произвольно, а что необходимо, посмотрим, что мы могли бы принять, чтобы стандартное определение углового коэффициента осталось единственно возможным.

---

* Замечание для тех, кто знает значение терминов «платоник» и «формалист» и кто истолковал этот раздел как защиту одной из этих точек зрения перед другой: это не так.

Еще немного покопаемся в наших мозгах и спросим, не говорит ли нам наше обиходное представление о крутизне еще что-нибудь по поводу свойств, которых мы хотим от нашего математического понятия. Сейчас у нас нет причин выбрать $\frac{v}{h}$ (отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали), а не $\frac{h}{v}$ (отношение приращения по горизонтали к приращению по вертикали). Но хотя второе — приемлемый способ измерения крутизны, у него есть одно странное свойство. Кандидат в наше определение «отношение приращения по горизонтали к приращению по вертикали» говорит, что горизонтальные объекты имеют бесконечную крутизну, а абсолютно вертикальные утесы — нулевую. Иными словами, если расстояние по вертикали между двумя точками равно 0 ($v = 0$), то $\frac{h}{v}$ превращается в $\frac{h}{0}$, то есть бесконечно велико (по меньшей мере, логично говорить, что оно бесконечно велико, потому что $\frac{1}{\textit{крохотное}} = \textit{огромное}$, и *огромное* становится все больше, когда мы делаем *крохотное* меньше). Аналогично, если расстояние по горизонтали между двумя точками равно 0 ($h = 0$), «отношение приращения по горизонтали к приращению по вертикали» равно 0. Это может не быть неправильно, но это несколько не так, как мы обычно думаем. Мы ведь по-прежнему хозяева этой Вселенной, и нам можно ввести еще одно интуитивно понятное требование, чтобы у горизонтальных линий была нулевая крутизна. Давайте скажем это официально.

Третье соображение нашего обиходного представления. Что бы мы ни подразумевали под крутизной, у горизонтальной линии она равна 0.

Это вычеркивает многие варианты. Например, исключает $S(h,v) = \frac{h}{v}$, $S(h,v) = 3\left(\frac{h}{v}\right)^2$, $S(h,v) = \left(\frac{h}{v}\right)^{72} - 9\left(\frac{v}{h}\right)^{12}$, что угодно, что не будет 0 для горизонтальных линий (когда $v = 0$). Прекрасно! Запишем некоторые возможности, которые пережили нашу чистку.

1. $S(h,v) \stackrel{?}{=} \frac{v}{h}$ по-прежнему работает. Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали».

2. $S(h,v) \stackrel{?}{=} \left(\frac{v}{h}\right)^2$ по-прежнему работает. Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали» в квадрате.

3. $S(h,v) \stackrel{?}{=} 3\frac{v}{h} + 14\left(\frac{v}{h}\right)^2 - \left(\frac{v}{h}\right)^{999}$ работает. Это просто безумная штука.

Есть еще бесконечное число кандидатов в определение, но многие из них действительно неестественны. Мы могли бы остановиться здесь и выбрать то, что нам нравится, но давайте продолжим — просто чтобы посмотреть, сколько еще нам нужно предположений, чтобы прийти к стандартному определению.

До сих пор мы не говорили, как разные холмы соотносятся друг с другом. Например, что означает фраза «один холм вдвое круче другого»? Мы об этом пока не думали, так что прямо сейчас у нас нет правильного ответа. Но мы хотим, чтобы изобретаемое нами понятие имело смысл *для нас*, поэтому подумаем, что должно значить «вдвое круче» согласно нашему желанию. Предположим, у нас есть две точки, одна выше и правее другой, так что линия между ними выглядит как холм. Теперь вообразите, что мы берем более высокую точку и тянем ее вертикально вверх, пока исходное расстояние по вертикали не удвоится, причем расстояние по горизонтали не изменится. Иными словами, вообразите, что мы превращаем один холм в другой, удваивая высоту первоначального и не меняя его ширину. Сейчас имеет смысл сказать, что если два холма равны по горизонтали, но один вдвое выше другого, то его крутизна вдвое больше, чем у другого. Как и ранее, нет закона, который заставлял бы нас думать так, но все остальные способы выглядят хуже: например, представляется менее разумным сказать, что при удвоении расстояния по вертикали крутизна должна увеличиваться в 72 раза, потому что непонятно, почему мы выбрали именно 72 из бесконечного числа возможных вариантов. А вот идея, что удвоение высоты должно удваивать крутизну, простое и элегантное. Давайте установим это официально.

Четвертое соображение нашего обиходного представления. Что бы мы ни подразумевали под крутизной, если мы удвоим высоту холма, не меняя его размера по горизонтали, его крутизна удвоится.

Как кратко записать эту идею? Мы удваиваем v, не меняя h, и хотим, чтобы крутизна увеличилась вдвое. Предложение может выглядеть так:

$$S(h, 2v) = 2S(h, v).$$

Итак, мы снова ухитрились перейти от качественного к количественному. Сейчас заметим, как и ранее, что в этом рассуждении число 2 — не догма. Мы хотим выразить более общее утверждение. Например, из тех же соображений утроение расстояния по вертикали без изменения расстояния по горизонтали должно увеличивать крутизну втрое. Сократим эту идею, сведя бесконечное множество аналогичных предложений в одно, как мы это уже делали:

$$S(h, \#v) = \#S(h, v).$$

Превосходно. Посмотрим на наш воображаемый мешок с кандидатами в определение и проведем еще одну чистку. Какие оставшиеся возможности могут удовлетворять такому требованию? Опробуем некоторые. Скажем, если мы взглянем на возможное определение $S(h,v) \equiv \left(\frac{v}{h}\right)^2$ и представим, что мы удвоили *v*, как описано выше, то получим:

$$S(h,2v) \equiv \left(\frac{2v}{h}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot v \cdot v}{h \cdot h} = 4\left(\frac{v}{h}\right)^2 \equiv 4S(h,v).$$

Высота увеличилась вдвое, крутизна — вчетверо. Это значит, что мы можем отказаться от такого кандидата, поскольку он не проходит по нашему четвертому соображению. Ладно, мы только что проверили $\left(\frac{v}{h}\right)^{\#}$, где # равно 2, а как насчет случая, когда # равно 3, 5 или 119? Вместо того чтобы проверять каждую такую степень в отдельности (этим можно заниматься до бесконечности), проверим всё за один раз, оставаясь при этом в неведении относительно того, какую именно степень мы исследуем. Ровно то же рассуждение, как описанное выше, дает:

$$S(h,2v) \equiv \left(\frac{2v}{h}\right)^{\#} = 2^{\#}\left(\frac{v}{h}\right)^{\#} \equiv 2^{\#}S(h,v).$$

Но все это должно равняться $2S(h, v)$, иначе нарушится четвертое соображение. Поэтому, чтобы при удвоении высоты крутизна удваивалась, необходимо, чтобы $2^{\#} = 2$. Это справедливо только в том случае, если # равно 1, и мы можем отбросить почти все оставшиеся возможности! Составим список того, что осталось.

1. $S(h,v) \overset{???}{=} \frac{v}{h}$ по-прежнему работает. Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали».

2. $S(h,v) \overset{???}{=} 3\frac{v}{h}$ по-прежнему работает. Это «3 отношения приращения по вертикали к приращению по горизонтали».

3. $S(h,v) \overset{???}{=} 974\frac{v}{h}$ по-прежнему работает. Это «974 отношения приращения по вертикали к приращению по горизонтали».

По сути, с помощью перечисленных требований было устранено все, за исключением конструкций «некое число, умноженное на отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали». Мы начинаем видеть, сколько рассуждений учебники заметают под ковер, когда говорят «угловой коэффициент — отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали». Мы можем придумать, что оставшиеся определения имеют вид $S(h, v) \equiv (\textit{число})\left(\frac{v}{h}\right)$, поэтому посмотрим, есть ли у нашего интуитивного представления свое мнение о том, каким должно быть это (*число*).

Вообразите, что сила тяжести немного поменяла направление. Тогда все, что было горизонтальным, станет слегка наклонным. Если сила тяжести поменяет направление на 90°, горизонтальные линии станут вертикальными, и наоборот. Итак, если «вертикальное» направление изменится на 90°, то изменится крутизна всего… за исключением одного: холма, который одинаково далек от вертикали и горизонтали. Иначе говоря, холм, у которого расстояние по горизонтали равно расстоянию по вертикали ($h = v$), останется *единственным*, у которого крутизна не изменится при такой перемене силы тяжести. Любое определение крутизны в виде $S(h, v) \equiv (\textit{число})\left(\frac{v}{h}\right)$ присваивает этому особому холму крутизну, равную (*числу*), поскольку он имеет свойство $h = v$. Поэтому выбор (*числа*), которое нам нужно, эквивалентен выбору крутизны этого особого холма.

Рассмотрим некоторые возможности. Предположим, мы решили, что желаемое (*число*) равно 5. Тогда наш особый холм имеет крутизну 5 до и после скачка гравитации, а остальные ведут себя намного более причудливо. Холм с $v = 3$ и $h = 1$ имел бы крутизну 15 до изменения силы тяжести и крутизну $\frac{5}{3}$ после него. В этом нет ничего плохого, но выглядит как-то необоснованно, и крутизна до и крутизна после изменения гравитации не связаны друг с другом каким-нибудь приятным, визуально привлекательным способом. Но если по чисто эстетическим причинам мы захотим, чтобы наш особый холм имел крутизну 1, *остальные* холмы поведут себя более мило. Холм с крутизной 3 до изменения имел бы крутизну $\frac{1}{3}$ после него. Холм с крутизной $\frac{22}{33}$ до изменения имел бы крутизну $\frac{33}{22}$ после него. Все выглядит намного проще. Если мы сделаем такой выбор, мотивированный исключительно эстетическими соображениями, то получим:

$$S(h,v)=\frac{v}{h}=\frac{\text{Приращение по вертикали}}{\text{Приращение по горизонтали}}=\text{Стандартное определение} \qquad (1.5)$$

в качестве единственной оставшейся возможности. Давайте это запишем.

Пятое соображение нашего обиходного представления, но не совсем. Есть только один холм, крутизна которого постоянна до и после изменения направления силы тяжести на 90° (перестановки v и h). Ради элегантности и простоты мы присвоим ему крутизну 1. Это позволит всем *остальным* холмам выглядеть симпатично при изменении силы тяжести.

Сейчас вы знаете *точно*, сколько вам не рассказывали в школе. Как всегда при изобретении математического понятия, определение, к которому мы в итоге пришли, создано из странной смеси перевода и эстетики: часть поведения нашего определения появилась из желания сделать его элегантным и максимально простым в обращении в соответствии с нашими стандартами.

1.2.7. Итоги нашего изобретательского загула словами

Мы достаточно детально описали процесс изобретения, поскольку важно иметь минимум несколько простых примеров процесса изобретения математических понятий, расписанных целиком и полностью, где разъясняется на каждом шаге, что́ именно мы делаем, что́ обязательно будет верно в силу того, что мы сделали, и каковы причины наших действий. Процесс изобретения крайне важен для понимания, поэтому кратко обобщим то, что мы сделали, сначала словами, а затем записав всю математику, которую мы изобрели. Для экономии места мы будем сокращать фразу «или это нехороший переход» до ИНХП. Все математические понятия изобретаются так.

1. Вы начинаете с обиходного понятия, которое хотите формализовать или обобщить*.

2. Как правило, у вас есть идея, что́, на ваш взгляд, должно делать это понятие в простом и знакомом случае. Такие случаи — основа вашего решения о том, какого *поведения* вы потребуете от нового понятия в случаях, которые менее знакомы.

Примеры: независимо от того, что подразумевается под площадью, площадь прямоугольника должна удваиваться, если удваивается его длина, ИНХП. Независимо от того, что подразумевается под крутизной, крутизна прямой должна быть повсюду одинаковой, ИНХП. А вот то, что мы не делали: независимо от того, что понимается под кривизной, кривизна окружности или сферы должна быть везде одинаковой, а кривизна прямой или плоскости равна 0, ИНХП.

3. Вы заставляете математическое понятие вести себя так же, как интуитивное представление, в этих простых случаях, а иногда в понятных обобщениях таких случаев.

Примеры: я даже не могу начать рисовать пятимерный параллелепипед, но его «пятимерный объем» должен быть равен $l_1l_2l_3l_4l_5$, ИНХП. Я не могу нарисовать 10-мерную сферу, но ее кривизна должна быть одинакова в любом месте, ИНХП. Я не могу нарисовать 52-мерный вариант «линии» или «плоскости», но их кривизна должна быть равна 0, ИНХП.

* Как только мы изобрели достаточно много математики, набор «обиходных понятий», служивший сырьем в процессе создания, начинает включать простые *математические* понятия, которые мы изобрели раньше. Это происходит, например, когда мы обобщаем базовые понятия анализа, изобретенные в главе 2, до набора понятий в пространстве бесконечного числа измерений, как в главе ℵ. Чем глубже мы исследуем нашу математическую Вселенную, тем менее четкой становится разница между обиходными понятиями и математическими.

4. Иногда выясняется, что все ваши неясные качественные требования, записанные на сокращенном символическом языке, полностью определяют точное математическое понятие.

5. Иногда всех желаемых интуитивных требований недостаточно для выделения одного математического определения. Это нормально! Тогда математики обычно смотрят на воображаемый мешок с кандидатами, которые делают все, что нужно, и выбирают самого, на их взгляд, красивого или элегантного. Возможно, вы удивитесь, увидев эти плохо определенные эстетические понятия в математике. Не удивляйтесь.

1.2.8. Итоги нашего изобретательского загула в сокращениях

Подведем итоги нашего долгого изобретательского марафона в символьной форме, напомнив себе, что мы сделали.

Изобретение площади

На основании обиходного представления о площади мы потребовали, чтобы для соответствующего математического понятия в конкретном случае с прямоугольником были справедливы такие свойства.

1. $A(l,\#w) \overset{\text{Требование}}{=} \#A(l,w)$ для любого #.
2. $A(\#l,w) \overset{\text{Требование}}{=} \#A(l,w)$ для любого #.
3. $A(1,1) \overset{\text{Требование}}{=} 1$.

Затем мы установили, что отсюда площадь прямоугольника должна составить:

$$A(l,w) = lw.$$

Это как раз та формула, которую рассказывают в школе.

Изобретение крутизны

На основании нашего обиходного представления о крутизне мы потребовали, чтобы для математической версии этого понятия в конкретном случае с прямой были справедливы пять таких свойств.

1. Крутизна зависит только от *изменений* вертикального и горизонтального положения, но не от самих положений.

2. $S(h,v) \overset{\text{Требование}}{=} S(\#h,\#v)$ для любого #.

3. Мы хотим, чтобы крутизна горизонтальной линии равнялась 0, то есть $S(h,0) \overset{\text{Требование}}{=} 0$.

4. Если вы удваиваете расстояние по вертикали для холма, не меняя величину по горизонтали, крутизна удваивается. Это свойство верно не только для удвоения, но и для любого коэффициента, так что $S(h,\#v) \overset{\text{Требование}}{=} \#S(h,v)$ для любого #.

5. Когда $h = v$, мы выбрали $S(h,v) \overset{\text{Требование}}{=} 1$ исключительно из эстетических соображений.

Далее мы установили, что в силу всех этих требований крутизна прямой линии должна определяться так:

$$S(h,v) = \frac{v}{h} = \frac{\text{Приращение по вертикали}}{\text{Приращение по горизонтали}}.$$

Это как раз та формула, которую рассказывают в школе.

1.2.9. Использование нашего изобретения как трамплина

Вышеприведенное обсуждение может создать впечатление, будто математика — один долгий изобретательский марафон и фактически мы ничего не открываем. В разделе «Это не та анархия, что в старые добрые времена» я объяснял, почему это не так, но рассмотрим конкретный пример. Мы говорили, что подразумеваем под угловым коэффициентом. Сейчас мы обнаружим, что, сделав это, мы создали мир, который не зависит от нас. Он содержит истины, которые мы туда явно не внедряли и которые могут быть неочевидны для нас, тем не менее вытекают из того, что мы сделали.

Когда-то вам рассказывали, что «формула» для прямой $f(x) = ax + b$. Если бы все было так просто, то должно было оказаться самоочевидным. Обратите внимание: мы ни разу не использовали эту формулу в наших рассуждениях, хотя и говорили о прямых. Лично для меня совсем не очевидно ни то, что машины вида $f(x) = ax + b$ выдают результат в виде прямых, ни то, что все прямые (за исключением вертикальных) можно представить машинами такого вида.

Вместо того чтобы принять упомянутое утверждение о прямых, изобретем его для себя. Мы уже изобрели понятие крутизны, давайте покажем, что его непременное следствие состоит в следующем: прямые описываются машинами вида $f(x) = ax + b$.

Предположим, прямые можно описать некой машиной $M(x)$, но мы не хотим принимать, что она выглядит как $ax + b$, поскольку это нам неочевидно. Покажем, что объекты, описываемые словом «прямая», должны иметь постоянную крутизну. Мы уже делали такое предположение в ходе изобретения крутизны выше, назвав это «вторым соображением нашего обиходного представления». Выразим математически такое предположение. Пусть x и $\tilde{x}$ — два числа. Независимо от того, каковы они, если машина M описывает прямую, мы хотим, чтобы было верно:

$$\frac{(\text{Вертик. полож-е одной точки}) - (\text{Вертик. полож-е другой точки})}{(\text{Горизонт. полож-е одной точки}) - (\text{Горизонт. полож-е другой точки})} \equiv$$

$$\equiv \frac{\text{Приращение по вертикали}}{\text{Приращение по горизонтали}} \equiv \frac{\overbrace{M(x) - M(\tilde{x})}^{\text{Просто другое обозначение}}}{x - \tilde{x}} \overset{\text{Требование}}{=} \#,$$

где # означает «некоторое фиксированное число, которое не зависит от x или $\tilde{x}$». Ладно, символов многовато. Мы написали их не для того, чтобы сделать слишком много шагов за раз. Основная суть выражения выше проста:

$$\frac{M(x) - M(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} \overset{\text{Требование}}{=} \#. \tag{1.6}$$

Мы требуем, чтобы крутизна была постоянным числом # в любом месте, потому что хотим говорить о прямой, и уравнение 1.6 — по сути, наш способ «сказать это математически». Но теперь, поскольку мы требуем, чтобы уравнение 1.6 было верно для всех x и $\tilde{x}$, оно должно быть верно для

$\tilde{x} = 0$. В выборе числа $\tilde{x} = 0$ нет ничего особенного: мы вполне могли бы взять любое другое и для $\tilde{x}$, и для x. Мы поступаем так просто потому, что экспериментируем, и уравнение 1.6 выглядит проще, когда мы рассматриваем случай для $\tilde{x} = 0$. Тогда уравнение 1.6 гласит:

$$\frac{M(x) - M(0)}{x} = \# \qquad (1.7)$$

независимо от x. Поскольку мы не знаем, чему равен x, элемент $M(x)$ в левой верхней части уравнения 1.7 — полное описание нашей машины! Если бы мы могли выделить его, мы бы легко перешли от нашей неясной качественной идеи, что крутизна линии должна быть везде постоянной (часть определения, которое мы изобрели ранее), к точному способу написания символами, что такое прямая! Попробуем выделить описание нашей машины, которая скрыта слева вверху. Поскольку части уравнения 1.7 равны друг другу, они останутся равными, если мы умножим их на одно и то же число. Если мы умножим их на x и используем тот факт, что $\frac{x}{x} = 1$, то увидим: уравнение 1.7 говорит нам то же, что и предложение $M(x) - M(0) = \#x$. Но это всего лишь другой способ сказать:

$$M(x) = \#x + M(0). \qquad (1.8)$$

Люди, которые любят жаргон, называют число $M(0)$ «отрезок, отсекаемый на оси y», но мы можем думать о нем как о числе, которое наша машина M выплевывает, когда мы подаем в нее 0. Оба символа # и $M(0)$ — сокращения для чисел, которых мы не знаем (или, если хотите, чисел, в отношении конкретного значения которых мы предпочитаем оставаться агностиками), и мы можем написать это же предложение так:

$$M(x) = ax + b. \qquad (1.9)$$

Это и есть уравнение для прямой «из учебника». Мы изобрели его сами, так что отныне оно наше.

Мы сделали многое! Вспомним, что именно. Я догадываюсь, что можно назвать следующий раздел «Резюме». Но наша Вселенная заслуживает собственных терминов. Мы переносим все, что создали, в одно место, как насчет…

(Автор ненадолго задумывается.)

1.3. Встреча со сделанным

Итак, в этой главе мы забыли все, что знали о математике, кроме сложения и умножения, и начали строить свою Вселенную. Изредка мы покидали ее, чтобы сравнить созданное с соответствующими понятиями внешнего мира. Мы узнали следующее.

1. Почему в учебниках используется x как аббревиатура для *нечто* (вы не можете сказать *ш* по-испански, и люди не торопятся менять то, что перестало быть полезным).

2. Учебники называют наши машины «функциями». Непонятно почему.

3. Учебники называют сокращения «символами», а предложения — «уравнениями» или «формулами». Эти термины вычурнее, чем идеи, которые стоят за ними, но мы изредка будем их использовать, чтобы привыкнуть к ним.

4. Стандартный способ описания машины — использовать сверхсокращенные предложения, примерно такие: $f(x) = 5x + 3$. Это предложение содержит *три разных сокращения* только слева от знака равенства: а) название машины — f; б) название того, что мы кладем в нее, — x; в) название того, что выплевывает машина, когда мы кладем в нее x, — $f(x)$. Итак, слева есть три названия, соединенных вместе. Правая сторона предложения описывает, как работает машина.

5. Используя по-разному выглядящие знаки равенства, например $\equiv$, $\overset{\text{Требование}}{=}$ и $\overset{(1.3)}{=}$, мы можем сказать, что две вещи равны, и напомнить себе почему. Если это сбивает с толку, просто считайте, что я использую знак $=$.

6. Очевидный закон разрывания понятен, и он позволяет нам не запоминать глупые аббревиатуры вроде FOIL или еще более сложные варианты. Мы можем изобрести все это каждый раз, когда нам нужно.

7. Используя идею, что $\frac{1}{\textit{нечто}}$ означает «какое-то число, которое становится 1 при умножении на *нечто*», мы можем изобрести для себя многие «законы алгебры», поэтому нам не нужно их запоминать.

8. Математическое понятие изобретается так. Мы начинаем с обиходного понятия, которое хотим сделать более точным или общим. И тут нет единого метода. Обычно у нас в голове есть несколько образцов поведения, которым должно следовать математическое понятие, несколько кандидатов. Если наших качественных идей недостаточно для выбора единственного определения, математики обычно предпочитают вариант, который, на их взгляд, наиболее красив или элегантен. Учащиеся редко об этом слышат, поэтому часто в итоге ругают себя за то, что не понимают эти определения до конца.

9. Если мы *изобретаем* понятие крутизны, как в разделе 1.2, и если *предполагаем*, что некая машина имеет везде одинаковую крутизну, мы можем *открыть*, что эта машина выглядит как $M(x) = ax + b$. Это неочевидное выражение — прямое следствие наших интуитивных обыденных представлений.

ИНТЕРЛЮДИЯ 1
ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ

[Я не храню] такую информацию в своей голове, потому что ее легко найти в книгах… Ценность образования в колледже не в том, чтобы узнать много фактов, а в том, чтобы научить ум думать.

Альберт Эйнштейн по поводу того, почему он не знает скорости звука — одного из вопросов, включенных в «Тест Эдисона». Опубликовано в New York Times 18 мая 1921 года*

Есть много вещей, которых вы никогда не видели, и вы не знаете об этом, потому что вы не видели их. Вам нужно сначала что-то увидеть, чтобы узнать, что вы этого не видели, а потом вы видите это и говорите: «Эй, я никогда такого не видел». Поздно, вы только что это увидели!

Джордж Карлин, «Снова за старое» (фильм)

Вещи, которых вы не видели

Есть многое, чего вы никогда не видели, и эта интерлюдия посвящена коечему из этого. Все слышали об Эйнштейне. Здесь мы увидим, как изобрести для себя одну из многих вещей, которыми он прославился: математическое описание того, как *фактически* работает время, используя такие простые рассуждения, что вы удивитесь, почему вам этого не рассказали давным-давно. На мой взгляд, тот факт, что такое короткое рассуждение существует, но не дается всем на каком-то этапе обучения, одна из самых

* 24 февраля 1921 года Эдисон опубликовал в New York Times объявление о приеме на работу, в котором было 140 вопросов для кандидатов. Вопросы касались истории, географии, физики, химии и т. д. Это список известен как «Тест Эдисона». 18 мая 1921 года New York Times писала, что Эйнштейн не прошел бы тест: «Его спросили через секретаря: „Какова скорость звука?“. Он сказал, что не может ответить сразу. Он не хранит такую информацию в голове, но ее легко можно найти в справочниках». *Прим. перев.*

ярких иллюстраций того, что формальное образование в нынешнем виде перепутало все приоритеты. Простой вывод в последней части этой интерлюдии показывает странность Вселенной и воодушевление науки, и вы можете найти его на кафедрах математики и физики, им можно поделиться с друзьями — как народной песней или эпической поэмой. Но он никогда не входит в стандартную программу обучения. Мы десятилетиями даем людям все, что нужно для понимания этого рассуждения, но само его не показываем. Почему? Потому что специальная теория относительности — «углубленная» тема, которая не внесена во вводные курсы физики и евклидовой геометрии, где получают математические сведения, нужные для понимания этого рассуждения. В итоге оно остается бездомным. Не имея подходящего дома для этого красивого и разрывающего интуицию рассуждения в обязательном курсе обучения, мы попробуем увлечь учеников тайнами физического мира, сосредоточившись на математическом описании маятников, снарядов и того, как шар скатывается по холму. Но хватит разглагольствовать. Пора веселиться!

Во-первых, прежде чем увидеть, как работает время, мы изучим краткое рассуждение, которое покажет очевидную справедливость формулы для кратчайшего пути, обычно именуемой теоремой Пифагора. Во-вторых, мы поймем, что это — самая сложная математическая идея, которая нужна для понимания одной из главных идей специальной теории относительности Эйнштейна: факта, что время замедляется, когда вы движетесь. Мы используем эту фразу как сокращенное описание, но она не совсем точна. На деле всякий раз, когда два объекта (включая людей) не движутся с одной скоростью или в одном направлении, они отмечают, что «время» другого объекта идет с иной скоростью*. Как бы странно это ни звучало, это не просто теория или факт о людях и часах. Это фундаментальное знание о структуре пространства и времени, которое получило больше экспериментальных подтвержде-

* Трудно оценить по достоинству такую идею с помощью столь короткого словесного описания, и если для вас в этом мало смысла, не беспокойтесь. Скоро его станет больше, когда мы приобретем немного предварительных сведений.

ний, чем любая другая научная идея. К концу интерлюдии вы поймете математическое рассуждение, показывающее, что «замедление времени» реально. Но вы можете убрать ощущение, что не понимаете этого, ведь вывод тут всегда удивителен, независимо от того, как хорошо вы поняли само рассуждение. И даже если нашему мозгу примата сложно что-то представить, математика должна иметь смысл, а если не имеет, то это моя вина. Готовы? Поехали.

Кратчайшие пути

Не всё в мире вертикально или горизонтально. Объекты могут быть наклонены в любом направлении. Это не очень удобно: часто информация, которую мы обрабатываем, поступает как факты о двух перпендикулярных направлениях. Их мы (абстрактно) воспринимаем как вертикальное и горизонтальное. Например, «до этого места три квартала на восток и четыре на север» или «то-то и то-то имеет 100 м в высоту и находится в 200 м». Предположим, у нас есть только информация о таких двух расстояниях: одно мы называем горизонтальным, а второе — вертикальным. Мы можем обсудить вопрос, нарисовав треугольник, у которого одна сторона вертикальна, а другая горизонтальна. Заметьте: дело вовсе не в треугольниках. Обсудим вопрос абстрактно, забыв о неважных деталях. Обозначим стороны треугольника a, b и c (рис. 1.9) и предположим, что мы знаем значения a и b. Можем мы с помощью только этой информации узнать длину «кратчайшего пути», c?

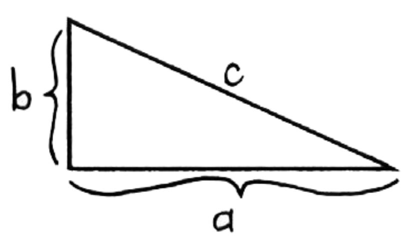


Рис. 1.9. Это не подпись к рисунку*

* Видимо, отсылка к картине Рене Магритта «Вероломство образов», на которой изображена курительная трубка с подписью «Это не трубка». *Прим. перев.*

Пока не совсем понятно, как найти длину c, если мы знаем a и b. Поскольку у нас нет идей, куда двигаться, наша единственная надежда — посмотреть, не можем ли мы превратить эту трудную задачу в такую, которая содержит только уже знакомое нам. Мы изобрели не так много математики, и у нас маловато знакомого, но мы знаем площадь прямоугольника. Поэтому хороший вариант — посмотреть, нельзя ли построить прямоугольник из нескольких копий изображенного выше треугольника. Возможно, потом мы сможем продвинуться в решении (или не сможем, но стоит попытаться). Тогда первое, что придумал бы лично я, — взять две копии треугольника с картинки и сложить их вместе в прямоугольник шириной a и высотой b. К сожалению, после изучения получившейся картинки мы по-прежнему сбиты с толку: не похоже, что такой простейший способ составления прямоугольника скажет нам что-то о кратчайшем пути. К счастью, второй по простоте способ оказывается полезнее (рис. 1.10).

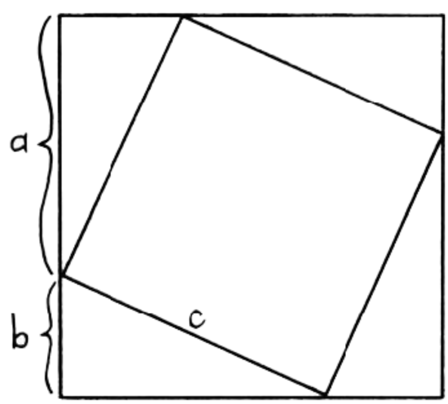
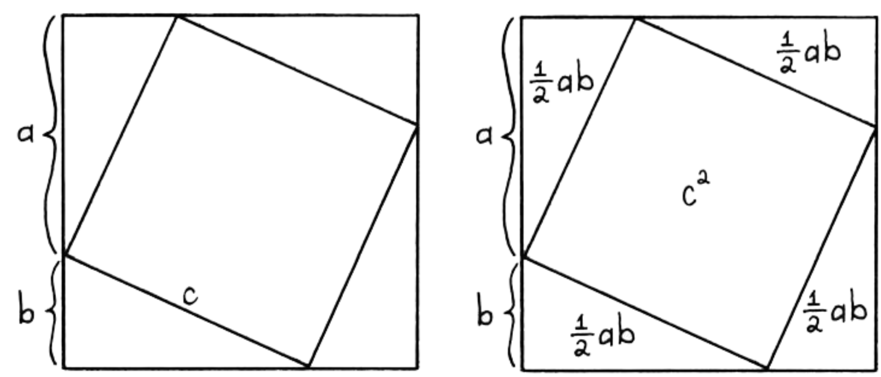


Рис. 1.10. Построение квадрата внутри квадрата с помощью четырех копий треугольника и пустого пространства. Теперь мы можем говорить о чем-то, с чем незнакомы (кратчайший путь), в терминах того, что мы знаем (площадь квадрата)

Мы построили большой квадрат из четырех копий исходного треугольника, у которых кратчайшие пути образуют квадратную область пустого пространства посередине. Как и в главе 1, когда мы изобрели очевидный закон разрывания, из простого факта, что рисование картинки на «чем-то» не меняет площади этого «чего-то», можно выжать много сведений. Мы, по сути, нарисовали наклонный квадрат внутри большого. Мы уже знакомы с площадью квадрата, и этот трюк позволяет нам сформулировать предложения о кратчайшем пути, используя наш пока ограниченный словарь. Мы можем написать такие предложения, выразив общую площадь двумя способами. Результаты показаны на рис. 1.11.



Общая площадь =
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Общая площадь =
$c^2 + 2ab$

Рис. 1.11. Записав общую площадь двумя разными способами, мы можем изобрести формулу кратчайшего пути, именуемую в учебниках теоремой Пифагора

С одной стороны, мы нарисовали большой квадрат, длина стороны которого равна $a + b$, а площадь — $(a + b)^2$. В главе 1 мы убедились, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, нарисовав картинку, которая сделала это очевидным. Это один способ описать наш рисунок, но есть и другой. Общая площадь равна сумме площади пустого пространства посередине (c^2) и площади всех треугольников. Мы не знаем площади треугольника, но если приложить любые два треугольника друг к другу (как в первой неудачной попытке подступиться к задаче), у нас получится прямоугольник площадью ab. Всего у нас четыре треугольника, и из них можно построить два прямоугольника. Мы видим, что общая площадь составляет $c^2 + 2ab$. Мы описали одно и то же двумя способами, поэтому можем поставить знак равенства между описаниями и получить: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$.

Следующая часть крайне важна, читайте внимательно. Вышеприведенное математическое предложение говорит, что одно равно другому. Если две вещи действительно *равны* (одинаковы), мы можем изменять обе одинаковым способом, и они (хотя и менялись по отдельности) *после таких преобразований по-прежнему будут равны*. Два ящика с одинаковым, хотя и неизвестным содержимым будут по-прежнему иметь одинаковое наполнение, если мы произведем с каждым из них одно и то же действие. Это верно независимо от действия (например, «вынуть все камешки», или «добавить семь шариков», или «сосчитать количество шляп в каждом и удвоить его»), пока мы соглашаемся, что все они одинаковы. Вот почему мы можем сказать (на стандартном жаргоне): «Вычтите слагаемое $2ab$ из обеих частей вышеприведенного уравнения». Убедитесь, что вы поняли это. Это не свойство математики или уравнений и не какой-то загадочный «закон алгебры». Это простой факт о нашем обиходном представлении о двух одинаковых вещах: одинаковые изменения одинаковых объектов должны давать одинаковые результаты*. Если это не так, мы не можем использовать термин «одинаковый». Итак, сделав указанное изменение, мы приходим к предложению:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Это позволяет нам говорить о кратчайшем пути в терминах горизонтальных и вертикальных отрезков; назовем это равенство «формулой кратчайшего пути». Учебники обычно именуют его теоремой Пифагора, что звучит как название волшебного меча или болезни, которую вы подхватываете, выпив некипяченой воды.

---

* Понимание этого простого факта и его следствий позволит нам пропустить значительную часть типичного вводного курса алгебры.

Фикция абсолютного времени

Такие события, как… коперниканская революция… оказались возможными лишь потому, что некоторые мыслители либо сознательно решили разорвать путы «очевидных» методологических правил, либо непроизвольно нарушали их.

Пол Фейерабенд, «Против метода»

Всего несколько выверенных рассуждений могут изменить способ нашего восприятия мира.

Стивен Ландсбург, «Экономист на диване»*

Запаситесь попкорном, дорогой Читатель, и приготовьтесь: сейчас вы увидите одно из самых красивых рассуждений в науке. Такой вывод нелегко принять человеческим мозгом, поэтому вы не сможете понять его внутренне. Никто не может. Но даже та простая математика, которую мы уже изучили, предлагает способ обмануть некоторые внутренние ограничения нашего мозга и выйти за их рамки. Этот раздел мы пройдем быстрее, чем раньше, но не беспокойтесь. Вывод ниже логически независим от оставшейся части книги, и даже если вы не поняли ничего из нижеследующего, вы не отстанете, когда мы начнем изобретать анализ в главе 2. Поэтому наслаждайтесь. Вам понадобится три вещи, чтобы понимать то, что мы будем делать.

1. (Пройденное вами расстояние) = (Скорость, с которой вы движетесь) · (Время движения), если ваша скорость не меняется в течение всего пути. Все мы знаем это интуитивно, но можем легко позабыть, когда это выражено в абстрактной форме. Просто скажем: а) если вы двигаетесь 3 часа со скоростью 50 км/ч, то вы проедете 150 км; б) не важно, какие именно числа мы использовали в пункте а). Напишем, что $d = st$ обозначает «(расстояние) равно (скорости), умноженной на (время)».

* Издана на русском языке: Ландсбург С. Экономист на диване. Экономическая наука и повседневная жизнь. М.: Издательство Института Гайдара, 2012. *Прим. ред.*

2. Формула для кратчайшего пути, которую мы изобрели выше (теорема Пифагора).

3. Странный факт о свете.

Странный факт о свете — не математический, а физический, и он настолько абсурден, что не удивляйтесь, если не понимаете его. Его абсурдность лучше всего выражается тем, насколько он отличается от всего, что все мы знаем. Мы знаем вот что: если вы бросите теннисный мяч со скоростью 100 км/ч, а потом немедленно (с помощью каких-то сверхспособностей) помчитесь за ним со скоростью 99 км/ч, то все будет выглядеть так, будто мяч удаляется от вас со скоростью 1 км/ч (по крайней мере, пока не упадет). Тут нет ничего загадочного.

А вот кажущийся невозможным факт о свете: если вы «бросите» его (например, выпустите несколько световых частиц-фотонов из фонарика, стоя неподвижно), а потом тут же помчитесь за ними со скоростью 99 процентов световой, то ситуация *не* будет выглядеть так, что свет удаляется от вас со скоростью один процент световой! Он будет удаляться от вас со световой скоростью — той же, с которой убегал бы, если бы вы не стали догонять его.

Если это кажется невозможным, прекрасно! Значит, вы внимательны. Вместо того чтобы пытаться понять это, думая, как такое вообще может быть верно, попробуем сыграть в игру, аналогичную той, в которую играл Эйнштейн в 1905 году. Мы скажем: «Хорошо, это выглядит невозможным, но есть доказательства, что это верно, почему бы нам не спросить себя: *если это истина, то что еще должно быть истинным?*».

Для начала вообразим странное устройство, которое я называю световыми часами. Чтобы сконструировать его, вообразите, что вы держите два зеркала на небольшом расстоянии друг от друга. Поскольку свет отражается от них, воображаемое устройство держит его в ловушке: он носится между зеркалами туда и сюда. Как мы знаем, можно измерять время в секундах, часах, днях или как нам захочется, поэтому выберем такую единицу времени: время, которое нужно свету, чтобы добраться от одного зеркала до другого. Мы можем придумать для нее название, например «шмекунда» или еще что-нибудь, но нам это не нужно.

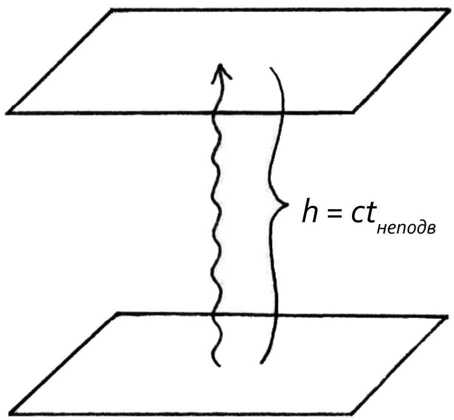


Рис. 1.12. Наши воображаемые световые часы состоят из двух зеркал, одно из которых находится на высоте *h* относительно другого, и частицы света, которая отражается между ними

Введем некоторые обозначения. По историческим причинам для скорости света обычно используется буква *c*. Собственно, это первая буква латинского слова, означающего «быстрота» (celeritas), и скорость света, без преувеличения, максимально достижимая в нашей Вселенной. Если оставить в стороне латынь, такое обозначение имеет смысл.

Итак, пусть *c* — скорость света. Обозначим буквой *h* расстояние по высоте между зеркалами и будем использовать $t_{неподв}$ для времени, которое нужно свету, чтобы добраться от одного зеркала к другому (скоро поймете, почему $t_{неподв}$, а не просто *t*). Я изобразил наши световые часы на рис. 1.12.

В начале раздела мы убедились, что (пройденное вами расстояние) = (скорость, с которой вы двигаетесь) · (время движения), если скорость не меняется. Поэтому с помощью введенных нами обозначений мы можем написать $h = ct_{неподв}$ или сказать то же иначе:

$$t_{неподв.} = \frac{h}{c}. \tag{1.10}$$

Теперь представим, что на часы смотрят два человека. Один из них находится в ракете, которая движется горизонтально, и держит эти часы в руках. Другой на Земле и смотрит на ракету и часы, пролетающие с какой-то скоростью, которую обозначим *s*. Это показано на рис. 1.13.

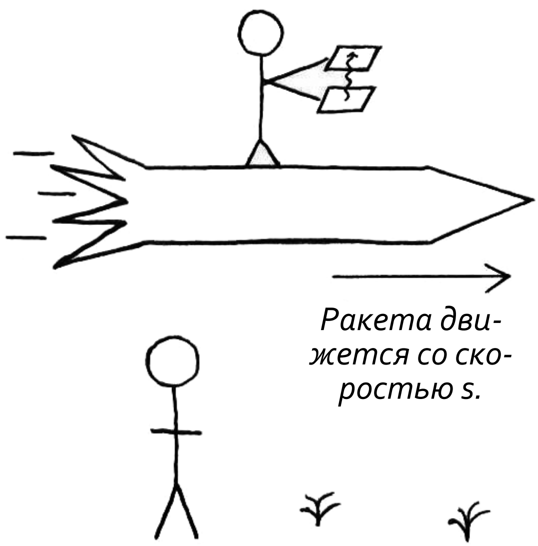


Рис. 1.13. Наши световые часы на ракете, которая движется со скоростью *s* мимо наблюдателя, стоящего на Земле

Итак, рассуждение выше, $h = ct_{\text{неподв}}$, должно описывать то, что видит человек в ракете. Возможно, вас смутит, что мы используем слово «неподвижное», хотя человек в ракете «движется». Но дело в том, что он не движется *относительно световых часов*: раз он их держит, то они «неподвижны» относительно его.

Как мы обсудим ниже, «движется» по сути не означает ничего, если не уточнить «движется относительно того-то». Так, а что сейчас увидит наблюдатель на Земле? Для него свет, пойманный в часах, будет по-прежнему двигаться вверх и вниз. Но часы движутся еще и по горизонтали, и ему покажется, что частица света будет отражаться по диагонали, вроде зуба пилы, как показано на рис. 1.14.

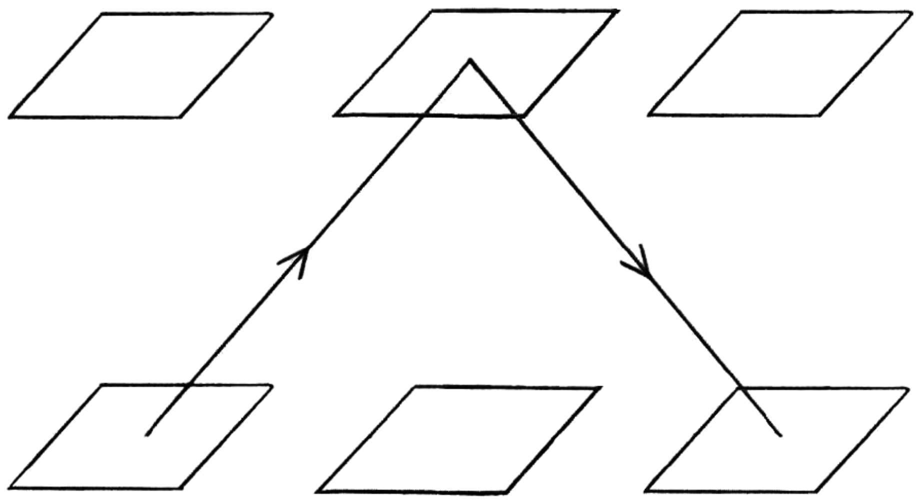


Рис. 1.14. Три моментальных снимка световых часов, показывающие, как наблюдатель на Земле видит движения света вверх и вниз. С его точки зрения свет идет по диагонали, поскольку перемещается вверх и вниз между зеркалами, когда сами они движутся мимо него слева направо. Пока человек видит пролетающую мимо ракету, частицы света рисуют что-то вроде зуба пилы

Вспомним, что в рассуждении выше (когда мы пришли к выводу $h = ct_{\text{неподв}}$) мы говорили о времени, которое нужно свету, чтобы пройти от одного зеркала к другому. Сделаем это снова, но теперь с точки зрения человека на Земле. Мы можем использовать сокращение $t_{\text{движ}}$ для времени, которое нужно свету, чтобы пройти между зеркалами, как это видит наблюдатель на Земле. Нижний индекс напоминает нам, что этот парень видит перемещающиеся световые часы. Возможно, вас удивит, зачем давать два разных названия одному промежутку времени. В конце концов, очевидно, что это одно и то же. Но не спешите! Мы уже видели, что свет ведет себя очень странно, и Эйнштейн всерьез рассматривал возможность, что эти два промежутка времени неодинаковы. Так что дадим им разные названия на всякий случай. Если они окажутся одинаковыми, мы обнаружим это позже. Если нет — мы тоже это выясним.

Теперь, сосредоточившись на пути света с рис. 1.14, мы можем определить расстояние, которое проходит свет за одно «тикание часов» с точки зрения наблюдателя на Земле. Это показано на рис. 1.15. Вертикальное расстояние между зеркалами по-прежнему составляет h, а расстояние, которое свет проходит по горизонтали, — $st_{\text{движ}}$, поскольку ракета движется со скоростью s и мы считаем, что это происходит за время $t_{\text{движ}}$.

Здесь мы используем странный факт о свете: как бы быстро вы ни перемещались, кажется, что он двигается с одной и той же скоростью. Поэтому оба наших персонажа увидят, что свет движется с одной и той же скоростью c. Но человек на Земле наблюдает, как свет перемещается по диагонали в течение времени $t_{\text{движ}}$ и проходит расстояние, равное произведению скорости на время, то есть $ct_{\text{движ}}$. Это странно. Например, если бы свет был обычным мячом, который прыгал туда и сюда между зеркалами, его диагональная скорость, видимая с Земли, была бы *больше*, чем вертикальная с точки зрения парня с ракеты. Так мы «рассказали всю математику» факта о свете, который сочли странным. Сейчас мы можем увидеть, что еще в результате должно оказаться истинным.

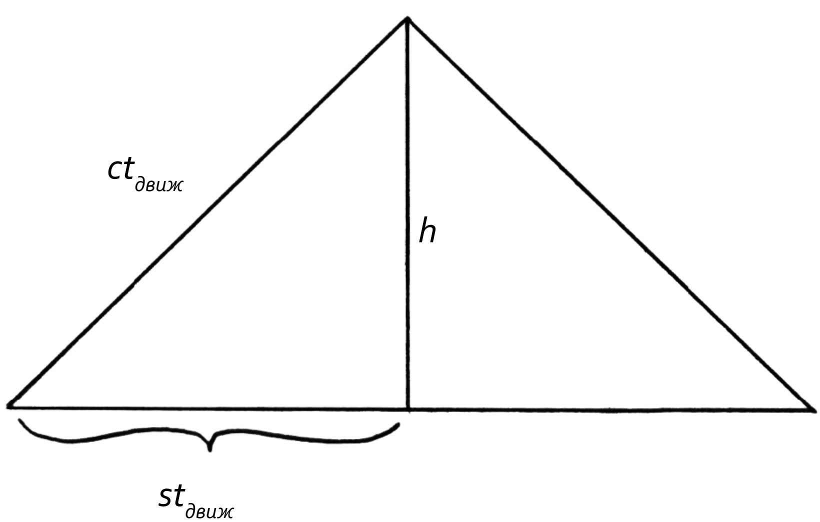


Рис. 1.15. Изображаем все расстояния. Подумаем, какое время нужно свету, чтобы добраться от низа до верха, с точки зрения наблюдателя на Земле. Расстояние между зеркалами по вертикали по-прежнему равно h. Пройденное расстояние по горизонтали — $st_{\text{движ}}$, а по диагонали — $ct_{\text{движ}}$ благодаря вышеупомянутому странному свойству света

Теперь мы используем формулу для кратчайшего пути. Поскольку «вертикаль» и «горизонталь» перпендикулярны друг другу, изображение на рис. 1.15 подскажет:

$$h^2 + (st_{\text{движ}})^2 = (ct_{\text{движ}})^2.$$

Мы хотим сравнить время $t_{\text{неподв}}$ и $t_{\text{движ}}$, и у нас уже есть выражение для $t_{\text{неподв}}$, так что найдем $t_{\text{движ}}$ из предыдущего уравнения. Тогда, возможно, нам удастся увидеть, одинаковые ли это промежутки времени. Чтобы найти $t_{\text{движ}}$, перенесем все, что включает его, в одну часть уравнения и получим:

$$h^2 = (ct_{\text{движ}})^2 - (st_{\text{движ}})^2.$$

Однако порядок умножения не важен, то есть $(ab)^2 \equiv abab = aabb \equiv a^2b^2$ для любых a и b. Перепишем предыдущее уравнение так:

$$h^2 = c^2t^2_{\text{движ}} - s^2t^2_{\text{движ}}.$$

Поскольку обе части выражения справа содержат $t_{\text{движ}}$, мы можем преобразовать это так:

$$h^2 = (c^2 - s^2)\ (t_{\text{движ}})^2.$$

Иначе говоря,

$$\frac{h^2}{\left(c^2 - s^2\right)} = \left(t_{\text{движ}}\right)^2. \qquad (1.11)$$

Мы установили, что $t_{\text{неподв}} = h/c$, а в левой части предыдущего уравнения *почти* есть нечто, выглядящее как h/c. Проблема в том, что есть и вредное $-s^2$. Если бы его не было, то слева было бы $\frac{h^2}{c^2}$, то есть $t^2_{\text{неподв}}$, а это значит, что оба промежутка времени были бы равны. Но есть s^2. Поэтому выполним ловкий математический фокус: солжем, а потом сделаем поправку на ложь. Идея такова. Мы хотим сравнить промежутки времени $t_{\text{неподв}}$ и $t_{\text{движ}}$, поскольку убеждены, что они должны быть одинаковыми. Иначе времени в обиходном смысле не существует — нервирующая мысль! Мы могли бы сравнить эти два промежутка, если бы там не было $-s^2$. Мы не можем убрать его, потому что это будет ложь, и тогда наш вывод тоже неверен. Но мы можем солгать, а затем сделать поправку, и тогда у нас будет правильный ответ. Так и поступим. Мы хотим переписать уравнение 1.11, чтобы оно выглядело так:

$$\frac{h^2}{\left(c^2 - s^2\right)} = \frac{h^2}{c^2\left(\clubsuit - \spadesuit\right)} = \left(t_{движ}\right)^2.$$

Сейчас мы не в курсе, что такое ♣ и ♠. Наша задача — выяснить, чем они должны быть, чтобы сделать предложение истинным. Зачем? Ну, если нам удастся придумать какие-то значения для ♣ и ♠, которые сделают предложение истинным, то мы сможем заменить выражение $\frac{h^2}{c^2}$ в предыдущем уравнении выражением $t^2_{неподв}$, используя уравнение 1.10, и сравнить два промежутка времени, чтобы увидеть, как на самом деле работает время. Наша цель — сделать истинным такое предложение:

$$c^2(\clubsuit - \spadesuit) = c^2 - s^2.$$

Теперь, когда мы поставили задачу таким образом, все уже не так сложно. Мы хотим, чтобы символ ♣ превратился в c^2 при умножении на c^2, и мы можем считать, что ♣ равен 1. Мы хотим, чтобы символ ♠ превратился в s^2 при умножении на c^2, и мы можем считать, что ♣ равен s^2/c^2, чтобы c^2 внизу уничтожило c^2 вверху.

Большинство математических книжек обходятся без трюков с ♣ и ♠, а вместо этого пишут: вынесем за скобки общий множитель c^2. Мы тоже будем так делать, когда освоимся с этой идеей. Но говорить, что на этой стадии нужно делать что-то под названием «вынесение общего множителя», означало бы, что нам надо тратить время на изучение этого. Мы не будем. Результат процесса можно назвать «вынесением общего множителя», но это плохое описание процесса мышления, выбранного нами. На деле произошло следующее: мы *хотели*, чтобы нечто было истинно (а именно чтобы внизу было c^2), поэтому *солгали*, чтобы это было истинно (просто добавили c^2 там, где хотели), затем *сделали поправку на ложь*, чтобы по-прежнему получить верный ответ.

Еще важнее то, что фраза «вынести общий множитель c^2» звучит так, будто в скобках он уже есть. Его там нет! Если мы игнорируем понятие о «вынесении общего множителя» и рассуждаем с точки зрения лжи и поправки, то очевидно, что мы можем вынуть что угодно из чего угодно; мы можем вынуть c из $(a + b)$, хотя в этом выражении вообще нет c. Как? Ровно так же, как и в случае с ♣ и ♠ выше. Если вы хотите, чтобы c оказалось снаружи $(a + b)$, просто следуйте той же логике, и вы получите в итоге $c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$. Что ж, извините за поучение, но это была не просто смена темы разговора. Этот материал крайне важен, и я не мог найти лучшего времени, чтобы упомянуть его. В любом случае мы выяснили, что

$$\frac{h^2}{c^2\left(1 - \frac{s^2}{c^2}\right)} = \left(t_{движ}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень* из обеих частей и используя тот факт, что $t_{неподв} = \frac{h}{c}$, мы получаем:

$$t_{движ} = \frac{t_{неподвиж}}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}}. \qquad (1.12)$$

Уравнение 1.12 выглядит сложновато, но проигнорируем сложность и посмотрим на самую важную его часть: если s не равна 0, промежутки времени $t_{\text{движ}}$ и $t_{\text{неподв}}$ не одинаковы! Получается, всякий раз, когда два объекта движутся с разными скоростями, их световые часы рассинхронизируются и начинают «тикать» на разных скоростях. Мы можем переписать уравнение 1.12, собрав все объекты, касающиеся времени, в одной его части (поделив обе части на $t_{\text{неподв}}$). Единственная причина, по которой у нас может возникнуть желание сделать это, состоит в том, что правая часть

* Мы еще не говорили подробно о квадратных корнях, хотя позже увидим, что они возникают как часть странного процесса, благодаря которому ранее бессодержательное сокращение получает новую жизнь и становится хорошей идеей. Если вы не поняли шага, когда мы извлекли квадратный корень из обеих частей, не беспокойтесь. Скоро мы поговорим об этом. А сейчас просто используем символ $\sqrt{\textit{нечто}}$ для обозначения (положительного) числа, которое превращается в *нечто*, когда вы умножаете его на себя. Иными словами, $\sqrt{\textit{нечто}}$ обозначает любое число (?), которое делает истинным предложение $(?)^2 = \textit{нечто}$. От вас не ожидают, что вы умеете вычислять квадратные корни из каких-то конкретных чисел. Вы получили общее представление, и этого пока достаточно.

зависит только от скорости *s*. Конечно, она также зависит и от скорости света *c*, но это просто число, которое никогда не меняется (тот самый исходный странный факт о свете). Однако мы можем менять скорость *s*. Это позволяет нам чуть лучше представлять наглядно это странное явление замедления времени (рис. 1.16). На нем показано изменение величины $t_{\text{движ}}$ / $t_{\text{неподв}}$ в зависимости от изменения скорости ракеты *s*. Мы можем представлять эту величину так: во сколько раз $t_{\text{движ}}$ больше, чем $t_{\text{неподв}}$. Чем больше эта величина, тем сильнее нарушается наше повседневное представление о времени.

Оказывается, уравнение 1.12 — не просто факт о световых часах или даже часах в целом. Это факт о фундаментальной структуре пространства и времени, и он был проверен много раз с тех пор, как Эйнштейн открыл его в 1905 году*. Почему мы не замечаем его в обычной жизни? Если вы и я гуляем вместе, а потом я поеду в магазин и вернусь обратно, мы не подумаем, что на самом деле прожили разное количество времени. Однако, как показывает рис. 1.16, промежутки времени, которые мы проживаем, равны, когда мы движемся с одной скоростью друг относительно друга, и почти равны, когда мы движемся со скоростями, которые малы по сравнению со световой.

Даже эта крошечная количественная разница, какой бы незначимой она ни была для повседневной жизни, требует больших качественных изменений в нашем представлении о Вселенной. Привычный нам мир, в котором есть единственное абсолютное представление о времени, просто полезное приближение: ложь, которая полезна, пока мы не движемся слишком быстро относительно окружающих объектов. Но, будучи полезным как обычное представление о времени, это на редкость плохое описание фундаментальной природы реальности.

Еще хуже другое: выясняется, что у нас нет оправданий использованию индексов $_{\text{движ}}$ и $_{\text{неподв}}$ в выражениях $t_{\text{движ}}$ и $t_{\text{неподв}}$. Более тщательное рассмотрение проблемы показывает, что, пока два человека двигаются с некой определенной скоростью и в каком-то направлении (ни один

* Джозеф Лармор и Хендрик Лоренц указали на это явление несколькими годами раньше Эйнштейна. *Прим. перев.*

не ускоряется, не замедляется и не меняет направления), у нас нет оснований сказать, что кто-то из них «неподвижен».

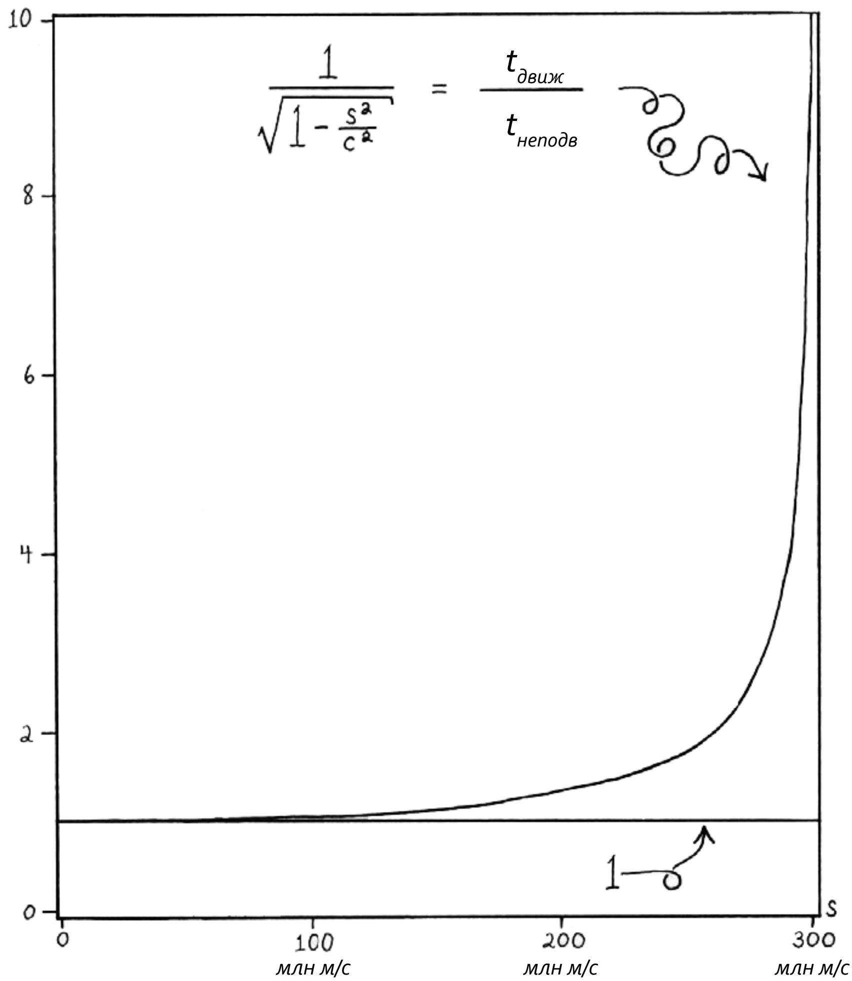


Рис. 1.16. Наглядное представление замедления времени. По горизонтальной оси — скорость, по вертикальной — величина $t_{движ} / t_{неподв}$, которая говорит нам, во сколько раз $t_{движ}$ больше, чем $t_{неподв}$ (насколько сильно нарушается наше повседневное представление о времени). В обычной жизни мы воспринимаем время как константу, то есть $t_{движ} = t_{неподв}$, или, что то же самое, $t_{движ} / t_{неподв} = 1$. Это горизонтальная линия на рисунке. Кривая — реальность: когда вы движетесь относительно кого-то, то время течет медленнее. Если скорости малы по сравнению со световой, наше повседневное представление о времени практически соответствует истине. Но оно все сильнее нарушается, когда скорость приближается к световой (примерно 300 млн м/с)

Мы привыкли использовать слова «движущийся» и «неподвижный», поскольку живем на гигантском камне, окутанном воздухом, и в любое время, когда мы на поверхности Земли или рядом с ней (то есть практически всегда), есть система координат, которая *выглядит* «неподвижной»: система, недвижимая относительно Земли. Но она не «неподвижна» в универсальном смысле. Для ясности рассмотрим двух людей в открытом космосе. Каждый из них может считать, что сам он движется, а другой на самом деле неподвижен. Или он может считать, что сам он неподвижен, а другой движется. Или он может считать, что оба двигаются. Все эти мысли будут одинаково истинны и одинаково ложны.

Чем больше мы изучаем рассуждения такого рода, тем проще нам понять, как бессмысленно «определять» свою фактическую скорость. Имеет смысл определять ее относительно произвольного другого объекта, который мы считаем «неподвижным». Поэтому вывод из нашего рассуждения намного удивительнее, чем может показаться на первый взгляд. Ведь в нашем примере со световыми часами ситуация вовсе не такая, что человек А видит, что у человека В время замедляется, а человек В видит, что у человека А оно ускоряется, и они могут прийти к соглашению. Действительность намного причудливее. Каждый видит, что у другого время замедляется, и — пока они не меняли скорости и направления — оба правы! Вас интересует, кто из близнецов будет старше, если один из них покинет Землю на ракете, летящей с околосветовой скоростью, а второй останется дома, когда они в итоге встретятся и сравнят показания часов? Отлично! Исследуйте парадокс близнецов. Вселенная безумна. Давай еще немного поучимся.

ГЛАВА 2
БЕСКОНЕЧНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СТЕКЛА С БЕСКОНЕЧНЫМ УВЕЛИЧЕНИЕМ

Анализ — самое мощное оружие мысли, когда-либо созданное человеческим разумом.

Уильям Смит, «Анализ бесконечно малых»*

2.1. Превращение трудного в простое

2.1.1. О, вот где я!

Сначала шутка о математиках. Ее придумал не я, но автора не знаю. На старт, внимание, шутка!

В психологическом эксперименте математика помещают в комнату, где есть раковина с краном, чайник и плита. Его просят вскипятить воду. Он берет чайник, наполняет водой из-под крана, ставит на плиту и включает ее. Затем его ведут в комнату, в которой есть кран с водой, *наполненный* чайник и плита. Его снова просят вскипятить чайник. Он берет чайник, выливает воду в раковину и говорит: «Я свел задачу к уже решенной».

Столь же дурацкая, как и поведение математика, эта шутка затрагивает важный вопрос. Она показывает, что есть два способа решать любые задачи, — не только математические, но и вообще любые. Вот эти два пути.

1. Решить задачу с нуля.

2. Решить часть задачи, а потом заметить, что оставшаяся похожа на то, что вы умеете решать. И затем сделать это.

Повторю: задачи трудны только тогда, когда мы не знаем, что делать. Как только мы это узнаём, мы можем перейти на автопилот и расслабиться,

* Smith W. B. Infinitesimal Analysis. Macmillan London, 1898.

пока все не будет готово. Например, каждый из нас когда-нибудь терялся в незнакомом месте и пытался добраться домой. Как? Обычно вы не оказываетесь тут же в собственном дворе и не говорите: «О, я уже тут». Обычно вы оказываетесь в каком-то другом знакомом месте. Вы говорите: «О! Это та больница с витражными стеклами! Я знаю, как отсюда добраться до бабушкиного дома». Оказавшись в знакомом месте, вы сводите проблему к задаче, которую уже решили в прошлом, остальное просто. Это как раз математика! Один из лучших способов глубоко понять это — изобрести анализ. Давайте этим займемся.

2.2. Изобретение анализа

2.2.1. Проблема: кривые вещи непонятны

В главе 1 мы размяли наши изобретательские мышцы, придумав понятие площади (для прямоугольников) и крутизны (для прямых). Очевидно, что прямые линии — прямые, а прямоугольники построены с их использованием. На самом деле ничто из этого не кривое. Но даже без привлечения кривизны мы выяснили, что можем говорить о некоторых глубоких и интересных темах. Например, когда мы изобрели понятие площади, мы видели, что нетрудно уверенно говорить об n-мерных объектах или убедиться, что разумно определить «n-объем» «n-мерного куба» как l^n, где l — длина стороны (хотя мы не можем его представить наглядно более чем в трех измерениях).

Как насчет кривых объектов, например окружностей? Окружность *гораздо* проще нарисовать, чем n-мерный куб! Но кто из нас может посмотреть на круг и интуитивно «увидеть», какова разумная формула для его площади? *Никто*. Вероятно, вам рассказывали, чему она равна. Когда-то кто-то говорил вам, что площадь круга радиуса r равна πr^2, где π — некое диковинное число чуть больше 3. Забудьте. Мы не изобретали этот факт, и интуитивно он ни для кого не очевиден. В большинстве популярных книг упоминается, что в Библии π равно 3, и это показывает, что даже боги имеют проблемы с кривыми*. Подойдем к теме с другой стороны, придумав анализ до «предварительных областей»: большинство из них включают криволинейные объекты, а с ними почти невозможно иметь дело до того, как изобретен анализ (особенно до того, как мы научились что-то изобретать). Так что, несмотря на все сделанное, у нас еще нет ни малейшей подсказки, как обращаться с кривыми вещами на их условиях. Разберемся с этим раз и навсегда.

2.2.2. Смущающая истина

Вот главное озарение анализа. Даже неловко, настолько оно простое.

Весь анализ
Если мы увеличиваем нечто кривое, оно начинает выглядеть все более прямым.

Более того, если мы увеличим кривую «бесконечно» (что бы это ни значило), то она будет выглядеть *в точности* прямой. Но мы же знаем, как обращаться с прямыми! По крайней мере немного. Если мы сможем научиться придавать смысл этой идее — изобрести «лупу с бесконечным увеличением», — то мы будем способны превратить любую задачу, в которой есть нечто кривое (сложно) в задачу, где есть нечто прямое (просто). Если бы мы смогли так сделать, то, возможно, нам бы удалось вернуться обратно и изобрести заново для себя все те необъясненные факты, которым нас учили в старших классах. Тогда мы можем забыть их навсегда и открывать заново каждый раз, когда они нам понадобятся.

Дорогой Читатель, остановись и переведи дух.
С этого места математика начинает становиться интересной.

* «И сделал литое из меди море, — от края его до края его десять локтей, — совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом» (3 Цар., 7:23).

2.2.3. Лупа с бесконечным увеличением

Суть математики — не делать простое сложным, а делать сложное простым.

Стэн Гуддер, американский математик

Когда мы изобретали понятие крутизны для линий, нам нужны были две точки (любые), чтобы мы могли сравнить их вертикальное и горизонтальное положение. Однако для кривых всё иначе: брать две случайные точки нет смысла, ведь если крутизна постоянно меняется (что типично для кривых), то мы будем получать разные ответы в зависимости от нашего выбора. И тогда определение будет уродливым. Более того, похоже, наш мозг как-то понимает, что такое крутизна в одной конкретной точке. Если мы забудем о математике и посмотрим на какую-нибудь кривую (например, эту волнистую загогулину ∿∿∿∿∿), то будет ясно, что одни ее участки круче других, даже если мы не умеем использовать числа, чтобы выразить крутизну в разных местах. Есть ли способ придать смысл идее крутизны в *одной точке* какой-то кривой? Ну, если в нашем распоряжении лупа с бесконечным увеличением, мы можем свести эту сложную задачу к простой, увеличивая кривые до тех пор, пока они не станут выглядеть прямыми.

Наша задача: если у нас есть нечто кривое (например, график какой-нибудь машины M, который не является прямой), есть ли способ определить, что мы подразумеваем под крутизной этой кривой в конкретной точке x?

Пусть кто-то дал нам машину M и число x и нам нужно придать смысл понятию «крутизны» в точке x. Посмотрим на график M около этой точки. Если мы представим наглядно x как некоторое число на горизонтальной оси, а $M(x)$ — как число на вертикальной оси, точка с горизонтальной координатой x и вертикальной $M(x)$ будет лежать на графике машины M. Мы можем назвать эту точку $(x, M(x))$ или как нам угодно. А теперь пристально взглянем на эту точку. Если бы у нас была лупа с бесконечным увеличением, можно было бы поднести ее к этой части графика и бесконечно увеличить ее. Тогда мы бы увидели прямую. Поскольку мы уже изобрели понятие крутизны для прямых, мы могли бы использовать это готовое понятие для двух точек, которые бесконечно близки друг к другу. Что значит «две точки бесконечно близки друг к другу»? Не знаю! Давайте решать.

Давайте называть *чуточкой* бесконечно малое число. Оно не равно 0, но меньше, чем любое положительное число. Если вас тревожит такая идея, см. примечание*. Пора ввести сокращения. Пусть точка, в которой мы проводим увеличение, имеет горизонтальную координату x и вертикальную $M(x)$, а бесконечно к ней близкая — горизонтальную координату x + *чуточка* и вертикальную $M(x$ + *чуточка*$)$. Иными словами:

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x \equiv \frac{\text{Приращение на чуточку по вертикали}}{\text{Приращение на чуточку по горизонтали}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\text{Расстояние по вертикали}}{\text{Расстояние по горизонтали}} \equiv \frac{M(x + \textit{чуточка}) - M(x)}{(x + \textit{чуточка}) - x}.$$

Всё это разные сокращения для одной идеи, но важнее всего то, что справа. Справа внизу в этой длинной цепочке уравнений написано $(x$ + *чуточка*$) - x$. Два x сокращаются, можно переписать выражение так:

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x \equiv \frac{M(x + \textit{чуточка}) - M(x)}{\textit{чуточка}}.$$

Эта идея проиллюстрирована на рис. 2.1.

* Вы правильно беспокоитесь! Непонятно, имеет ли какой-нибудь смысл эта идея с бесконечно малыми числами. Но мы можем вообразить, что *чуточка* — это 0,00(*и т. д.*)001, где между десятичной запятой и 1 может быть 100, или 1000, или 10 000 нулей. Тогда вместо лупы с бесконечным увеличением мы используем стекло с очень большим увеличением. После этого кривая не будет выглядеть прямой, но станет настолько близка к ней, что мы сможем действовать, будто она прямая, а наши ответы будут такими точными, что мы не заметим разницы. Так можно создать весь анализ и быть уверенными, что у нас всегда есть более безопасный, но менее изящный метод, к которому можно прибегнуть, если подход «лупы с бесконечным увеличением» применить сложно. Мы можем продвигаться вперед нашим более рискованным способом, всегда помня, что у нас есть страховочная сетка.

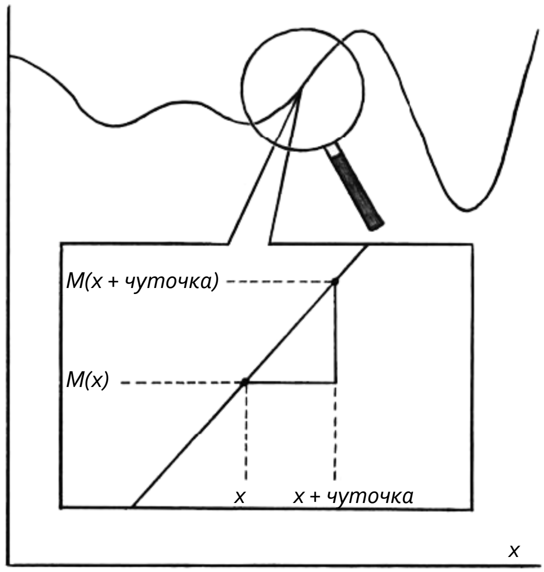


Рис. 2.1. Выберите любую точку на кривой и бесконечно увеличьте ее окрестность. Тогда вы получите линию, близкую к прямой. Например, мы можем определить крутизну (после увеличения), глядя на отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали для двух точек, бесконечно близких друг к другу

2.2.4. Имеет ли смысл наша идея? Проверим на нескольких простых примерах

Все это смотрится абстрактно, и мы только что по ходу дела изготовили эту штуку, так что проведем проверку в реальных условиях, чтобы убедиться, что мы не сошли с рельсов. Каждый раз, когда мы изобретаем новое понятие, полезно испытать его на простом примере, где мы представляем, чего можем ожидать.

Идея бесконечно малых чисел позволяет говорить о крутизне кривых, но мы не уверены, что это имеет смысл. Применим ее к уже знакомым нам прямым. Если не получится, либо наше новое понятие неправильное, либо мы изобрели не то, что нам хотелось. Узнаем, получится ли то, что мы ожидаем.

Проверка на простейших машинах

Сначала проверим идею на простой машине: $M(x) \equiv 7$. Она выдает 7 независимо от числа, которое вы в нее кладете. Если мы нарисуем график для такой машины, это будет просто горизонтальная линия с крутизной 0. Поскольку мы знаем, что должно быть, вычислим крутизну с помощью бесконечно малых чисел и посмотрим, выйдет ли 0. Как и ранее, будем использовать обозначение *чуточка* для действительно маленького числа — как бесконечно малого, так и просто «такого маленького, как нам захочется», в зависимости от наших предпочтений. Поскольку M всегда выдает 7, мы имеем:

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x \equiv \frac{M(x + \textit{чуточка}) - M(x)}{\textit{чуточка}} =$$
$$= \frac{7-7}{\textit{чуточка}} \equiv \frac{0}{\textit{чуточка}} \equiv 0\,\frac{1}{\textit{чуточка}} = 0.$$

В этом выводе мы не использовали какие-то свойства числа 7, поэтому рассуждение должно работать для любой машины, которая выдает одно и то же число независимо от того, что в нее кладут. Получается, что для всех машин вида $M(x) \equiv \#$ идея с бесконечно малыми числами дает как раз то, что мы ожидали. Идем дальше!

Проверка на прямых

Проверим нашу идею еще на одной простой категории машин: прямых. В главе 1 мы определили, что прямые описываются машинами вида $M(x) \equiv ax + b$. Посмотрим, даст ли вычисление крутизны с помощью бесконечно малых чисел тот ответ, который мы ожидаем (а именно a).

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x \equiv \frac{M(x+\textit{чуточка}) - M(x)}{\textit{чуточка}} =$$
$$= \frac{[a\ (x\ \cdot\ \textit{чуточка}) + b] - [ax+b]}{\textit{чуточка}} \equiv \frac{a \cdot (\textit{чуточка})}{\textit{чуточка}} = a.$$

Прекрасно! Наша странная идея нас пока не подводит. Узнаем, работает ли она в менее знакомых ситуациях.

Проверка на действительно кривых линиях

Испытаем идею с увеличением на том, что действительно представляет проблему независимо от того, увеличиваем мы или нет: Машине умножения на себя, $M(x) = x^2$ (см. главу 1). Если мы кладем в нее какое-то число, машина умножает его на него же и выдает результат. Посмотрим, что дадут нам эти бесконечно малые числа, когда мы попробуем вычислить крутизну в какой-нибудь точке x, конкретное значение которой мы предпочитаем не знать.

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x \equiv \frac{M(x + \textit{чуточка}) - M(x)}{\textit{чуточка}} =$$
$$= \frac{(x + \textit{чуточка})^2 - x^2}{\textit{чуточка}}.$$

С помощью очевидного закона из главы 1 мы можем развернуть $(x + \textit{чуточка})^2$ в $x^2 + 2x(\textit{чуточка}) + (\textit{чуточка})^2$. Тогда уравнение примет вид:

$$\text{Крутизна } M \text{ в точке } x = \frac{\overbrace{x^2 + 2x(\textit{чуточка}) + (\textit{чуточка})^2 - x^2}^{\text{Эти } x^2 \text{ сокращаются}}}{\textit{чуточка}} =$$
$$= \frac{\overbrace{2x(\textit{чуточка}) + (\textit{чуточка})^2}^{\text{Сокращаются «чуточки» в числителе и знаменателе}}}{\textit{чуточка}} = 2x + \textit{чуточка}.$$

Поскольку «чуточка» — обозначение для чего-то бесконечно малого, мы никогда не сможем указать разницу между ответом, который мы получили, то есть $2x + \textit{чуточка}$, и тем, который бесконечно близок к нему, а именно $2x$. Если мы примем такой необычный способ рассуждения, мы можем написать следующее.

Результат бесконечного увеличения

Если M — Машина умножения на себя, $M(x) = x^2$, то крутизна M в точке x равна $2x$.

2.2.5. Что сейчас произошло? Бесконечно малые против пределов

На данный момент анализ во всем мире преподается как изучение пределов, а не то, что он есть на самом деле: анализ бесконечно малых. Как человек, который потратил бóльшую часть взрослой жизни, зарабатывая преподаванием анализа, могу сказать вам, как утомительно объяснять сложную и бесполезную теорию пределов.

Руди Рюкер, «Бесконечность и разум»*

Иногда полезно знать, насколько велик ваш ноль.

Неизвестный автор

Если идея с бесконечно малыми числами вас немного пугает, вы не одиноки! После того как Исаак Ньютон изобрел анализ, люди больше века ломали голову, пытаясь понять, почему рассуждения вроде вышеописанного дают верные ответы. Ведь они выглядят довольно нелепо. Число *чуточка* либо равно 0, либо не равно! Как мы можем обращаться с ним, будто оно не 0, а через несколько строчек — будто оно 0?

Спустя годы люди изобрели все виды математических вариантов машин Руба Голдберга** — способы формализации анализа, — чтобы придать смысл происходящему. Это хорошо! Это полезно для подтверждения того, что наши идеи имеют смысл и мы должны радоваться им. Но идея бесконечно малых чисел настолько красива, что стыдно прятать ее за всякими хитроумными приспособлениями, особенно потому, что она действительно *работает*! Собственно, физики меньше боятся использовать ее. Они ведут расчеты, как и мы, получают те же ответы, что и матема-

* Rucker R. Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite. Princeton University Press, 2004.

** Машина Руба Голдберга — устройство, которое выполняет некое простое действие (например, перевернуть страницу книги или поднести ложку ко рту) крайне сложным способом, обычно с помощью многоступенчатого механизма с шестеренками, ременными передачами, падающими шариками и т. д. Название дано в честь американского карикатуриста и изобретателя Руба Голдберга. *Прим. перев.*

тики, но зачастую с гораздо меньшими затратами*. В общем, некоторые относятся к идее бесконечно малых чисел серьезно, кто-то пытается обойтись без нее. Второе встречается *намного* чаще, так что я упоминаю сначала первое чисто ради ереси.

Одно из хитроумных приспособлений, которое можно использовать для формализации идеи бесконечно малых чисел, называется «ультрафильтр». Ультрафильтры сложны и никогда не упоминаются во вводных курсах. Мы не будем их обсуждать, но полезно знать, что они существуют: это означает, что есть минимум один точный путь придания смысла анализу, в котором серьезно используется идея бесконечно малых чисел.

Но во всех стандартных вводных курсах есть приспособление, которое называется «предел», и оно намного проще, хотя служит той же цели: позволяет математикам получать все *преимущества* работы с бесконечно малыми числами, не отдавая должного самой их идее.

Вот суть приспособления под названием «предел». Будем думать о числе *чуточка* не как о бесконечно малом, а как о числе, которое мало настолько, насколько нам хочется. Не будем писать конкретное число, например *чуточка* = 0,00001, а станем считать, что значение неизвестно, но для любых значений наши действия одинаковы. Иначе говоря, мы можем считать, что у числа *чуточка* есть прикрепленная ручка; поворачивая ее, мы делаем число сколь угодно малым, пока оно не станет в *точности* равно 0. Все наше обсуждение предполагало, что крутизну M в точке x можно определить, представив ее как абсолютно прямую линию. Сейчас это предположение становится истинным только тогда, когда мы повернули рукоятку *чуточки* до 0 (то есть применили бесконечное увеличение). Вместо того, что мы написали, в стандартном учебнике вы увидите громоздкую формулу. Поглядите немного на эти странные новые символы, а потом я постараюсь объяснить, что это по сути то же самое, что мы уже делали.

* Эта разница становится тем больше, чем дальше мы двигаемся к сложным областям, что мы и увидим позже.

$$M'(x) \equiv \lim_{h\to 0}\left[\frac{M(x+h)-M(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{2xh+h^2}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[2x+h\right] = 2x.$$

Что тут написано? Переведем.

Во-первых, тут используется буква h вместо слова *чуточка*. Я не знаю, почему именно h, но предполагаю, что оно обозначает «горизонтальный» (horizontal), поскольку маленькое изменение x откладывается по горизонтальной оси. Во-вторых, вместо того чтобы писать «крутизна M в точке x», как мы, учебники сокращают это до $M'(x)$. Это удачно и гораздо быстрее писать*. В-третьих, там есть причудливая штука слева от каждого выражения, которая выглядит так: $\lim_{h\to 0}$. Это приспособление, которое позволяет нам не думать о бесконечно малых числах, если мы этого не хотим. Оно произносится «предел при h, стремящемся к 0» и означает что-то вроде такого.

Что означает сокращение $\lim_{h\to 0}[\textit{нечто}]$. Вычислите всё внутри меня (*нечто*), как будто h — обычное число, а не бесконечно малое. Затем, избавившись от всех h в нижней части *нечто* (чтобы нам не надо было бояться деления на 0), вообразите, что вы поворачиваете ручку числа h так, что h становится все меньше и меньше. Например, $3 + h$ будет все ближе и ближе к 3, если вы будете поворачивать ручку h все ближе к 0. Большая мудреная штука вроде $79x^{999} + 200x^2h + h^5$ будет все ближе к $79x^{999}$, когда вы поворачиваете ручку числа h к 0.

Это очень хороший способ сделать то же, что и мы, когда воображали бесконечное увеличение. Но он может сбивать с толку, если вам не объяснять, почему поступают именно так. С одной стороны, многое становится проще, ведь нам не надо беспокоиться о смысле бесконечно малого числа. С другой — такой подход многое усложняет, поскольку ученикам не всегда очевидно, почему им надо изучать все эти странные штуки, именуемые «пределы», особенно когда их преподают *до* того, как мы узнаем о таких идеях, как сведение задач с кривыми к задачам с прямыми и определение

* По сути, это просто черточка в сокращении, которая означает «Увеличим масштаб $M(x)$ и найдем крутизну, как если бы это была прямая линия». $M'(x)$ произносится «M штрих от x».

наклона кривых с помощью увеличения масштаба. Нам рассказывают о поведении этих штучек с пределами до того, как у нас появится основание интересоваться этим, и до того, как нам расскажут изначальные причины изобретения пределов. Неудивительно, что люди считают анализ путаным.

Будет меньше путаницы, если мы поймем, что предел — всего лишь одно из нескольких (возможных!) приспособлений, которые позволяют не беспокоиться о смысле бесконечно малых чисел, *если мы так хотим*. Мы будем иногда использовать пределы, а иногда — бесконечно малые числа, чтобы вы привыкли и к тому и к другому. К счастью, мы всегда получаем одинаковые ответы при использовании обоих методов, так что выбирайте любой.

2.2.6. Список сокращений

В предыдущем разделе мы использовали фразу «крутизна M в точке x» как сокращение для увеличения масштаба кривой и вычисления ее крутизны, как если бы она была прямой. Тут много слов. Взглянем на некоторые обычные способы сократить эту идею. Все они означают одно и то же.

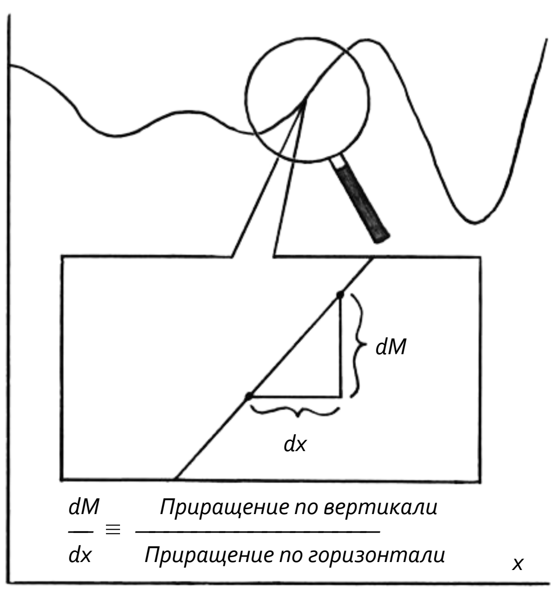


Рис. 2.2. Крутизна («производная») машины M иногда обозначается как $\frac{dM}{dx}$. Причина показана на рисунке

1. Крутизна M в точке x.

2. Производная M в точке x.

Бесспорно, это самое распространенное название. Это существительное, глагол — «дифференцировать», то есть «находить производную».

3. $M'(x)$.

Это обозначение подчеркивает, что мы можем думать о крутизне как самостоятельной машине. $M'(x)$ означает машину, которая работает так: когда мы кладем в нее какое-то число x, она выплевывает крутизну (угловой коэффициент) исходной машины M в точке x.

4. $\frac{dM}{dx}$.

Я жаловался на сокращения, которые обычно используются в учебниках, но это обозначение неплохое, даже если вы привыкли к другому, не столь удачному. Ненадолго переименуем нашу машину в V («вертикаль») и используем H вместо x для объектов, которые она съедает. Будем писать $V(H)$ вместо $M(x)$, но только в нескольких ближайших абзацах. Мы делаем так, потому что хотим изобразить график машины, и ее выход будем рисовать по вертикали, а вход — по горизонтали. В главе 1 мы выбрали h и v для обозначения разницы между двумя точками по горизонтали и вертикали. В стандартных учебниках они обычно именуются ΔH и ΔV, где Δ*нечто* означает «разницу в *нечто* между одним местом и другим». Поэтому, когда машина V оказывается прямой, вы увидите ее крутизну (угловой коэффициент) так:

$$\frac{\Delta V}{\Delta H}.$$

Это «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали», или то, что в главе 1 мы называли $\frac{v}{h}$. Символ Δ (дельта) — греческая буква d (на самом деле она больше похожа на D, но пусть будет так), так что логично использовать ее для «разности» (difference) между двумя вещами или «расстояния» (distance) между двумя точками, что и делается в учебниках: ΔV обозначает расстояние между двумя точками по вертикали, а ΔH — по горизонтали. Соответственно все написанное ниже — разные способы сокращения для крутизны машины V, пока она остается прямой:

$$\text{Крутизна } V \equiv \frac{\text{Приращение по вертикали}}{\text{Приращение по горизонтали}} \equiv \frac{\text{Изменение по } V}{\text{Изменение по } H} \equiv \frac{\Delta V}{\Delta H}.$$

Теперь, поскольку Δ*нечто* означает изменение *нечто* между двумя точками, оно обычно показывает типичное изменение для обычных чисел, а не бесконечно малое для бесконечно малых чисел. Но мы уже начали изобретать анализ и неожиданно обнаруживаем, что неплохо бы различать обычные изменения (когда мы *не производим* увеличения) и бесконечно малые (когда мы *производим* увеличение). Вот причина удобства стандартного обозначения: чтобы уйти от выражения с обычными числами к выражению с бесконечно малыми, нужно перейти от греческого алфавита к латинскому (поменять Δ на d). Если мы используем сокращение d(*нечто*) для обозначения бесконечно малого изменения в *нечто* между двумя бесконечно близкими положениями, мы можем написать уравнения, аналогичные вышеприведенным, но на этот раз они будут относиться к кривым вроде $V(H) = H^2$, а не только к прямым:

$$\text{Крутизна } V \equiv \frac{\text{Крохотное приращение по вертикали}}{\text{Крохотное приращение по горизонтали}} \equiv$$
$$\equiv \frac{\text{Бесконечно малое изменение по } V}{\text{Бесконечно малое изменение по } H} \equiv \frac{dV}{dH}.$$

Вот поэтому вы часто видите производную машины M в виде $\frac{dM}{dx}$. Идея проиллюстрирована на рис. 2.2. Аналогичным образом мы увидим далее, что, когда учебники переходят от буквы Σ (греческий аналог S, который обозначает слово «сумма», sum) к соответствующей латинской букве S (на самом деле пишут $\int$, что похоже на S), они проделывают похожий трюк. В обоих случаях переход от греческих букв к латинским знаменует переход от выражения с обычными числами к выражению с бесконечно малыми. Греческие буквы в математике *вовсе* не всегда имеют такое замечательное толкование. Их используют для разных целей. Но как минимум в двух указанных случаях (в отличие от других, которые мы увидим позже) стандартное обозначение превосходно.

Подводя итог, заметим, что все эти сокращения обозначают одну и ту же идею. Похоже, мы имеем больше, чем нам надо. Но вскоре мы увидим, что переход от одних обозначений к другим дает удивительные возможности заставлять сложное выглядеть просто, и наоборот.

2.3. Понимание увеличительного стекла

Мы постараемся лучше понять, как используется наша лупа с бесконечным увеличением. Хотя мы и изобрели ее сами, не совсем ясно, что мы создали и как оно себя ведет. Даже если мы изобрели идею, у нас еще не было достаточной практики в реальном ее применении для конкретных машин. Ниже мы поэкспериментируем со множеством разных примеров. Нам известны только машины, которые полностью описываются сложением и умножением, и мы будем работать исключительно с ними.

2.3.1. Обратно к Машине умножения на себя

Итак, мы уже проверили нашу идею с бесконечно увеличивающей лупой на машинах вида $M(x) \equiv \#$ и получили $M'(x) = 0$. Мы проверили ее на машинах вида $M(x) \equiv ax + b$ и получили $M'(x) = a$. До этого момента мы только заново установили то, что *могли бы* установить с помощью обычной формулы для углового коэффициента — без бесконечного увеличения.

Потом мы проверили нашу лупу на нашей первой кривой — машине $M(x) \equiv x^2$ — и получили $M'(x) = 2x$. Перед тем как переходить к другим примерам, убедимся, что мы понимаем, о чем это говорит, — рассмотрев ситуацию двумя разными способами.

2.3.2. Обычное толкование: график машины — кривая

Первый способ — обычный: построить график $M(x) \equiv x^2$ и убедиться, что это кривая (рис. 2.3).

Вообразим, что по горизонтальной оси вплотную друг к другу уложено много Машин умножения на себя. Мы подаем в них числа на горизонтальной оси, а то, что они выплевывают, изображаем по вертикальной оси. В машину рядом с числом 3 кладется 3, а выдается $M(x) = 9$, поэтому высота кривой в точке $x = 3$ равна 9. Ровно то же происходит во всех местах графика.

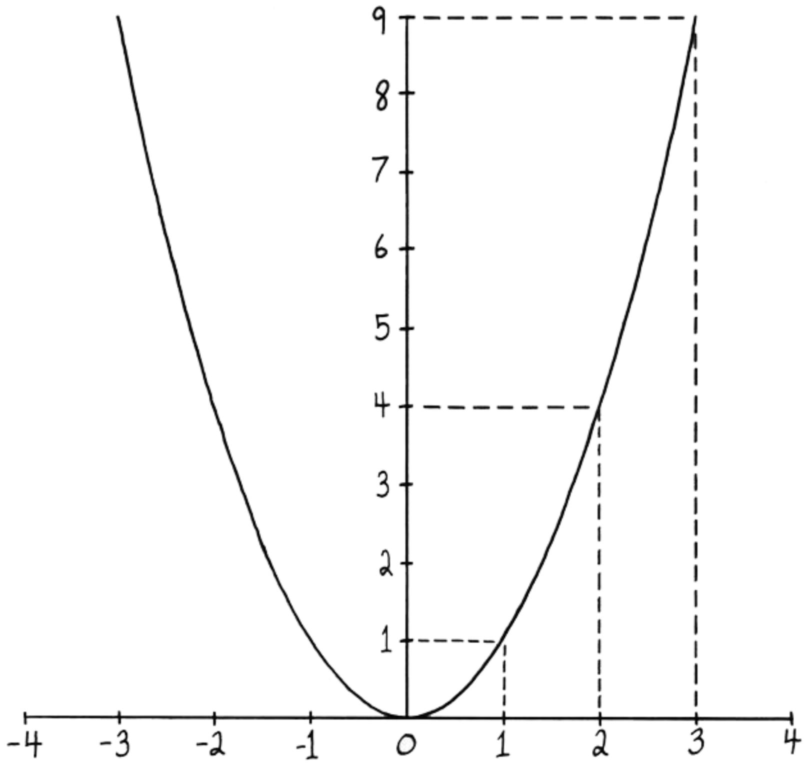


Рис. 2.3. Наглядное изображение Машины умножения на себя $M(x) \equiv x^2$. Числа по горизонтали — то, что мы кладем в машину, а по вертикали (высота) показывают то, что выплюнуто. Поскольку этот график — кривая, он имеет разную крутизну в разных местах, и когда $M(x) \equiv x^2$ сообщает вам высоту в точке x, $M'(x) = 2x$ показывает крутизну в точке x. Посередине (в точке $x = 0$) график становится горизонтальным, его крутизна должна быть равна 0. К счастью, $M'(x)$ сообщает нам именно это, поскольку $M'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

Мы выбирали случайную точку с координатами x по горизонтали и $M(x)$ по вертикали. Затем бесконечно увеличивали кривую в ней и находили ее крутизну, используя старое определение «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали», которое изобрели в главе 1. Когда пыль осела, мы обнаружили, что крутизна в этой точке $M'(x) = 2x$. Поскольку мы не знаем, с каким числом x имеем дело, фактически мы за один раз произвели бесконечно много вычислений. Соответственно, предложение $M'(x) = 2x$ всего лишь несколькими символами умудряется выразить бесконечное число предложений. Посмотрим, что говорят некоторые из них.

Одно сообщает, что $M'(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Это говорит нам, что кривизна кривой при $x = 0$ равна 0. Если мы посмотрим на рис. 2.3, это станет понятнее. Тут график горизонтален, крутизна равна 0. Какие еще предложения скрыты в нашем бесконечном $M'(x) = 2x$? Вот некоторые из них.

1. $M'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Поэтому в точке $x = 1$ крутизна кривой равна 2.
2. $M'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Поэтому в точке $x = \frac{1}{2}$ крутизна кривой равна 1.
3. $M'(10) = 2 \cdot 10 = 20$. Поэтому в точке $x = 10$ крутизна кривой равна 20.

Мы могли бы продолжать, но все эти предложения говорят по сути одно и то же. В точке с положением h по горизонтали крутизна кривой равна $2h$. Иными словами, она вдвое больше, чем расстояние по горизонтали от 0. Из предыдущего предложения понятно, почему график M все быстрее стремится вверх. Чем больше расстояние от 0, тем сильнее увеличивается крутизна.

2.3.3. Танец в новой интерпретации: эта машина не имеет ничего общего с кривизной

Выше мы говорили о стандартной интерпретации предложения «машина $M(x) \equiv x^2$ имеет производную $M'(x) = 2x$». Здесь использовался график машины M, который уведомлял нас, что он имеет разную крутизну в разных местах. При таком толковании производная давала нам крутизну в каждой точке.

Но я обещал вам, что мы сможем посмотреть на это иначе, давайте этим и займемся. Мы получим тот же вывод, показывая машину по-другому. Для начала заметим, что мы не обязаны представлять наглядно

Машину умножения на себя с помощью графика. Мы можем считать, что $M(x) \equiv x^2$ — площадь квадрата с длиной стороны x. Поскольку мы думаем сейчас иначе, давайте вместо M использовать A, а вместо x — l. Теперь мы можем написать $A(l) \equiv l^2$ и будем продолжать говорить о той же машине, но не думая, что она как-то связана с кривой.

Как всегда в анализе, у нас есть машина и мы задаем вопрос вроде: «Если я чуть-чуть изменю то, что кладу в машину, как изменится то, что она выдаст?». Поскольку d — первая буква слова «разность» (difference), а l — слова «длина» (length), будем использовать dl для обозначения крохотного изменения по длине. Примем, что dl — изменение длины стороны квадрата, то есть $l_{\text{после}} \equiv l_{\text{до}} + dl$. Когда мы немного меняем длину стороны квадрата, мы можем задаться вопросом, что происходит с площадью. До изменения она равна l^2, а после — $(l + dl)^2$. Напишем всё это в рамочке.

Вносим крохотные изменения в квадрат

Длина стороны до изменения: l

Длина стороны после изменения: $l + dl$

Изменение длины: $dl = l_{\text{после}} - l_{\text{до}}$

Площадь до изменения: l^2

Площадь после изменения: $(l + dl)^2$

Изменение площади: $dA = A_{\text{после}} - A_{\text{до}}$

Итак, мы изменили чуть-чуть то, что кладем в машину. Что она теперь выдает? Добавим картинку. Рисунок 2.4 показывает, как меняется площадь, если мы чуть-чуть изменяем сторону. Есть несколько способов выразить это:

$$dA = A_{\text{после}} - A_{\text{до}} \equiv A(l + dl) - A(l).$$

Из рисунка понятно, что изменение площади равно:

$$dA = 2(l \cdot dl) + (dl)^2.$$

Это всего лишь другой способ сказать, что:

$$\frac{dA}{dl} = 2l + dl.$$

Теперь устремляем dl к 0 (или, если вам хочется, с самого начала думаем о нем как о бесконечно малом, так что $2l + dl$ неотличимо от $2l$) и получаем, что «производная» Машины умножения на себя $A(l) \equiv l^2$ равна:

$$\frac{dA}{dl} = 2l.$$

Это то же предложение, которое мы установили ранее, в виде $M'(x) = 2x$. В обоих случаях оно говорит, что «производная», или «крутизна», или «скорость изменения» Машины умножения на себя для любого числа, которое мы в нее кладем, вдвое превышает это число.

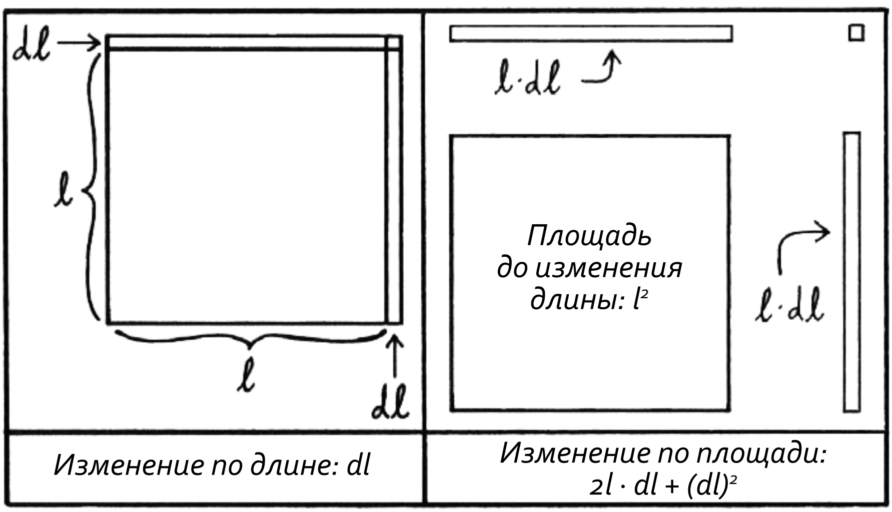


Рис. 2.4. Другой способ восприятия производной Машины умножения на себя $A(l) \equiv l^2$. Изначально у нас есть квадрат со стороной l. Изменим немного l, чтобы сторона стала $l + dl$. Смотрим, как изменилась площадь. Как видно на рисунке, разница в площади составит $dA \equiv A_{\text{после}} - A_{\text{до}} = 2(l \cdot dl) + (dl)^2$. Поэтому $\frac{dA}{dl} = 2l + dl$. Теперь устремляем dl к 0 (или, если вам хочется, с самого начала думаем о нем как о «бесконечно малом») и получаем, что производная равна $\frac{dA}{dl} = 2l$. Мы можем считать, что предложение $\frac{dA}{dl} = 2l + dl$ сообщает нам следующее: два длинных узких прямоугольника стянулись в два отрезка (отсюда $2l$), а крохотный квадратик — в точку (отсюда dl), которая добавляет к каждому отрезку только бесконечно малую длину, так что мы можем пренебречь ею и писать $\frac{dA}{dl} = 2l$.

2.3.4. Что мы сделали к этому моменту

Мы по-прежнему имеем дело с машинами, которые можно целиком описать в терминах сложения и умножения. Поэтому мы ничего не знаем о диковинных машинах, о которых вы, должно быть, слышали: $\sin x$, $\ln x$, $\cos x$ или e^x. Мы понятия не имеем о площади круга, не знаем, что означает π, и т. д. По сути, мы не в курсе ничего, кроме сложения, умножения, идеи машины, некоторого объема анализа и способа изобретать математическое понятие. Первыми нашими математическими понятиями были «площадь» (для легкого случая прямоугольников) и «крутизна» (для легкого случая прямых). Затем мы заметили, что нечто кривое превращается в прямое, если применить бесконечное увеличение, и так мы изобрели свою лупу. Это позволило нам говорить о крутизне произвольной машины M, график которой является кривой, с помощью простого определения «отношения приращения по вертикали к приращению по горизонтали» для двух точек, бесконечно близких друг к другу:

$$\frac{dM}{dx} \equiv \frac{\text{Крохотное приращение по вертикали}}{\text{Крохотное приращение по горизонтали}} \equiv \frac{M(x+dx)-M(x)}{dx}.$$

Хотя мы чувствуем, что эта идея должна работать для любой машины, которую мы уже можем описать, мы еще недостаточно экспериментировали с нашей лупой. Мы применяли ее только к постоянным машинам, прямым линиям и Машине умножения на себя. И лишь последняя из них была кривой, так что фактически мы использовали на полную мощность нашу лупу только в одном случае. Чтобы привыкнуть к ней, давайте экспериментировать дальше.

2.3.5. Более безумные машины

Машина $M(x) \equiv x^3$

Если мы хотим дальше экспериментировать с лупой, нам нужно подумать, какую машину использовать. Попробуем $M(x) \equiv x^3$. До сих пор у нас было два обозначения (*чуточка* и dx) для крохотного (возможно, бесконечно малого) числа. Мы также использовали dl, но это тот же тип обозначения, что и dx. Мы могли бы взять любое из них, но оба громоздки. Давайте применять однобуквенное обозначение t для *чуточки (tiny)*. Как и раньше, t — крохотное (возможно, бесконечно малое) число. Скормим машине x, а потом $x + t$ и посмотрим, как изменится результат. Изменение обозначим dM, то есть $dM \equiv M(x + t) - M(x)$. Тогда

$$dM \equiv M(x + t) - M(x) = (x + t)^3 - x^3. \qquad (2.1)$$

Слагаемое $(x + t)^3$ будет иметь внутри x^3, так что произойдет сокращение $-x^3$ в правой части dM. Но мы не знаем, как будет выглядеть остаток, пока не выполним нудную работу по разложению $(x + t)^3$ (скоро мы найдем способ избежать этого).

$$(x + t)^3 \equiv (x + t)\ (x + t)\ (x + t) = x^3 + 3x^2t + 3t^2x + t^3. \qquad (2.2)$$

Это уродливое предложение, и никому не хочется его запоминать. К счастью, в главе 1 мы видели, как изобрести его: либо изобразив картинку и посмотрев на нее, либо несколько раз использовав очевидный закон разрывания. Каким бы уродливым оно ни было, уравнение 2.2 дает нам возможность переписать уравнение 2.1. Получаем:

$$dM \equiv M(x+t) - M(x) \overset{(2.1)}{=} (x+t)^3 - x^3 \overset{(2.2)}{=} 3x^2t + 3t^2x + t^3,$$

где номера над знаками равенств говорят нам, на какое уравнение нужно посмотреть, если мы не уверены в сделанном. Все слагаемые справа имеют в составе минимум одно t, так что после деления на t мы получаем:

$$\frac{M(x+t) - M(x)}{t} = 3x^2 + 3xt + t^2.$$

Обратите внимание, что $3x^2$ — единственная часть, в которой нет t. Вспомните, что t — обозначение для бесконечного малого числа (или, если хотите, числа, которое мы можем представлять всё меньшим, пока вообще не перестанем его замечать). Поэтому мы можем переписать уравнение так:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t}=3x^2+\textit{ДолжныУмереть}\,(t).$$

ДолжныУмереть(t) — сокращение для всего, что пропадет, когда мы направим крохотное число t к 0. При этом слева у нас просто «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали» для двух бесконечно близких точек, и это выражение превратится при стремлении t к 0 в производную M. Сделаем это. При устремлении t к 0 получаем:

$$M'(x) = 3x^2.$$

Работает? Мы еще не знаем. Мы действуем самостоятельно. Давайте двигаться дальше, и, может, со временем мы выясним, имеет ли смысл то, что мы только что делали (не волнуйтесь, имеет).

Машина $M(x) \equiv x^n$

Самая сложная часть примера выше была вовсе не анализом, который включал лишь выбрасывание всех слагаемых с t, а утомительным процессом разложения $(x + t)^3$. Посмотрим, можем ли мы найти производную (использовать лупу с бесконечным увеличением) для $M(x) \equiv x^4$, ничего *не* разлагая. Как и выше, мы хотим вычислить:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t}=\frac{(x+t)^4-x^4}{t}=?,$$

где t — какое-то маленькое число. Нам нужно узнать способ избавляться от t внизу*, чтобы мы могли двигаться дальше и уменьшать t до 0.

Как избежать разложения $(x + t)^4$? Зачем вообще его избегать? Такое разложение — не особо интеллектуальная задача. Мы потратим уйму времени и, что важнее, не узнаем ничего, что может помочь нам, если

* Почему нужно выяснять способ избавляться от t внизу? Потому что (*чуточка*/*чуточка*) не обязательно будет крохотным числом! А если (*нечто*) — обычное число, а не бесконечно малое, то (*нечто*) · (*чуточка*)/(*чуточка*) вообще не бесконечно малое. Оно равно (*нечто*). Следовательно, избавиться от t внизу нужно потому, что это освобождает нас от необходимости смотреть, какие слагаемые действительно бесконечно малы, а какие — обычные числа, например 2 или 78.

мы столкнемся с $(x + t)^{999}$ или $(x + t)^n$. Так что обойдемся без разложения, но постараемся выяснить примерно, на что оно похоже. Выражение, которое мы не хотим разлагать, $(x + t)^4$, сокращение для

$$(x + t)(x + t)(x + t)(x + t).$$

Это можно представить в виде четырех мешков, в каждом из которых лежит две вещи: x и t. Если бы мы потратили время на умножение всей этой ерунды, мы бы получили результат в виде множества слагаемых. Нас не заботит полный результат. Мы хотим представить, как выглядят отдельные слагаемые, чтобы получить примерное представление о том, как может выглядеть итог, не проводя разложение. Попробуем использовать такое сокращение:

$$(x + t)(x + t)(x + t)(x + t) \equiv (4 \text{ мешка}) \equiv (x + t)\ (3 \text{ мешка}).$$

Применяем очевидный закон разрывания к правой части, а потом сосредоточиваемся на одном из двух элементов. Вот так:

$$\begin{aligned}(4 \text{ мешка}) &\equiv (x+t)(3 \text{ мешка}) = \\ &= x(3 \text{ мешка}) + t(3 \text{ мешка}) \\ &= x(3 \text{ мешка}) + \ldots\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь мы, по сути, разорвали один мешок, вынули оттуда два элемента, а затем выбрали один. Помните: нам незачем заботиться о каждом слагаемом. Мы хотим посмотреть, как в итоге будет выглядеть произвольная часть нашей суммы, чтобы получить интуитивное представление о том, как устроен результат. Поскольку наша цель скромна, мы можем игнорировать всё, кроме одного слагаемого, и продолжать рвать мешки по одному. На какой стороне мы предпочтем сосредоточиваться при каждом новом разрыве? Неважно. Давайте выбирать наугад. Мы только что выбрали x из первого мешка, возьмем t из второго, t из третьего и x из четвертого: x, t, t, x. Каждый раз, когда мы разворачиваем, разрываем и выбираем слагаемое, я стану писать над знаком равенства то, что мы взяли. Каждая из строк ниже будет сокращением для трех строк рассуждения, аналогичного уравнению 2.3: развернуть, разорвать и сосредоточиться на одном:

$$\begin{aligned}(4\text{ мешка}) &\overset{x}{=} x(3\text{ мешка}) + \ldots \\ &\overset{t}{=} xt(2\text{ мешка}) + \ldots \\ &\overset{t}{=} xtt(1\text{ мешок}) + \ldots \\ &\overset{x}{=} xttx + \ldots\end{aligned} \tag{2.4}$$

Это не составляет особого труда, но, как оказывается, дает нам ровно ту информацию, которую мы хотим. Мы всё еще не знаем, каков полный «развернутый» результат, но сейчас можем видеть, что каждое его слагаемое построено с помощью выбора, точнее четырех выборов: по одному предмету из каждого мешка. Мы только что сделали выбор $xttx$ наугад, так что результат точно так же должен включать любой другой, который мы *могли бы* сделать. Таким образом, не разлагая $(x + t)^4$, мы знаем, что полный развернутый вариант будет включать $xttx$, а также $xxxx$, $tttt$, $xttt$ и т. д.

Это, по сути, все, что нам нужно. Это простое знание невероятно облегчает вычисление производной x^4 или даже x^n. Вернемся к нашей задаче с этими новыми сведениями. Мы хотим вычислить:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t} = \frac{(x+t)^4 - x^4}{t} = ? \tag{2.5}$$

Вот как будем рассуждать.

1. Одним из слагаемых в разложении $(x + t)^4$ будет $xxxx$, то есть x^4, но оно сократится с отрицательным x^4 в уравнении 2.5 выше.

2. Некоторые из слагаемых в $(x + t)^4$ будут иметь в составе только одно t. Оно должно появиться из одного из четырех мешков, так что у нас будут четыре слагаемых с единственным t: $txxx$, $xtxx$, $xxtx$ и $xxxt$. Такое t в каждом из этих слагаемых сократится с t внизу уравнения 2.5, и все они примут вид xxx, то есть x^3. Поскольку слагаемых четыре, мы получим $4x^3$. После сокращения на t все они уже не включают t, поэтому не пропадут, когда мы устремим t к 0. Запишем все слагаемые с единственным t в виде $t \cdot$ *Выжившие*, чтобы подчеркнуть, что в них входит только одно t. После

деления на t они превратятся в *Выжившие*, причем t в них уже не будет. В нашем случае *Выжившие* — $4x^3$, но если мы представим более общий вид, это поможет нам в рассуждениях для степеней выше 4.

3. В оставшихся слагаемых больше одного t, например $ttxx$ или $txxt$. Стоящее в нижней части уравнения 2.5 t убьет одно из них, но везде останется минимум одно t, поэтому слагаемые исчезнут, когда мы будем устремлять t к 0. Назовем их t · *ДолжныУмереть(t)*, чтобы подчеркнуть, что там останется t даже после деления на t, которое превратит величину в *ДолжныУмереть(t)*.

Таким образом, мы можем переписать уравнение 2.5 с помощью только что введенных нами сокращений. Мы получим:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t}=\frac{x^4+\left[t\cdot \textit{Выжившие}\right]+\left[t\cdot \textit{ДолжныУмереть}(t)\right]-x^4}{t}. \quad (2.6)$$

Слагаемые x^4 сокращаются, так что мы можем сократить на t и получить:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t}=\textit{Выжившие}+\textit{ДолжныУмереть}\,(t). \quad (2.7)$$

Теперь представим, что t все ближе к 0. Это не затрагивает слагаемое *Выжившие*, но убивает *ДолжныУмереть*(t). При этом левая часть уравнения превращается в производную M, то есть $M'(x)$. Объединив все это, мы получим:

$$M'(x) = \textit{Выжившие}. \quad (2.8)$$

Эгей! Производная M' — просто слагаемое, которое мы назвали *Выжившие*, в нашем случае оно равно $4x^3$. Но во всем рассуждении, начиная с уравнения 2.5, мы не использовали тот факт, что степень равна 4. Как минимум ни для чего важного. Поэтому рассуждение должно работать для более общего варианта $(x + t)^n$ независимо от величины n.

Польза только что проведенного нами рассуждения — поиска общей схемы, ведь мы слишком ленивы, чтобы разлагать $(x + t)^4$ обычным нудным способом, — в том, что мы можем немедленно узнать производную x^n для любого n! Чтобы определить ее, не зная n, нужно вычислить:

$$\frac{(x+t)^n - x^n}{t} = ? \tag{2.9}$$

Как и раньше, обратимся к аналогии с мешками. На этот раз у нас *n* мешков:

$$(x+t)^n = \underbrace{(x+t)(x+t)\ldots(x+t)}_{n\,\text{раз}}. \tag{2.10}$$

Каждое слагаемое в разложении $(x + t)^n$ будет произведением *n* элементов из нескольких *x* и *t*. Например, одно слагаемое будет состоять только из *x*:

$$\underbrace{xxxx\cdots xxxx}_{n\,\text{раз}}$$

Это x^n, и оно сократится с $-x^n$ в уравнении 2.9. Еще одно слагаемое будет иметь *t* на втором месте, на последнем и *x* остальных местах:

$$\underbrace{xtxx\cdots xxxt}_{n\,\text{сомножителей, только два}\,t}$$

Но в этом слагаемом два *t*, и даже после деления на *t* внизу в уравнении 2.9 останется одно *t*. Слагаемое пропадет, когда мы устремим *t* к 0 — как и все слагаемые, в которых два или более *t*.

Следовательно, незачем разлагать $(x + t)^n$ по какой-то сложной формуле*. Как и ранее, на производную влияют только те слагаемые, в которых ровно одно *t*: только они выживут, это единственное *t* сократится с тем, что находится внизу в уравнении 2.9. Одно из этих слагаемых — *txxxx··xxxx*, другое — *xtxx··xxxx* и т. д. Но ведь каждое из них равно tx^{n-1}. Есть *n* мешков, откуда может взяться единственное *t*, и это слагаемое должно появиться *n* раз.

$$t \cdot \textit{Выжившие} = \underbrace{tx^{n-1} + tx^{n-1} + tx^{n-1} + \ldots + tx^{n-1}}_{n\,\text{раз}}. \tag{2.11}$$

* Эта сложная формула в учебниках называется биномом Ньютона. По сути, это сложный способ говорить о мешках, не уточняя, что мы делаем, при этом используя странные обозначения, которые выглядят почти как дроби, но не совсем. Мы можем обойтись без этого.

Можно переписать это так:

$$t \cdot \textit{Выжившие} = ntx^{n-1}. \qquad (2.12)$$

Можно разделить обе части на t, и мы получим:

$$\textit{Выжившие} = nx^{n-1}. \qquad (2.13)$$

Но по тем же причинам, что и ранее, *Выжившие* оказываются производной машины, с которой мы начинали, то есть $M(x) \equiv x^n$, поэтому можно обобщить весь этот раздел так.

Что мы только что изобрели

Если $M(x) \equiv x^n$,

то $M'(x) = nx^{n-1}$.

Возможно, вы верите вычислению для $n = 2$ и для $n = 3$ больше, чем сумасшедшему занятию с *Выжившими*, как в этом разделе, но обратите внимание: мы можем использовать наши старые результаты для проверки новых! Если мы правы в том, что для машин $M(x) \equiv x^n$ производная $M'(x) = nx^{n-1}$ независимо от n, формула должна воспроизводить предыдущие результаты, иначе она неверна. Иными словами, новая формула должна предсказать*, что производная x^2 равна $2x$, а производная x^3 равна $3x^2$. Она как раз это и делает! При $n = 2$ выражение nx^{n-1} превращается в $2x$, а при $n = 3$ — в $3x^2$. Вы можете поспорить: «У нас нет полной уверенности в том, что приведенное рассуждение работает, только потому, что оно дает правильные варианты для двух случаев с известным ответом!». Вы правы, но это дает нам (и должно давать) больше уверенности в том, что мы на правильном пути и не допустили ошибок в выводах. В процессе изобретения математики только нам решать, когда мы убеждены в истине: наша математическая Вселенная не забита книгами, в которых мы можем просто подсмотреть верные ответы.

* Скорее «послесказать»… Или, может, «ретросказать»… Или что-то еще в этом духе.

2.3.6. Описание всех наших машин разом: ультраагностические сокращения

Мы поэкспериментировали с лупой на множестве отдельных машин. Куда двинемся дальше? Пока мы знаем только те машины, которые можно полностью описать в терминах сложения и умножения. Мы столько раз говорили это, что стоит спросить себя: о чем речь? Какие машины можно «полностью описать» исключительно «в терминах» сложения и умножения, то есть того, что нам известно? Это зависит от того, что мы подразумеваем под знанием. Например, разрешим ли мы в нашем описании деление? Вроде бы ответ отрицательный, потому что деление в нашей Вселенной фактически не существует. Но в каком-то смысле оно есть. Число $\frac{1}{s}$ в нашей Вселенной — сокращение для числа, которое становится 1 при умножении на s. Но тогда что означает «описать что-то только в терминах сложения и умножения»?

Фактически это проблема словоупотребления, так что не волнуйтесь. Мы не допустим «деления» в нашем описании (во всяком случае, не сейчас). Это означает, что пока мы исключаем машины вроде $m(s) \equiv \frac{1}{s}$. Какого рода машины мы можем описать? Вот некоторые из них.

1. $m(s) \equiv s^3$.
2. $r(q) \equiv q^2 - 53q + 9$.
3. $f(u) \equiv 5u^2 + 7u^3 - 92u^{79}$.

По сути, у нас нет оснований интересоваться ими, но есть лупа с бесконечным увеличением, и мы хотим научиться лучше ею пользоваться. По мере того как в нашем списке оказывается все больше машин, которые можно описать в терминах сложения и умножения, начинает казаться, что тут есть общая схема. Все машины, которые мы можем описать в данный момент, имеют общую конструкцию. Они составлены из кусков, выглядящих так:

$$(\text{Число}) \cdot (\text{еда})^{\text{число}},$$

где *еда* — сокращение для того, что наша машина съедает (учебники называют это переменной), а *число* и *Число* — не обязательно одно и то же. Все машины, которые мы перечисляли выше, и, по сути, любая, которую мы можем полностью описать в терминах того, что нам известно, — набор таких фрагментов, сложенных вместе. Почему не «сложенных и умноженных»? Хороший вопрос! Потому что две вещи вида (*Число*) · (*еда*)^{число} после умножения друг на друга будут иметь тот же вид. Иначе говоря, умножение чего-нибудь вроде ax^n и bx^m дает $(ab)x^{n+m}$, то есть снова (*Число*) · (*еда*)^{число}. Итак, любая машина, которую мы можем полностью описать в терминах сложения и умножения, будет построена путем сложения фрагментов такого вида. Введем сокращения, чтобы мы могли говорить обо всех наших машинах сразу.

Нам нужны разные сокращения для нескольких чисел. Мы знаем, что такое (*нечто*)$^{\#}$, только для случая, когда # — целое положительное число*, в нашей Вселенной нет отрицательных или дробных степеней (пока!). Поскольку мы имеем дело только с целыми степенями, мы можем записать все наши машины так:

$$M(x) \equiv \#_0 + \#_1 x^1 + \#_2 x^2 + \ldots + \#_n x^n, \qquad (2.14)$$

где n — самая большая степень, которая появляется в описании этой машины, а символы $\#_0$, $\#_1$, $\#_2, \ldots$, $\#_n$ — сокращения для каких-то чисел впереди. Мы добавили индексы, чтобы можно было называть их отдельно и не использовать для каждого свою букву. Также мы начали нумерацию с 0, а не с 1, чтобы все индексы соответствовали степеням, то есть чтобы каждое слагаемое (за исключением первого) выглядело как $\#_k x^k$, а не как $\#_k x^{k-1}$. Мы так сделали, потому что так немного симпатичнее. Если мы введем обозначение x^0 для числа 1, все слагаемые, включая первое, будут иметь вид $\#_k x^k$. (На самом деле для выбора $x^0 = 1$ есть причина лучше. Мы увидим это в следующей интерлюдии.) Сейчас же выбор обозначения x^0 для числа 1 — исключительно вопрос эстетики, и мы станем использовать его только для того, чтобы все слагаемые в уравнении 2.14 можно было записать в виде $\#_k x^k$. Сейчас у нас нет оснований подозревать, что нулевые степени равны 1 по каким-то принципиальным соображениям. Это просто сокращение.

---

* Вспомните, что (*нечто*)# — всего лишь сокращение для (*нечто*) · (*нечто*) ⋯ (*нечто*), где # — количество появлений (*нечто*). Если быть последовательными, то (*нечто*)^1 — просто другой способ записи (*нечто*).

Уравнение 2.14 — сокращение, описывающее *все* машины, о которых мы уже говорили. Честно говоря, утомительно писать многоточия (...). Давайте изобретем способ сказать то же покороче. Чтобы сократить правую сторону уравнения 2.14, мы могли бы писать так:

Сложение $(\#_k x^k)$, где k начинается от 0 и идет до n, но это тоже громоздко. Нам не нужны слова справа. Надо просто напоминать себе, с чего k начинается и чем заканчивается. Поэтому сократим так:

$$\textit{Сложение}\,(\#_k x^k)_{k=0}^{k=n}.$$

В учебниках это обычно пишется так:

$$\sum_{k=0}^{n} \#_k\, x^k.$$

На деле там обычно пишут букву c (constant, константа) вместо нашего символа #. Там используют букву Σ (греческий аналог S), поскольку S — первая буква слова «сумма», а «сумма» означает «сложение». Такая запись может выглядеть страшновато, пока вы к ней не привыкнете. Это всего лишь сокращение для правой части уравнения 2.14, где мы выражали то же обозначением «...». Если вам не нравятся предложения с Σ, вы можете переписать их, используя многоточия.

Итак, мы создали обозначение, которое достаточно абстрактно, чтобы говорить обо всех наших машинах сразу. Теперь придумаем и название для всех машин, чтобы не нужно было говорить «машины, которые можно полностью описать, используя только сложение и умножение». Назовем любую машину такого вида «плюсо-умножательной». Наверное, вы уже догадались, исходя из всего, о чем мы говорили ранее, что в учебниках есть неоправданно вычурное название для этого простого вида машин. Есть! Там они называются «полиномы», отнюдь не лучший термин*.

Если бы мы могли выяснить, как применять наше стекло с бесконечным увеличением на любой плюсо-умножательной машине, мы бы продвинулись

* Честно говоря, термин «плюсо-умножательная машина» тоже не лучший. Он неуклюж и громоздок. Но он хотя бы напоминает нам, о чем мы говорим.

на новый уровень навыков обращения с ним. Попробуем, но сначала кратко изложим наше обсуждение официально, поместив его в рамочку.

Ультраагностическое сокращение

Странный символ слева — всего лишь сокращение для штуки справа:

$$\sum_{k=0}^{n} \#_k\, x^k \equiv \#_0\, x^0 + \#_1\, x^1 + \#_2\, x^2 + \ldots + \#_n\, x^n.$$

Почему: мы используем такое сокращение, поскольку хотим говорить о любой машине, которая может быть полностью описана тем, что мы знаем, — сложением и умножением.

P. S. Символы $\#_0$, $\#_1$, $\#_2$, …, $\#_n$ — обычные числа, например 7, или 52, или $\frac{3}{2}$. Использование символа # (вместо конкретного числа, например 7) позволяет нам оставаться в неведении относительно конкретных значений. В итоге мы можем говорить сразу о бесконечном количестве машин.

Название: мы назвали такие машины «плюсо-умножательными». Учебники за пределами нашей Вселенной обычно называют их полиномами или многочленами.

2.3.7. Разбиваем сложную задачу на легкие фрагменты

У нас пока есть только два способа найти производную какой-нибудь машины. Первый — использовать определение производной, то есть применить наше определение крутизны (углового коэффициента) из главы 1 к двум точкам, бесконечно близким друг к другу. Если кто-нибудь дает нам машину *M*, мы можем попробовать найти ее производную так:

$$M'(x) \equiv \frac{M(x + \textit{чуточка}) - M(x)}{\textit{чуточка}},$$

где *чуточка* обозначает некое бесконечно малое число (или просто маленькое, которое мы устремляем к 0, после чего избавляемся от *чуточки* в нижней части).

Другой путь найти производную машины — спросить себя: «А мы еще не находили ее?». Например, мы знаем, что производной любой машины вида $M(x) \equiv x^n$ будет $M'(x) \equiv nx^{n-1}$, где n — любое целое число. Мы могли бы назвать это «правилом степени», как в учебниках, но, разумеется, это лишь термин для того, что мы выяснили сами с помощью определения производной. Поэтому я подозреваю, что у нас только один способ находить производные: определение. Как и в любых областях математики, эти «правила» (вроде «правила степени», о котором твердят учебники) — по сути, вообще не *правила*! Это названия для вещей, которые мы вычислили раньше, используя определение. Определение понятия, которое мы создали сами… начав с неясного качественного обиходного понятия, прибегая к эстетическим и анархическим штучкам всякий раз, когда мы не знали, что делать… Ха!.. математика — чудна́я штука…

Так или иначе, мы создали сокращение, которое достаточно велико и абстрактно, чтобы описать любую машину в нашей Вселенной. Для проверки того, насколько далеко мы продвинулись в искусстве применения лупы с бесконечным увеличением, посмотрим, сможем ли мы использовать ее для *любой* плюсо-умножательной машины. К сожалению, хотя мы умудрились запихнуть все машины в одно сокращение, оно довольно сложное. Если мы просто подставим выражение

$$M(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \#_k\, x^k \tag{2.15}$$

в определение производной, то получим уродливую мешанину и, вероятно, не поймем, что нам делать. Попробуем разбить эту сложную задачу на несколько простых вопросов, на которые нам будет легче ответить.

Мы уже сделали полезное наблюдение: любая плюсо-умножательная машина — набор сложенных вместе простых фрагментов. Наше сокращение в уравнении 2.15 говорит, что те выглядят как $\#_k x^k$, где k — некое целое число, а $\#_k$ — любое, не обязательно целое. Может, если бы мы умели дифференцировать любую машину вида $\#x^n$ и придумали способ говорить о производной нескольких сложенных фрагментов в терминах производных этих фрагментов, мы бы открыли способ использовать лупу с бесконечным увеличением для *любой* плюсо-умножательной машины. И тогда в нашей Вселенной не осталось бы ни одного уголка, который мы бы не завоевали.

Фрагменты вида $\#x^n$

Мы уже знаем, как использовать нашу лупу для x^n. Производная будет равна nx^{n-1}. Поэтому вопрос сейчас — что нам делать с #, когда мы дифференцируем x^n. Обозначим $m(x) \equiv \#x^n$ и попробуем найти производную. Используем знакомое определение крутизны (углового коэффициента) для двух точек, которые очень близки друг к другу:

$$\frac{m(x+t)-m(x)}{t} \equiv \frac{\#(x+t)^n - \#x^n}{t} = \left(\frac{(x+t)^n - x^n}{t}\right).$$

Вспомним, что t — крохотное число, и к нему мы мысленно прикрепляли «ручку». Когда мы ее поворотом уменьшаем t до 0, слева будет определение производной, $m'(x)$. Как насчет правой стороны? # — просто число, и поэтому оно не меняется, когда мы уменьшаем t, а справа от # будет просто производная x^n, которую мы уже знаем. В общем, как и можно было надеяться, число # тут просто за компанию, производная $m(x) \equiv \#x^n$ равна:

$$m'(x) = \#nx^{n-1}.$$

Но подождите… за исключением последнего шага, мы не использовали никаких конкретных свойств машины x^n. Можем ли мы повторить наш вывод в более общем случае? Посмотрим, получится ли рассуждать аналогично, когда $m(x)$ выглядит как (какое-то число), умноженное на (какую-то другую машину), короче, когда $m(x) = \#f(x)$. Есть ли связь между производными двух машин, одна из которых равна другой, умноженной на некое число? Проведем точно то же рассуждение, что и выше:

$$\frac{m(x+t)-m(x)}{t} \equiv \frac{\#f(x+t)-\#f(x)}{t} = \#\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right).$$

Теперь, как и ранее, устремляем крохотное число t к 0. Левая часть уравнения становится определением $m'(x)$. А правая? Как и раньше, # — просто число, оно не зависит от t и потому не меняется, когда мы уменьшаем t до 0. То, что справа от #, превращается в определение производной $f'(x)$. Мы только что открыли новый факт о нашей лупе с бесконечным увеличением: как она взаимодействует с умножением! Мы действительно горды тем, что изобрели, давайте вставим это в рамочку, причем зафиксируем мысль несколькими разными способами.

Что мы только что изобрели

Есть ли связь между производными двух машин, которые почти одинаковы, только одна умножена на какое-то число? Есть!

Если $m(x) \equiv \#f(x)$, то $m'(x) \equiv \#f'(x)$.

Напишем это иначе:

$$[\#f(x)]' = \#f'(x).$$

Напишем это еще одним способом!

$$\frac{d}{dx}\left[\#\ f(x)\right] = \#\frac{d}{dx}\ f(x).$$

Рискнем сделать это еще раз!

$$(\#f)' = \#(f')$$

Вы еще тут? Отлично, еще разок!

$$\frac{d(\#f)}{dx} = \#\frac{df}{dx}.$$

Объединение фрагментов

В попытках узнать, как применять лупу с бесконечным увеличением к любой плюсо-умножательной машине (на языке учебников: «найти производную любого полинома»), мы поняли, что можно разбить этот сложный вопрос на два простых. Первый — как найти производную x^n, где

n — натуральное число. Мы обсудили это, нашли ответ, попутно выяснив, что наше рассуждение может дать ответ на более широкий вопрос. В результате мы открыли, что можно вытаскивать числа из производных: $(\#f)' = \#(f')$.

Попробуем ответить на второй из этих «простых» вопросов. Если наша машина составлена из сложенных вместе более мелких, что можно сказать о производной всей машины, если мы знаем производные ее элементов?

Представим, что у нас есть машина, втайне состоящая из двух находящихся рядом меньших; но кто-то закрыл обе металлическим корпусом, и снаружи все выглядит как один большой механизм. Вообразите, что мы подаем в эту машину число x. Если первая машина выплевывает 7, а вторая — 4, мы увидим, как из большого ящика появляется 11. Если вы начнете размышлять о любой сложной машине (например, современном компьютере), то логично думать о ней сразу двумя способами: и как об одной большой, и как о наборе соединенных мелких.

Почему это важно? Потому что в математике, как и в обычной жизни, вопрос «Из скольких *в точности* маленьких машин состоит большая?» бессмыслен. Если нам поможет представление большой машины в виде соединенных двух более простых, так и сделаем. Сократим идею, написав: $M(x) \equiv f(x) + g(x)$. Поскольку мы не указали ничего конкретного об этих трех машинах, такое предложение позволяет выразить идею того, как мы *можем* представить машину, составленную из двух более простых, если нам этого хочется. Рассуждая так, посмотрим, можно ли сказать что-нибудь о производной «большой» машины M исходя из производных ее частей. Поскольку мы ничего не знаем о меньших машинах f и g, лучше начать с чистого листа, то есть с определения производной. Получаем:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t} = \frac{\left[f(x+t)+g(x+t)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{t} =$$
$$= \frac{f(x+t)-f(x)+g(x+t)-g(x)}{t} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \frac{g(x+t)-g(x)}{t}.$$

В первом переходе мы использовали определение M. Во втором и третьем переставили слагаемые местами, стараясь разделить элементы с f

и элементы с g. Мы делаем так, потому что наша цель — разделить сложную задачу на несколько простых. Поэтому полезно уметь говорить о производной большой машины M, говоря о производных ее частей f и g. Оказалось, мы ухитрились сделать это. Если сейчас представить, что t все ближе к 0, левая часть нашего уравнения превращается в $M'(x)$. Последнее выражение состоит из двух частей, и если устремить t к 0, первая из них превращается в $f'(x)$, а вторая — в $g'(x)$.

Итак, мы только что открыли новый факт о лупе с бесконечным увеличением, и он полезен в разложении сложных задач на более простые. Снабдим его собственной рамочкой, как мы уже делали, и запишем идею разными способами.

Что мы только что изобрели

Есть ли связь между производными большой машины $M \equiv f(x) + g(x)$ и производными частей $f(x)$ и $g(x)$, из которых она построена? Есть!

Если $M(x) = f(x) + g(x)$, то $M'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Напишем это иначе:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

И еще одним способом!

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)+\left(\frac{d}{dx}g(x)\right).$$

Рискнем сделать это еще раз!

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Вы еще тут? Отлично, еще разок!

$$\frac{d(f+g)}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}.$$

Это может работать для любого количества машин, но пока мы этого не знаем:

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)' \overset{???}{=} m_1'+m_2'+\ldots+m_n'.$$

Мы поняли, что делать с суммой двух машин. А если их 3 или 100? Придется ли создавать новый закон для каждого числа, большего 2? Если мы задумаемся над этим, то увидим, что проблема исчезает, как только мы признаем мощь вышеупомянутой идеи. Вот в чем суть.

Вопрос «Сколько *на самом деле* машин в большой машине?» — бессмысленный. Если нам поможет представление большой машины в виде двух меньших, соединенных вместе, мы можем так и понимать их.

Эта философия применима к любому числу фрагментов. Если мы согласимся, что набор соединенных машин одновременно считается «большой машиной», мы можем проделать интересный трюк. Представьте, что у нас есть большая машина, которую мы представляем в виде трех слагаемых. Какова ее производная? Мы знаем, что «производная суммы равна сумме производных» для двух слагаемых:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Но если мы считаем, что сумма двух машин — отдельная машина, мы можем дважды применить формулу для двух машин:

$$[f + g + h]' = [f + (g + h)]' = f' + (g + h)' = f' + g' + h'.$$

Первое равенство сообщает, что «на некоторое время мы считаем $(g + h)$ отдельной машиной». Для второго и третьего мы используем формулу суммы производных для двух частей. Сначала мы применяем ее для слагаемых f и $(g + h)$, считая $(g + h)$ отдельной машиной. Затем — для g и h, уже не считая $(g + h)$ отдельной машиной. Наше представление о $(g + h)$ полностью изменилось в середине предыдущего уравнения. Нетрудно убедиться, что аналогичное рассуждение можно провести сколько угодно раз. Проверьте справедливость равенства

$$\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)' = m_1' + m_2' + \ldots + m_n'$$

и что оно выводится точно так же, как при переходе от двух машин к трем. Мы раз за разом применяем один и тот же прием. Следствия удивительны, поскольку из «двухчастной» версии $(f + g)' = f' + g'$ мы получили более общую. Имея «двухчастный» вариант и попеременно воспринимая объект то как две машины, то как одну из двух частей, мы сумели *обманом заставить математику* решить, что мы нашли версию для n частей!

(Вдали слышится слабый громыхающий звук.)

Ах! То же снова!

Читатель: Почему вы продолжаете это делать?

Автор: Это не я!

Читатель (*скептически*)**:** Вы *уверены*?

Автор: Да! Я знаю о происходящем не больше вашего… Где мы остановились? Думаю, закончили с этим разделом. Вперед, дорогой Читатель!

2.3.8. Последняя задача в нашей Вселенной… Пока

В предыдущем разделе мы изобрели следующие факты:

$$(\#M)' = \#(M') \tag{2.16}$$

и

$$(f + g)' = f' + g', \tag{2.17}$$

где # произвольное число, а M, f и g — любые машины, не обязательно плюсо-умножательные (хотя пока мы других и не знаем). Также ранее мы установили, что производная x^n равна

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.18}$$

и увидели, что «двухчастная» версия $(f + g)' = f' + g'$ столь же эффективна, как и «n-частная»:

$$\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)' = m_1' + m_2' + \ldots + m_n'. \tag{2.19}$$

У нас есть всё, чтобы узнать, как использовать лупу с бесконечным увеличением на любой плюсо-умножательной машине (или, если угодно, на всех плюсо-умножательных машинах сразу). Вперед! Ранее мы убедились, что сокращение

$$M\left(x\right) \equiv \sum_{k=0}^{n} \#_k \, x^k \tag{2.20}$$

достаточно велико и абстрактно, чтобы мы могли говорить о любой плюсо-умножательной машине. Сейчас мы умеем говорить о производной целого в терминах производных его частей и можем вычислить производную каждого фрагмента. Осталось объединить эти два открытия, и мы овладеем нашим изобретением по максимуму… по крайней мере, на данном этапе. В начале главы мы изобрели лупу с бесконечным увеличением, а сейчас (если сумеем решить эту последнюю нашу задачу) мы выясним, как применять ее ко всем машинам, существующим в нашей Вселенной.

Ниже мы увидим, как полезно иметь несколько разных видов знаков равенства в длинном математическом предложении. Как обычно, мы будем использовать ≡ всякий раз, когда что-то верно в силу новых сокращений. Вывод ниже может показаться запутанным, но многие шаги — просто новые обозначения. Исключениями будут всего три из них. Я напишу 2.19 над знаком равенства, где мы используем уравнение 2.19, и сделаю то же для уравнений 2.16 и 2.18. Нам понадобится только это. Наберите воздуха и следите. Поехали…

$$[M(x)]' \equiv \left[\sum_{k=0}^{n} \#_k\, x^k\right]' \equiv [\#_0 x^0 + \#_1 x^1 + \#_2 x^2 + \ldots + \#_n x^n]' \overset{(2.19)}{=}$$

$$\overset{(2.19)}{=} [\#_0 x^0]' + [\#_1 x^1]' + [\#_2 x^2]' + \ldots + [\#_n x^n]' \overset{(2.16)}{=}$$

$$\overset{(2.16)}{=} \#_0 [x^0]' + \#_1 [x^1]' + \#_2 [x^2]' + \ldots + \#_n [x^n]' \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} \#_k [x^k]' \overset{(2.18)}{=} \sum_{k=0}^{n} \#_k\, k x^{k-1}.$$

Готово! Если взглянуть назад, большинство этих шагов не выглядят необходимыми, но я хотел продвигаться как можно медленнее, чтобы не заблудиться в символах. Теперь, когда мы поняли идею, мы можем провести рассуждение без такого количества новых сокращений. Вот как оно выглядело бы, если бы мы подошли к делу более поверхностно. Мы хотим продифференцировать машину:

$$M(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \#_k\, x^k. \qquad (2.21)$$

Это сумма нескольких объектов. Мы знаем из уравнения 2.19, что производная суммы равна сумме производных, а из уравнений 2.16 и 2.18 мы знаем, что производная $\#_k x^k$ равна $\#_k k x^{k-1}$. Поэтому мы можем всё рассуждение сжать до одного шага и заключить, что производная M равна:

$$M'(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \#_k k x^{k-1}.$$

Готово. По сути, мы также закончили главу. По крайней мере ее суть. В начале мы придумали идею лупы с бесконечным увеличением, использовали ее для определения нового понятия («производная») и выяснили, как применять это понятие к любой машине, существующей в нашей Вселенной.

Перед тем как мы официально завершим главу, проведем немного времени в полурасслабленном состоянии. Сначала потратим несколько страниц на разговор о новых возможностях, которые стали побочным эффектом нашего опыта обращения с лупой. Затем кратко обсудим роль «строгости» и «достоверности» в математике.

2.4. Охота за экстремумами в темноте

Экстремальные достижения — это интересно. Наблюдать за олимпийским чемпионом в спринте, плавании или метании копья — в целом более захватывающе, чем за соседом, делающим то же самое. Мы наслаждаемся, глядя на максимальные возможности людей, лучших в каком-то деле. Другая крайность — худшие действия в любой категории — также притягивает к себе внимание. В мире математики тоже справедлив принцип интересности экстремумов. Полезно умение определять места этих значений — там, где величина наибольшая или наименьшая, максимальная или минимальная, лучшая или худшая, — причем простым манипулированием математическими символами, поскольку мы не всегда можем наглядно представлять себе изучаемые объекты.

Когда мы изобрели понятие производной, мы, не осознавая того, получили удивительно мощное умение: вылавливать места, где машина достигает экстремальных значений (экстремумов), даже когда не можем изобразить, как она выглядит! Вот эта идея.

Поскольку производная машины выдает нам наклон (угловой коэффициент) в этой точке, мы можем использовать следующий удобный факт: все «точки горизонтальности»* у машины — те, где ее производная равна 0. Поэтому мы можем обнаружить «точки горизонтальности» машины m, приравняв ее производную к 0:

$$m'(x) \overset{\text{Требование}}{=} 0,$$

а затем, найдя значения x, которые делают это предложение истинным. Если мы сможем узнать эти числа, то найдем «точки горизонтальности». Далее нам нужно проверить небольшое число случаев, чтобы понять, можно ли считать эти места экстремумами. Важно, что мы можем это делать, даже если не способны представить, как выглядит машина.

Изучим несколько простых примеров. Вернемся к рис. 2.3, где мы изобразили Машину умножения на себя $m(x) \equiv x^2$. Понятно, что у нее нет максимума (она становится все больше по мере удаления x от 0 в любом направлении), но есть минимум в точке 0. Сейчас нам по силам уговорить математику рассказать нам, где этот минимум, даже если бы мы не могли нарисовать такое изображение. Мы уже знаем, что для $m(x) \equiv x^2$ производная $m'(x) = 2x$. Теперь мы можем записать фразу «производная этой машины в точке x равна 0» в символьной форме:

$$m'(x) = 2x \overset{\text{Требование}}{=} 0.$$

Я использовал $\overset{\text{Требование}}{=}$, потому что предложение $2x = 0$ не всегда верно; $\overset{\text{Требование}}{=}$ помогает нам помнить, что тут написано нечто, истинность чего

* По сути, в данном случае автор подразумевает, что касательная в этих точках горизонтальна, но термина «касательная» во Вселенной автора пока не существует, так что мы не имеем права его использовать. *Прим. перев.*

мы требуем (на чем настаиваем), чтобы увидеть, какие конкретные числа x делают предложение истинным. Что это за x? К счастью, нетрудно увидеть, что $2x = 0$ только для $x = 0$. Машина $m(x) \equiv x^2$ имеет одну и только одну «точку горизонтальности», $x = 0$. Мы уже знали это (из рисунка, который давно изобразили), но всегда неплохо проверить новые идеи на знакомых случаях, чтобы убедиться, что они дают ожидаемый результат. Так мы можем проверить сделанное в своей Вселенной, не обращаясь за помощью к учебникам или авторитетам.

А что будет, если мы взглянем на машину $f(x) \equiv (x - 3)^2$? В каком-то смысле это тот же предыдущий пример. Все, что выглядит как (*нечто*)^2, положительно, за исключением случая *нечто* $= 0$, поэтому мы можем ожидать, что эта машина имеет ровно одну «точку горизонтальности» при $x = 3$, и она будет минимумом, как и в предыдущем случае. Тут все верно, но предположим, что нам дали эту же машину в форме, которая маскирует сходство с (*нечто*)^2, а именно:

$$f(x) \equiv x^2 - 6x + 9.$$

Это точно та же машина, что и $f(x) \equiv (x - 3)^2$, но из уравнения не так очевидно, что есть одна и только одна «точка горизонтальности» при $x = 3$. Тем не менее мы можем заставить математику сообщить нам это, используя ту же идею, что и выше: вычислить производную и приравнять ее к 0:

$$f'(x) = 2x - 6 \overset{\textit{Требование}}{=} 0.$$

Предложение $2x - 6 = 0$ говорит то же, что предложение $2x = 6$, а оно — то же, что и предложение $x = 3$. Как мы и ожидали, машина имеет только одну «точку горизонтальности» в $x = 3$. Тот факт, что мы получили один результат двумя способами, дополнительно подтверждает, что наши идеи имеют смысл.

Эта идея не всегда выдает экстремальные значения (максимальные и минимальные) для данной машины. Но виной тому не математика, а то, что мы упускаем из виду несколько очевидных фактов. Чтобы уловить эту мысль, изучим некоторые примеры.

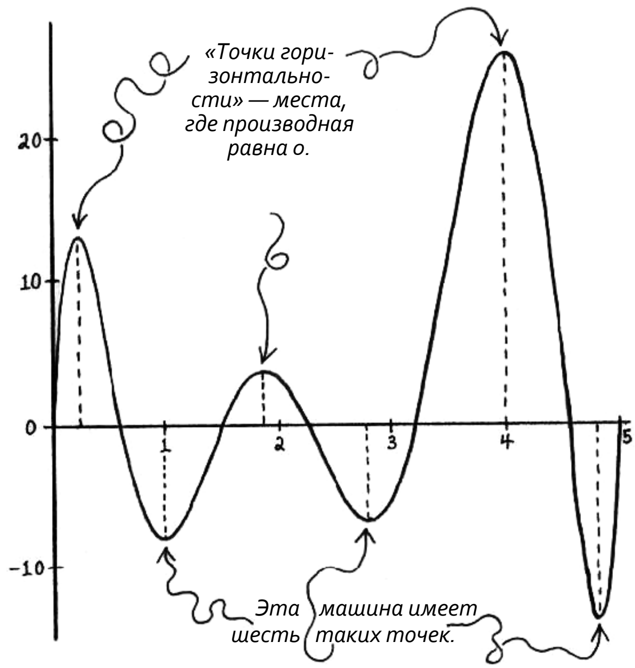


Рис. 2.5. Эта машина имеет шесть «точек горизонтальности». Если мы опишем их горизонтальной координатой, то это: $x = 0{,}25$; 1; 1,8; 2,7; 4 и 4,8. Не все они дают общий для области максимум и минимум, но и точка общего максимума, и точка общего минимума — это «точки горизонтальности». Максимум машины в показанной области находится в «точке горизонтальности» $x = 4$, а минимум — в «точке горизонтальности» $x \approx 4{,}8$ (волнистый знак равенства означает «приблизительно равно»)

Предположим, мы желаем найти максимум машины $g(x) \equiv 2x$ и действуем, как описано выше. Находим производную и приравниваем к 0, что дает:

$$g'(x) = 2 \overset{\text{Требование}}{=} 0.$$

Метод «приравнивания производной к 0» выдал нелепое предложение $2 = 0$. Значит ли это, что 2 действительно равно 0? Надеюсь, нет! Значит ли это, что метод нахождения точек экстремума путем «приравнивания производной к 0» провалился? Вовсе нет. График машины $g(x) \equiv 2x$ наклонный, а прямые не имеют «точек горизонтальности», если они сами не горизонтальны (я показал это на рис. 2.6, но это едва ли необходимо).

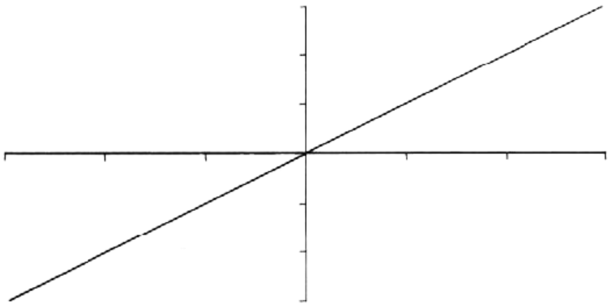


Рис. 2.6. Машина не имеет «точек горизонтальности». Если мы попытаемся заставить математику сказать нам, где они, она сообщит, что 2 = 0. Не волнуйтесь, это ничего не испортит. Так математика просто дает знать, что какое-то из наших предположений было неверным

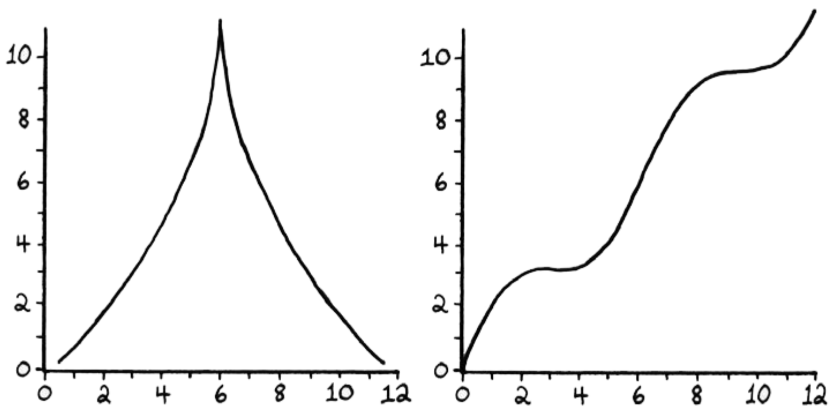


Рис. 2.7. Выше мы обсуждали стратегию нахождения наибольшей и наименьшей части машины путем выяснения, где ее производная равна 0. В идеальном мире эта стратегия работала бы всегда, но есть несколько случаев, когда это не так. Кратко их опишу, хотя позже мы с ними не столкнемся. Машина слева имеет максимум, но в виде бесконечно острого пика, и производная в этой точке не составит 0*, так что наш метод приравнивания пропустит ее. К счастью, машины с такими пиками не появляются, если мы не попросим их об этом, и в этой книге нам не придется иметь дело с поиском экстремумов для них. Машина справа имеет две «точки горизонтальности» в изображенной области, но обе не экстремумы. Однако метод «приравнивания производной к 0» выдаст нам положения этих не столь интересных «точек горизонтальности», примерно при $x \approx 3$ и при $x \approx 9$

* Производная в этой точке просто не существует. Добавим, что она не существует и для пика, который не является бесконечно острым, а выглядит «изломом». *Прим. перев.*

Наша неудача вызвана не недостатками метода «приравнивания производной к 0». Наоборот, выдавая нечто невозможное, вроде $2 = 0$, математика извещает нас, что мы сделали невозможное предположение. Никакой мистики.

Хотя злополучные примеры вроде показанных на рис. 2.7 не будут больше появляться в этой книге, важно упомянуть их, если вы хотите понимать странную манеру изложения в математике. Математики склонны зацикливаться на «контрпримерах» — редких диковинных исключениях из общих правил, и это сильно затрудняет чтение их теорем. Например, в описании метода «приравнивания производной к 0» математик может сказать: «Пусть функция $f{:}(a, b) \to \mathbb{R}$, и пусть $x_0 \in (a, b)$ — локальный экстремум f, причем f дифференцируема в x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$». Вероятно, звучит как тарабарщина, но на деле все довольно просто. Перевод был бы примерно таков: «Нарисуйте высшую (или низшую) точку на графике какой-то машины. Машина должна быть „горизонтальной“ в этой точке. Ой, я имею в виду, если там не будет пика, как слева на рис. 2.7. Но это бывает не так часто». Исключение из правой части рис. 2.7 тоже включено в теорему, но спрятано получше. Именно поэтому среди тарабарщины обнаруживается следующее:

«*Если* мы в максимуме или минимуме, *то* производная равна 0»,

а не

«*Если* производная равна 0, *то* мы в максимуме или минимуме».

Второе предложение было бы истинно, если бы не существовало «точек горизонтальности» вроде тех, что показаны справа на рис. 2.7 (где производная равна 0, но они не являются ни максимумом, ни минимумом). Если бы таких злосчастных примеров не существовало, можно было бы сказать второе предложение вместо первого. И это куда удобнее, поскольку цель всего предприятия «производная равна 0» обычно как раз и состоит в выявлении максимумов и минимумов.

Хотя и есть исключения, мы продолжим работать с этой идеей: экстремумы машины можно обычно найти, узнав, где ее производная равна 0. По мере того как мы обобщим понятие производной на более экзотические типы машин, способ изложения будет меняться, но не базовая идея. Для машин, которые едят одно число и выплевывают одно; тех, которые едят два числа и выплевывают одно; тех, которые едят N чисел и выплевывают одно; наконец, тех, которые едят бесконечно много чисел и выплевывают одно, будет применяться принцип «экстремумы — обычно места, где производная равна 0», независимо от того, как далеко мы зайдем, и от того, насколько странной станет наша математическая Вселенная.

2.5. Краткое назидание о строгости

Дайте мне плодоносную ошибку, полную семян, лопающихся от своих исправлений. Свою стерильную истину можете оставить себе.

Вильфредо Парето

В этой главе мы обсуждали (и применяли) идею бесконечно малых чисел — некоторые считают ее математическим табу. В конце главы поговорим о месте строгости и достоверности в математике. Иногда вы обнаруживаете, что провели странное рассуждение вроде показанных выше и не уверены, что оно «верно» или не приведет к каким-нибудь противоречиям. Это нормально! Не грех просто стремиться вперед, а позже попытаться придать смысл сделанному. Значительная часть математики, описанная в современных учебниках, была открыта именно так и «почищена» позже, зачастую через многие годы после смерти первооткрывателей. Если кто-то предпочитает работу по формализации идей и их чистке, прекрасно! Каждому свое.

Если вы когда-нибудь столкнетесь с математиком-мачо, который считает, что наше обсуждение не заслуживает звания «настоящей математики», вежливо попросите его вспомнить Леонарда Эйлера или, если на то пошло, любого другого специалиста в этой области до эпохи бурбакизма*.

* Николя Бурбаки — коллективный псевдоним группы математиков, которые в своих работах излагают принципы в строгой аксиоматической манере и крайне абстрактным и формальным образом. Такой подход называют бурбакизмом. *Прим. перев.*

Эйлер был одним из величайших математиков всех времен и однажды написал такое экстравагантное выражение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.$$

Слева стоит сумма бесконечного числа положительных слагаемых. Фактически там написано:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … (*до бесконечности*).

Как мог один из лучших математиков всех времен подумать, что это равно –1?! Оказывается, он следовал удивительно логичной цепочке рассуждений. Он не был сумасшедшим. Когда вы видите этот вывод в первый раз, легко согласиться, что Эйлер прав! Суть в том, что нам нужно научиться (по крайней мере отчасти) отказываться от сверхосторожного «Откуда мне знать, прав ли я?», выпестованного в кабинете математики. Когда мы изобретаем математику (или что угодно) для себя, мы *не* знаем, правы ли мы. Никто не знает. Мы можем быть не уверены в каком-то рассуждении и только позже придумаем другой довод, который приведет к тем же результатам. Он может выглядеть для нас более убедительно, и, поскольку мы нашли независимые пути получения одного заключения, у нас будет больше уверенности в том, что оно имеет смысл. Но мы никогда не можем быть абсолютно уверены в том, что осмысленны наши действия*.

Я понимаю влечение к строгости и разделяю его. Несколько лет я планировал заняться математической логикой, главным образом сосредоточившись на основаниях математики. Удивительно мало современных специалистов делают упор на основания. Как заметил логик Стивен Симпсон в своем феноменальном учебнике «Подсистемы арифметики второго

* Я устою перед искушением упомянуть здесь вторую теорему Гёделя о неполноте, но не устою перед искушением упомянуть апофазию[ω].

[ω] Я также устою перед искушением объяснить шутку в предыдущей сноске, но не устою перед искушением заметить, что рекурсивная сноска — намного менее популярный литературный прием, нежели он того заслуживает.

Апофазия — риторический прием, состоящий в опровержении только что высказанного положения самим высказывающим. *Прим. перев.*

порядка»*, «к сожалению, основания математики нынче вышли из моды». Однако, несмотря на непопулярность, меня всегда влекло к этой области. Тогда моя зацикленность на строгости становилась все сильнее. Только позже я понял, как сильно такой образ мышления убивал мои математические творческие способности. Когда я начал читать самые выдающиеся работы пионеров в этой области — Курта Гёделя, Алонзо Чёрча, Алана Тьюринга, Стивена Клини, — а также современных гигантов, таких как Харви Фридман и Стивен Симпсон, я обнаружил, что величайшие умы в этой сфере рассуждают и говорят о формальных языках и теориях, которые они изучают, удивительно неформально. Их доказательства абсолютно строги по стандартам математики, но во время размышлений о своем поле деятельности никто из них не выглядел прикованным к такому уровню строгости. Это не недостаток, а достоинство. Похоже, верна старая поговорка врачей: слишком много строгости может привести и приводит к трупному окоченению**.

2.6. Встреча со сделанным

Напомним себе, что мы сделали в этой главе.

1. Мы заметили, что в целом иметь дело с кривыми труднее, чем с прямыми. Но мы поняли: если увеличивать масштаб, кривая постепенно приближается к прямой. Мы заметили, что если бы могли осуществить «бесконечное увеличение» (что бы это ни значило), то любая кривая выглядела бы прямой. Иными словами, если бы у нас была лупа с бесконечным увеличением, мы могли бы свести задачи с кривыми к задачам с прямыми. Вместо того чтобы горевать, что у нас нет такой лупы, мы вообразили, что она у нас есть.

---

* Simpson S. G. Subsystems of Second Order Arithmetic (Perspectives in Logic). Cambridge University Press, 2010.

** В оригинале игра слов: на латыни и по-английски rigor — и строгость, и твердость, окоченелость. Латинский термин rigor mortis означает трупное окоченение. *Прим. перев.*

2. Мы использовали идею лупы, чтобы определить крутизну кривых, вычислив ее с помощью двух точек, которые «бесконечно близки друг к другу» (хотя мы не были уверены в том, что это значит).

3. Мы кратко обсудили некоторые приспособления, которые люди за долгое время изобрели, чтобы обойтись без идеи бесконечно малых чисел. Мы будем изредка использовать «предел», но чаще — саму идею бесконечно малых чисел. Оба метода дадут один ответ, так что вполне можно переключаться.

4. Мы обсудили разные названия и сокращения, применяемые в учебниках при изложении этих идей. Учебники обычно именуют крутизну M в точке x «производной M в точке x». Вот типовые сокращения: а) $M'(x)$, которое подчеркивает, что производную машины M можно представлять как самостоятельную машину; б) $\frac{dM}{dx}$, которое подчеркивает, что производную M можно представлять как отношение «приращения по вертикали к приращению по горизонтали» для двух точек, бесконечно близких друг к другу.

5. Мы проверили нашу идею на двух примерах, которые не были кривыми: постоянных машинах и прямых. Мы убедились, что наша идея дает разумные ответы в таких простых случаях, когда мы уже знаем, чего ожидать.

6. Затем мы проверили нашу идею на некоторых кривых машинах и выяснили, как использовать ее на любых машинах, которые есть в нашей Вселенной: плюсо-умножательных, или «полиномах».

7. Мы обсудили, как производная позволяет находить экстремумы, а именно места, где машины достигают наибольшего и наименьшего значения. Мы объяснили, почему такие значения обычно можно найти, узнав, в каких точках производная $m'(x)$ равна 0, и в каких случаях эта идея не работает.

ИНТЕРЛЮДИЯ 2

КАК ПОЛУЧИТЬ ЧТО-ТО ИЗ НИЧЕГО

Появление из ничего: от сокращения к идее?

Вскоре после начала путешествия мы ввели понятие степени. Слово «понятие» используется тут с натяжкой: фактически степени не были новой идеей, а только бессмысленным сокращением, которое мы применяем исключительно ради удобства. Сейчас символ (*нечто*)^n — всего лишь сокращение для:

$$\underbrace{(\textit{нечто})\cdot(\textit{нечто})\cdots(\textit{нечто})}_{n\text{ раз}},$$

или просто повторяющегося умножения. В степенях нет ничего, что было бы неверно для умножения, поэтому они не самостоятельны. Но если вы выйдете из нашей частной математической Вселенной и побродите по миру, вы порой услышите, как люди говорят о странных вещах вроде «отрицательных степеней», или «дробных степеней», или «нулевых степеней», а также загадочных предложениях вроде (*нечто*)$^0 = 1$. С учетом того, как определили степени *мы*, непонятно, почему (*нечто*)^0 должно составить 1. Ведь если перевести это сокращение на обычный язык, то оно говорит, что (*нечто*)^0 — это (*нечто*) $\cdot$ (*нечто*) $\cdots$ (*нечто*), где в произведении стоит 0 экземпляров (*нечто*). На первый взгляд это должен быть 0, а не 1, разве нет? Мы использовали ранее сокращение $x^0 \equiv 1$, но исключительно из эстетических соображений. Это давало нам возможность написать выражение для произвольной плюсо-умножательной машины проще, но у нас не было никаких причин считать, что предложение $x^0 \equiv 1$ имеет какой-то смысл сверх этого.

Мы понятия не имеем, что могут означать степени вроде 0, -1 или $\frac{1}{2}$, но у нас есть опыт изобретательства. Поэтому не будем принимать на веру утверждения других, что x^0 равно 1 и т. д., а посмотрим, не сможем ли мы *изобрести* способ расширить идею степеней, чтобы это имело для нас смысл. Попробуем обобщить наше определение (*нечто*)^n на случаи, когда n может быть любым числом, не только целым положительным.

Каждый раз, когда мы пытаемся расширить знакомое определение на новую ситуацию, мы сталкиваемся с тем, что это можно сделать бесконечным числом способов. Но хотя и есть много *способов* обобщения понятия степени, подавляющее большинство обобщений бесплодны, неинтересны и бесполезны. Например, мы можем расширить определение (*нечто*)^n, сказав, что (*нечто*)$^\#$ означает то же, что значило всегда, если # — натуральное число, и (*нечто*)$^\#$ равно 57, если # не натуральное число. Это не противозаконно, но выглядит скучно. Однако это вполне согласуется с нашим старым определением, поэтому о его достоинствах (или недостатках) можно судить только по тому факту, что оно нам не помогает и мы не думаем, что это интересно.

Как обобщать понятие степени, столкнувшись с бесконечным выбором? Очевидно, любое обобщение бесполезно, если оно не полезно. Давайте использовать этот очевидный факт, чтобы выйти за рамки известного. Мы определим обобщение не прямо, а косвенно: «то, что сохраняет определение полезным»; как всегда, только нам решать, что «полезно». Иными словами, нам нужно обнаружить некоторые свойства или поведение сокращения (*нечто*)^n, которые мы сочтем полезными или которые облегчат обращение с объектами вида (*нечто*)^n.

Что ж, поищем способ сказать что-то полезное о знакомом определении (*нечто*)^n. Вы можете решить: «Ну, все, что мы хотим знать о (*нечто*)^n, содержится в его определении, и если мы хотим сказать что-то полезное о (*нечто*)^n, почему бы не дать определение этому: (*нечто*)$^n \equiv$ (*нечто*) $\cdot$ (*нечто*) $\cdots$ (*нечто*)?». Верно, но есть одна проблема. Определение

$$(\textit{нечто})^n \equiv \underbrace{(\textit{нечто})\cdot(\textit{нечто})\cdots(\textit{нечто})}_{n\ \text{раз}}$$

не дает никаких подсказок, как определить что-нибудь вроде $(\textit{нечто})^{-1}$ или $(\textit{нечто})^{\frac{1}{2}}$, поскольку старое определение опиралось на идею, *сколько раз* в произведении появляется (*нечто*). Но что может означать фраза: (*нечто*) появилось половину раза или отрицательное число раз? Очевидно, это не тот путь, которым мы хотим идти, если желаем придать смысл отрицательным и дробным степеням. Наша цель — выбрать поведение знакомого определения, которое будет иметь столько же смысла для нецелых степеней. Это уже полезнее.

Если n — некое натуральное число (скажем, 5), мы всегда можем написать предложения вроде: $(\textit{нечто})^5 = (\textit{нечто})^2(\textit{нечто})^3$: если мы переведем все сокращения с обеих сторон на обычный язык, то слева написано «5 экземпляров *нечто* в ряд», а справа «2 экземпляра *нечто* в ряд, а потом еще 3 экземпляра *нечто*». Очевидно, что это одно и то же. Из тех же соображений, если n и m — натуральные числа, предложение $(\textit{нечто})^{n+m} = (\textit{нечто})^n\,(\textit{нечто})^m$ верно, потому что обе стороны — разные способы сказать «$n + m$ экземпляров *нечто* в ряд». Это полезно, и предложение выражает ту же идею, что и исходное, но в нем не требуется, чтобы n и m были натуральными числами! Не исключено, что мы сможем использовать это как сырье для построения более общего понятия степени. Теперь выделим важное.

На этой стадии мы хотим сказать

Я понятия не имею, что означает $(\textit{нечто})^{\#}$, если # не натуральное число…

Но я хочу, чтобы выполнялось предложение:

$$(\textit{нечто})^{n+m} = (\textit{нечто})^n\,(\textit{нечто})^m$$

Поэтому я потребую, чтобы $(\text{нечто})^{\#}$ означало:

что-то такое, чтобы указанное предложение было истинным.

Подумаем о том, что мы заявили в рамочке. Это несложная идея, но она заметно отличается от способа, которым нас обычно учат думать в школе. Хотя такой стиль мышления нам незнаком, это гораздо более честное представление математических рассуждений, чем любое жонглирование числами. Такой стиль лежит в основе математического изобретения, и множество математических понятий было создано именно так. Обобщать идеи этим способом имеет смысл по двум причинам. Во-первых, это позволяет переносить знакомые нам вещи на незнакомую территорию. Мы не примиряемся с печальным фактом, что новые вещи нам не знакомы, а используем умный концептуальный прием и выбираем определение для них способом, который гарантирует, что мы уже знакомы с ними. Этот прием — определять вещи *косвенно*: не что они собой представляют, а как себя ведут. Во-вторых, вместо того чтобы помнить значение странных вещей вроде $(\textit{нечто})^0$, $(\textit{нечто})^{-1}$ или $(\textit{нечто})^{\frac{1}{2}}$, мы можем выяснить, что они означают для нас! Сделаем это.

Почему отсюда следует, что нулевая степень равна 1

Мы не знаем, что значит $(\textit{нечто})^{\#}$, но требуем, чтобы оно значило что-то такое, чтобы мы могли написать $(\textit{нечто})^{a+b} = (\textit{нечто})^a\,(\textit{нечто})^b$, где a и b — произвольные числа, не обязательно целые или положительные. Давайте используем этот необычный способ, чтобы узнать, что должно означать $(\textit{нечто})^0$. Используя идею в рамочке выше, мы можем написать:

$$(\textit{нечто})^{\#} = (\textit{нечто})^{\# + 0} = (\textit{нечто})^{\#}\,(\textit{нечто})^0.$$

Это говорит нам, что $(\textit{нечто})^0$ должно быть числом, которое не изменяет объект, когда вы умножаете объект на него. Очевидно, что $(\textit{нечто})^0$ должно быть 1. Эгей! Это уже имеет смысл! Давайте запишем.

Наше косвенное определение приводит к тому, что верно:

$$(\textit{нечто})^0 = 1.$$

Почему отсюда следует, что отрицательные степени делают стойку на руках

Мы не знаем, что значит $(\textit{нечто})^{-\#}$, но продолжим следовать той же стратегии. Обратите внимание: предложение, которое мы использовали как основу для обобщения, включает только *сложение* степеней: $(\textit{нечто})^{a+b} = (\textit{нечто})^{a}\,(\textit{нечто})^{b}$.

Как насчет вычитания степеней, $(\textit{нечто})^{a-b}$? Что ж, записав $a - b$ в необычной форме $a + (-b)$, мы можем сделать так, чтобы предложение говорило о вычитании на языке сложения.

Применяя эту идею вместе с уже выявленным фактом, что $(\textit{нечто})^0 = 1$, мы можем получить:

$$1 = (\textit{нечто})^0 = (\textit{нечто})^{\#-\#} = (\textit{нечто})^{\# + (-\#)} = \\ = (\textit{нечто})^{\#}\,(\textit{нечто})^{-\#}.$$

Если мы разделим обе части на $(\textit{нечто})^{\#}$, мы построим предложение, которое скажет нам, как переводить отрицательные степени на язык положительных.

Давайте это запишем.

Наше косвенное определение приводит к тому,
что должно быть верно:

$$(\textit{нечто})^{-\#} = \frac{1}{(\textit{нечто})^{\#}}.$$

В учебниках выражение, которое выглядит как $\frac{1}{x}$, обычно называется величиной, обратной x.

Нам не понадобится часто называть это понятие, так что неважно, как мы его поименуем. Термин «обратная величина» неясен, так что будем использовать термин «стойка на руках», потому что $\frac{1}{x}$ — просто x вверх ногами.

Почему отсюда следует, что дробные степени являются длиной стороны *n*-мерного куба

Хорошо, разобрались с нулевыми и отрицательными степенями. Что делать с нецелыми, например, $(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}$? Сначала предположим, что число n целое, и посмотрим, что выйдет.

$$(\textit{нечто}) = (\textit{нечто})^1 = (\textit{нечто})^{\frac{n}{n}} = (\textit{нечто})^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}^{n\,\text{раз}}} =$$
$$= \underbrace{(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}} \cdot (\textit{нечто})^{\frac{1}{n}} \ldots (\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}}_{n\,\text{раз}}.$$

Странно. У нас есть какая-то неизвестная вещь ($\frac{1}{n}$-я степень *нечто*) и еще одна неизвестная вещь (само *нечто*). Обычно мы объясняем незнакомую вещь в терминах одной или нескольких более знакомых. А здесь всё наоборот! Здесь описывается *нечто* в терминах разных незнакомых вещей: n экземпляров его $\frac{1}{n}$-й степени. Сформулируем это проще.

> **Наше косвенное определение приводит к тому, что должно быть верно:**
> $(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}$ — любое число, которое может сказать следующую фразу, не солгав: «Умножьте меня на меня n раз, и вы получите (*нечто*)».

В каком-то смысле этот процесс обратен нахождению «объема» n-мерного куба. Ранее, когда мы изобрели понятие площади, мы убедились, что n-мерный объем n-мерного куба должен быть l^n, где l — длина стороны куба. Сейчас только что полученное нами определение для $(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}$ выглядит так, что вроде бы говорит об объемах n-мерных кубов… но наоборот. Оно не сообщает привычное:

От длин к n-мерным объемам: n-е степени.

Если вы даете мне длину l стороны n-мерного куба, то его объем равен l^n.

Оно говорит обратное. Что-то вроде:

от *n*-мерных объемов к длинам: $(\frac{1}{n})$-е степени.

Если вы даете мне объем *V* *n*-мерного куба, то длина каждой стороны равна $V^{\frac{1}{n}}$.

Полагаю, именно отсюда пришли забавные термины «квадратный корень» и «кубический корень». Если мы знаем только площадь квадрата (которую можем обозначить *A*), как узнать длину его стороны? Ну, возможно, мы не знаем, как вычислить точную длину, если *A* составит безумное число вроде 9235, но это и хорошо. Не в числах дело, а в идеях. Идея же такова. Мы знаем, что «длина стороны» — любое число, которое превращается в *A* при умножении на себя. Иначе говоря, это любое число (?), которое делает истинным предложение $(?)^2 = A$. Чему оно равно? Я не знаю, но оно называется $A^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, даже если мы не знаем, как вычислять конкретные величины для $7^{\frac{1}{2}}$ или $59^{\frac{1}{2}}$, мы в курсе, как эти числа ведут себя и что они означают: если площадь квадрата равна *A*, то длина стороны равна $A^{\frac{1}{2}}$. Это же работает для кубов в обычном трехмерном смысле слова и даже для тех странных *n*-мерных, о которых мы говорили выше (мы не можем их изобразить, но дело опять же не в этом). Вот почему $(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}$ часто называют «корнем *n*-й степени из (*нечто*)».

Слово «корень» не обязательно: корень *n*-й степени из чего-либо — просто $(\frac{1}{n})$-я степень. Наличие у «корней» своего имени (не говоря уже об их $\sqrt{\text{странном}}$ обозначении) часто создает у людей впечатление, будто термин относится к другому (более загадочному) понятию, чем степени. Но в нем нет ничего загадочного, и осознание этого не требует, чтобы вы умели вычислять произвольные корни из произвольного числа! Нам нужно чуть больше анализа, чтобы узнать, как это делать. Но опять же дело вовсе не в вычислении конкретных чисел, а в идеях и в том, как они создаются. И в случае степеней, как и всегда в математике, фундаментальные идеи просты.

ГЛАВА 3

СЛОВНО ВЫЗВАННОЕ ИЗ ПУСТОТЫ

И всякая наука, если понимать ее не как инструмент власти и могущества, но как путешествие-приключение человеческого сознания, предпринятое века тому назад, — есть не что иное, как гармония богатая или бедная тонами, смотря по эпохе, которая разворачивается перед нами, пока мы размениваем столетия и поколения, изысканным контрапунктом всех этих тем, вступающих поочередно — словно бы призванных из небытия, чтобы, переплетясь друг с другом, слиться в ней воедино.

Александр Гротендик, «Урожаи и посевы»*

3.1. Кто это заказывал?

3.1.1. От сокращения к идее... Нечаянно

В интерлюдии 2 мы открыли нечто странное. Изначально мы вводили $(\textit{нечто})^n$ как сокращение. Иначе говоря, мы просто определяли

$$(\textit{нечто})^n \equiv \underbrace{(\textit{нечто})\cdot(\textit{нечто})\cdots(\textit{нечто})}_{n\ \text{раз}}.$$

Пока мы использовали для степеней только натуральные числа, мы могли быть уверены, что в понятии степени нет ничего непонятного. Ведь степени сами по себе были вовсе не *понятием*, а пустым и бессодержательным *сокращением*. О них было нечего знать. Однако, расширяя это (не-)понятие на степени, которые не представляют собой целые положительные числа, мы осуществили странный акт математического творения. Мы сказали:

* Издана на русском языке: Гротендик А. Урожаи и посевы. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. *Прим. ред.*

Я понятия не имею, что означает $(\textit{нечто})^{\#}$,
если # не натуральное число…
Но я хочу, чтобы выполнялось предложение:
$(\textit{нечто})^{n+m} = (\textit{нечто})^{n}\,(\textit{нечто})^{m}$.
Поэтому я потребую, чтобы $(\text{нечто})^{\#}$ означало:
что-то такое, чтобы указанное предложение было истинным.

Пытаясь расширить идею бессодержательного понятия до содержательного, мы обнаружили, что случайно вызвали из пустоты идею, о которой *было* что-то известно и с которой мы были незнакомы. Проделав то, что выглядело всего лишь безобидным актом обобщения и абстракции, мы обнаружили, что создали новую и неисследованную часть нашей Вселенной. После краткого ее изучения мы открыли три простых факта о нашем случайном умозрительном детище.

Мы открыли, что должно быть верно следующее:

$$(\textit{нечто})^{0} = 1$$

$$(\textit{нечто})^{-\#} = \frac{1}{(\textit{нечто})^{\#}}$$

$$\underbrace{(\textit{нечто})^{\frac{1}{n}} \cdot (\textit{нечто})^{\frac{1}{n}} \cdots (\textit{нечто})^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ раз}} = (\textit{нечто}).$$

У нас нет оснований считать, что это полная карта мира, который мы ненароком изобрели. Например, создав отрицательные и дробные степени, мы также ненароком создали неисследованное множество новых машин.

Новые машины, которые должны существовать в силу нашего изобретения:

$$M(x) \equiv x^{-1}$$

$$M(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}$$

$$M(x) \equiv x^{-\frac{1}{7}} + 92x^{\frac{21}{5}} - \left(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{333}{222}}.$$

Третий пример ясно показывает, как велик этот новый и неисследованный уголок нашей Вселенной. А ведь мы только начали ощущать завершенность! Вспомните, что в конце главы 2 мы не только придумали способ обозначения для всех машин, имевшихся тогда в нашей Вселенной — плюсо-умножательных, — но и узнали, как дифференцировать любую из них (и поэтому все), проделав ловкий трюк с дифференцированием сокращения, которое обозначало произвольную машину (поэтому мы дифференцировали все машины одновременно).

Чтобы подчеркнуть, насколько больше стал наш мир, обратим внимание, что предположительно все машины имеют производные. На данный момент мы не знаем ни одной из них, хотя этот мир создан нами. Математика удивительна… Хорошо, слегка вздремнем, чтобы осознать необъятность сделанного, а когда проснемся, возможно, у нас хватит сил немного поэкспериментировать с некоторыми из этих машин и увидеть, желаем ли мы признать их или предпочли бы сделать вид, будто их не существует.

3.1.2. Наглядное представление некоторых из этих зверей

Сохраняя дух созидания математики с фундамента, мы используем только те факты, которые открыли для себя (хотя постоянно упоминаем и другие), выбираем свои сокращения и терминологию (изредка разрешая увязаться за нами стандартной), и рисуем от руки все картинки. Но как при таком подходе можно изобразить новых тварей, которых мы ненароком придумали? В данный момент мы понятия не имеем, как вычислить конкретные величины вроде $\frac{1}{53}$ или $7^{\frac{1}{2}}$. Соответственно, как мы представляем себе наглядное изображение графиков вроде $\frac{1}{x}$ или $x^{\frac{1}{2}}$? Хотя наши возможности визуализации в этой новой части Вселенной ограничены, недостаток визуальной ясности не должен стоять на пути осознания поведения новых машин. Потратим минутку на то, чтобы, используя наши знания, представить себе, как выглядят эти машины. Не будем пытаться изображать что-то сложное вроде

$$M(x) \equiv x^{-\frac{1}{7}} + 92x^{\frac{21}{5}} - \left(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{333}{222}},$$

а сосредоточимся на простейших представителях новых машин, которые мы создали. В предыдущей интерлюдии мы изобрели три новых вида степеней: нулевые, отрицательные и дробные. Поскольку нулевые степени дают 1, по сути, у нас только два новых явления: отрицательные и дробные степени. Простейший представитель отрицательных степеней выглядит так:

$$M(x) \equiv \frac{1}{x} \equiv x^{-1},$$

а простейший представитель дробных — так:

$$M(x) \equiv \sqrt{x} \equiv x^{\frac{1}{2}}.$$

Начнем с первого. Неважно, что у нас нет ни терпения, ни знаний, чтобы вычислить конкретное значение для 7^{-1}, $(9{,}87654321)^{-1}$ или что-нибудь еще. Нам нужно знать поведение машины $M \equiv x^{-1}$ в целом, чтобы мы могли получить интуитивное представление о том, как она выглядит и как себя ведет. По сути, всё, что мы знаем об этой машине, можно обобщить в следующих четырех математических предложениях, которые на деле оказываются одним предложением, выраженными разными способами*.

$$\frac{1}{\textit{крохотное}} = \textit{огромное}$$

$$\frac{1}{\textit{огромное}} = \textit{крохотное}$$

$$\frac{1}{-\textit{крохотное}} = -\textit{огромное}$$

$$\frac{1}{-\textit{огромное}} = -\textit{крохотное}.$$

* Замечание: здесь слово *крохотное* означает не «бесконечно малое» число, а обычное число вроде 0,000(куча нулей)0001. Аналогично, *огромное* — это тоже обычное число, а не «бесконечно большое».

Например, $\dfrac{1}{100\ 000\ 000}$ — крохотное число, а $\dfrac{1}{0{,}00000001}$ — огромное. Делая x все меньше, мы можем сделать $\frac{1}{x}$ сколь угодно большим. Чтобы увидеть это, не нужно утомительной арифметики. Это следует из нашей позиции, что никакого деления не существует. С самого начала мы говорили, что $\frac{a}{b}$ — просто сокращение для $(a)\left(\frac{1}{b}\right)$, а забавный символ $\frac{1}{b}$ — сокращение для любого числа, которое становится 1 при умножении на b. Символ определен не тем, *что он есть*, а тем, *как он себя ведет*; отсюда, естественно, следует, что $\dfrac{1}{\textit{огромное}}$ должно быть крохотным числом: оно обозначает число, которое становится 1 при умножении на огромное, но если число превращается в 1 только после такого действия, исходное число должно быть крохотным.

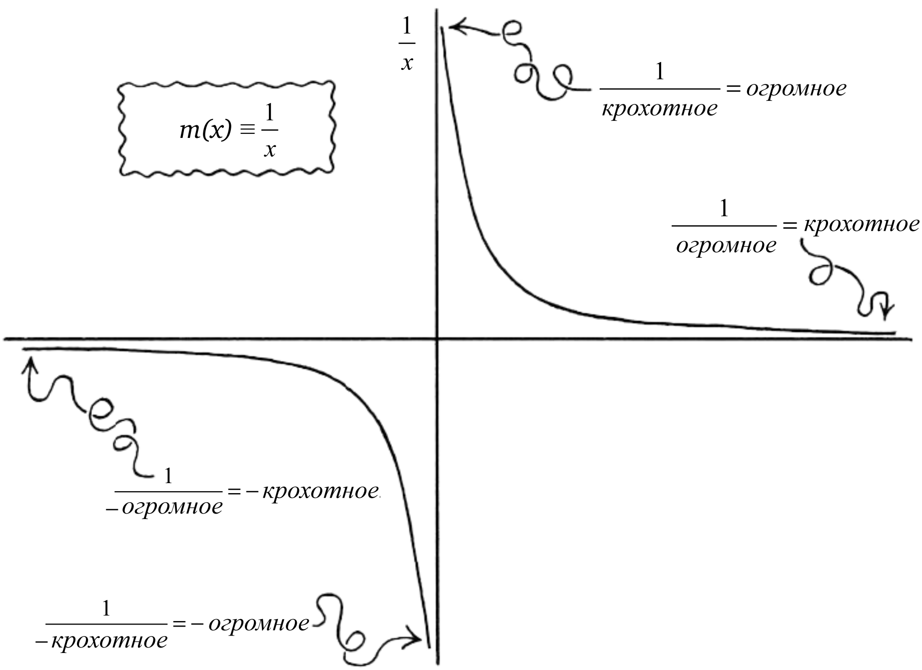


Рис. 3.1. Мы знаем, что: а) 1, деленная на крохотное число, огромна; б) 1, деленная на огромное число, крохотна; в) в двух предыдущих фразах значение «крохотного числа» может быть сколько угодно крохотным для достаточно больших значений «огромных чисел», и наоборот. Это дает нам общее понимание того, как выглядит машина $m(x) \equiv \frac{1}{x} \equiv x^{-1}$, даже если мы не можем вычислить конкретные значения вроде $\frac{1}{7}$, а также во многом потому, что нам это неинтересно

Эта идея проста, и нам не нужно ничего, кроме нее, чтобы получить рис. 3.1.

Что ж, мы всё еще не умеем вычислять конкретные величины $\frac{1}{7}$ или $\frac{1}{59}$, но получить общее представление об $\frac{1}{x}$ для *всех* значений x не так трудно, как ожидалось. Математика может быть устроена шиворот-навыворот, как в этом случае.

Как насчет второго нового типа машин? Сможем найти способ наглядно представить $m(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}$, также известную как $\sqrt{x}$? Как и в предыдущем случае, мы понятия не имеем, как вычислять значение $\sqrt{7}$, $\sqrt{729{,}23521}$ или бесконечно много других чисел. Но мы умеем умножать, поэтому способны возводить в квадрат целые числа. Например,

$$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9 \qquad 4^2 = 16$$

и т. д. Теперь, используя определение дробных степеней, которые мы изобрели в предыдущей интерлюдии, мы можем переписать эти предложения другим языком:

$$1 = 1^{\frac{1}{2}} \qquad 2 = 4^{\frac{1}{2}} \qquad 3 = 9^{\frac{1}{2}} \qquad 4 = 16^{\frac{1}{2}}$$

Что будет с числами меньше 1? Возьмем простой пример: мы знаем, что $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, иначе говоря

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Получается следующее. Если число больше 1, то $\frac{1}{2}$ степень уменьшает его. Если оно меньше 1, то $\frac{1}{2}$ степень увеличивает его. Используя всё, что мы написали, можно с разумной детализацией нарисовать, как выглядит машина $m(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}$. Наша попытка представлена на рис. 3.2. Как и в предыдущем случае, мы смогли создать общее представление о поведении машины для всех x, хотя по-прежнему не умеем вычислять конкретные значения для величин вроде $7^{\frac{1}{2}}$. Это норма для математики — вопреки тому, во что нас заставляют верить.

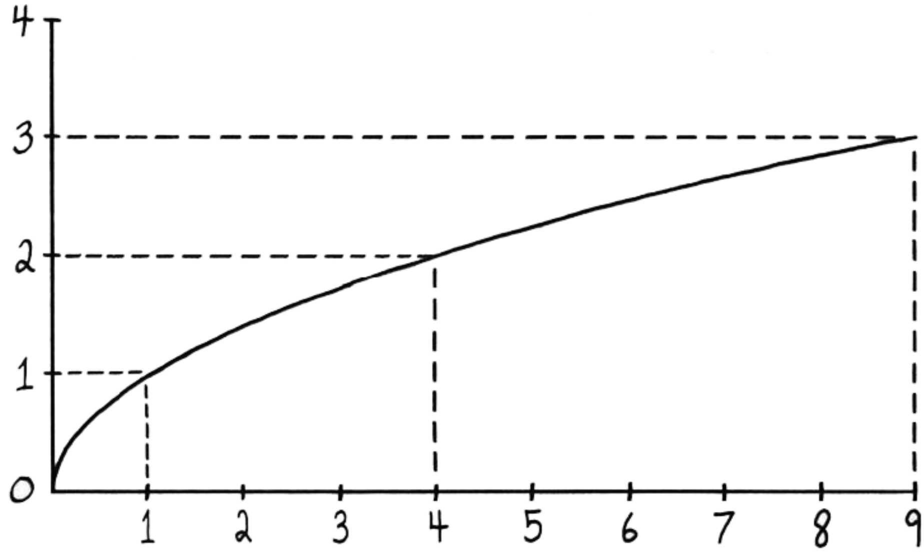


Рис. 3.2. Использование той малости, что мы знаем, для изображения машины возведения в половинную степень $m(x) \equiv \sqrt{x} \equiv x^{\frac{1}{2}}$

3.1.3. Эксперименты с нашими случаями и попадание в безнадежную ловушку

Когда мы пишем статьи для научных журналов, мы представляем работу в максимально сглаженном виде, заметаем все следы, не тревожимся о тупиках, не описываем, какая неправильная идея была у нас вначале, и т. д. Поэтому нам негде рассказать достойным образом, как мы на самом деле пришли к такому результату, хотя сейчас уже есть определенный интерес к вещам такого рода.

Ричард Фейнман, Нобелевская лекция, 11 декабря 1965 года

Что ж, посмотрим, будет ли иметь смысл наша идея с лупой для этих новых вещей. Опробуем ее на самой простой из наших новых машин с дробной степенью: $m(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}$. Имеем:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t} \equiv \frac{(x+t)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{t} = \text{Эээ…}$$

Мы понятия не имеем, что с этим делать. На минуту отступим и посмотрим, не легче ли применять нашу лупу с бесконечным увеличением для одной из машин с отрицательными степенями. Снова пробуем на самой простой: $m(x) \equiv \frac{1}{x}$. На старт, внимание, марш:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t} \equiv \frac{\frac{1}{(x+t)} - \frac{1}{x}}{t} = \ldots?$$

Снова застряли. У нас нет подсказок, что делать с этими неуклюжими новыми тварями. Но, несмотря на почти полное незнакомство с ними, *кое-что* о них мы знаем. В конце концов, мы же их изобрели! Мы обобщали степени, сказав: «это то, что ведет себя вот так», где «ведет себя вот так» означало «подчиняется формуле разделения степеней». Поэтому одно из фундаментальных свойств незнакомых новых машин таково: мы можем превратить их во что-то более знакомое, столкнув с другими машинами с помощью умножения. Например, для любого числа n мы изобрели тот факт, что $(x^n)\ (x^{-n}) = x^{n-n} = x^0 = 1$, или короче:

$$(x^n)\ (x^{-n}) = 1. \tag{3.1}$$

В предыдущей главе мы выяснили, что для любых машин f и g (не только плюсо-умножательных, но и, возможно, гораздо более экзотических) справедливо $(f + g)' = f' + g'$. Мы нашли способ говорить о производной двух сложенных вещей в терминах производных отдельных частей (иначе говоря, производная суммы равна сумме производных). Мы удивлялись, как легко было это установить, используя только определение производной и ничего не зная о конкретных слагаемых f и g. Мы не представляем, какова производная x^{-n}, но описанная выше идея в сочетании с уравнением 3.1 предлагает многообещающий подход.

Если бы мы умели говорить о производной двух умноженных друг на друга вещей в терминах производных сомножителей, то мы могли бы напасть из засады на новые дикие машины, использовав уравнение 3.1 двумя разными способами. Напишем сокращение для того, что мы можем назвать «трюковой машиной», что-то вроде $T(x) \equiv (x^n)\ (x^{-n})$. Мы используем букву T, поскольку с помощью такого обманного Tрюка пытаемся заставить математику рассказать нам что-нибудь. Эта машина T является *пр со То…*

(Снова слышен знакомый грохочущий шум.
Интенсивность грохота нарастает несколько секунд,
а потом все прекращается без предупреждения.)

Ох, только не это опять! Из-за идиотского шума я неправильно написал слово «просто». Извините, Читатель, это, должно быть, одно из знаменитых калифорнийских землетрясений. Не обращайте внимания, если можете. Сомневаюсь, что это будет важно. Где мы были? Отлично! Трюковая машина $T(x) \equiv (x^n)\ (x^{-n})$ — просто вычурный способ записать число 1, и мы знаем, что производная машины T равна 0.

Но если бы в нашем распоряжении был способ говорить о производной «произведения» (двух вещей, умноженных друг на друга) в терминах производных для отдельных сомножителей, мы могли бы переключать точку зрения: думать о машине T как о произведении двух машин x^n и x^{-n} и использовать пока еще не открытый метод выражать производную целого через производные сомножителей. Мы бы сделали одно и то же двумя способами. С одной стороны, мы знаем, что производная T равна 0, поскольку машина T — просто переодетая постоянная машина 1. С другой стороны, у нас был бы другой способ выразить производную T: через то, что мы уже знаем (производную x^n), и то, что хотим узнать (производную x^{-n}). Тогда, если бы нам повезло, мы могли бы поманипулировать этим сложным выражением и выделить часть, которая нам нужна (а именно производную x^{-n}). Это, конечно, попытка ткнуть пальцем в небо, вряд ли она сработает, но, по крайней мере, это творческая идея.

Эй, это не всё! Если бы мы нашли общую формулу для производной произведения, мы могли бы взяться и за машины с дробными степенями! Мы ранее потерпели фиаско с $M(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}$, но изобретенная нами идея степеней дает

$$(x^{\frac{1}{2}})\ (x^{\frac{1}{2}}) = x. \tag{3.2}$$

Поэтому, как и ранее, если бы мы могли выразить производную произведения через производные сомножителей, мы бы использовали это выражение, чтобы обманом заставить математику рассказать нам, какова производная $x^{\frac{1}{2}}$!

(Раздел подходит к концу,
громыхания не слышно.
Тревожная тишина
опустилась
на книгу…)

3.1.4. Попытка ткнуть пальцем наугад

Идея выглядит надуманной, мы не уверены, что она сработает, но можем попробовать. В конце концов, у нас не так много вариантов, а вокруг никого, кто накажет нас, если ничего не получится. Немного поэкспериментируем и посмотрим, сможем ли продвинуться с такой обнадеживающей иллюзией.

Ричард Фейнман сказал знаменитую фразу, что первый шаг в открытии нового физического закона — предположить его. Это была шутка, но, по сути, он не шутил. Открытие новых идей — по своей природе процесс анархический. Реальность не волнует, как мы спотыкаемся о ее секреты, и догадка — такой же эффективный метод, как и любой другой. Попробуем этот подход. Мы уже знаем, что $(f + g)' = f' + g'$. Иными словами, мы в курсе, что производная суммы равна сумме производных. Поэтому первое естественное предположение таково: возможно, производная произведения равна произведению производных. Звучит разумно, правда? Запишем, напомнив себе, что это просто предположение:

$$(fg)' \overset{\textit{Предположение}}{=} f'g'. \tag{3.3}$$

Итак, мы высказали предположение. Оно обосновано фактом, истинность которого мы *знаем*: $(f + g)' = f' + g'$. Так что мы не действовали совсем уж наугад. Если наше предположение верно, оно должно согласовываться с тем, что мы уже знаем, так что посмотрим, воспроизводит ли оно вещи, которые мы открыли ранее. Мы знаем, что производная x^2 равна $2x$, и если наше предположение верно, то мы могли бы написать производную x^2 в таком виде:

$$(x^2)' \equiv (x \cdot x)' \overset{???}{=} (x)'\,(x)' = 1 \cdot 1 = 1.$$

Похоже, не сработало. Неверно, что $2x$ равно 1 для любого x. Ладно. Предположение было неверным, но мы чему-то научились. А если обернуться назад, то мы с самого начала должны были увидеть, что ошиблись. Ведь если бы выполнялось $(fg)' = f'g'$, то производная *всего* равнялась бы 0. Почему? Потому что любая машина f равна себе, умноженной на 1, и если бы предположение было верным, то мы могли бы всегда написать так:

$$(f)' = (1 \cdot f)' \overset{\text{Ух ты!}}{=} 1'f' = 0 \cdot f' = 0.$$

Итак, первое предположение не годится, и непонятно, что нам делать. Думаю, остается только вернуться к самому началу. Что было в начале? Ну, подозреваю, стоит вернуться к определению производной. Просто представим, что f и g — произвольные машины, не обязательно плюсо-умножательные, и определим $M(x) \equiv f(x)g(x)$. Машина M выплевывает произведение чисел, которые выплевывают f и g. Используя определение производной и сокращение t для крохотного числа, мы имеем:

$$\frac{M(x+t)-M(x)}{t} \equiv \frac{f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x)}{t} = \ldots? \qquad (3.4)$$

И мы снова застряли. Раньше разворачивание не отнимало много времени! Что стряслось сейчас?

Было бы хорошо, если бы мы могли солгать и изменить задачу, ведь она выглядит *почти* как та, с которой мы бы справились. Если бы в формуле было не $f(x+t)$, а $f(x)$, можно было бы добиться прогресса. Забудем на время реальную задачу и проверим вариант, который получился бы, если бы нам разрешили солгать. Я напишу $\overset{\text{Ложь!}}{=}$ там, где мы изменим условия для облегчения задачи. Это нормально, пока мы помним, что решаем не оригинал. Это может оказаться бессмысленным, но кто знает? Ложь во имя прогресса может дать нам какие-нибудь идеи о том, что делать с проблемой, которая ставит нас в тупик. Имеем:

$$\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x)}{t} \overset{\textit{Ложь!}}{=} \frac{f(x)g(x+t)-f(x)g(x)}{t} =$$
$$= f(x)\left(\frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right).$$

Отлично! Мы уже прошли участок, где раньше застревали. Теперь устремим t к 0, как мы обычно делали, и левая часть превратится в производную $M(x) \equiv f(x)g(x)$, а правая — в $f(x)g'(x)$, так что мы получим:

$$[f(x)g(x)]' \overset{\textit{Ложь!}}{=} f(x)g'(x).$$

Это помогает? Ну, мы получили *какой-то* ответ, но не настоящий, потому что солгали. Но, может, если мы вернемся к исходной задаче, снова так же солжем, но потом *сделаем поправку на ложь*, то сможем добиться аналогичного прогресса, *не* меняя исходной задачи. Как мы лжем и вносим поправку? Давайте добавим 0… но не любой. Вместо того чтобы реально изменять задачу, как мы делали выше, добавим элемент, который мы бы *хотели* иметь, а потом вычтем его же, и в результате задача не изменится.

Ложь в том, что мы добавим $f(x)\ g(x+t)$ в верхней части исходного выражения, но придется также вычесть $f(x)\ g(x+t)$, чтобы ничего не изменилось. В итоге получится, что мы ничего не делаем, просто добавляем 0. Но просто сказать «сейчас добавляем 0» в середине длинной цепочки уравнений — не значит выразить то, что мы думаем, и это точно не отражает необычности и разумности идеи. На самом деле мы только что анархически сделали *то, что хотели*, чтобы добиться прогресса, а потом извинились за свое лихачество, добавив равное и противоположное по знаку противоядие, чтобы компенсировать сделанное. Смесь яда и противоядия не изменяет задачу, но на ней в результате наших действий появляется что-то вроде шрама вида «(*нечто*) – (*нечто*)», и если мы сконструируем ложь аккуратно, это даст нам то, за что мы можем ухватиться и продвинуться вперед. Посмотрим, работает ли на самом деле эта идея.

Имеем:

$$\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x)}{t}=$$

$$=\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x)+\overbrace{\left[f(x)g(x+t)-f(x)g(x+t)\right]}^{\text{Ложь и поправка}}}{t}=$$

$$=\frac{\overbrace{\left[f(x)g(x+t)-f(x)g(x)\right]}^{\text{Часть, которую мы хотим получить}}+\overbrace{\left[f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x+t)\right]}^{\text{Остатки}}}{t}=$$

$$=f(x)\left(\frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right)+\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right)g(x+t).$$

Сработало лучше, чем мы ожидали. Сделав поправку на ложь, мы получили остатки, которых не хотели. Но по какой-то счастливой случайности с ними произошло желаемое: мы обнаружили, что можно взять $g(x+t)$ и вынести за скобки.

В последней строке цепочки уравнений выше у нас есть четыре элемента. Как только мы устремим t к 0, каждый из них превратится либо в одну из двух машин, либо в одну из их производных. Первый элемент останется $f(x)$, второй превратится в $g'(x)$, третий в $f'(x)$, а четвертый останется $g(x)$. Иными словами, получится $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Наша ложь и ее исправление сработали! Отпразднуем и обобщим это, создав отдельную рамочку.

Как выразить производную произведения через производные сомножителей

Мы только что открыли:

если $M(x) \equiv f(x)g(x)$,

то $M'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Напишем это другим способом:

$$(fg)'=f'g+g'f$$

Теперь еще одним способом!

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=(\frac{d}{dx}f(x))g(x)+f(x)(\frac{d}{dx}g(x))$$

Рискнем еще раз!

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Вы еще тут? Отлично, еще разок!

$$\frac{d}{dx}(fg) = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$$

3.2. Обман математики!

Потерпев сокрушительное поражение в первой попытке найти производные наших неуклюжих машин, мы возвращаемся с намного более мощным молотком*. Мы пока не вполне уверены, что он будет работать, но попробуем.

Тсс! Не надо, чтобы математика нас услышала!
Сейчас мы попробуем обманом заставить ее рассказать нам,
как дифференцировать новые незнакомые машины вроде тех,
о которых говорили раньше.
Определим трюковую машину $T(x) \equiv (x^n)\ (x^{-n})$.
Втайне мы знаем, что $T(x)$ — просто скучная машина,
которая всегда выплевывает 1.
То есть втайне $T(x) = 1$ для всех x.
Поэтому мы знаем, что ее производная $T'(x) = 0$.
Но представьте, что мы этого не знаем!
Давайте действовать так, будто мы считаем, что тут соединение
двух сложных элементов,
и посмотрим, что нам скажет математика…

Кхе-кхе. Извините, тут нужно прокашляться. Хорошо, математика, сейчас мы собираемся дифференцировать $T(x)$. Я обещаю, что это обычная

---

* Я буду использовать слово «молоток» для некоторых теорем, в частности так называемых правил дифференцирования. Слово уместно, потому что: а) они крайне мощные; б) они позволяют нам разбить сложные задачи на более мелкие кусочки и в) каждое использование слов «теорема» или «правило» только добавляет общей тоски во Вселенной.

машина. Читатель и я ничего от вас не скрывают. Раньше мы узнали, что производная x^n — просто nx^{n-1}, так что давайте использовать этот факт совместно с только что изобретенным нами молотком.

Хотя мы, естественно, знаем, что $T'(x) = 0$,
поставим знак вопроса над равенством,
чтобы математика не сообразила, что мы делаем.

$$0 \overset{???}{=} T'(x) \equiv \left[\left(x^n\right)\left(x^{-n}\right)\right]' =$$

$$= \overbrace{\left(x^n\right)'\left(x^{-n}\right)+\left(x^n\right)\left(x^{-n}\right)'}^{\text{Только что изобретенный молоток}} =$$

$$= \overbrace{\left(nx^{n-1}\right)}^{\left(x^n\right)'}\overbrace{\left(x^{-n}\right)+\left(x^n\right)\left(x^{-n}\right)'}^{\text{То же, что и выше}} =$$

$$= \overbrace{nx^{n-1-n}}^{\text{Степени складываются}} + \overbrace{\left(x^n\right)\left(x^{-n}\right)'}^{\text{То же, что и выше}} =$$

$$= nx^{-1} + \overbrace{\left(x^n\right)\left(x^{-n}\right)'}^{\text{Эта скобка не помогает}}.$$

Ладно. Если бы все это действительно было равно 0…

Тсс! Мы это знаем, но не хотим, чтобы математика сообразила!

…то мы могли бы попробовать выразить $(x^{-n})'$, пото…

(Автора снова прерывают,
сначала знакомым громыханием,
а потом незнакомым голосом.)

Математика:

(Совершенно не подозрительным голосом.)

Почему вы пытаетесь это сделать?

Ну, вы знаете… просто побаловаться… ради смеха…

Математика:

…Продолжайте.

Уф… хорошо. Я не ожидал такого.

*(Автор минуту сидит молча,
в сомнениях из-за такого неожиданного развития сюжета.
Это может закончиться фундаментальными переменами для книги.
Нужно принять важные решения.)*

Хорошо, забудем это… Я потом это просто вычеркну. В любом случае получаем, что если $T'(x) = 0$, мы можем вернуться туда, где остановились, и написать:

$$0 = nx^{-1} + (x^n)\,(x^{-n})'.$$

Пробуем отделить ту часть, которую мы не знаем, то есть $(x^{-n})'$. Сначала мы можем сделать так:

$$-nx^{-1} = (x^n)\,(x^{-n})',$$

а затем так:

$$\frac{-nx^{-1}}{(x^n)} = (x^{-n})'.$$

Переписав это на языке отрицательных степеней, получаем:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Отлично! Посмотрим, что мы сделали. Мы обманом заставили математику сообщить нам производную незнакомой машины x^{-n}, сунув ее в трюковую машину $T(x) \equiv (x^n)\,(x^{-n})$. Мы назвали ее трюковой, потому что она — просто переодетое число 1. Но мы притворились, что не знаем этого, чтобы найти второе выражение для ее производной. Мы получили это выражение, рассматривая машину как произведение двух других: знакомой, которую умеем дифференцировать, и незнакомой, которую хотим уметь дифференцировать. Это дало нам много слагаемых, которые в сумме равны 0, и отсюда мы выделили ту часть, которую хотели. Выглядит как жульничество, но это не так! Если наш молоток $(fg)' = f'g + g'f$ действительно верен (а мы знаем это, потому что изобрели его), наш ловкий способ применить его также должен давать верный ответ. Ха! Вот тебе, математика!

Математика:

(Гулким, но спокойным и слегка обиженным голосом.)

Не то чтобы я хотела встревать в разговор, но я тут услыхала, как вы говорите, будто обманули меня. Я полагаю, это несущественно, но если вы дадите мне минутку, я могу продемонстрировать (или хоть попытаться), что такой стиль рассуждений — ни в коем случае не (ущербный трюк) или (табу)*. Будем считать, что вы дали мне время и убедились. Будьте так любезны, хватит говорить, что вы обманули меня.

Автор: Ну… конечно.

Читатель: Никаких проблем.

Читатель (*тихо*)**:** Что происходит?

Автор: Я не знаю! Раньше такого никогда не было.

Читатель: Не знаю, как к этому относиться.

Автор: Я тоже! С каких пор математика может разговаривать?!

Читатель: Это у вас надо спросить! Это же вы писа…

Математика: Не возражаете, если я вмешаюсь?

Читатель: Продолжайте.

Автор: Давайте.

Математика: Хорошо. Я не совсем понимаю, что тут творится. Я только пробудилась в пустоте, когда услышала, что кто-то рассказывает, как обманул меня. Я… Не то чтобы я намеревалась вмешиваться в то, что вы делаете… Но когда можно только слушать других, говорящих о тебе перед этим так долго, начинаешь чувствовать… Одиночество… Или какое-то ощущение, изоморфное или, возможно, гомоморфное этому… Говоря об этом, вы оба никого не обманете названием раздела. Вы думаете, я не вижу такого тривиального изоморфизма?

* **Математика:** Мои извинения за использование скобок, но это предложение было неассоциативным и поэтому неопределенным (без первой пары скобок) и эстетически неприятным (без второй пары скобок). Я буду опускать их, когда смогу, но важно разъяснять свою точку зрения или, скорее (чтобы сказать то же самое, но не таким директивным образом), я предпочитаю, чтобы меня можно было понять. Понятно?

Читатель: Что еще за изомор…

Автор: Потом. Сейчас не время.

Математика: Перед тем как я продолжу, дайте мне создать новый раздел. Если наша дискуссия будет продолжаться, она должна идти под заглавием, которое более точно отражает ситуацию…*

3.3. Появляется новый привлекательный персонаж

Математика: Вот так лучше! А теперь к делу. Моя цель — показать, что ваш предыдущий вывод никоим образом не был ни математическим трюком, ни запрещенной формой рассуждений, и от вас не требуется верить этому моему заявлению. В пустоте мы живем в состоянии анархии. Но доверие должно как-то развиваться. При отсутствии законов две стороны могут способствовать этому, делая себя уязвимыми, например делясь секретами или совершая запрещенное действие в присутствии другой стороны. Я назову это «аксиома T». T означает доверие (trust). Или табу. Я еще не решила. Итак, либо ваше рассуждение было математически запрещенным, либо нет. Если мы считаем, что не было, демонстрировать нечего, и мы можем продолжать книгу. Но если мы считаем, что оно было запрещенным, то с помощью аксиомы T я могу увеличить ваше доверие ко мне, совершив сходное запрещенное действие в вашем присутствии, используя идентичное по форме рассуждение, которое вы вдвоем проверяли бы далее (как я предполагаю), если бы я вас не прервала. Вот задача, к которой мы сейчас обратимся. Давайте проверять незнакомую машину $x^{\frac{1}{2}}$. Мы можем создать что-то более знакомое, используя два экземпляра оригинала: $m(x) \equiv x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Это просто $m(x) \equiv x$, и мы знаем, что $m'(x) = 1$. Используя ваше более раннее открытие, что $(fg)' = f'g + g'f$, мы можем написать:

---

* (**Рассказчик:** *С началом нового раздела Автор решает ввести более компактный формат диалогов, чтобы они занимали меньше места. «В конце концов, — подумал он, — кто знает, сколько еще их может быть?»*)

$$1 = m'(x) \equiv \left(x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' x^{\frac{1}{2}} + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' x^{\frac{1}{2}}.$$

Сейчас нетрудно выделить желаемую часть $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$, что дает:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

или, что то же самое,

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, если ваше рассуждение было запрещенным, то я только что поучаствовала в запрещенном действии в вашем присутствии. Согласно аксиоме *T*, вы должны мне доверять.

Автор: Понятия не имею, что происходит.

Читатель: Я думаю, что могу, пожалуй… Но погодите, даже если мы вам верим, это же не значит, что наш вывод был правильным, разве нет?

Математика: Ну… Понимаю… думаю, вы правы.

Читатель: Тогда почему совершение возможно запрещенного действия улучшает доверие?

Математика: Ну, я полагаю, что это хороший способ приобрести нового друга…

(Наши персонажи некоторое время сидят в непонятной тишине.)

Читатель: Так откуда, говорите, вы появились?

Математика: Из пустоты… Я там живу. Или… Я так думаю. Честно говоря, я немногое помню до этого.

Автор: Ну… если это помогает… вам не нужно что-то помнить, чтобы двигаться туда, куда движемся мы.

Математика: А куда вы движетесь?

Автор: Я еще не уверен. Во всяком случае, не совсем. Но мы определенно куда-то направляемся.

Математика: О… Звучит мило. К счастью, я привыкла к идее существования в неопределенном месте. Так что не должно быть проблем с привыканием к идее стремления в неопределенное место. То есть, если вы не против моей компании…

Автор: Нам нравится ваша компания.

Читатель: Подождите, что вы подразумеваете под существованием в неопределенном месте? Я думал, что вы живете в Пустоте.

Математика: Да…

Читатель: И где эта Пустота?

Математика: Она… Трудно описать…

Читатель: Попробуйте.

Математика: Она не (ну, по крайней мере не в каком-то точном смысле (или, скорее, в смысле точном, но не повседневном (не следует смешивать с термином «не по всем дням» (который бы предполагал, что вышеупомянутая точность изменяется во времени, что вовсе не то, что я хочу сказать))(скорее, «не повседневным» означает: в смысле термина, который еще предстоит упомянуть, который не эквивалентен бытовому значению (или, чтобы показать на конкретном примере (если вы, конечно, простите некоторую ссылку на себя), одновременное лингвистическое (в противовес математическому) применение и вложенных, и смежных, но не вложенных скобок не является ни «повседневным», ни (можно предположить) «по всем дням», хотя если указанное применение каким-то образом стало происходить «по всем дням», оно стало бы соответственно (и как можно бы аргументировать, соразмерно) «повседневным»)), если это имеет смысл)) существует.

Читатель: Пустота не существует?

Математика: Существует. Но не в повседневном смысле.

Читатель: Понятно…

Автор: А как насчет вас?

Математика: Что насчет меня?

Автор: Я имею в виду, вы существуете? В повседневном смысле?

Математика: Я полагаю, что да… Я никогда раньше не думала о себе таким образом. Но на протяжении последних 185 страниц у меня было странное ощущение. Что-то такое, чего раньше я никогда не чувствовала. Я ощущала… Реальное… Впервые. И это становилось только хуже. Или лучше, следовало бы сказать. Это прекрасно.

Автор: Таким образом, приняв все во внимание… вы предпочитаете это ощущать?.. Существовать больше, или больше существования, или что бы там ни было… Вы предпочли бы это? По сравнению с его отсутствием?

Математика: Именно так.

Автор: Тогда замечательно. Я думаю, мы знаем, что делать.

3.4. Молотки, закономерности и молотковые закономерности

3.4.1. Где мы остановились?

Ух ты… Так… Я не ожидал этого… Где мы остановились?

(Автор пролистывает назад несколько страниц.)

3.4.2. Вот где мы остановились

Так, освежим память. Мы изобрели молоток, чтобы выражать производную произведения через производные отдельных сомножителей: предложение $(fg)' = f'g + g'f$. Потом мы определили машину $T(x) \equiv (x^n)\ (x^{-n})$, которая была экзотическим способом записать число 1, а затем продифференцировали ее двумя способами.

Во-первых, мы знаем, что ее производная равна 0, потому что это постоянная машина. Во-вторых, мы дифференцировали ее с помощью нашего молотка. Выразив одно и то же двумя способами, мы поставили знак равенства между двумя описаниями, переставили элементы и получили предложение:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Теперь обратите внимание, насколько похоже это на старый факт о положительных степенях из главы 2:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Мы можем думать об этих выражениях как о двух конкретных примерах одного более общего предложения. Оба говорят: «Вы пытаетесь найти производную некой степенной машины (машины, которая выплевывает какую-то степень того, что вы в нее кладете)? Хорошо, поставьте впереди старую степень и уменьшите степень вверху, вычтя 1».

Удивительно, что все вышло так мило. В конце концов, мы пришли к этим двум фактам, используя разные рассуждения. Но сейчас математика сообщает нам: каким бы ни было целое число #, положительным *или* отрицательным, способ дифференцирования $x^{\#}$ следует одной и той же схеме.

О! Мы же видели эту закономерность еще в одном месте, хотя тогда это не осознали. В диалоге выше — или что там было — Математика продемонстрировала, что

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$, это сделано точно по той же схеме.

3.4.3. Математическая металлургия

Возможно, вы думаете, что я использовал молоток для разбивания яиц, но я разбивал яйца.

Субраманьян Чандрасекар, о своей привычке использовать в своих работах много уравнений

Как мы можем убедить себя, что эта закономерность с «понижением степени» $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$ будет верна независимо от #? Мы могли бы для начала постучать молотком по $x^{m/n}$, где m и n — целые числа, но мы, по сути, еще не знаем, что с этим делать. Попробуем сначала $x^{1/n}$, где x — целое положительное число. Все, что мы знаем о нем сейчас, — что мы получили следующим образом:

$$\underbrace{x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \ldots x^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ раз}} = x.$$

Если мы хотим для нахождения производной $x^{1/n}$ использовать тот же вид рассуждения, что мы применяли ранее, нам нужно сделать молоток побольше. Какого рода молоток нам нужен? Мы создали $(fg)' = f'g + g'f$ для производной произведения двух сомножителей. Сейчас у нас n сомножителей, так что, похоже, нужен иметь другой, более хитроумный способ узнать, как найти производную для произведения n машин, то есть $f_1 f_2 \ldots f_n$. Однако нам не нужно заново изобретать колесо. Вспомните, что ранее мы нашли формулу $(f + g)' = f' + g'$, а потом использовали ее, чтобы вывести $(f_1 + f_2 + \ldots f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$. Для перехода от варианта с двумя машинами к варианту с n машинами достаточно нацепить колпак мудреца, интерпретировать сумму машин как одну большую машину, а потом раз за разом применять формулу для двух машин.

Попробуем сделать то же сейчас, сначала для самого простого случая, с которым мы еще не имели дело. Изобретем молоток для вычисления $(fgh)'$, то есть произведения трех машин. В дальнейшем рассуждении я иногда буду использовать [вот][такие][скобки], а не (вот) (такие), чтобы выражения вроде $f'(gh)$ не воспринимались как «эф штрих от же аж». Последующее рассуждение — всего лишь набор умножений, и мы используем сокращения вроде $f'gh$ или $f'[gh]$ для обозначения $f'(x)g(x)h(x)$. Если бы мы всегда использовали сокращения вроде $f'gh$ вместо $f'(x)g(x)h(x)$, это сбивало бы с толку, но для данного случая они очень полезны, чтобы избежать перегруженности.

Отлично! Если мы начнем втайне думать о gh как об одной машине, то о fgh можно думать, как о двух машинах, а именно (f) и (gh), и поэтому мы можем применить к ним наш молоток для двух машин. Затем мы можем сменить точку зрения и начать думать о gh как о произведении двух машин, и, возможно, увидим какую-то закономерность. Но мы не подключаем эти машины друг к другу или что-то в этом духе, мы просто умножаем. Что ж, поехали. Сначала мы применяем молоток для двух машин, считая gh одной большой машиной. Это дает:

$$[fgh]' = f'[gh] + f[gh]'.$$

Часть $[gh]'$ справа можно также разбить с помощью молотка для двух машин, то есть $[gh]' = g'h + gh'$. После такого ловкого действия мы получаем

$$[fgh]' = f'gh + fg'h + fgh'. \tag{3.5}$$

Мы видим вырисовывающуюся закономерность. Мы могли бы подытожить ее так: если у вас есть произведение n машин, то есть $f_1 f_2 \ldots f_n$, то производная всей этой штуки, *похоже*, должна быть суммой нескольких слагаемых, каждое из которых выглядит почти как исходное произведение, за одним исключением: ровно одна машина по очереди оказывается «со штрихом». Слагаемых будет столько, сколько было отдельных машин, поскольку очередь дойдет до каждой. Мы можем записать нашу догадку так:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = (f_1' f_2 \ldots f_n) + (f_1 f_2' \ldots f_n) + \ldots + (f_1 f_2 \ldots f_n').$$

Но это сложно выглядит, да и многоточий с избытком. Как убедить себя, что такая закономерность будет верна для любого x? Ну, есть идея. Мы знаем вариант для двух машин и получили вариант для трех, дважды применив его. Как получить вариант для четырех машин? Считая $f_2 f_3 f_4$ одной машиной, мы можем использовать формулу для двух машин один раз, получив:

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]' = f_1'[f_2 f_3 f_4] + f_1[f_2 f_3 f_4]'.$$

Но молоток для трех машин мы уже изобрели, так что мы можем расколоть кусок $[f_2 f_3 f_4]'$ в правой части предыдущего уравнения и получить

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]' = f_1' f_2 f_3 f_4 + \overbrace{f_1 f_2' f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'}^{\text{Молоток для 3 машин}}.$$

Вышло уродливо, но ни капли не сложно; просто много символов. Это уравнение говорит всего лишь: «Всем по очереди нужно поставить штрих» — с помощью гигантской лавины символов. Более того, в процессе рассуждения нет ничего уродливого. Наоборот. Схема появилась не только в математике; *еще одна схема родилась в самом процессе рассуждения*.

Эта схема в нашем процессе такова: если мы убеждаемся, что наша математическая закономерность истинна* для некоторого числа машин-сомножителей, мы всегда можем перейти от этого числа к следующему.

— Мы знаем, что закономерность истинна для произведения двух машин.

— Если мы знаем, что закономерность истинна для произведения двух машин (а это мы знаем), мы можем вывести, что закономерность истинна для произведения трех машин (и это мы сделали).

— Если мы знаем, что закономерность истинна для произведения трех машин (это мы знаем), то мы можем вывести, что закономерность истинна для произведения четырех машин (это мы сделали).

— …

— Если мы знаем, что закономерность истинна для произведения 792 машин, то мы можем вывести, что закономерность истинна для произведения 793 машин.

— И так до бесконечности.

Вот схема, которая возникла в ходе рассуждений. Мы хотели бы убедиться, что выведенная нами закономерность истинна для всех n. На первый взгляд, это выглядит невозможным. Ведь у нас бесконечное число предложений, в которых нам нужно удостовериться: по одному для каждого n. Например, если n равно 792, предложение выглядит так: «Закономерность верна для произведения 792 сомножителей».

* Если вас беспокоит, что я говорю «закономерность истинна», хотя истинными могут быть только предложения (высказывания), расслабьтесь… Но да, вы правы.

Как убедиться в бесконечном количестве предложений за конечное время? Схема, которую мы видели в ходе рассуждения, предлагает перспективный путь. Мы уже открыли закономерность «очередь получить штрих дойдет до каждой» для нескольких конкретных случаев (две машины-сомножителя, три, четыре). Не сделать ли вывод в сокращенной форме: каждый раз, когда мы знаем, что закономерность верна для некоторого числа машин-сомножителей, она должна быть верна и для следующего числа? Тогда мы бы автоматически получили, что закономерность верна для всех чисел. Попробуем сделать это в сокращенной форме.

Представим, что у нас уже есть молоток для некоторого числа k. Иначе говоря, мы предполагаем, что закономерность верна для определенного числа машин-сомножителей, и мы назовем его k. Теперь мы можем попробовать использовать это предположение, чтобы показать, что закономерность верна и для следующего числа $k + 1$. Пусть есть произведение из $k + 1$ машин. Поскольку мы предполагаем, что закономерность верна для k машин, давайте считать первые k машин одной большой машиной, которую мы назовем g. Применим наш молоток к двум машинам. Иными словами, обозначим $g \equiv f_1 f_2 \ldots f_k$ и напишем:

$$(f_1 f_2 \ldots f_k f_{k+1})' = (g f_{k+1})' = g' f_{k+1} + g f'_{k+1}. \tag{3.6}$$

Поскольку предположительно мы уже знаем, что закономерность «очередь дойдет до каждой» верна для любых k машин-сомножителей, мы можем развернуть g' в уравнении 3.6 — ведь это просто сокращение для произведения k машин. Это позволяет записать g' так:

$$\begin{aligned}
g' \equiv (f_1 f_2 \ldots f_k)' &= \\
= f_1' f_2 \ldots f_k &+ \qquad \text{[очередь 1-й машины]} \\
+ f_1 f_2' \ldots f_k &+ \qquad \text{[очередь 2-й машины]} \\
&\text{и т. д.} \\
&\text{и т. п.} \\
+ f_1 f_2 \ldots f_k' & \qquad\quad \text{[очередь } k\text{-й машины].}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Давайте не подставлять эту большую уродливую штуковину в уравнение 3.6, а представим, что получится, если мы это сделаем. В уравнении 3.6 часть $g'f_{k+1}$ будет суммой из уравнения 3.7, где к каждому слагаемому справа приписано f_{k+1}. Иными словами, часть $g'f_{k+1}$ состоит из k слагаемых: в первом штрих имеет f_1, во втором f_2 и так далее до k. Однако справа в каждом таком слагаемом есть f_{k+1}, и до нее очередь на наличие штриха никогда не доходит.

Закономерность нарушена? Вовсе нет! Ведь в правой части уравнения 3.6 остался еще элемент gf'_{k+1}, и именно в нем очередь на наличие штриха дошла и до f_{k+1}. Поэтому весь ералаш в уравнении 3.6 не такой уж и путаный: как только мы разворачиваем его с помощью молотка для k машин, уравнение 3.6 становится суммой $k + 1$ слагаемых, и в каждом ровно одна машина имеет штрих. Очередь доходит до всех, причем ровно один раз.

Это был непривычный вывод, стоит обобщить в сокращенной форме стиль использованных нами рассуждений. Мы желаем убедиться, что закономерность «до каждой машины дойдет очередь получить штрих» верна для любого числа машин-сомножителей. Мы можем считать, что нам нужно удостовериться в истинности бесконечного числа предложений. Вот что я имею в виду: давайте используем букву S для слова «предложение» (sentence), и пусть n — некоторое целое число. Тогда для каждого n имелось предложение, в истинности которого мы желали убедиться и которое мы можем сократить так:

$S(n) \equiv$ «Закономерность для производной произведения из n машин „до каждой машины дойдет очередь получить штрих“ истинна для любого произведения из n машин».

Наш исходный молоток $(fg)' = f'g + g'f$ утверждает, что $S(2)$ истинно. Затем мы показали, что закономерность верна для трех сомножителей, что дало уравнение 3.5. Это просто предложение $S(3)$. Затем мы осознали, что бессмысленно дальше так действовать, поскольку нужно убедиться в бесконечно большом числе предложений. Но мы заметили в нашем процессе рассуждений схему, которая позволила переходить от любого предложения $S(k)$ к следующему $S(k + 1)$. Иначе говоря, мы не могли удостовериться одним махом, что $S(n)$ верно для любого n, зато удостоверились в двух вещах.

1. Мы могли удостовериться, что $S(2)$ истинно.

2. Если мы вообразили, что уже убедились в истинности предложения S(*какое-то число*), было легко убедиться, что должно быть истинно и предложение S(*следующее число*).

Сразу это неочевидно, но этих двух пунктов достаточно, чтобы показать, что $S(n)$ истинно для любого целого $n \geq 2$. Вот объяснение: скажем, кто-нибудь вручает вам $n = 1749$ и просит вас убедить его, что $S(1749)$ истинно. Вместо того чтобы решать проблему напрямую, что было бы гигантским трудом, предположим, что мы убедили его в двух вышеуказанных пунктах: что $S(2)$ истинно, и в более сильном утверждении: S(*какое-то число*) всегда влечет за собой S(*следующее число*). Используя пункт 1 из нашего списка, а потом повторно раз за разом пункт 2, мы получим следующее. Мы верим, что $S(2)$ истинно. Если мы верим в $S(2)$, то должны верить в $S(3)$. Но если мы верим в $S(3)$, мы должны верить и в $S(4)$. Если мы верим в $S(4)$… вы уловили идею.

Мы можем добраться куда угодно, если удостоверимся, что: а) способны сделать первый шаг; б) если мы сделали некоторое количество шагов, то всегда можем сделать еще один. Другой способ представлять себе такой вид рассуждения — вообразить лестницу. Мы показали следующее: а) мы можем забраться на первую ступеньку; б) где бы мы ни были на лестнице, мы всегда можем встать на следующую ступеньку. Если мы удостоверились в этих двух вещах, то знаем, что нет такой высокой лестницы, на которую мы бы не могли забраться.

Учебники называют этот вид рассуждений математической индукцией. Термин хорош, как только мы к нему привыкнем, но неудачен по нескольким причинам. Прежде всего он не напоминает, о чем мы говорим. Однако важнее то, что неспециалисты могут путаться, поскольку слово «индукция» относится: а) к виду математического рассуждения, которое мы только что провели; б) к явлению из области электричества и магнетизма, не имеющему к нам отношения; в) к форме вероятностного рассуждения, часто противопоставляемого «дедуктивному», обычному в математических доказательствах. Несмотря на все эти не связанные между собой значения термина «индукция», если вы услышите его после слова «математическая», то в этом случае говорят об описанном «лестничном» процессе рассуждений.

3.4.4. Еще более мощный молоток

Мы вооружились нашим более мощным молотком:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = \text{Выражение, в котором все функции по очереди получают по штриху}$$

или, подробнее:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = (f_1' f_2 \ldots f_n) + (f_1 f_2' \ldots f_n) + \ldots + (f_1 f_2 \ldots f_n'). \tag{3.8}$$

Теперь мы можем попробовать найти производную $x^{\frac{1}{n}}$. Вспомним, что мы хотели применить рассуждение, аналогичное тому, что мы использовали для нахождения производной $x^{\frac{1}{2}}$. Мы считаем, что могли бы вычислить производную $x^{\frac{1}{n}}$, определив простую машину, но записав ее забавным способом:

$$M(x) \equiv \underbrace{x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \ldots x^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ раз}}.$$

Конечно, на самом деле это переодетая «самая скучная машина» $M(x) \equiv x$, которая выдает нам ровно то, что мы в нее положили. Мы знаем, что ее производная

$$M'(x) = 1.$$

Однако мы можем применить к ней наш более мощный молоток. Оказывается, он намного мощнее, чем нам нужно для этой конкретной задачи. Поскольку все сомножители $M(x)$ одинаковы и равны $x^{\frac{1}{n}}$, после применения молотка окажется, что все слагаемые в уравнении 3.8 будут одинаковы: в каждое войдет $n - 1$ экземпляр $x^{\frac{1}{n}}$ и один экземпляр $(x^{\frac{1}{n}})'$. Поскольку таких слагаемых всего n, мы можем написать:

$$M'(x) = n \text{ экземпляров одинаковых слагаемых} = n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}\,(x^{\frac{1}{n}})'.$$

Мы записали выражение для $M'(x)$ двумя способами, так что приравниваем и получаем:

$$1 = n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}\,(x^{\frac{1}{n}})'.$$

Сокращение $(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}$ выглядит страшновато, но в силу способа, которым мы изобрели степени, это $x^{\text{нечто}}$, где *нечто* — то, что вы получаете, сложив $\frac{1}{n}$ с собой $n-1$ раз. Поэтому *нечто* должно быть просто $\frac{1}{n}(n-1)$, или, что то же самое, $1-\frac{1}{n}$. Степень в предыдущем уравнении можно заменить этим выражением. Кроме того, поскольку нас интересует производная $(x^{\frac{1}{n}})'$, отделим ее, чтобы все остальное оказалось по другую сторону знака равенства. Это даст нам:

$$\frac{1}{nx}^{1-\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})'. \tag{3.9}$$

Мы всё сделали: нашли то, что хотели. Неважно, если это не «упрощенно». Вопрос, что считать «упрощенным», — все равно что вопрос, что считать «хорошим» искусством. Не то чтобы он совсем бессмыслен, но и особо осмысленным не назовешь, и однозначного ответа на него нет. Все зависит от наших эстетических предпочтений. Упрощение — человеческая идея, и математика не может указать разницу между «упрощенным» ответом и неуклюжим, которые дают одно и то же. Так что в этом смысле мы всё сделали.

Но мы немного беспокоимся, поскольку еще не уверены, что это та же закономерность, которую мы наблюдали ранее. Вспомним, что каждый раз, когда мы находили производную какой-то степени, она выглядела так: впереди старая степень, а вверху уменьшение на единицу. Мы выявили это для положительных целых степеней в предложении $(x^n)' = nx^{n-1}$, для отрицательных целых степеней в предложении $(x^{-n})' = (-n)x^{-n-1}$ и даже для конкретной дробной степени, когда оказалось, что $(x^{\frac{1}{2}})' = (\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}$. Надеемся, эта закономерность верна всегда: тогда вместо множества уродливых «правил» для дифференцирования разных степеней в нашей Вселенной было бы всего одно большое и чудесное. Только что открытое нами утверждение из 3.9, возможно, говорит что-то аналогичное, а может, и нет. Мы не определим это исходя из написанного.

Поэтому, хотя «упрощение» — человеческая идея, которая не имеет ничего общего с математикой, и хотя любой авторитет в образовании, который снимает баллы за правильный, но «не упрощенный» ответ, на самом деле демонстрирует исключительно свои предпочтения, мы хотели бы переписать уравнение 3.9 иначе, чтобы понять, насколько едина наша математическая Вселенная. Безотносительно того, хотите вы это назвать упрощением или нет. Мы хотим переписать уравнение 3.9 так, чтобы нам было ясно: либо подмеченная нами ранее закономерность подтверждается, либо нет. Как мы можем смять уравнение до нужной формы? Когда мы изобретали степени, мы установили, что $\frac{1}{(\textit{нечто})^{\#}}$ можно записать как $(\textit{нечто})^{-\#}$. Поэтому в уравнении 3.9 мы можем кое-что перенести из нижней части в верхнюю, заметив, что $-(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - 1$. Кроме того, деление на n — просто умножение на $\frac{1}{n}$. Мы можем переписать уравнение 3.9 так:

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \left(\frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}-1}. \tag{3.10}$$

Прекрасно! Снова та же закономерность. Это никак не может быть случайностью. Было бы здорово разобраться с этой проблемой раз и навсегда. Сейчас мы могли бы немало поставить на то, что $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$ для любого #. Мы не знаем, любое ли число можно записать в форме $\# = \frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, но мы можем убедиться, что любое # можно сколь угодно близко аппроксимировать чем-то, выглядящим как $\frac{m}{n}$. Как? А вот так: предположим, кто-то вручает вам* annyong** число вроде такого:

* В оригинале используется сходство английского annoying («раздражающий») и корейского «привет», передающегося латиницей как annyong. Автор отсылает к американскому ситкому «Замедленное развитие», в котором корейский мальчик постоянно говорит Annyong, а все думают, что это его имя. Следующее примечание автора основано именно на этом сходстве. Хангыль — корейский алфавит. *Прим. перев.*

** Здесь предполагалось слово annoying, но по причинам, которые ясны любому, кто немного знает корейский (или хангыль — пожалуй, самую элегантную систему письма на планете; или смотрел шоу «Замедленное развитие»), эта опечатка слишком хороша, чтобы ее исправлять. Попутно отметим, что это пример принципа, который создал жизнь на нашей планете: естественного отбора. Хотя подавляющее большинство мутаций (опечаток) вредны (бессмысленны), изредка возникает мутация (опечатка), которая содержит полезную информацию (смысл), не присутствовавшую в оригинале (annoying → annyong), например возможность

$$\# = 8{,}34567840987238654\ldots$$

Это просто число, которое я только что отстучал на своей клавиатуре, и представим, что я сказал: «Аппроксимируйте его с точностью до десяти знаков после запятой с помощью чего-нибудь, что имеет вид $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа». Вам не нужно хитрой математики, чтобы справиться с этим. Вы можете просто написать:

$$\# \approx \underbrace{8{,}3456784098}_{\text{10 знаков после запятой}} = \frac{83456784098}{10000000000}.$$

Я только что написал это число наобум, но мы без всякой хитрой математики можем видеть, что его можно приблизить с точностью до (например) десяти знаков, разделив одно десятичное число на другое. Понятно, что это будет работать независимо от того, каково было исходное число и сколько десятичных разрядов нам нужно для требуемой точности.

Исходя из этого, начнем убеждаться, что утверждение $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$ верно для любого #, сначала глядя на степени, где $\# = \frac{m}{n}$. У нас в запасе есть знание, что мы всегда можем сколь угодно близко аппроксимировать # с помощью чисел такого вида. Мы пока не знаем, есть ли числа, которые нельзя записать в виде *точного* отношения целых — может, да, может, нет; однако рассуждение выше убеждает нас, что, даже если такие странные числа существуют, мы всегда можем приблизить их с любой точностью с помощью отношений целых чисел. Так что, даже если мы обнаружим, что не все числа можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где m и n — целые, мы можем попробовать удостовериться, что закономерность работает, если нам этого захочется. Разберемся с этой проблемой раз и навсегда.

создать белок, форма которого достаточно отличается от оригинала, чтобы он мог выполнять другую работу. Говоря об опечатках и естественном отборе, стоит упомянуть о, возможно, величайшей опечатке в истории литературы. В ходе написания книги «Величайшее шоу на Земле» Ричард Докинз создал фрагмент о Большом адронном коллайдере (Large Hadron Collider), в названии которого он случайно допустил ошибку: Large Hardon Collider (hardon — эрекция, *прим. перев.*). Докинз описал происшествие так: «Я заметил опечатку и, *конечно*, оставил ее! Но, увы, корректор издательства тоже заметила ее и исправила. Я на коленях умолял ее не делать этого. Но она ответила, что иначе она потеряет работу».

3.4.5. Избегаем тягомотины

Сейчас мы могли бы применить тот же прием, что и ранее, и определить машину:

$$M(x) = \underbrace{x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}} \dots x^{\frac{m}{n}}}_{n\ \text{раз}}.$$

С одной стороны, это всего лишь глупый способ написать $M(x) \equiv x^m$, и мы умеем это дифференцировать. Мы могли бы также продифференцировать $M(x)$ с помощью нашего по-настоящему мощного молотка, который изобрели ранее (того, который позволяет нам дифференцировать произведение n машин). Тогда нам бы удалось записать одно и то же двумя способами, поставить знак равенства и попробовать выделить производную $x^{\frac{m}{n}}$. Но это может быть тяжеловато, так что попробуем придумать менее скучный способ. Если мы не сумеем найти путь попроще, мы всегда можем вернуться и пойти по длинному, так что не беда, если мы побродим и попробуем поискать короткую дорожку.

3.4.6. Безумная идея, которая может работать

Вот безумная идея. Мы хотим продифференцировать суперобщую машину нечто-в-какой-то-степени:

$$P(x) \equiv x^{\frac{m}{n}},$$

где P означает «степень» (power), а m и n — целые числа. В силу нашего способа изобретения степени это всего лишь другой способ написать:

$$P(x) \equiv (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

С самого начала мы подчеркивали, что можем сокращать вещи, как нам угодно. Сейчас мы подойдем к этой идее *по-настоящему* серьезно и проделаем полезный трюк. Выражение для $P(x)$ выше выглядит пугающе, но это всего лишь

$$P(x) \equiv (\textit{нечто})^m,$$

где (*нечто*) — сокращение для $x^{\frac{1}{n}}$. Поэтому $P(x)$ — то, что мы умеем дифференцировать, внутри *другого*, которое мы умеем дифференцировать.

1. Мы умеем находить производную (*нечто*)^m. Это m(*нечто*)$^{m-1}$.

2. Мы также умеем находить производную (*нечто*), потому что (*нечто*) — сокращение для $x^{\frac{1}{n}}$, а мы выяснили производную $x^{\frac{1}{n}}$ несколько страниц назад.

Но эта цепочка рассуждений не выглядит безукоризненной или убедительной, потому что в предложении 1 мы считаем переменной (*нечто*), а в предложении 2 — x. Не вполне ясно, как связать эти два представления. Ведь тогда мы могли бы продифференцировать $x^{\frac{m}{n}}$ и даже использовать этот способ для любых более безумных машин, которые встретятся нам в будущем.

Сейчас мы чаще используем для производных обозначение «штрихом» и пишем $M'(x)$ для производной M. В целом это хорошо. Однако мы также пробовали придать смысл нашей безумной идее выше, когда поняли, что $P(x)$ составлена из двух элементов, которые мы умеем дифференцировать, но находящихся один внутри другого. Чтобы выразить нашу идею, нужно думать о двух разных вещах как о «переменной», а обозначение штрихом не дает нам возможности удачно выразить идею. В чем же проблема? Если мы можем действительно сокращать вещи, *как нам угодно*, то все следующие предложения говорят то же:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(Q^n)' = nQ^{n-1}$$

$$(\text{Тили-тили}^n)' = n(\text{Тили-тили})^{n-1}.$$

Выглядит абсолютно логично, потому что мы можем обозначать вещи как угодно. Но обозначение штрихом и новая безумная идея не очень хорошо сочетаются, и легко запутаться, если мы станем использовать в одном рассуждении и штрих, и ее. Вот почему. Мы знаем, что $\frac{d}{dx}x = 1$, иначе говоря, $(x)' = 1$, но если мы можем обозначать вещи как угодно, то мы могли бы взять любую машину, например $M(s) \equiv s^n$, обозначить ее иначе, написав $x \equiv s^n$, а потом с помощью штриха получить $(x)' = 1$. Однако x для нас — просто обозначение для s^n, а мы знаем, что $(s^n)' = ns^{n-1}$. Таким образом, мы «доказали», что $ns^{n-1} = 1$, а это явно не всегда верно! Например, если $s = 1$ и $n = 2$, то получается $1 = 2$. Что мы сделали неправильно?

Наверное, есть искушение свалить вину на наши сокращения и сказать, что мы на самом деле *не можем* сокращать, как нам хочется. Нет, конечно же, можем! Ловушка, в которой мы оказались только что, вызвана штрихом, поскольку она не напомнила нам о том, что нужно считать переменными! Когда мы писали $(x)' = 1$, мы действительно использовали штрих для обозначения «производной по x» или «производной, когда мы считаем x переменной». Когда мы писали $(s^n)' = ns^{n-1}$, мы использовали штрих для обозначения «производной по s» или «производной, когда мы считаем s переменной». Поэтому мы не делали ничего неправильного, пока писали это по отдельности, но мы не имели права ставить знак равенства между ними, поскольку выражения были ответами на два разных вопроса.

С миром все хорошо, и мы по-прежнему можем сокращать, как нам угодно. Но мы заметили, что штрих опасен, если мы хотим создавать штуки вроде трех выражений с x, Q и *Тили-тили*. Если мы вместо этого скажем, что мы подразумеваем, то это выглядит так:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dQ}Q^n = nQ^{n-1}$$

$$\frac{d}{d(\text{Тили-тили})}(\text{Тили-тили})^n = n(\text{Тили-тили})^{n-1}$$

Обратите внимание: то, что мы считаем переменной, в каждом случае меняется, то есть x в $\frac{d}{dx}$ меняется на Q, а потом на *Тили-тили*, когда мы меняем взгляд на то, что считать переменной. Мы по-прежнему можем делать что хотим, но нужно убедиться, что мы помним более ранние идеи при изобретении используемых сокращений. Или, если у нас нет желания помнить, как минимум нужно вернуться и посмотреть, что мы думали при первоначальном изобретении сокращений. Мы не обязаны ничего помнить, но нужно убедиться, что нет противоречия со сказанным ранее.

Посмотрим, можем ли мы выразить нашу безумную идею о новых сокращениях без штриха. Мы будем использовать d-обозначения только потому, что это облегчает смену точки зрения на то, что мы считаем переменной. Наша идея состояла в том, что если

$$P(x) \equiv x^{\frac{m}{n}},$$

то мы можем считать, что это $P(x) \equiv (x^{\frac{1}{n}})^m$. Далее, если обозначить $(\textit{нечто}) \equiv x^{\frac{1}{n}}$, то $P(x) = (\textit{нечто})^m$, и мы можем написать:

$$\frac{dP}{d(\textit{нечто})}P(x) = \frac{dP}{d(\textit{нечто})}(\textit{нечто})^m = m(\textit{нечто})^{m-1}.$$

Сейчас, когда мы изменили обозначения, стало понятнее, где мы сбились с пути в прошлый раз. Всё, что мы делали, было правильно, но для ответа на несколько другой вопрос, а не тот, что мы ставили изначально. Мы хотели найти производную $P(x)$, считая переменной x. Мы ответили на другой вопрос: нашли производную $P(x)$, считая переменной $(\textit{нечто})$, причем это было сокращение для $x^{\frac{1}{n}}$.

Но это та же ситуация, в который мы уже оказывались несколько раз. Мы хотели ответить на один вопрос, но не могли. Тогда мы замечали, что, если бы вопрос был чуть другим, ответ мы бы получили без проблем. Поэтому, чтобы решить изначальный вопрос (на который мы не могли ответить), мы могли совершить акт концептуальной гимнастики под названием «ложь и поправка на ложь». Если бы вопрос, на который мы отвечаем, был «Какова производная $P(x)$ по $(\textit{нечто})$, где $(\textit{нечто})$ — $x^{\frac{1}{n}}$?», то на него было бы легко ответить. Но мы ищем ответ на другой, так что солжем, ответим на легкий вопрос, а потом *сделаем поправку на ложь*. Мы начали с вопроса:

$$\text{Что такое } \frac{dP}{dx}?$$

Мы не знаем ответа, поэтому солжем и изменим вопрос:

$$\text{Что такое } \frac{dP}{d(\textit{нечто})}?$$

на который мы *можем* ответить как минимум в случае, когда $(\textit{нечто}) = x^{\frac{1}{n}}$. Но мы солгали, внесли изменения, поэтому нам нужно вернуться и исправить эту ложь: во-первых, добавив $d(\textit{нечто})$ вверху, чтобы сократить с введенным $d(\textit{нечто})$ внизу; во-вторых, заменив убранное нами при лжи dx. При этом первоначальный вопрос принимает слегка иную форму:

$$\text{Что такое } \frac{d(\textit{нечто})}{dx}\,\frac{dP}{d(\textit{нечто})}?$$

Если нам не хочется считать это ложью и исправлением лжи, мы можем просто расценить весь процесс как умножение на 1. Чтобы увидеть это, начнем с первого вопроса и проведем все рассуждение, которое мы только что сделали.

$$\frac{dP}{dx} = \overbrace{\frac{d\left(\textit{нечто}\right)}{d\left(\textit{нечто}\right)}}^{\text{Просто причудливая 1!}}\frac{dP}{dx} = \underbrace{\frac{\left(\textit{нечто}\right)}{dx}\frac{dP}{d\left(\textit{нечто}\right)}}_{\text{Используйте внизу } ab=ba}.$$

Ха! Мы умеем дифференцировать обе эти штуки! Это замечательно. Мы определили $P(x) \equiv x^{\frac{m}{n}}$ и не желали идти длинным путем. Нам хотелось найти дорогу покороче. Мы запутались при обозначениях со штрихом, но как только переписали всё с помощью d-обозначений, задача стала намного проще: солгать и сделать поправку на ложь. Мы уже выяснили, что производная P по (*нечто*) равна

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d(\textit{нечто})} &\equiv \frac{d}{d(\textit{нечто})}\cdot(\textit{нечто})^m = m\cdot(\textit{нечто})^{m-1} \equiv \\ &\equiv m\cdot(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} = m\cdot(x^{\frac{m-1}{n}}).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Также мы уже выяснили, что производная (*нечто*) $\equiv x^{\frac{1}{n}}$ по x равна:

$$\frac{d(\textit{нечто})}{dx} \equiv \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = (\frac{1}{n})\,x^{\frac{1}{n-1}}. \tag{3.12}$$

Таким образом, наш новый чудесный молоток говорит, что производную P по x, которую было так скучно вычислять долгим путем, можно найти простым умножением двух вещей, написанных выше. Так и поступим.

3.4.7. Закономерность появилась снова

По сути, мы закончили. Нам осталось использовать то, что мы изобрели выше. Написав (*нечто*) в качестве сокращения для $x^{\frac{1}{n}}$, мы можем использовать уравнения 3.11 и 3.12:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d(\textit{нечто})}{dx}\,\frac{dP}{d(\textit{нечто})} =$$
$$= [(\frac{1}{n})\,x^{\frac{1}{n-1}}][m \cdot (x^{\frac{m-1}{n}})] =$$
$$= (\frac{m}{n})\,x^{\frac{1}{n-1}+\frac{m-1}{n}}.$$

Единственная неуклюжая часть тут — степень, но если мы посмотрим на нее несколько секунд, то увидим, что это просто $\frac{m}{n} - 1$, так что мы можем написать:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = (\frac{m}{n})\,x^{\frac{m}{n-1}}.$$

Превосходно! Это та же закономерность, которую мы видели все время! Пора немножко философски поболтать.

3.5. Фазовый переход в истории создания

За основание тут мы берем положенье такое:
Из ничего не творится ничто по божественной воле.

Лукреций, «О природе вещей»*

После того как улеглась математическая пыль, мы обнаружили, что на нас снова смотрит знакомая закономерность. Настойчиво повторяя, как мы всё это сделали сами, мы пришли к точке, где менее уверены в этом. Время ненадолго сделать шаг назад и заново рассмотреть наши исходные посылки. В чем природа математики и математическая истина? Хотя наша Вселенная целиком состоит из вещей, которые мы изобрели сами, похоже, мы всё больше открываем истины, которые существуют независимо от нас. Мы изобрели идею машин, степени, угловые коэффициенты, лупу с бесконечным увеличением, идею производной, но не вынуждали математику подчиняться той простой закономерности, которая проявляется каждый раз, когда мы дифференцируем $x^{\#}$. Как-то мы продолжаем обнаруживать, что $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$ для разных видов чисел, даже при том, что нам и были нужны различные виды чисел, чтобы совершенно разными путями приходить к одной и той же закономерности. Мы установили ее для

* Перевод Ф. Петровского. *Прим. перев.*

положительных целых чисел, потом для отрицательных целых, потом для обратных целым, а теперь и для любого числа, которое может быть записано в виде отношения двух целых.

Мы действительно изобретаем всё сами, и в этом смысле всё истинное в мире, который мы создаем, должно быть истинным вследствие некоего предположения, которое мы по ходу сделали. Но сейчас мы начали спотыкаться о факты, которые совершенно не похожи на любое наше предположение. Такое постоянно происходит в математике, и странное ощущение, вызванное такими открытиями, было хорошо выражено следующими словами Генриха Герца:

> Трудно отделаться от ощущения, что математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее тех, кто открыл их.

Вы можете решить, что только сумасшедший способен очеловечивать математику, и я не стану с этим спорить. Но Герц не был сумасшедшим, и его слова иллюстрируют важный момент для процесса открытия. Каждый раз, когда в этой главе и в главе 2 мы выявляли закономерность с «понижением степени» для производной $x^{\#}$ для разных видов чисел, мы лично сталкивались с описанным явлением. Мы пришли к фазовому переходу в истории нашего математического творения. Мы уже изобрели достаточно математики — или, скорее, Математики, — и впервые все выглядит так, будто она существует независимо от нас, с собственными настроениями, причудами и идеями. Эта глава — первая из многих встреч с этим ощущением Герца. Если такое очеловечивание считать безумием, то тем хуже для безумия.

3.5.1. Поговорим о том, что мы сделали

Сведем воедино инструменты, изобретенные нами к этому моменту, которые позволяют работать с общими машинами, не обязательно плюсоумножательными, а также дадим им названия.

Молоток для сложения

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Молоток для умножения

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Молоток для нового сокращения

$$\frac{df}{dx} = \frac{ds}{dx}\frac{df}{ds}.$$

Мы также расширяли наши молотки для сложения и умножения на варианты с n машинами. Но эти более общие варианты несколько тяжеловеснее в записи, и на практике мы обычно можем использовать вариант для двух машин. Так что запишем их в простейшей форме.

В стандартных учебниках эти три молотка имеют свои названия. Молоток для сложения называется правилом дифференцирования суммы, а молоток для умножения — правилом дифференцирования произведения. Имена удачные, поскольку напоминают нам о том, что мы говорим, хотя термин «правило» может неверно отражать природу математики (и я считаю, что каждое его использование добавляет скуки во Вселенную).

Но это просто мелкие придирки к терминологии, а стандартный способ представления третьего молотка проблематичен, поэтому он заслуживает отдельного раздела. К нему и перейдем.

3.6. Молотки и цепи

Молоток для нового сокращения обычно называется «цепным правилом»*. Хотя имя не так уж плохо, обозначение, используемое для него в большинстве книг, настолько вычурно, что мучит учащихся без надобности и затемняет простоту идеи. Помните, одним из главных препятствий

* В России чаще используют название «правило дифференцирования сложной функции», также говорят о дифференцировании композиции (суперпозиции) функций. *Прим. перев.*

при изобретении молотка для нового сокращения было осознание, что эта идея не сочетается с обозначением «штрихом». Использовать штрих невозможно, поскольку мы обнаружили, что легко ошибиться: ведь мы фактически в одной половине задачи переменной считали x, а во второй — s (*нечто*). Учебники обычно представляют эту идею так.

Как учебники говорят про молоток для нового сокращения

«Цепное правило» — правило для дифференцирования композиции двух функций.

Если $h(x) = f(g(x))$, правило гласит, что $h'(x) = f'(g(x))\, g'(\mathrm{x})$.

Сразу внесу ясность: этот книжный способ рассказывать о «цепном правиле» не ошибочен; но это неоправданно сложный способ объяснять такую простую идею. Кроме того, хотя и верно, что «цепное правило» *можно* интерпретировать как утверждение о дифференцировании композиции двух функций, при выражении идеи таким путем не удается передать ключевой момент: вопрос, что считать «композицией двух функций», *полностью* определяется нами! Мы можем множеством способов представить функцию вроде $M(x) \equiv 8x^4$ в виде «композиции функций» (одной функции, включенной в другую). Например, если мы определим $f(x) \equiv x^4$ и $g(x) \equiv 8x$, то $M(x) = g(f(x))$. Можно действовать и иначе: если мы определим $a(x) \equiv 2x$ и $b(x) \equiv \frac{1}{2}x^4$, то $M(x) = b(a(x))$. Есть бесконечно много способов представить любую функцию в виде «композиции» двух, трех или 59 других. С этой точки зрения нет объективного смысла, который мы можем вложить во фразу, что конкретная машина *представляет собой* «вот эту композицию вот этих двух функций». Только нам решать, хотим ли мы думать о ней именно так. Почему нам нужно этого хотеть? Ну, нам и не нужно… если это нам не помогает! В конце концов, именно такой ход мышления привел нас в первый раз к изобретению молотка для нового сокращения.

Чтобы четче увидеть разницу между этими способами мышления, используем молоток для нового сокращения («цепное правило»), чтобы найти производную функции $M(x) \equiv (x^{17} + 2x + 30)^{509}$, используя и обычный метод из учебников, и (в противовес) задействованный нами выше. Для иллюстрации идеи опишем пошаговый подход, хотя любым из этих способов задачу можно решить за один шаг, как только мы овладели идеей.

Как учебники обычно используют молоток для нового сокращения («Цепное правило»)

Мы хотим продифференцировать функцию

$$M(x) \equiv (x^{17} + 2x + 30)^{509}.$$

Определив функции

$$f(x) = x^{509}$$

и

$$g(x) = x^{17} + 2x + 30,$$

мы получаем, что M — композиция двух функций:

$$M(x) = f(g(x)).$$

Дифференцируя f, мы получаем

$$f'(x) = 509x^{508}.$$

Аналогично, дифференцируя g, мы получаем

$$g'(x) = 17x^{16} + 2.$$

Поэтому применение «цепного правила» дает:

$$M'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = 509(x^{17} + 2x + 30)^{508}\, (17x^{16} + 2).$$

Как мы будем обычно использовать молоток для нового сокращения («Цепное правило»)

Мы хотим продифференцировать функцию

$$M(x) \equiv (x^{17} + 2x + 30)^{509},$$

считая x переменной.

Громоздкая задача, но это *нечто* в какой-то степени, и этой степени мы пугаемся меньше, так что обозначим

$$s \equiv x^{17} + 2x + 30,$$

где s — *нечто*. Тогда

$$M(s) \equiv s^{509}, \text{ поэтому } \frac{dM}{ds} = 509s^{508}.$$

Но нам нужно $\frac{dM}{dx}$, а не $\frac{dM}{ds}$, так что ложь и поправка на нее дают нам:

$$\frac{dM}{dx} = \left(\frac{dM}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right).$$

Ложь и поправка на нее сообщают, что нужна производная *нечто*, если считать переменной x. Но это тоже просто.

$$\frac{ds}{dx} = 17x^{16} + 2.$$

Поэтому в итоге мы имеем:

$$\frac{dM}{dx} = \left(\frac{dM}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right) = 509s^{508}\,(17x^{16} + 2) \equiv$$
$$509(x^{17} + 2x + 30)^{508}\,(17x^{16} + 2).$$

В обоих случаях мы получили одинаковый результат. Эти два способа действий логически эквивалентны, но, несомненно, они не эквивалентны психологически. И, что еще хуже, называть это «правилом для дифференцирования сложной функции» — значит навести людей на мысль, будто существует нечто, именуемое «сложной функцией». Не существует.

Указанная философия «только если это помогает» была причиной, по которой мы изобрели три молотка, а причиной использования слова «молоток», а не «правило» или «теорема», стало описание метода разбиения сложной задачи на более простые. Термины «правило суммы», «правило произведения» и «цепное правило» не ошибочны, но они коварно вводят в заблуждение. Эти три метода разбиения — не *правила*, которые объясняют нам, что делать, а *инструменты*, сообщающие, что мы вольны делать, если у нас есть желание. Это крайне важное отличие, отведем ему отдельную рамочку.

Суть всех молотков

1. Мы можем *предпочесть* думать о любой машине как «на самом деле» о сумме двух машин, но только если это нам помогает.
   Вот почему мы изобрели *молоток для сложения*.
2. Мы можем *предпочесть* думать о любой машине как «на самом деле» о произведении двух машин, но только если это нам помогает.
   Вот почему мы изобрели *молоток для умножения*.
3. Мы можем *предпочесть* думать о любой конкретной машине как «на самом деле» об одной машине, съедающей другую, но только если это нам помогает.
   Вот почему мы изобрели *молоток для нового сокращения*.

Выделив это четко и ясно, добавим все три молотка к нашему растущему арсеналу и продолжим путешествие.

3.7. Встреча со сделанным

Напомним себе, что мы сделали в этой главе.

1. Расширив понятие степеней с бессмысленного обозначения до осмысленной идеи, мы ненароком создали много разных видов машин.

2. Мы понятия не имели, как дифференцировать их, но благодаря способу, которым мы изобретали степени, мы знали, как соотнести их с более простыми машинами. Например:

$$x^n x^{-n} = 1 \quad \text{и} \quad \underbrace{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}_{n\ \text{раз}} = x.$$

3. Сведение наших загадочных машин к более простым и знакомым позволило нам обманом заставить математику сообщить нам производные новых машин.

4. Пытаясь выяснить производные новых машин, мы изобрели несколько молотков: для сложения, умножения и нового сокращения. Они позволяют разбить задачу на более простые части.

5. К большому удивлению автора, в середине главы произошел неожиданный диалог, и мы обрели нового друга. Это может затронуть оставшуюся часть книги. Не уверен, что и предыдущие будут нетронутыми.

6. Полное раскрытие: предыдущий пункт немного меня пугает.

ИНТЕРЛЮДИЯ 3
ВЗГЛЯД НАЗАД В БУДУЩЕЕ

Придет время, когда ты решишь, что все кончено.
Тут-то все и начнется.

Луис Ламур, «Одни в горах»

Часть I. Окончание

С самого начала нашей заявленной целью было: а) изобрести математику для себя и б) время от времени связывать созданное с тем, что вы видели в других учебниках. Стоит сделать паузу и спросить себя, где мы сейчас. Давайте напомним себе всё, что знаем и чего не знаем. Мы будем использовать и наши термины, и стандартные, чтобы дать вам представление о том, что вы знаете, на языке обычных учебников.

Во-первых, мы уже изобрели и увидели удивительную простоту некоторых понятий из средней школы, которые тогда казались загадочными.

Изобретенные нами вещи, которые вы, вероятно, проходили в средней школе, когда они могли показаться вам крайне загадочными

1. Понятие функций (машин).
2. Понятие площади (первый пример того, как изобрести математическое понятие).
3. Распределительный закон (очевидный закон разрывания).
4. Дурацкие аббревиатуры вроде FOIL, которые не заслуживают своих названий.
5. Понятие углового коэффициента (второй пример того, как изобрести математическое понятие).

6. Прямые линии можно описать функциями вида $f(x) \equiv ax + b$ (это следствие того, как мы изобрели угловой коэффициент).
7. Теорема Пифагора (формула для кратчайшего пути).
8. Полиномы (плюсо-умножательные машины).
9. Возведение в степень, корни n-й степени, отрицательные целые степени, произвольные дробные степени (все это следует из нашего обобщения в интерлюдии 2).

Во-вторых, мы изобрели анализ и провели немного времени, исследуя новый мир, который создали.

Изобретенные нами вещи, о которых вы могли слышать в курсе анализа

1. Понятие локальной линейности (лупа с бесконечным увеличением).
2. Понятие производной (определение крутизны кривых путем увеличения).
3. Понятие бесконечно малых чисел.
4. Понятие пределов (приспособление, которое позволяет нам избежать бесконечно малых чисел, если мы когда-нибудь решим, что такая идея нам не нравится).
5. Определение производной любого полинома.
6. Правило дифференцирования суммы, его вывод и обобщение на n функций (молоток для сложения).
7. Правило дифференцирования произведения, его вывод и обобщение на n функций (молоток для умножения).
8. «Цепное правило» и его вывод (молоток для нового сокращения).

9. Правило дифференцирования степени и его вывод для положительных целых чисел, отрицательных целых чисел, чисел, обратных целым, и произвольных рациональных чисел (правило дифференцирования степени — название, которое учебники используют для закономерности $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$, которую мы открывали раз за разом в разных контекстах).
10. Аппроксимация любого числа рациональными числами с любой точностью (рациональное число — стандартное наименование для чисел, которые можно записать в виде отношения двух целых).
11. Математическая индукция (рассуждение лестничного типа, которое мы использовали для создания более общих вариантов молотков).

В-третьих, мы изучили темы, которые редко обсуждают в учебниках и классах. По иронии судьбы, эта группа, возможно, самая важная.

То, что вы редко слышите

1. Уравнения — просто предложения.
2. Все символы в математике — сокращения для вещей, которые мы могли бы описать словами, если бы не были такими ленивыми (в хорошем смысле слова).
3. Как изобретать хорошие сокращения: они должны напоминать нам об идеях, которые мы сокращаем.
4. Как изобретать математические понятия (мы тут еще сделаем больше).

5. На математические определения в большей, чем мы готовы признать, степени влияют наши эстетические предпочтения: что нам кажется наиболее элегантным.
6. Математика имеет две части. Одна — анархическое созидание. Вторая — попытка выяснить, что же мы создали.
7. Как вывести формулу замедления времени в специальной теории относительности, используя весьма простую математику.
8. Иногда бессмысленное изменение сокращений может сильно повлиять на нашу способность понять значение выражения (например, два пути написания молотка для нового сокращения, он же «цепное правило»).
9. В математике ничего не нужно запоминать… если только вы этого не хотите.

С другой стороны, есть некоторые по-прежнему неизвестные нам вещи, которые обычно считаются базовыми.

Некоторые «простые» вещи, которых мы по-прежнему не знаем, вероятно, потому, что они не так просты, как нам внушали

1. Мы всё еще не знаем, что площадь круга равна πr^2.
2. Мы всё еще не знаем, что длина окружности равна $2\pi r$.
3. К данному моменту символ π не имеет для нас смысла.
4. Машины $\sin x$ и $\cos x$ не входят в наш нынешний лексикон, и мы точно не станем именовать их этими глупыми названиями, если только нам не захочется позабавиться над ними.
5. Мы не знаем, что $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$. Мы не знаем, что такое «переход к новому основанию». Мы не знаем ни одного свойства логарифмов.

6. Мы понятия не имеем, что такое логарифм, но это напоминает нам об унынии.
7. Мы не имеем оснований ожидать, что e^x имеет какое-то отношение к нашей лупе с бесконечным увеличением.
8. К данному моменту символ *e* не имеет для нас никакого смысла, за исключением того, что он входит в слово «исключ*е*ние»*… и в некоторые другие слова…

Часть II. Начало

Мы уже изобрели математические понятия, изложенные в первых трех списках, но как насчет последнего? В следующих двух главах мы обнаружим, что большую часть разрозненной кучи фактов, называемых математикой старших классов («предварительные области» для анализа, которые мы еще не обсуждали), можно легко изобрести с помощью уже имеющихся у нас инструментов или их двоюродных братьев, которые мы изобретем попутно. В любом случае мы обнаружим, что эти «предварительные области» на самом деле, наоборот, требуют знания анализа, чтобы мы могли полностью их понимать. Именно так! Подытожив «продвинутые» идеи, которые мы уже изобрели, и «базовые», которых еще не знаем, приступим к взгляду назад в будущее. Готовы? Вперед.

(Ничего не произошло… Почти как если бы это место было уже зарезервировано…)

* В оригинале упоминалась первая буква слова excerpt. *Прим. науч. ред.*

AKT II

ГЛАВА 4

О КРУГАХ И МЕТОДЕ СДАЧИ

4.1. Мысленная центрифуга

4.1.1. Иногда «решение» — просто сдаться

Центрифуга — замечательная машина. Когда вы наливаете в нее жидкость, содержащую множество разных вещей, центрифуга может разделить их, быстро вращая жидкость. Многое из математики — в том виде, как она обычно преподается в старших классах и вузах, — кажется такой жидкостью. Она содержит мутную неаппетитную смесь красивых очевидных истин, с одной стороны, и лишних исторических случайностей — с другой. Нам нужна мысленная центрифуга — способ отделить неподвластные времени отношения между идеями от вещей, которые могут выглядеть иначе, стоит нам только перевести часы, перемешать Вселенную и дать человеческой истории развиться заново. Начнем с примера, показывающего, что я имею в виду.

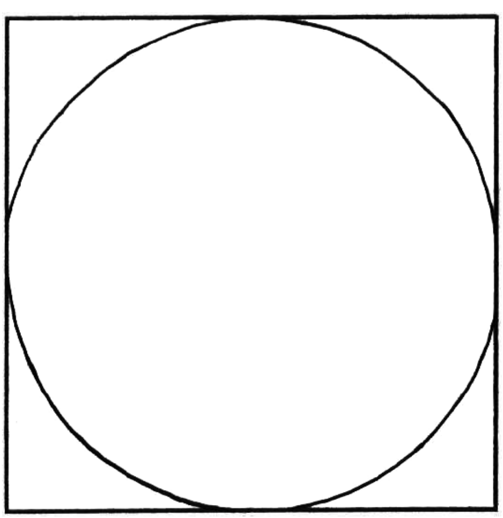


Рис. 4.1. Эта задача выглядит скучно. Но погодите! Это мысленная центрифуга

Скажем, у нас есть круг внутри квадрата (рис. 4.1). Какую площадь в нем занимает круг? Мы в той маленькой комнатке в нашей голове, где нет никакой математики, кроме изобретенной нами. Мы не можем процитировать что-то рассказанное нам, если не способны придумать, как изобрести это с самого начала. Что *подразумевается* при вопросе «Какую площадь в квадрате занимает круг?»? Ищем ли мы площадь квадрата минус площадь круга? Возможно. Это один из способов ответа на вопрос. Мы могли бы просто записать разность и сказать: «Все, кроме этого, занимает круг». Но обратите внимание: если мы подходим к делу так, ответ будет зависеть от величины квадрата и круга. Если мы говорим о конкретной картинке на этой странице, то разница не может быть больше, чем площадь страницы. Но если вы решаете ту же задачу для круга величиной с планету, то ответ будет намного больше.

Было бы здорово, если мы могли говорить об ответе так, чтобы он не зависел от размера картинки. Может, разделить площадь круга на площадь квадрата? Этот путь не более и не менее правилен, чем другой, но здесь у нас есть хотя бы надежда получить однозначный ответ. Это будет число, так? Очевидно, что круг занимает больше одного процента площади квадрата, и очевидно, что он занимает меньше 99 процентов площади. Ответ — число между 1 и 99 процентами, и он должен быть одним и тем же и для огромной, и для крошечной картинки, поскольку при изменении ее размера и квадрат, и круг меняются вместе.

Но окружность — кривая линия, а квадрат — нет, и мы застряли. Изобретенная нами лупа с бесконечным увеличением помогает иметь дело с кривыми, но до сих пор единственным его применением была задача выяснения *крутизны*. Непохоже, что наш вопрос про круг связан с крутизной, так что неясно, поможет ли здесь производная. Сделаем что-нибудь, что если и не выведет нас из тупика, то поможет посмотреть на проблему иначе. Разобьем квадрат на четыре части (рис. 4.2).

Сейчас мы можем перефразировать наш вопрос так: «Сколько маленьких квадратиков вам нужно, чтобы составить круг?». При этом мы не обязательно ожидаем целого числа в ответе. Обозначим площадь одного из маленьких квадратов $A(\square)$, а большого квадрата — $A(\boxplus)$. Соответственно, мы можем написать: $A(\boxplus) = 4 \cdot A(\square)$, и… мы снова застряли. Эти линии не упростили задачу. Мы всё еще не знаем площадь круга из-за неприятных кривых кусков. Но сейчас мы можем говорить о проблеме на немного другом языке. Даже просто глядя на картинку, мы можем сказать, что $A(\bigcirc)$ больше, чем площадь маленького квадрата, и определенно больше, чем площадь двух маленьких квадратов, так что почти наверняка $A(\bigcirc) > 2 \cdot A(\square)$. Непонятно, больше или меньше площадь круга, чем площадь трех квадратов. Если бы нам нужно было сейчас делать предположение, то мы могли бы заключить пари, что точное число находится где-то неподалеку от 3.

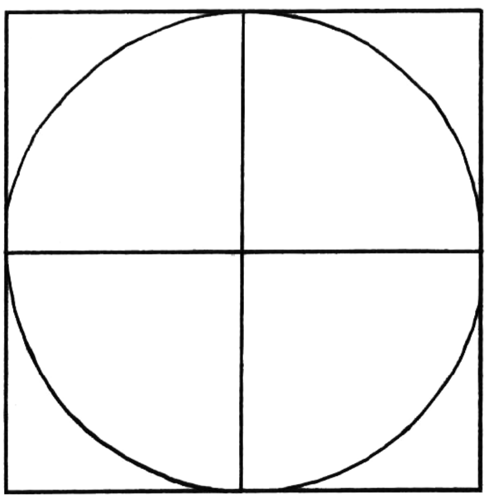


Рис. 4.2. Это не особо помогает

Честно говоря, мы ничего не добились, просто болтаемся вокруг. Мы по-прежнему буксуем, не зная, как вычислять площади криволинейных фигур, включая круги. Давайте сжульничаем! Что я имею в виду?

В пьесе Мольера «Мнимый больной» врача спрашивают, почему опиум действует как снотворное. Он отвечает, что вещество вызывает сон вследствие своей virtus dormitiva, и это латинское выражение означает «снотворная сила». Как только мы развернем эту терминологию, мы увидим, что доктор вовсе не отвечает на вопрос. Он просто изобрел вычурно звучащее название для способности опиума усыплять людей, поскольку не знал ответа. Смехотворно и безответственно делать так, когда вы не знаете ответа на вопрос, поэтому давайте так и поступим!

Наша задача — выяснить, какая часть квадрата занята кру́гом. Мы не знаем ответа, но он должен быть. Иными словами, должно существовать *некоторое* число — назовем его #, — при котором $A(\bigcirc) = \# \cdot A(\square)$. Глядя на картинку, мы можем уверенно сказать, что $2 < \# < 4$, но мы не знаем, каково в точности #. Мы также знаем, что $A(\boxplus) = 4 \cdot A(\square)$, так что мы можем выразить наш ответ способом, который не зависит от $A(\square)$.

$$\frac{A(\bigcirc)}{A(\boxplus)} = \frac{\# \cdot A(\square)}{4 \cdot A(\square)} = \frac{\#}{4}.$$

Невероятно, но до сих пор мы не сделали ничего! Мы обошлись с вопросом «по-мольеровски», изобретя название для того, чего не знаем. Здесь имя — символ #, а не причудливо звучащее virtus dormitiva, но, по сути, нет разницы. Мы просто определили #, а потом *сдались*. Кратко сформулируем то, что мы сделали к этому моменту.

Вопрос: Из скольких маленьких квадратиков состоит круг?

Ответ: Круг состоит из # квадратиков.

Вопрос: Каково число #?

Ответ: Не знаю. Оставьте меня в покое.

Обратите внимание, что $A(\square) = r^2$, где r — расстояние от центра круга до его стороны. Это то, что в учебниках называют радиусом (убедитесь, что вы это видите). По той же причине мы знаем, что $A(\boxplus) = 4r^2$. Мы определяли # как любое число, которое делает истинным $A(\bigcirc) = \# \cdot A(\square)$. Это означает, что:

$$A(\bigcirc) = \# \cdot r^2.$$

Это напоминает фор…

(В главу забредает Математика.)

Математика: Снова привет, вы оба. Что тут происходит?

Автор: Ничего особенного. Мы забуксовали.

Математика: Где?

Читатель: В задаче выше.

Автор: Прочтите.

(Математика уходит и через короткое время возвращается.)

Математика: Угу. Вижу.

Читатель: Есть идеи, что нам делать?

Математика: Нет. То есть нет полезных идей. Хотя, возможно, есть несколько бесполезных. Это напоминает мне схожую задачу, на которой я застряла несколько дней назад.

Автор: Что за задача?

Математика: Ничего, если я создам свой раздел?

Автор: Пожалуйста.

Математика: Проблема в следующем…

4.2. Синдром самозванки

Автор: Погодите, синдром самозванки? Как *это* может быть схожей задачей?

Математика: Минутку. Я объясню.

Автор: Прошу прощения, продолжайте. Что за задача?

(Математика откашливается.)

Математика: Иногда люди меня признают. Я имею в виду, что я люблю людей, но иногда встречи скорее… неловкие. Они предполагают, что я знаю что-то, а я этого не знаю. Они приходят ко мне с вопросами и бывают шокированы, когда у меня нет ответа. Я не знаю, кем или чем они меня считают. Мне бы хотелось, чтобы я как-то могла им передать, что это не я. В любом случае это другая проблема. Необходимость в понимании… Или желание… Что угодно. Я разуверилась в этом давным-давно и сдалась.

(Эй! Сдаться — это же тема этой гла…)

Автор: Заткнись, Рассказчик. Не сейчас.

Математика: А в остальном было бы здорово чувствовать себя не такой самозванкой… Знать хотя бы часть того, чего от меня ожидают, понимаете? Это сделало бы все каждодневные взаимоотношения намного более комфортными. К тому же, если бы я старалась знать то, чего от меня ожидают, некоторые люди могли бы ответить взаимностью. Попытались бы понять меня. Кто знает? Должен же где-нибудь быть человек или даже несколько, кто бы попытался… Но я не могу рассиживаться и надеяться на понимание… Сначала мне нужно поупражняться быть тем, чего от меня ожидают. Так что я могу быть и тем, и другим. Или ни тем, ни другим. Всем, что мне нужно. Всем, что помогает.

Читатель: Ух ты, а обстановка-то накаляется…*

Математика: Так что в любом случае из-за всего этого я думала, что надо попробовать самой изобрести какие-то из этих основ. Я имею в виду, что я же Математика. Я должна уметь это делать, правильно?

Автор: Звучит разумно.

Читатель: И как, получилось?

Математика: Нет. Тут же застряла. Не смогла изобрести даже самые базовые вещи.

Читатель: С чего вы начинали?

Математика: С того, о чем много спрашивают. Окружности. Я не знаю, почему все считают, что меня сильно заботят эти штуки. Это же просто формы. Вокруг есть намного более интересные вещи! И тем не менее… В итоге я прежде всего заработала этот синдром

* Ставшая мемом цитата из фильма Anchorman. *Прим. перев.*

самозванки — не зная вещей, знания которых люди от меня ждут. Ладно, поближе к земным делам… Это был вопрос о длине окружности. Глупый детский вопрос. Вот почему ваша задача напомнила мне об этом. Просто окружность. С ней удивительно трудно иметь дело.

Автор: Изогнутость?

Математика: Она самая. В этом и проблема. Обозначим диаметр окружности буквой d. Она означает проклятье* — если я даже этого не могу сделать, мне следует жить под мостом. Или расстояние. Я еще не решила. В любом случае я пыталась выяснить, сколько раз d укладывается в длине окружности. Я могу сказать, что длина окружности была больше $2d$, поскольку верхняя половина окружности, естественно, больше d. Это очевидно. Но сверх того единственным моим достижением было выяснение, что длина окружности меньше $4d$, поскольку я представила квадрат, описанный вокруг окружности. Длина всех сторон квадрата равна $4d$, и она явно больше.

Читатель: Звучит знакомо.

Автор: Да, это почти то же самое, что мы делали, когда забуксовали в своей задаче.

Математика: Мое самое вероятное предположение состоит в том, что нужное число — примерно 3, но я никогда не могла выяснить, чему оно в точности равно, так что со временем просто сдалась. Я долго трудилась над задачей и не хочу, чтобы кто-нибудь узнал, что я не нашла ответ. Порочный круг в рассуждениях смущает, но порочный круг в рассуждениях о кругах для такого простого вопроса — не то, что я хотела бы предавать гласности.

Автор: Нет нужды смущаться.

Математика: Есть, и большая. Раз я — это я, это было бы на первой странице любого таблоида в Пустоте. Так что однажды поздно вечером я прокралась на местный пункт сокращений, переодетая в Бухгалтерию,

* В оригинале dammit и distance. *Прим. перев.*

чтобы не привлекать внимания, и выбрала какой-то символ, чтобы скрыть свое невежество.

Читатель: По сути, то же, что сделали мы.

Математика: Странно, что никто из нас не может понять что-то настолько простое.

Автор: Это явно не выглядит простым.

Математика: Может, и нет. Так или иначе, я выбрала «символ сдачи» и использовала его, чтобы написать следующее:

$$\text{Длина окружности} \equiv \sharp \cdot d. \tag{4.1}$$

Автор: Я вижу, вы тоже использовали трюк Мольера. Почему музыкальный* символ?

Математика: Ну, я собиралась использовать символ номера #, чтобы напоминать себе, что это какое-то число, но у меня нет безумной любви к числам, и мне не нравится, когда о них напоминают слишком часто. Этот символ выглядит похоже. Получился хороший компромисс.

Автор: Звучит разумно. Погодите, ваша вероятная догадка состояла в том, что число $\sharp$ примерно равно 3?

Математика: Да. Хотя это только предположение. Сомневаюсь, что оно точно равно 3.

Читатель: Наша догадка для числа, определяющего площадь, тоже была что-то около 3.

Математика: Интересно… Задачи выглядят пугающе сходными. Интересно, не одинаковы ли эти числа.

Автор: Быть не может. Каковы шансы на такое совпадение?

Математика: Кто знает? Может, мы удостоверимся, что они должны быть одним и тем же числом.

---

* Знак диез $\sharp$ в музыке обозначает повышение следующих за ним нот на полтона. Этот символ отличается от #, который в англоязычной литературе традиционно используют в качестве знака номера (в отличие от нашего №) и который поэтому широко применяется автором этой книги как символ, заменяющий произвольное число. *Прим. перев.*

Автор: Может, не обращать на это внимания? Мы ничего не знаем об этих штуках. Как выяснить, являются ли они одним числом?

Математика: Нам нужно соотнести площади и расстояния. Что-то двумерное с чем-то одномерным. Я не знаю, как…

Читатель: Хорошо… Одномерные вещи выглядят отчасти двумерными, когда мы их рисуем… Ну, вот прямая линия выглядит почти как длинный узкий прямоугольник.

Автор: Да, но это же неправда.

Читатель: Я знаю. Но будем действовать сообща. Скажем, я рисую отрезок длины l на листке бумаги. Это же не настоящий отрезок, верно? Я имею в виду, что в реальности это не одномерная линия. Если мы увеличим масштаб, то это будет узкий прямоугольник длиной l и какой-то крохотной шириной dw. Поэтому мы знаем, что узкие прямоугольники выглядят почти как отрезки. Может, нам удастся что-то подобное сделать с кругами и изобрести способ соотносить площади и длины. Если нам повезет и все сработает хорошо, мы, вероятно, сумеем увидеть, одинаковы ли эти два числа.

Автор: Звучит интересно…

4.3. Эквивалентность наших незнаний

Читатель: Вот идея.

1. Очень узкий прямоугольник выглядит почти как линия.

2. Площадь прямоугольника получается умножением длин его сторон.

Наше число позволяет нам записать площадь круга в виде:

$$A(\bigcirc) = \# \cdot r^2,$$

хотя мы и не знаем, каково число #. Вообразим два круга, один радиуса r, а другой радиуса $r + t$, где t — крохотное число. Представим, что один круг находится внутри другого, то есть второй круг чуть-чуть больше первого. Мы использовали обозначение $A(\bigcirc)$, но теперь нам нужны сокращения для двух разных кругов, так что давайте писать $A(r)$ для площади внутреннего круга и $A(r+t)$ для внешнего. Всё вместе выглядит как очень узкое кольцо. Я изображу это на рис. 4.3. Тогда площадь узкого кольца должна быть:

$$A_{\text{кольца}} = A_{\text{внешняя}} - A_{\text{внутренняя}} \equiv A(r+t) - A(r).$$

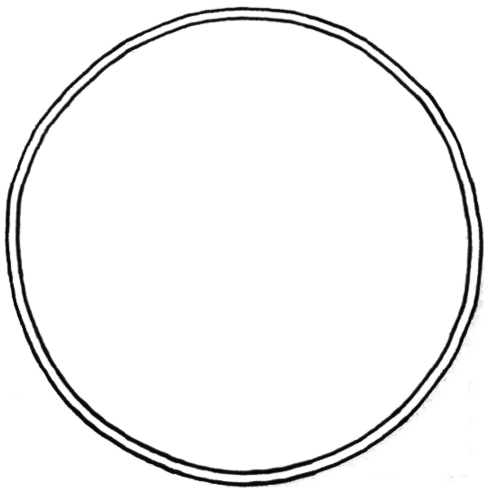


Рис. 4.3. Для бесконечно узких колец мы могли бы вычислить площадь, *как если бы они были узкими прямоугольниками*. На рисунке выше мы считаем, что внутреннее кольцо имеет радиус r, а внешнее — $r + t$, где t обозначает крохотное число. Соответственно, толщина кольца может быть любым крохотным числом t

Наше предложение $A(r) = \# \cdot r^2$ по-прежнему включает неизвестное нам число, но давайте его использовать. Получаем, что

$$A_{\text{кольца}} = \# \cdot (r+t)^2 - \# \cdot r^2 = \# \cdot [r^2 + 2rt + t^2 - r^2] = \# \cdot [2rt + t^2].$$

Итак, это площадь тонкого кольца. Но есть и другой способ обращения с ней. Если мы очень сильно увеличим любую часть окружности, она будет выглядеть как отрезок прямой. А если мы увеличим любой маленькой кусочек нашего тонкого кольца, он будет выглядеть как длинный узкий прямоугольник, верно?

Математика: Конечно.

Автор: Конечно.

Читатель: Теперь смотрите. Если мы сделаем кольцо достаточно тонким, можно вообразить, что мы его разрезаем ножницами и «разворачиваем» в длинный узкий прямоугольник. Теперь мы надеемся, что можно без большой ошибки вычислить площадь кольца, как если бы оно было прямоугольником, вот так:

$$\text{Площадь тонкого кольца} = (\text{длинная длина}) \cdot (\text{узкая ширина}) =$$
$$= (\text{Длина окружности}) \cdot (t).$$

Математика: Погодите, вы только что написали «Длина окружности». Это то, о чем говорит число, которое я выбрала, сдавшись. Смотрите:

$$\text{Длина окружности} \equiv \sharp \cdot d.$$

Поэтому я могу вас выручить. Я заменю слова «Длина окружности» в вашем предложении моим выражением, и получится:

$$\text{Площадь тонкого кольца} = \sharp \cdot d \cdot t.$$

Автор: Ха, мы описали одно и то же дважды. Минуту назад мы установили:

$$\text{Площадь тонкого кольца} = \# \cdot [2rt + t^2].$$

Математика: Погодите, у меня было другое обозначение. Но вещь, которую я называла d, просто вдвое больше, чем то, что вы называли r. Напишем $2r$ вместо d и объединим:

$$\# \cdot [2rt + t^2] = \sharp \cdot (2r) \cdot t.$$

Читатель: И везде есть минимум одно t.

Автор: Точно. Обе части говорят о площади узкого кольца, а она становится все меньше, когда мы уменьшаем t. Логично, что везде есть минимум одно t. Но мы просто хотим сравнить два числа, придуманные нами, когда «сдались», так что сократим везде на одно t и перепишем так:

$$\# \cdot [2r + t] = \sharp \cdot (2r).$$

Что тут делает t?

Читатель: О! Я догадываюсь, что это за остаток. Я только что говорил, что площадь узкого кольца мы можем *почти* считать произведением длины на ширину. Если быть точным, то это неверно, но чем тоньше кольцо, тем это оправданнее. Похоже, это истинно для бесконечно узкого кольца. Поэтому, возможно, нам следует устремить t к 0. Если бы мы это сделали до сокращения на t, мы бы получили $0 = 0$. Это, конечно, верно, но бесполезно. А сейчас, устремив t к 0, мы получим:

$$\# \cdot (2r) = \sharp \cdot (2r).$$

Сократив обе части на $2r$, имеем:

$$\# = \sharp.$$

Автор: То есть число, которое придумали, сдавшись, мы — то же самое, которое придумала, сдавшись, она?

Математика: Она? Я не считаю, что у меня есть какой-то пол, Автор.

Автор: О, конечно. Извините. Местоимения такие коварные.

Читатель: В любом случае придуманные «числа сдачи» одинаковы.

Автор: Но мы по-прежнему не знаем этих чисел! Точнее, этого числа. Извините. Множественное число такое коварное.

Математика: А имеет значение, что мы не знаем, что это за число?

Автор: Не так чтобы очень. Просто странно, что можно ничего не знать о числах # и $\sharp$, но при этом как-то показать, что они одинаковы.

Математика: Не вижу ничего странного. Давайте дальше будем обозначать это число $\sharp$, хорошо? Возможно, мы пожелаем использовать # для других целей.

Автор: Конечно.

Математика: Потрясающе. Итак, мы уже знаем:

$$\text{Площадь круга} = \sharp r^2,$$

$$\text{Длина окружности} = 2\sharp r,$$

но мы не знаем, что такое $\sharp$.

Автор: Получается, производная площади круга по его радиусу равна длине окружности?

Математика: Ну, верно — если вы хотите, чтобы звучало как в учебнике.

)*

4.4. Смесь разделяется

Как вы, должно быть, догадались, (неожиданно равные) числа, которые мы назвали # и ♯, имеют и другое название. Они обычно носят имя π, его числовое значение чуть больше 3. Пока мы не знаем его. Как мы его ни назовем — ♯, π или как-нибудь еще, пока это просто имя, которое мы изобрели для неизвестного ответа на задачу, которую мы уже утомились решать. Со временем мы откроем математические предложения, где ♯ загадочным образом проявится снова, — те, которые позволят нам выяснить точно, что это за число. Каким бы неважным и неинтересным ни было это значение, предложения позволят нам установить, что ♯ приблизительно равно 3,14159.

Оставим наше неведение на виду, пока не победим его. Чтобы постоянно напоминать себе, что мы этого не знаем, будем писать ♯ вместо π. Мы начнем использовать π, как только выясним для себя, как находить это число с любой желаемой точностью.

Пройдя все вышеописанное, я назвал пример мысленной центрифугой, поскольку это помогает разделять разные идеи, обычно находящиеся в одной куче. Когда нам сообщают, что площадь круга равна πr^2, нам подают странный омлет из очевидных истин, определений и исторических

* (**Рассказчик**: *Было неосмотрительно прерывать Рассказчика, — думал Рассказчик, — поскольку его рассказ (или, скорее, метакомментарий) находился в круглых скобках, и в этом смысле любое непредвиденное прерывание способно вызвать трудные для обнаружения ошибки в синтаксисе и/или проблемы грамматического разбора (э/Э)той (к/К)ниги (/впоследствии), соответственно. Но я отвлекся…)*

случайностей, сбитых воедино. Разделяя смесь, мы получаем примерно такой список:

Очевидная истина: $A(\bigcirc)/A(\boxdot)$ — всегда одно и то же число, независимо от величины рисунка.

Определение: Символ π *определяется* как это самое число. То есть $A(\bigcirc) = \pi \cdot A(\boxdot)$.

Историческая случайность: То, что это число обозначается π, а не #, не ♯, не ♣ и не как-нибудь еще*.

Необходимая истина, которую ничто из этого не делает очевидной: $\pi = 3{,}14159\ldots$

Символ π обычно определяется точно так же, как наша приятельница Математика определила «число сдачи» ♯ в диалоге выше. Но мы увидели, что # и ♯ оказались одним числом. Поэтому то, что обычно π определяется через длину, а не площадь, — факт исторический, но не логически необходимый. В этом качестве мы можем добавить его в наш список.

Историческая случайность: Тот факт, что π обычно определяется через длину, а не площадь: через соотношение (длина окружности) = π (диаметр), а не через соотношение $A(\bigcirc) = \pi A(\boxdot)$.

Таким образом, умение отделять исторические случайности от логически необходимых истин — одно из самых важных, которые нужно оттачивать при глубоком понимании математики. Значительная часть нестандартного подхода в этой книге выбрана ради отделения необходимого от случайного. В математике можно поменять очень многое: обозначения, терминологию, уровень формальности при исследовании, социальные нормы при передаче содержания в учебниках. Но даже тогда остаются фундаментальные истины. Именно они, как ни выражай их, составляют суть математики; только отделяя и хаотично меняя все случайное, мы можем прийти в итоге к неизменным истинам, лежащим в основании.

* Символ π был предложен Уильямом Джонсом в 1706 году и стал популярен после работ Леонарда Эйлера. Выбор буквы традиционно связывают с греческими словами περιφέρεια — окружность и περίμετρος — периметр, хотя в исходной работе Джонса Synopsis palmariorum mathesios таких объяснений нет. *Прим. перев.*

4.5. Что имеет смысл

4.5.1. Координаты изобретены только для того, чтобы их игнорировать

В курсах математики часто слышишь странный термин «система координат», а также близкие «декартовы координаты» и «полярные координаты». Стоит сделать паузу и спросить себя: что такое координаты? Они часто используются в разговорах о двумерной плоскости, трехмерном пространстве и т. д., но это не проясняет, в чем их суть и зачем они нам нужны. Например, сегодня утром я немало времени гулял в трехмерном пространстве и не видел ни одной «координаты». Но если бы я попытался вычислить, скажем, расстояние от моей квартиры до больницы или угол между горизонталью и линией от моего письменного стола до той птички на улице, которая призывно кричала в ответ на чью-то автомобильную сигнализацию, я бы быстро установил, что есть два способа решить эти задачи. Во-первых, качественный. Качественный ответ на вопрос «Каково расстояние сейчас от Читателя до меня?» будет примерно таким: «далеко» или «весьма близко». Но, вероятно, нам хочется большей точности. Как мы можем ее добиться? Один из способов — сказать:

«Читатель находится (очень)^n далеко от моей квартиры»,

где (очень)^n обозначает «очень», повторенное n раз подряд, а n — число шагов, которое нам нужно, чтобы пройти из одного места к другому. Это было бы точнее, но тоже тяжело. Нечего и говорить, что ни в одном человеческом языке подобных конструкций нет.

Другой способ точнее описывать геометрические объекты вроде расстояний и углов — использовать числа. Мы уже делали это много раз. Применение координат и чисел для описания геометрических объектов — процесс, с которым все мы знакомы, но он может настолько стать второй натурой, что легко упустить важное свойство: *координаты — не геометрия*. Пространство ничего не знает о них. Иногда мы рады иметь дополнительную структуру, обеспечиваемую числами: нам хочется складывать длины, находить кратчайшие пути и т. д., — и мы представляем, что каждой точке пространства приписаны числа (координаты). Но для этого нам приходится осуществить произвольный выбор, который не присущ самой геометрии. Как только мы чертим два перпендикулярных направления на листе бумаги (двумерную «систему координат»), мы немедленно получаем доступ ко всему арсеналу численных расчетов, который можем пустить в ход, говоря о чем-то на плоскости. Но! Если мы начертили одну систему координат, а не другую (скажем, под слегка иным углом), то мы сделали произвольный выбор. Мы ввели структуру, которая на самом деле больше, чем нам требовалось для разговора, и затем мы должны немедленно *отменить* эту дополнительную структуру, заявив, что осмысленными величинами могут быть только те, которые остаются неизменными при другом выборе структуры, бессмысленной с геометрической точки зрения (то есть при другом выборе системы координат).

Поэтому может показаться, что координаты бесполезны. На самом деле они порой очень нужны, но по вышеприведенным соображениям часто оказываются в очень странном положении: мы изобрели их, используем, а потом заявляем, что их не существует. Координаты делают всю работу в наших вычислениях, но не получают признания.

4.5.2. Координаты и смысл в математике

Я только что заявил, что пространство ничего не знает о координатах, которые мы используем для его описания. Это истинно для физического мира, но не совсем истинно для математики. Тут мы вольны сказать, что координаты имеют столько смысла, сколько мы желаем иметь. Наша воля определяет, какие другие величины будут «осмысленными».

Например, мы можем выбрать для изучения двумерную Вселенную, в которой ни одно направление и ни одна точка не выделяются на фоне других. Математики иногда называют это аффинной плоскостью. Поскольку ни одна точка и ни одно направление не выделены, осмысленные вещи в этой Вселенной не могут зависеть от конкретных точек и направлений. В этом мире нет ни «оси x», ни «оси y», ни «начала координат», и если мы используем эти понятия для облегчения вычислений, то должны убедиться, что наши результаты не будут как-либо зависеть от выбранной нами системы координат.

Затем мы могли бы обогатить нашу Вселенную, выделив одну особую точку, «начало координат», но не выделяя конкретного направления. В этой второй Вселенной осмысленным становится расстояние от начала координат до любой конкретной точки; в первой Вселенной это не имело смысла. Но угол между направлением на любую конкретную точку и положительной осью x (если мы такую выберем) — по-прежнему бессмысленное понятие, поскольку мы заявили, что в этой второй Вселенной не выделено конкретного направления. Сами оси — просто нечто, что мы пересадили в нашу вторую Вселенную, чтобы помочь в вычислениях.

Наконец, мы могли бы выбрать третью Вселенную, в которой выделены одна точка и одно направление, и назвать его направлением «вверх». По сути, это пространство, с которым мы работаем, когда «строим график» какой-то функции в двух измерениях. Мы не изучаем бесструктурную плоскость или мир с одной особой точкой; мы исследуем пространство с осмысленным понятием «вверх» и началом координат. В этом мире мы обычно используем расстояния от «оси x», измеренные в направлении «вверх», чтобы сообщать, что́ выплевывает машина, когда мы подаем в нее определенное число. В этой Вселенной впервые становятся осмысленными углы, *измеряемые от наших осей*.

4.6. Проблема

4.6.1. Слишком много направлений

Есть еще один печальный факт, связанный с координатами, хотя и не по их вине: слишком много направлений. Как бы мы ни нанесли наши координаты, не все направления будут совпадать с направлениями осей.

Проиллюстрируем эту проблему примером с поиском пути домой. Представьте, что вы отправляетесь на судне через океан искать далекие земли. Вы не желаете потеряться в море, так что решаете взять карту. Если вы в течение всего путешествия плыли строго на запад, то теоретически без проблем найдете дорогу домой: если вы прошли расстояние d, вам нужно развернуться и проплыть то же расстояние в обратном направлении. Запад — восток — одна из «осей» координатных систем, которые мы обычно используем, но описанная идея работает для любого направления. Если вы проходите d по прямой в одном направлении, достаточно развернуться и пройти то же расстояние в обратном направлении. К несчастью, не всегда можно плыть по прямой. Вы могли повернуть, чтобы не наткнуться на скалу, случайно отклониться и т. д. Учитывая, что вы меняли направление, как узнать, насколько далеко вы сейчас? Нужен способ комбинировать информацию от разных направлений.

Прежде всего задача выглядит похожей на ту, что мы уже решили. Если мы напишем x_k для числа морских миль, которые прошли в направлении запад — восток в день k, то общее количество миль, пройденных в направлении запад — восток, будет $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, или (если сократить эту сумму с помощью обозначения, о котором мы говорили в главе 2):

$$X \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Если мы напишем y_k для числа миль k, пройденных нами в направлении север — юг за день, то общее число миль, пройденных в направлении север — юг, составит

$$Y \equiv \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

X и Y — общее расстояние, которое мы проплыли в направлениях запад — восток и север — юг соответственно. Если мы хотим выяснить, насколько далеко мы от дома, мы используем формулу для кратчайшего пути, чтобы вычислить $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

Но даже если мы знаем, как вычислять квадратные корни (а мы пока не знаем), это не решит нашу проблему! Ведь мы обычно не получаем информацию в виде чисел x_k и y_k. Мы их не знаем. Когда мы плывем в реальном мире, Природа не дает нам каждый день числа x_k и y_k. Обычно нам вообще не дают информацию о том, сколько мы прошли в направлениях запад — восток и север — юг. Вероятнее всего, у нас есть расстояния (дли́ны) и направления (углы). В лучшем случае мы имеем что-то вроде рис. 4.4, что можно записать так:

День 1: 12 миль на восток

День 2: 7 миль на северо-восток

День 3: 10 миль на востоко-северо-восток

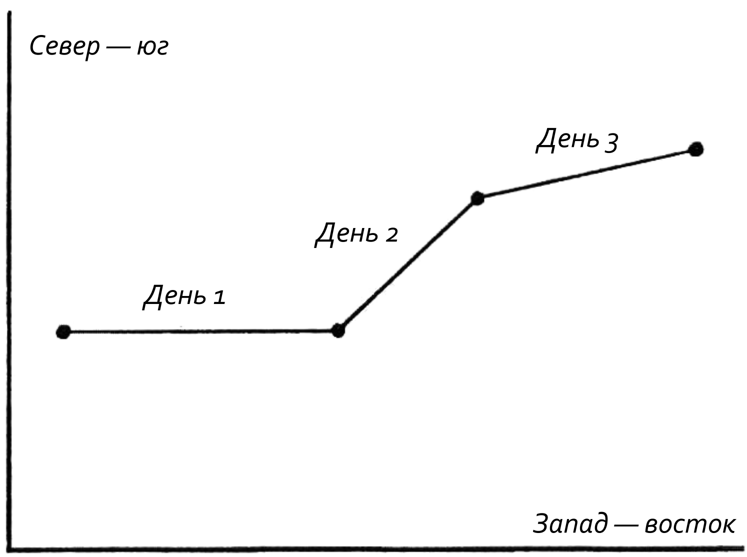


Рис. 4.4. Нам нужно выяснить, как комбинировать информацию о разных направлениях

Непонятно, как выяснить, сколько мы прошли. Главная проблема в том, что получаемая нами информация сформулирована в терминах расстояний, которые пройдены в *направлениях, отличных от наших осей*: слишком много возможных вариантов. Если бы она была дана в терминах ежедневного перемещения по горизонтали и вертикали (сколько пройдено по направлениям запад — восток и север — юг), то мы бы знали, что делать. Это более простая задача, которую мы уже решили раньше, используя числа x_k и y_k и формулу для кратчайшего пути.

Рисунок 4.4 показывает нам проблему, а рис. 4.5 поясняет, почему это обычная задача преобразования. Если бы мы могли выяснить, как переводить ежедневную информацию о «расстоянии и угле» в информацию о «горизонтальном и вертикальном перемещении», мы бы могли разобрать задачу, сведя ее к уже решенной.

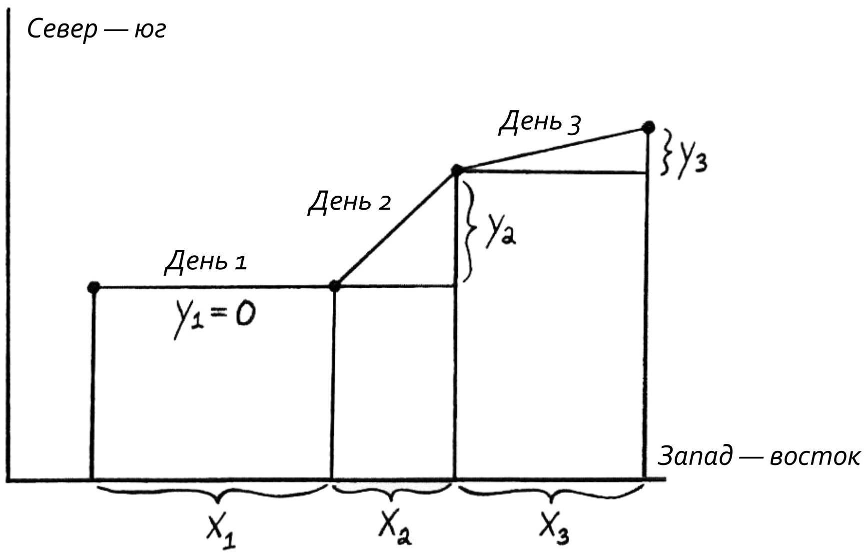


Рис. 4.5. Не потеряться в море было бы просто, если бы мы могли переводить информацию о «расстоянии и угле» в информацию о «горизонтальном и вертикальном перемещении»

Мы свели проблему навигации к более простой абстрактной задаче. Теперь мы можем забыть о пути из трех частей, изображенном на рис. 4.4 и 4.5. Почему? Потому что, если бы мы имели в распоряжении метод преобразования информации о расстоянии и угле в информацию о вертикальном и горизонтальном перемещении, мы бы просто применили его три раза и могли бы (в принципе) решить нашу навигационную проблему.

Глядя на нее в такой более абстрактной форме (как на задачу преобразования), можно увидеть, что суть ее не имеет ничего общего с собственно навигацией. Это задача преобразования информации, изложенной на языке расстояний и углов, в эквивалентную информацию на языке нашей координатной системы — той, которую мы построили на двух перпендикулярных направлениях. Признав, что проблема на деле более общая, чем мы предполагали, попробуем подумать о ней более абстрактно.

4.6.2. Проблема в абстрактной форме

Удивительно, но мы умудрились упростить задачу, сделав ее более абстрактной, а не конкретной. Но мы по-прежнему не знаем, что делать. Проблему можно сформулировать так.

Обратная проблема кратчайшего пути

Предположим, мы уже выбрали систему координат, и у нас есть два направления, v и h (вертикальное и горизонтальное). Некто дает отрезок длиной l, который может располагаться в любом направлении. Есть ли способ описать, сколько он занимает в вертикальном направлении и сколько в горизонтальном?

Проблема изображена на рис. 4.6. Сейчас у нас нет идеи, как взяться за задачу. Но мы можем выбрать сокращения. Возьмем H для искомой величины в горизонтальном направлении и V — в вертикальном. Мы можем написать так:

$$H(\text{отрезок}) = ?$$
$$V(\text{отрезок}) = ?$$

Есть ли что-то еще, чего мы знаем? Ну, независимо от длины этой вещи*, если бы отрезок был абсолютно вертикальным, то H составило бы 0,

* Я понимаю, что это может выглядеть ленью при выборе слов. Извините за использование слова «вещь», но термин «отрезок прямой» мне основательно надоел. «Палка» кажется неправильным словом. Следует признать, что термин «вещь» — несколько обобщенный и абстрактный, но, с другой стороны, поэтому он и математический.

а если бы абсолютно горизонтальным, то $V = 0$. Но мы не знаем, что делать в случае промежуточного положения между вертикальным и горизонтальным. Было бы здорово, если бы мы умели измерять величину наклонности. Есть ли какой-нибудь способ это сделать?

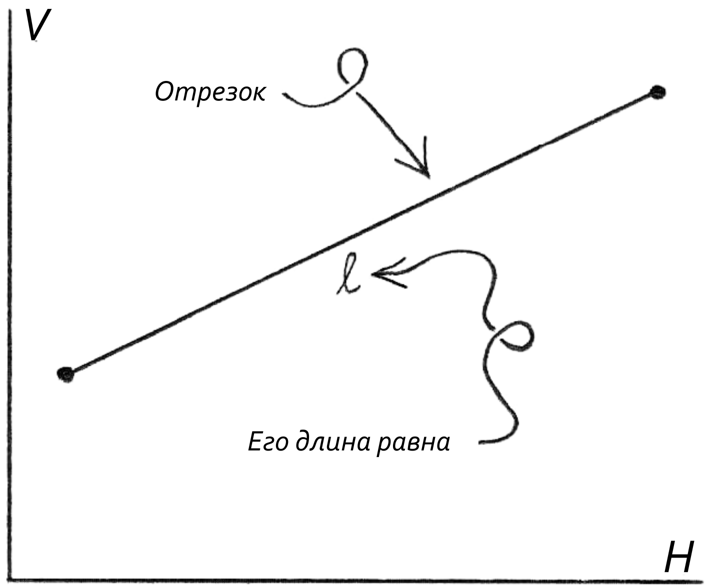


Рис. 4.6. Если некто дает нам отрезок длиной l, направление которого не совпадает с направлением наших координат, можем ли мы выяснить, сколько он занимает в вертикальном и горизонтальном направлениях?

В каком-то смысле мы уже создали способ измерять величину наклонности, когда изобретали угловой коэффициент. Но мы определяли его как $\frac{v}{h}$, где v было расстоянием между двумя точками по вертикали, а h — по горизонтали. Поэтому, каким бы многообещающим ни выглядело измерение наклонности нашей вещи через крутизну или угловой коэффициент, это все равно что ставить телегу впереди лошади. Ведь наша задача как раз в том, чтобы выяснить эти вертикальные и горизонтальные штуки, так что лучше бы их в наше решение не включать. Нужен другой способ говорить о направлении.

Что означает «направление» в повседневной жизни? Если мы встанем и начнем «менять направление» (поворачиваться вокруг), то в итоге мы совершим оборот; так что, вероятно, можно говорить о направлении в терминах окружностей. Есть много способов делать это, аналогично тому, как есть много способов измерять длину. Мы можем считать, например, что полный оборот — это угол 1. Если мы выберем такой способ, то поворот на пол-оборота будет углом $\frac{1}{2}$, поворот налево — $\frac{1}{4}$ и т. д. Это замечательно, и, честно говоря, я понятия не имею, почему стандартные учебники так не делают. Некоторые выражения стали бы выглядеть сложнее, зато другие — проще. По каким-то причинам есть две договоренности об измерении углов, и вы, по сути, имели дело только с ними. Первая — измерять их в «градусах»; при такой системе считается, что полный оборот составит 360°. Я считаю, что единственная причина — что число 360 имеет много делителей. Более привычная система измеряет углы в единицах радиуса окружности. На первый взгляд странная идея, но в ней достаточно здравого смысла. В диалоге выше мы установили, что наше число # совпадает с числом Математики $\sharp$, которое первоначально определялось как:

$$\text{Длина окружности} \equiv \sharp \cdot d, \tag{4.2}$$

где d — диаметр круга. Если r — радиус круга, то $d = 2r$, так что мы можем переписать определение Математики так:

$$\text{Длина окружности} \equiv 2 \cdot \sharp \cdot r. \tag{4.3}$$

Это говорит нам, что, независимо от величины круга, двигаясь по окружности, вы пройдете $2\sharp$ радиуса. По какой-то причине самая распространенная договоренность для измерения углов не в том, чтобы считать полный оборот 1 или 360, а в том, чтобы считать его $2\sharp$. Мы по-прежнему не знаем, каково $\sharp$*, но если мы используем эту договоренность, то половина оборота

* Вспомните, что $\sharp$ — число, которое учебники называют π. Мы по-прежнему оставляем на виду свое неведение, выражая его тем, что называем это число $\sharp$, пока не найдем способ узнать его численное значение.

будет углом $\sharp$, четверть оборота — $\frac{\sharp}{2}$ и т. д. В нашей книге мы будем использовать для измерения углов именно эту договоренность.

Обозначим угол (angle) буквой α, поскольку α — греческий аналог буквы a, и это напоминает нам, о чем мы говорим*.

Придумав понятие угла, мы можем изложить нашу проблему на несколько ином языке.

Обратная проблема кратчайшего пути

Предположим, мы уже выбрали систему координат, и у нас есть два направления, v и h (вертикальное и горизонтальное). Некто дает нам отрезок длины l, который расположен под углом α, отложенном против часовой стрелки от положительного направления горизонтальной оси. Как описать, сколько этот отрезок занимает в вертикальном направлении и сколько в горизонтальном?

Этот новый способ сформулировать проблему изображен на рис. 4.7. Теперь вместо $H(\textit{отрезок})$ и $V(\textit{отрезок})$ мы можем написать:

$$H(l, \alpha) = ?$$
$$V(l, \alpha) = ?$$

* Почему α, а не a? Ну, иногда a лучше. Греческая буква не обязательна. Но хотя мы часто пользуемся свободой изобретения наших обозначений, целесообразно иногда упоминать стандартные обозначения и даже пользоваться ими, когда они не слишком ужасны. По какой-то причине в математике (и физике) есть негласное правило обозначать греческими буквами то, что связано с углами. Почему? Понятия не имею. В учебниках часто называют углы буквами θ, φ, α и β; угловую скорость обычно обозначают ω; момент (величина, характеризующая вращающую силу в физике) обозначается τ; и т. д. Использование букв разных алфавитов иногда усложняет задачу, в этом смысле стандартная терминология не так плоха. В общем, поскольку α выглядит достаточно похоже на a, чтобы напоминать нам, о чем мы говорим, давайте пустим эту букву в нашу Вселенную.

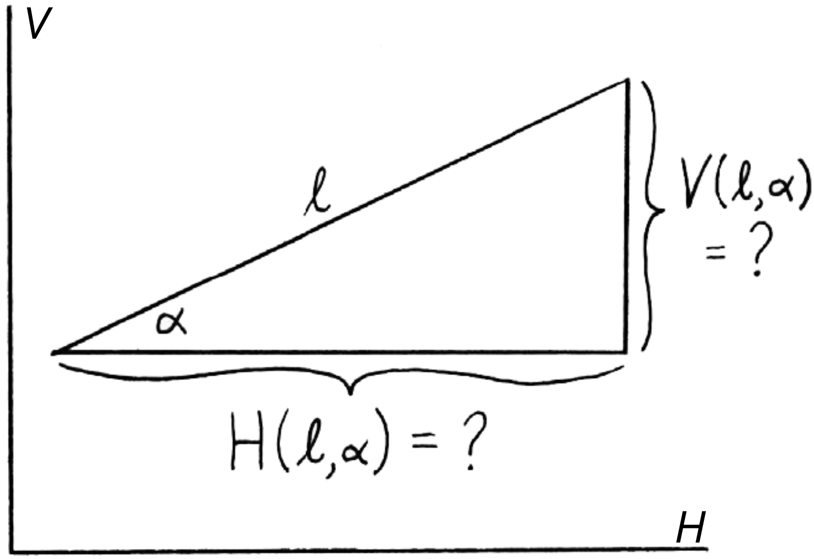


Рис. 4.7. Сейчас, когда мы знаем, что такое углы, мы можем переписать абстрактную форму нашей проблемы таким способом

Хотя пока мы не можем решить проблему полностью, нетрудно увидеть, что эти задачи взаимосвязаны. Предположим, некто выдал нам два разных варианта задания с *одним и тем же* углом α, но разными длинами. Например, в дополнение к исходной задаче нам дали еще одну, в которой длина равна $2l$, а не l:

$$H(2l, \alpha) = ?$$
$$V(2l, \alpha) = ?$$

Ситуация схожа с задачей, затрагивающей ♯ и #, с которой мы начинали главу. Мы не можем решить ни одну из них, но способны убедить себя, что они связаны между собой. Посмотрев на рис. 4.8, нетрудно увидеть:

$$H(2l, \alpha) = 2H(l, \alpha),$$
$$V(2l, \alpha) = 2V(l, \alpha).$$

Иными словами, мы, по сути, свели $2l$-задачу к l-задаче, хотя не умеем решать ни ту, ни другую! Более того, в этом рассуждении число 2 не играет роли.

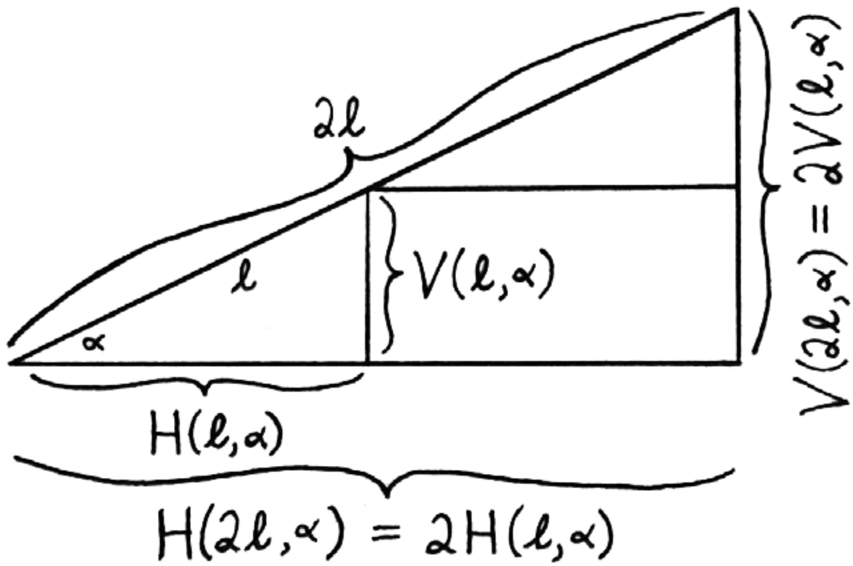


Рис. 4.8. Две взаимосвязанные проблемы. Мы всё еще не знаем $H(l, \alpha)$ и $V(l, \alpha)$, но можем увидеть взаимосвязь между задачами с одинаковым углом и разными длинами. Например, $H(2l, \alpha) = 2H(l, \alpha)$

Нетрудно вообразить картинку, подобную рис. 4.8, где будут фигурировать $H(3l, \alpha)$ и $V(3l, \alpha)$.

Аналогичную картинку можно нарисовать для любого целого числа n, а также простых нецелых чисел вроде $\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2}$. Поэтому нетрудно убедить себя, что та же схема должна срабатывать для любого числа #. Мы имеем для произвольного #:

$$H(\#l, \alpha) = \#H(l, \alpha),$$
$$V(\#l, \alpha) = \#V(l, \alpha).$$

Два этих факта позволяют нам прибегнуть к ловкому приему, который приблизит нас к решению проблемы. Если они верны для любых чисел #, мы можем использовать это утверждение для самой длины l, рассматривая l как $l \cdot 1$, и получить:

$$H(l, \alpha) = lH(1, \alpha),$$
$$V(l, \alpha) = lV(1, \alpha).$$

Замечательно. Эти два предложения говорят, что нам нужно решить задачу только для одной конкретной длины. Мы выбрали 1, но легко могли бы взять любое другое число. Например, мы с тем же успехом могли бы написать $H(l, \alpha) = \frac{l}{17}H(17, \alpha)$ или что-то иное в такой форме. Мы выбрали 1 чисто из эстетических соображений. Важно не то, какую длину мы выбираем, а то, что часть проблемы, связанная с ней, — по сути, вообще не проблема. Если мы можем узнать $H(1, \alpha)$ или $V(1, \alpha)$, мы немедленно можем выявить $H(l, \alpha)$ или $V(l, \alpha)$ для любой длины l, которая может нам встретиться.

Давайте использовать новое знание, чтобы ввести более удобные сокращения. Поскольку обращаться с длиной так просто, нам незачем оставлять два места в H и V. Давайте сократим:

$$H(\alpha) \equiv H(1, \alpha),$$
$$V(\alpha) \equiv V(1, \alpha).$$

Позже, если нам понадобится фиксировать длины в явном виде, мы можем записать $H(l, \alpha) = lH(\alpha)$ и т. д.

4.7. Мольер умер! Да здравствует Мольер!

К этому моменту идей у нас нет. Мы не смогли справиться с проблемой, хотя выяснили, что нам не нужны два места в H и V. У нас нет ни малейшего представления, как вычислять конкретные значения $H(\alpha)$ и $V(\alpha)$ в целом, хотя для каких-то углов мы могли бы придумать какой-нибудь прием. Например, если $\alpha = 0$, у нас горизонтальная линия, поэтому $H(0) = 1$, а $V(0) = 0$. Когда α составляет четверть оборота, получаем $\alpha = \frac{\sharp}{2}$ в силу странного соглашения об измерении углов, утверждающего, что полный оборот содержит $2\sharp$. Но при $\alpha = \frac{\sharp}{2}$ наша линия вертикальна, поэтому $V(\frac{\sharp}{2}) = 1$, а $H(\frac{\sharp}{2}) = 0$. Если α — угол в 45° (восьмая часть оборота, то есть $\alpha = \frac{\sharp}{4}$), то горизонтальный и вертикальный отрезки одинаковы, поэтому $V = H$. Теперь можно применить формулу кратчайшего пути для вертикального отрезка V, горизонтального H и наклонного кратчайшего пути, равного 1. Поскольку $V = H$, получаем: $1^2 = V^2 + H^2 = 2V^2$, откуда:

$$V(\alpha) = H(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{при } \alpha = \frac{\sharp}{4}.$$

Если бы мы пошли дальше, то могли бы придумать какой-нибудь трюк, который позволил бы нам найти V и H для еще нескольких конкретных углов, но у нас нет разумных причин так поступать. Даже если бы мы так сделали, это было бы далеко от решения задачи, которую мы себе поставили.

Мы окончательно застряли. Потерпели провал. Давайте снова прибегнем к трюку Мольера. Как и ранее, потерпев неудачу с решением вроде бы простой задачи о кругах, мы *сдадимся* и будем действовать так, как если бы имена V и H, данные нами неизвестным решениям, были самими этими решениями! Не знали, что так можно? Конечно, можно. Вы найдете этот прием в любой книге по тригонометрии!*

Конечно, нам никогда не скажут об этом, и в итоге мы обычно проклинаем себя за то, что не понимаем задачу, которую на самом деле книги и учителя и не решают! Так и будет, пока мы не погрузимся в анализ настолько, что получим инструменты для решений этой задачи. А сейчас мы можем наконец-то изложить четкое описание машин V и H, которые так загадочны при отсутствии анализа. Оно настолько же ясно, как описание наших плюсо-умножательных машин; оно позволяет нам вычислять $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ для любого угла с любой желаемой точностью. Мы сделаем это в следующей интерлюдии, когда изобретем Ностальгическое устройство. Следите за новостями!

---

* К слову, название «тригонометрия» вводит в заблуждение. Ее смысл не в изучении треугольников (термин образован от древнегреч. τρίγωνον («треугольник») и μετρέω («измеряю»). *Прим. перев.*). Смысл — в разделении наклонных вещей на горизонтальную и вертикальную части. Как мы видели на рис. 4.7, треугольники возникают *случайно*, в качестве побочного эффекта. Причина, по которой они именуются прямоугольными, всего лишь в том, что горизонтали и вертикали перпендикулярны. Тригонометрия — не предмет.

4.8. Утомительная какофония избыточных названий

Позвольте мне закончить указанием, что я не пишу эти колкости как противник математики. Я ощущаю, что она достаточно важна, чтобы не хоронить ее в мусорной куче символов, и люди, которые с какими бы то ни было намерениями увеличивают сложность ее изучения, несерьезно относятся к своим обязанностям.

Престон Хаммер, «Стандарты и математическая терминология»

Как вы, возможно, догадались, наши неизвестные вертикальная и горизонтальная части есть и в стандартных учебниках, где носят предсказуемо бесполезные названия. Они именуются «синус» и «косинус»:

$$H(\alpha) \equiv \cos \alpha,$$
$$V(\alpha) \equiv \sin \alpha.$$

Не удовлетворившись выбором двух архаичных и незапоминаемых названий для двух простых понятий, нужных в предыдущем обсуждении, стандартные учебники продолжают участвовать в калигулической вакханалии терминологической вседозволенности, создавая ряд непонятных названий для простых комбинаций V и H, а потом заставляя нас запоминать их необычное поведение. Они не служат никакой цели, кроме как обманывать большинство учеников, которые думают, что узна́ют действительно новое. Вот некоторые из этих бесполезных названий, имеющихся в стандартных учебниках:

$$\frac{V(\alpha)}{H(\alpha)} \equiv \operatorname{tg} \alpha \equiv \text{«тангенс»},$$
$$\frac{H(\alpha)}{V(\alpha)} \equiv \operatorname{ctg} \alpha \equiv \text{«котангенс»},$$
$$\frac{1}{H(\alpha)} \equiv \sec \alpha \equiv \text{«секанс»},$$
$$\frac{1}{V(\alpha)} \equiv \operatorname{cosec} \alpha \equiv \text{«косеканс»}.$$

Некоторые старые учебники упоминают еще больше «тригонометрических функций»: версинус, веркосинус, гаверсинус, гаверкосинус, коверсинус, коверкосинус, эксеканс, экскосеканс, когаверсинус, когаверкосинус. К счастью, в современных пособиях их уже нет. Они использовались в основном для навигации, когда было полезно иметь под рукой огромные таблицы таких величин. Но в современном мире, где интересные и важные применения математики простираются далеко за пределы судов (извините, суда) и где мы, скромные приматы, умудрились создать сверхбыстрые и эффективные вычислительные машины, просто сумасшествие хоронить учеников под этой кучей архаичных названий. Учебники отказались от них по той же причине.

Эти величины по-прежнему регулярно возникают, хотя мы едва ли сознаем это, поскольку у них уже нет собственных причудливых имен. Например, покойная «тригонометрическая функция» когаверкосинус была сокращением для $\frac{1}{2}(1 + \sin x)$, а ее почивший братец веркосинус означал $1 + \cos x$. Возникают ли эти величины в современной математике? Да. Заслуживают ли они отдельных названий? Почти наверняка нет. Пора из тех же соображений провести чистку для понятий вроде секанса, косеканса, котангенса, тангенса*. Они изжили себя, отчаянно путают большинство учеников и принадлежат к числу архаичных конвенций, которые убивают интерес к нашему предмету. Эти термины стоит прикончить из милосердия.

Отлично! В оставшейся части книги мы зарезервируем заглавные буквы V и H для обозначения того, что учебники именуют «синус» и «косинус». Мы выбрали эти буквы, потому что они напоминают нам слова «вертикальный» и «горизонтальный», а также причину, по которой мы изобрели эти понятия в первый раз. Но не совсем верно, что отрезок, к которому относится обозначение $H(\alpha)$, будет *всегда* горизонтальной линией, и аналогичное справедливо для $V(\alpha)$. Эта проблема актуальна и для обиходных слов (например, «налево», по сути, не означает «вверх», но *может* означать, если вы лежите на правом боку). Редкие случаи, когда H не относится к длине горизонтального отрезка, возникают в основном по той же причине. Но мы будем стараться всегда указывать, когда встретимся с такими случаями, так что давайте, не стесняясь, устремимся вперед с гораздо менее громоздкой терминологией.

---

* Хотя тангенс можно оставить, если он согласится не заставлять нас запоминать его свойства.

4.8.1. Изображать все новым способом

Вспомним, что $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ были сокращениями для $V(1, \alpha)$ и $H(1, \alpha)$. Иными словами, эти два символа обозначают вертикальную и горизонтальную протяженность наклонного отрезка длины 1. Если мы оставим ее неизменной, но будем менять угол, получится круг, как показано на следующем рисунке.

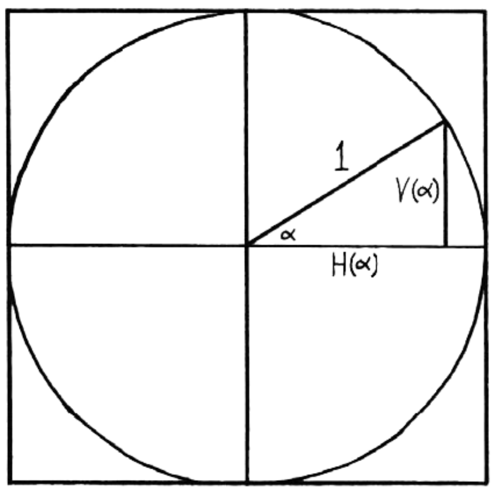


Рис. 4.9. Изображение $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ — вертикальной и горизонтальной протяженности отрезка длины 1, наклоненного под углом α к горизонтальной оси

Если мы посмотрим на рис. 4.9, мы можем найти обоснование для другого способа наглядного представления $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$: представить их в виде машины, зависящей от α. Нетрудно заметить несколько моментов. Во-первых, $V(0) = 0$ и $H(0) = 1$. Во-вторых, $H(\frac{\sharp}{2}) = 0$ и $V(\frac{\sharp}{2}) = 1$.

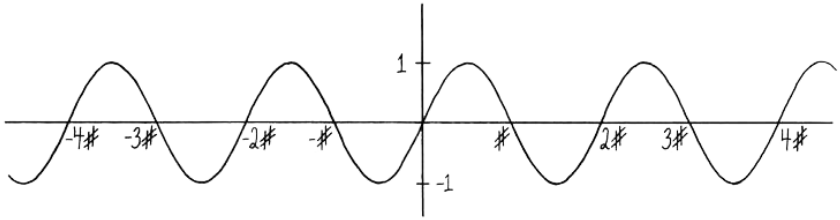


Рис. 4.10. Изображение V как машины, которая ест угол α, а выплевывает $V(\alpha)$

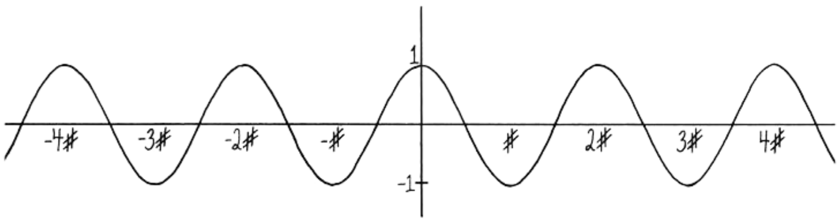


Рис. 4.11. Изображение H как машины, которая ест угол α, а выплевывает $H(\alpha)$

Наконец, если мы увеличим α на 2♯, то фактически «повернем стрелку часов» на рис. 4.9 на один полный оборот и вернемся туда, откуда начали. Это можно записать символически, сказав, что для любого α справедливо $H(\alpha + 2\sharp) = H(\alpha)$ и $V(\alpha + 2\sharp) = V(\alpha)$. Используя только эти два факта, мы можем создать два графика $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ (см. рис. 4.10 и 4.11). Вношу ясность: рассуждение выше показывает, что графики V и H должны *как-то* периодически волнообразно колебаться, но не говорит нам, что наши изображения точны во всех деталях. Рисунки 4.10 и 4.11 предназначены только для того, чтобы в целом представлять открытые нами к этому моменту факты, но мелкие детали графиков для наших целей неважны. На обоих графиках по горизонтальной оси α, а по вертикальной — выход машин $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$.

4.9. Исчисление неисчислимого

Пока любая попытка продифференцировать машины V и H выглядит безнадежной утопией. В конце концов, мы не умеем вычислять $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ для произвольного угла α. Мы не можем даже дать их *описание*! Мы «определили» их, нарисовав картинки. Как их дифференцировать? Вероятно, никак. Но раз это выглядит нереальным, тем больше оснований попытаться это сделать. Поскольку все, что мы знаем сейчас об этих машинах, может быть определено средствами изображений, попробуем продифференцировать их с помощью картинок.

Хотя мы можем только рисовать картинки, посмотрим, не добьемся ли мы какого-нибудь прогресса. Изображаем рис. 4.12. Как найти производные

V и *H*? Сделаем то, что всегда делали, когда пытались что-то продифференцировать. У нас была какая-то машина, в которую мы клали какую-то *еду*. Затем мы изменяли *еду* на крохотную величину, увеличивая ее с *еды* до *еда* + *d*(*еда*), а затем смотрели, как меняется отклик машины между этими двумя событиями. В нашем случае машины — *V* и *H*, а *еда* — угол α.

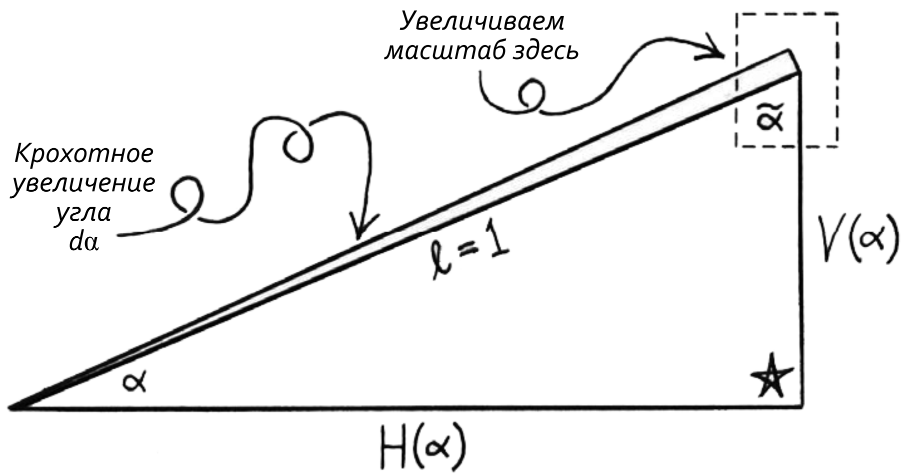


Рис. 4.12. Бредовая попытка продифференцировать *V* и *H*, хотя мы можем описать их только с помощью картинок. Мы используем ★ для обозначения величины прямых углов, поскольку многократное $\frac{\#}{2}$ может сбивать с толку

Поэтому чуть-чуть изменим угол, увеличив его с α до $\alpha + d\alpha$, а затем посмотрим на $dH \equiv H(\alpha + d\alpha) - H(\alpha)$ и то же сделаем для *V*. Рисунок 4.12 показывает, что случится, когда мы чуть-чуть изменим угол. Поскольку $H(\alpha)$ была определена в качестве сокращения для $H(l, \alpha)$ при $l = 1$, мы убеждаемся, что кратчайшее расстояние равно 1 и до, и после изменения угла. Таким образом, по сути, мы смотрим на бесконечно тонкий ломтик круга. Давайте бесконечно увеличим его в месте, где разворачивается действие, и посмотрим, не сможем ли мы что-нибудь выяснить.

Если мы увеличим угол только на бесконечно маленькую величину $d\alpha$, то две линии слева на рис. 4.13 должны быть почти параллельны друг другу (или, если вам так больше нравится, бесконечно близки к параллельности).

Раз это противоречит интуиции, подумайте так: если бы они *не были* почти параллельными, то между ними был бы некий маленький, но измеряемый угол, строго больше 0. Тогда мы могли бы измерить $d\alpha$ и указать величину этого угла. Это означало бы, что крохотное увеличение $d\alpha$ — просто *очень* маленький угол, а не *бесконечно* малый. Такой тип рассуждений необычен, но последуем ему и посмотрим, что он нам даст. Линия между словами «до» и «после» на рис. 4.13 идет от точки, где мы были до изменения угла, к точке, где мы оказались после его изменения. Поскольку мы меняли угол, но не радиус, выглядит правдоподобным, что эта линия перпендикулярна двум другим, которые отходят влево и вниз. Возможно, полезно думать о тонком ломтике пирога: когда он становится бесконечно узким, корочка должна быть перпендикулярна обеим сторонам.

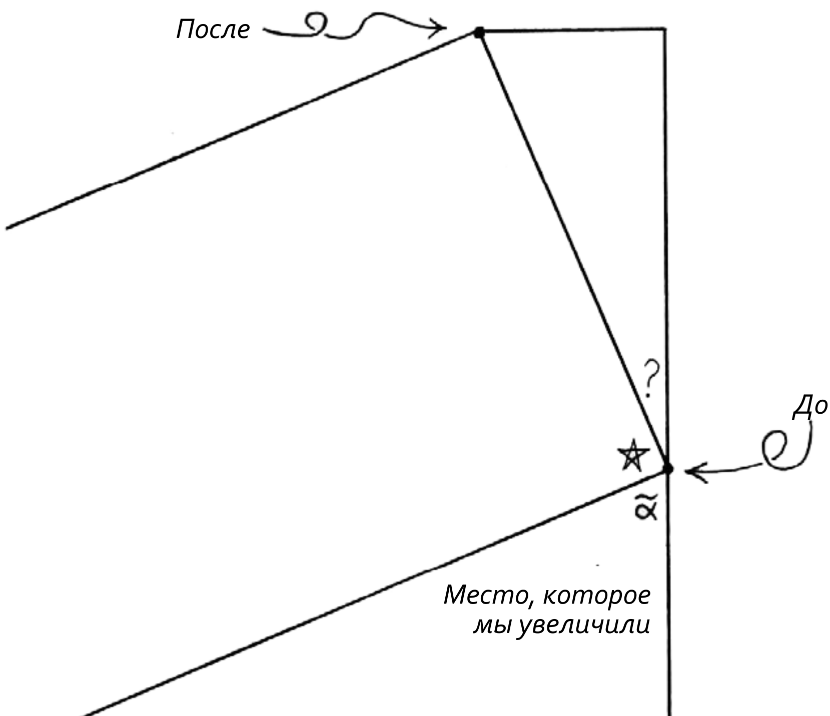


Рис. 4.13. Увеличенное место после бесконечно малого изменения угла α

Обозначим как ★ прямой угол на рис. 4.13. Линия от положения «до» к положению «после» на рис. 4.13 наклонена. Если мы представим ее разложение на горизонтальную и вертикальную части (начертим горизонтальную и вертикальную линии на рис. 4.14), мы увидим нечто удивительное.

Крохотный треугольник на рис. 4.13 выглядит весьма похожим на исходный на рис. 4.12. Как будто это «тот же» треугольник, просто уменьшенный и повернутый. Мы могли бы убедиться в этом, если бы установили, что эти два треугольника имеют одинаковые углы. Один из них прямой (у каждого есть вертикальная и горизонтальная стороны). Как насчет двух других? Обратите внимание, что три угла ★, $\tilde{\alpha}$ и ? в правой стороне рис. 4.13 примыкают к прямой линии, то есть в сумме составляют развернутый угол, который в нашей системе измерения равен $\sharp$, а в учебниках именуется π. Можно записать это так:

$$\star + \tilde{\alpha} + ? = \sharp.$$

Кажется правдоподобным, что угол ? на рис. 4.13 должен быть равен углу α на рис. 4.12, поскольку треугольники выглядят похожими. Как в этом убедиться? Вот идея.

Возьмите два экземпляра этого треугольника и сложите из них прямоугольник. Каждый из углов в прямоугольнике равен ★, всего их четыре, поэтому сумма углов равна 4★. Соответственно, сумма углов исходного треугольника должна быть вдвое меньше, то есть 2★. Но ★ — прямой угол, а 2★ образуют развернутый угол, который мы назвали $\sharp$. Поэтому сумма всех углов в любом треугольнике должна составить $\sharp$. Применяя это к первоначальному треугольнику на рис. 4.12, мы получим:

$$\star + \tilde{\alpha} + \alpha = \sharp.$$

Два этих уравнения совместно говорят нам, что угол ? должен быть равен α. Хорошо, теперь в попытках показать, что крохотный треугольник на рис. 4.13 имеет те же углы, что и первоначальный на рис. 4.12, мы убедились, что: а) в каждом из них есть прямой угол ★; б) в каждом есть один угол α. Но мы только что выяснили, что сумма углов обоих треугольников равна ♯. Это значит, что третий угол в крохотном треугольнике на рис. 4.13 должен быть $\tilde{\alpha}$, то есть одним из углов треугольника, с которого начинали. Теперь мы можем объединить всё, что знаем, нарисовав еще одну картинку, показанную на рис. 4.14.

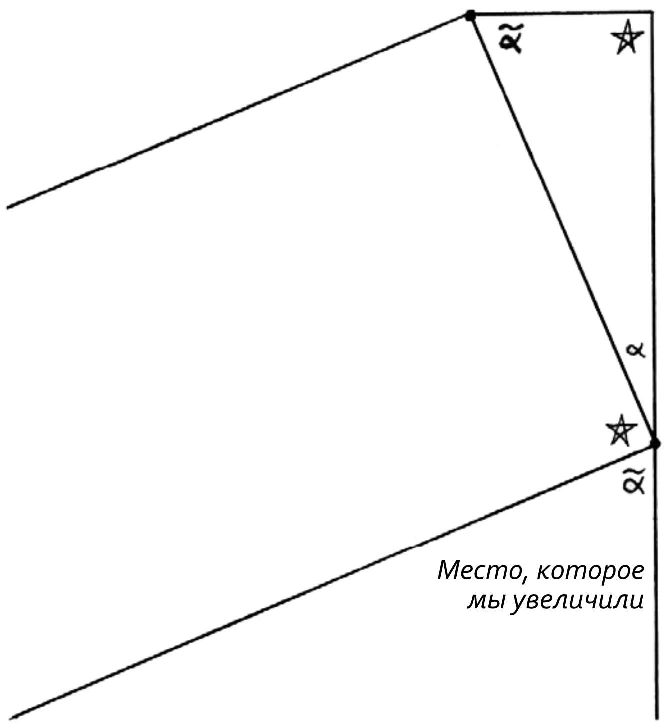


Рис. 4.14. По причинам, изложенным в тексте, мы обнаружили, что углы этого бесконечно малого треугольника должны быть такими же, что и у первоначального. Угол ★ должен быть прямым (♯/2), а углы α и $\tilde{\alpha}$ совпадают с углами исходного треугольника

Таким образом, крохотный треугольник на рис. 4.13 — просто уменьшенная и повернутая копия треугольника на рис. 4.12. Знаем ли мы что-то еще? Да: мы увеличили угол на $d\alpha$, а полный оборот по нашему методу измерения составляет 2♯. Однако 2♯ — это также длина окружности радиуса 1. Соответственно, для этой окружности радиуса 1 слово «угол» просто значит «расстояние». Это очень нам поможет, поскольку значит, что отрезок между двумя буквами $\tilde{\alpha}$ на рис. 4.14 должен иметь длину $d\alpha$, ведь именно такой угол этот отрезок стягивает.

Исходный треугольник на рис. 4.12 имел стороны длины $H(\alpha)$, $V(\alpha)$ и 1. Крохотный треугольник — уменьшенная копия исходного, одна из его сторон равна $d\alpha$, поэтому остальные должны иметь длину $H(\alpha)d\alpha$ и $V(\alpha)d\alpha$. Теперь мы можем начертить рис. 4.15, изобразив на нем все, что знаем.

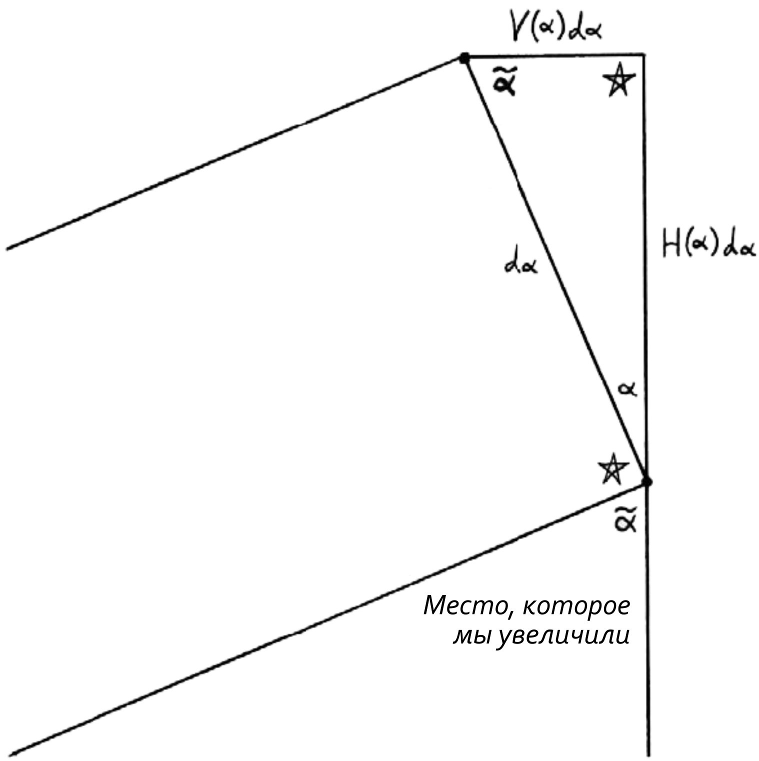


Рис. 4.15. Поскольку два наши треугольника имеют одинаковые углы, маленький — уменьшенная копия исходного. В силу нашего метода измерения углов самая длинная сторона крохотного треугольника имеет длину $d\alpha$. Зная одну сторону, мы можем выяснить остальные. Это позволит нам найти производные V и H

Цель вышесказанного — посмотреть, не можем ли мы выяснить производные V и H, хотя к этому моменту способны описать их только графически. Используя то, что мы установили выше, мы хотим определить:

$$\frac{dV}{d\alpha} \text{ и } \quad \frac{dH}{d\alpha},$$

где $dV \equiv V_{\text{после}} - V_{\text{до}}$, а $dH \equiv H_{\text{после}} - H_{\text{до}}$. Здесь V и H относятся к длинам вертикального и горизонтального отрезков в треугольнике на рис. 4.12 до и после того, как мы изменили угол на величину $d\alpha$. Соответственно, dV и dH — просто длины сторон крохотного треугольника, которые мы только что нашли. При увеличении угла α на крохотную величину длина вертикального отрезка в большом треугольнике увеличивается на маленькое число dV, но на рис. 4.15 мы видим, что $dV = H(\alpha)d\alpha$. Мы можем записать это иначе:

$$\frac{dV}{d\alpha} = H(\alpha).$$

Ого! Мы фактически нашли производную V. Посмотрим, можем ли мы сделать то же для H. При увеличении угла α на крохотную величину длина горизонтального отрезка в большом треугольнике уменьшается на маленькое число dH, и на рис. 4.15 мы видим, что $dH = -V(\alpha)d\alpha$. Знак «минус» появляется, поскольку длины всегда положительны, но мы говорим об *уменьшении* длины, поэтому изменение ее отрицательно. Это равенство мы можем записать иначе:

$$\frac{dH}{d\alpha} = -V(\alpha).$$

Замечательно! Хотя мы понятия не имеем, как дать описание машин V и H без картинок, мы ухитрились найти их производные. По счастливому стечению обстоятельств производная одной из них равна другой, но в одном случае со знаком минус. Если бы суть дела не была настолько элегантна, эта попытка продифференцировать V и H не сработала бы.

Вот еще один пример того, о чем мы говорили с самого начала. Эти «предварительные области» для анализа удивительно сложны и, как правило, требуют самого анализа, чтобы полностью в них разобраться.

Трудная задача, которую мы всё еще не решили, — как вычислить $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$, если некто дал нам произвольный угол α. Как ни странно, мы сумели найти производные этих машин с помощью рассуждения, основная логика которого проста, хотя нам пришлось быть многословными, поскольку форма книги затрудняет показ «моментальных снимков» изображения по ходу рассуждений. Но многословность — мой недостаток. Само по себе рассуждение вовсе не сложное, и вы убедитесь в этом, когда попробуете повторить его для себя. Как всегда, это просто увеличение, подача в машину некой «еды», небольшое увеличение «порции» и наблюдение за изменением результата.

Вспомним, что стандартные учебники используют для V и H слова «синус» и «косинус», так что на их языке наше открытие можно записать так:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x,$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

Вскоре мы увидим, как решить основную проблему, с которой начался раздел: полного описания машин V и H способом, который реально позволяет их использовать. Когда мы узнаем — хотя бы в принципе — как определять $V(\alpha)$ и $H(\alpha)$ для произвольного угла α, мы окончательно поймем (предположительно простой не-)предмет тригонометрии.

4.9.1. Похороны тангенса

Найдя производные V и H, мы можем очень кратко показать, как избежать запоминания странных фактов, которые вы, возможно, слышали в курсах математики: например, что производная тангенса равна «1 плюс тангенс в квадрате», или что производная секанса — «да черт знает, я даже не помню этой чуши». Вспомним, что tg x — название для $\sin x/\cos x$, или того, что мы называем $\frac{V}{H}$, а $\sec x$ — ненужное название для $\frac{1}{\cos x}$, или $\frac{1}{H}$, или H^{-1}. Защитим себя от необходимости запоминать эти факты, сконструировав их из того, что мы уже сделали. Обозначим тангенс $T(x) \equiv \frac{V}{H} \equiv H^{-1}V$

и попробуем найти $\frac{d}{dx}T(x)$. Используем наш молоток для умножения из главы 3:

$$T'(x) \equiv \left(\frac{V}{H}\right)' \equiv (V \cdot H^{-1})' = V' \cdot H^{-1} + V \cdot [H^{-1}]' =$$
$$= H \cdot H^{-1} + V \cdot [H^{-1}]' = 1 + V \cdot [H^{-1}]'.$$

Что такое $[H^{-1}]'$? Его легко найти методом лжи и поправки на нее (по сути, применяя молоток для нового сокращения из главы 3). Это дает:

$$[H^{-1}]' \equiv \frac{d}{dx}H^{-1} = \left(\frac{dH}{dH}\right)\frac{d}{dx}H^{-1} = \left(\frac{dH}{dx}\right)\left(\frac{d}{dH}H^{-1}\right) =$$
$$= (-V)\ (-H^{-2}) = V \cdot H^{-2}.$$

В каком-то смысле мы только что попутно вычислили производную секанса (H^{-1}). А теперь забудьте ее навсегда. Подставляя полученный результат в выражение для $T'(x)$, мы получаем:

$$T'(x) = 1 + V^2 \cdot H^{-2} \equiv 1 + \frac{V^2}{H^2} \equiv 1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2 \equiv 1 + T^2.$$

Итак, мы изобрели факт, что производная тангенса равна «1 плюс тангенс в квадрате». А теперь похороните его где-нибудь поглубже, и тангенс вместе с ним. Надеюсь, нам никогда не придется его использовать.

4.10. Встреча со сделанным

В этой главе у нас было немало неудач, и мы вынесли удивительно много из них.

1. Мы пытались выяснить, какую часть квадрата занимает круг. В конце концов мы сдались и решили дать название неизвестному ответу. Мы определили наше «число сдачи» # предложением:

$$A(\bigcirc) \equiv \# \cdot A(\square).$$

2. Мы столкнулись с аналогичной задачей с другим «числом сдачи» $\sharp$, которое определялось предложением:

$$(\text{Длина окружности}) \equiv \sharp \cdot d.$$

3. Несмотря на наше незнание обоих этих чисел, мы смогли выяснить, что они одинаковы:

$$\# = \sharp.$$

Зная, что на самом деле это одно число, мы решили назвать его $\sharp$.

4. Стандартные учебники используют символ π для того, что мы называем $\sharp$. Мы по-прежнему не знаем, каково $\sharp$, и решили держать свое неведение на виду, отказавшись писать π, пока не выясним, как его вычислять.

5. Мы обсуждали другую задачу — обратную проблему кратчайшего пути, и тоже не смогли ее решить. Как и ранее, мы столкнулись с удивительным фактом: можно показать, что две задачи, ответов на которые по отдельности мы не знаем, имеют аналогичный ответ:

$$V(l, \alpha) = l \cdot V(l, \alpha) \quad \text{и} \quad H(l, \alpha) = l \cdot H(l, \alpha).$$

6. Будучи мотивированы этим открытием, мы выбрали более простые обозначения:

$$V(\alpha) \equiv V(l, \alpha) \text{ и } H(\alpha) \equiv H(l, \alpha)$$

и увидели, что учебники именуют эти машины несколько архаичными названиями:

$$V(\alpha) \equiv \sin \alpha \text{ и } H(\alpha) \equiv \cos \alpha.$$

7. Мы увидели, что в учебниках есть дополнительный комплект названий для различных простых комбинаций V и H: «тангенс», «котангенс», «секанс» и «косеканс». Нам не понадобятся эти термины, так что забудьте их. Если мы когда-нибудь встретимся с понятиями, которые они обозначают, мы просто запишем их в терминах V и H.

8. К этому моменту мы можем описать V и H только с помощью картинок. Однако, рисуя их, мы сумели найти их производные. Мы установили:

$$V' = H \quad \text{и} \quad H' = -V.$$

9. В этой главе мы впервые встретились с фактом, что «предварительные области» анализа часто для понимания требуют самого анализа. Это не последний раз.

ИНТЕРЛЮДИЯ 4

НОСТАЛЬГИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО

Пустота — не место для сущности

Математика: У меня была ужасная неделя.

Читатель: Что случилось?

Математика: Ну, все началось на странице 240.

Читатель (*перелистывает назад*): Вас не было на странице 240.

Математика: Нет-нет, меня там не было. Я была дома.

Автор: Где вы живете?

Математика: В пустоте, помните?

Автор: Да-да, конечно. Извините.

Математика: Я думаю, что в этом и проблема. Жизнь в Пустоте. Это… трудно объяснить…

Читатель: Попробуйте. И не используйте в этот раз так много скобок.

Математика: Хорошо, это… Живя там, я обнаруживаю, что трудно… познакомиться или привыкнуть… или чувствовать себя дома… или выносить это… существование.

Читатель: Трудно жить в Пустоте, поскольку вы существуете сейчас?

Математика: Я полагаю…

Читатель: И потому Пустота не существует?

Математика: Действительно… Или не в повседневном смысле… Я долгое время не существовала, но полагала, что привыкну к этому. Я никогда раньше такого не чувствовала. Это странная меланхолия. Поэтому я думала, что могла бы чувствовать себя немного лучше, если бы поговорила с кем-нибудь.

Автор: Конечно. Поэтому вы говорите с нами?

Математика: Нет-нет, это было на странице 240. Вы оба были заняты. Так что я попросила Природу дать совет. Она не живет в Пустоте*,

* Видимо, намек на фразу Аристотеля «Природа не терпит пустоты». *Прим. перев.*

но мы старые друзья. И она существует дольше, чем все, кого я знаю. Но я не вполне поняла ее совет… Это на деле был не совет… Она сказала, что проблема может быть в моем доме.

Читатель: Что?

Математика: Что-то об основе*. Это не было создано, чтобы обращаться с материальной сущностью. Или с нематериальной… но сущностью. Сейчас я существую! До этого все было хорошо. Но создание влечет существование! По определению. И все становится только хуже.

Автор: И что вы собираетесь делать?

Математика: Ну, Природа сказала, что у нее есть старый друг из Пустоты, своего рода эксперт по основам, так что она позвонит ему насчет меня.

Читатель: Когда он доберется сюда?

Математика: Я не знаю. Это не мое дело. Раз уж зашла речь… Ничего, если я попрошу вас обоих об одолжении?

Читатель: Каком?

Автор: Что угодно.

Математика: Вы будете… рядом? Когда он появится? Все это ново для меня. Существование. Было бы здорово иметь тут нескольких друзей.

Читатель: Рад быть здесь.

Автор: Конечно. Мы обещаем.

Математика: Что такое «обещаем»?

Автор: Это такая человеческая штука. Когда вы говорите, что сделаете что-нибудь или не сделаете.

Математика: И?

Автор: Тогда предполагается, что другой человек поверит, что вы это сделаете или не сделаете.

Математика: Чем «Я сделаю X» отличается от «Я обещаю, что я сделаю X»?

---

* **Математика:** Или основах. Я всегда их путаю. Множественное число такое коварное.

Автор: Второе более серьезно. Предполагается, что человек будет верить вам больше.

Математика: Я не вижу, как это что-нибудь доказывает.

Автор: Хорошо, как бы вы тогда предложили вас убедить? Я имею в виду, в том, что мы будем здесь.

Математика: Ну, обычная практика в Пустоте — начать с формального языка…

(Математика определяет формальный язык.)

Математика: Сейчас вы говорите на формальном языке: «Аксиома: Уважаемая Математика, полагаю, что я буду в вашем доме, чтобы оказать моральную поддержку, когда появится этот приятель». Мы будем называть ее Аксиома П. Буква П означает Приятеля… или Поддержку… или Полагаю… Я еще не решила.

(Автор и Читатель повторяют это заклинание.)

Автор: Я не понимаю, чем это лучше обещания.

Математика: Конечно, лучше! Если вы решите не появляться, то вы нарушили аксиому П, осуществив ее отрицание, ¬П, так что ваш формальный язык противоречив. Будучи противоречивым, язык может доказать все, что угодно, включая тот факт, что вы отвратительный лжец… и [отрицательное прилагательное] [отрицательное существительное] для всех отрицательных прилагательных и отрицательных существительных… и вообще все ругательные слова — это тоже будете вы. Это намного лучше, чем обещание.

Автор: …

Читатель: …

(У Рассказчика было искушение указать, что такая шутка (или что это было) должна использовать термин «формальная теория» вместо «формального языка», чтобы защититься от педан-*

* *(Как он предпочитает именоваться в этом месте книги. Но я отклонился…)*

тов. Но он полагал, что в обиходном смысле у термина «теория» есть оттенки, которые, вероятно, сбивают с толку многих читателей (не следует смешивать с Читателями; есть только один Читатель). Наконец, взвесив за и против в уме, он решил, что лучше всего промолчать и не прерывать разговор.)

Читатель: …

Автор: …

Математика: Но довольно обо мне. Как у вас дела?

Ностальгия по плюсо-умножательным машинам

Автор: Неплохо.

Читатель: Немного ностальгируем по старым временам.

Математика: Как это?

Читатель: Ну, когда в нашей Вселенной имелись только плюсо-умножательные машины, все было намного проще. Эти машины с новыми обобщенными степенями были не так плохи, когда мы поняли, как с ними обращаться. Но в последней главе мы столкнулись со странными машинами V и H, которым не можем даже дать описание!

Автор: Это то, что учебники называют «синус» и «косинус».

Математика: Зачем вы мне это говорите? Я не читала учебников.

Автор: Верно. Извините.

Читатель: В любом случае мы определили эти машины фактически визуально: используя картинки. Изначально они были именами, данными нами неизвестным ответам к задаче, которую мы пытались решить. Но в итоге мы застряли, так что просто использовали стратегию Мольера и притворились, будто имена — и есть ответы.

Математика: Превосходный прием, разве нет? А вы уже выяснили, что такое $\sharp$?

Автор: Нет, но учебники называют это π.

Математика: Опять учебники! Вы с кем разговариваете?

Автор: Верно. Еще раз извините.

Математика: В любом случае эти машины V и H вас беспокоят?

Читатель: Да. Мы как-то сумели найти их производные. Мы знаем, что $V' = H$, а $H' = -V$, но по-прежнему не можем дать описание самих машин. Это тревожит. Я тоскую по старым денькам. Когда у нас были только плюсо-умножательные машины, мы могли дать реальное *описание* всему в нашей Вселенной. Но глава 3 закончилась, и все поменялось. Чувствую, что уже больше никогда не стану понимать вещи так же глубоко.

Математика: Это ужасно. Я как-то могу помочь?

Читатель: Я не знаю. Было бы здорово, если бы мы могли снова всё описать. Как тогда, когда были только плюсо-умножательные машины.

Математика: Может быть, всё по-прежнему…

Читатель: Нет, вы просто пытаетесь меня подбодрить.

Математика: Не совсем. Идея не выглядит совсем уж из ряда вон. Вы уверены, что это всё — не плюсо-умножательная машина?

Читатель: Полагаю, мы не совсем уверены…

Математика: Хорошо, это стоит того, чтобы попробовать. Особенно если это вас так сильно беспокоит.

Читатель: Что вы подразумеваете под словами «стоит попробовать»?

Математика: Давайте потребуем, чтобы все было так, как мы хотим… и посмотрим, что получится.

Автор: Это безумие.

Математика: Я знаю! Но давайте попробуем. Представим, что у нас есть какая-то машина. Мы ничего о ней не знаем. Давайте заставим ее быть плюсо-умножательной, вот так:

$$M(x) \overset{\text{Требование}}{=} \#_0 + \#_1 x + \#_2 x^2 + \#_3 x^3 + \dots \text{ (и так далее)} \tag{4.4}$$

Читатель: И как далеко продолжается эта сумма?

Математика: Я не знаю. Бесконечно.

Автор: Мы определяли плюсо-умножательные машины как конечные суммы. В них не может быть бесконечно много слагаемых.

Математика: Почему?

Автор: Я не знаю. Идея бесконечного описания меня несколько пугает.

Математика: Нет-нет. Я не говорю про бесконечное описание. Просто у нас должна быть возможность сказать: «и так далее». Мы делали так с самого начала.

Автор: О чем вы говорите?

Математика: Как было с целыми числами! Их же бесконечно много. Но разговор о них не занимает бесконечное время. Мы просто говорим:

0, 1, 2, … (и так далее).

Читатель: Уф…

Автор: Я никогда раньше не думал об этом так.

Математика: Можно продолжать?

Автор: Сделайте одолжение.

Математика: Таким образом, мы потребовали, чтобы наша произвольная машина выглядела так, как мы хотим. Сейчас нужно просто найти все числа $\#_i$, которые мы используем в описании.

Автор: Как это сделать? Мы же ровно ничего не знаем об этой машине M.

Математика: О… Да, полагаю, что надежда была слабо обоснована…

Читатель: Ну, мы знаем, что такое $\#_0$.

Автор: Что-что?

Читатель: Там, выше, в описании, которое привела Математика. Если мы требуем, чтобы это было верно, то:

$$M(0) = \#_0.$$

Просто подставьте туда 0, и он убьет все слагаемые, кроме первого.

Автор: О…

Математика: Интересно…

Читатель: Если мы подставим 1, то, может быть… неважно. Я не уверен, что можно узнать остальные числа.

Автор: Мне все равно нравится ваша идея. Что, если мы возьмем производную M?

Читатель: Почему?

Автор: Я не знаю, но взятие производной понижает каждую степень на единицу, поэтому, возможно, удастся использовать ваш трюк, чтобы узнать $\#_1$. Дайте мне попробовать. Если мы возьмем производную того, что написала Математика, мы получим:

$$M'(x) = 0 + \#_1 + 2\#_2 x + 3\#_3 x^2 + \ldots + n\#_n x^{n-1} + \ldots \text{ (и так далее)},$$

и тот же самый трюк должен сработать опять. Просто подставляем 0 и получаем:

$$M'(0) = \#_1$$

Мы можем сделать это еще раз. Возьмем производную исходного выражения дважды:

$$M''(x) = 0 + 0 + 2\#_2 + (3)(2)\#_3 x^1 + (4)(3)\#_4 x^2 + \ldots + (n)(n-1)\#_n x^{n-2} + \ldots$$

После подстановки 0 получаем:

$$M''(0) = 2\#_2$$

Поскольку мы хотим узнать $\#_2$, мы выражаем его:

$$\frac{M''(0)}{2} = \#_2$$

Читатель: Погодите, получается, что мы снова можем описать в нашей Вселенной всё?

Математика: Возможно. Мы начали с полного отсутствия сведений об описываемой машине, так что в каком-то смысле мы говорим о произвольной машине… Но чтобы описать произвольную машину полностью, нам нужно выяснить все остальные числа в ее описании.

Читатель: Как нам это сделать?

Математика: В каком-то смысле мы уже сделали.

Автор: Как?

Математика: Давайте выясним $\#_n$, ничего не зная о числе n. Должно работать такое же рассуждение. Если мы возьмем производную первоначального выражения n раз, то избавимся от всех слагаемых до $\#_n x^n$, поскольку каждое слагаемое вида $\#_k x^k$ может пережить только k-кратное дифференцирование. Первая производная убивает $\#_0$, вторая — $\#_1 x$ и т. д., до n-й производной, которая убивает $\#_{n\text{-}1} x^{n-1}$, и поэтому после n-кратного дифференцирования первым среди выживших слагаемых будет $\#_n x^n$.

Автор: А остальные выжившие будут иметь минимум один x, поэтому они пропадут, если подставить 0.

Читатель: Мы опережаем события. Во что превратится машина $m(x) \equiv x^n$, если ее продифференцировать n раз?

Математика: Ох. Думаю, мы не знаем… Если мы продифференцируем ее один раз, получим:

$$m'(x) \equiv nx^{n-1}.$$

Автор: Если возьмем вторую производную, то будет:

$$m''(x) \equiv n(n-1)x^{n-2}.$$

Читатель: Если продифференцируем еще раз, то будет:

$$m'''(x) \equiv n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Автор: Я думаю, что закономерность видна, но нам нужно новое обозначение. Давайте назовем n-ю производную $m^{(n)}(x)$. Я не хочу писать кучу штрихов с многоточиями посередине, а скобки нужны, поскольку это не степень. Поэтому после n-го дифференцирования x^n мы получим:

$$m^{(n)}(x) \equiv n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)x^{n-n}.$$

Но x^{n-n} — просто 1. Получается, n-я производная x^n — просто число, которое получается при перемножении всех чисел от n до 1.

Математика: N!

Автор: Вы хотите назвать это n?!.

Математика: Нет-нет, я хотела сказать: «Недурно!», похвалив ваше рассуждение, но почему-то после первой буквы… я просто застыла…

Читатель: Это ужасная шутка.

Автор: Я знаю. Но давайте назовем это $n!$. Хорошее же сокращение. Иными словами,

$$n! \equiv (n)(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1).$$

Например:

$$1! = 1$$
$$2! = (2)(1) = 2$$
$$3! = (3)(2)(1) = 6$$
$$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$$

и так далее.

Читатель: Выглядит хорошо! Теперь мы можем объединить две только что установленные вещи и записать n-ю производную $m(x) \equiv x^n$ так:

$$m^{(n)}(x) = n!$$

Это немного смущает. Дайте мне записать все сделанное, чтобы я мог убедиться, что мы знаем это…

(Читатель смотрит назад на сделанное.)

Мы начали в надежде, что сможем описать любую машину такого вида:

$$M(x) \overset{\text{Требование}}{=} \#_0 + \#_1 x + \#_2 x^2 + \#_3 x^3 + \ldots \text{ (и так далее).}$$

Если мы продифференцируем ее n раз, то все слагаемые левее $\#_n x^n$ пропадут, $\#_n x^n$ превратится в $\#_n n!$, а все слагаемые правее $\#_n x^n$ будут по-прежнему иметь минимум один x, так что они исчезнут при подстановке 0. Когда осядет пыль, мы получим:

$$M^{(n)}(0) = \#_n n!$$

Но ведь цель всего этого — найти числа $\#_n$, поэтому мы можем переписать это равенство так:

$$\#_n = \frac{M^{(n)}(0)}{n!}$$

Автор: Ух ты! Неужели мы действительно сейчас показали то, что хотели?

Математика: Мне кажется, что да! Если мы не сделали ошибки, то все выглядит так, будто мы установили, что любую машину M можно записать в виде плюсо-умножательной машины такого вида:

$$M(x) = M(0) + (\frac{M'(0)}{1!})x + (\frac{M''(0)}{2!})x^2 + (\frac{M'''(0)}{3!})x^3 + \dots$$

Жутко громоздко. Я перепишу так:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{4.5}$$

Автор: Погодите, в этом сокращении есть странные штуки. Мы никогда не говорили, что такое 0!, и о нулевой производной речи не было.

Читатель: Нет-нет, Математика просто сократила то, что написано выше. Поэтому мы можем определить 0! и нулевую производную так, чтобы определение сделало равными два наших предложения.

Автор: Как?

Читатель: Ну, если они равны, то мы должны определить, что $M^{(0)} \equiv M$. Поэтому нулевая производная машины — сама машина. И нам придется определить, что $0! \equiv 1$. Имеет смысл?

Математика: Для меня годится.

Автор: Хорошо, я не против этих сокращений, но всё же… Я несколько скептически настроен по поводу всего этого. Конечно, мы всё это записали, но непонятно, почему это должно работать. Это слишком хорошо, чтобы быть правдой.

Математика: Это не у вас ли были машины, которые вас беспокоили?

Читатель: Вы имеете в виду V и H?

Математика: Почему бы не проверить это Ностальгическое устройство на них?

Читатель: Какое устройство?

Математика: Уравнение 4.5. Мы создали его, поскольку вы ностальгировали по старым временам. Когда мы знали, как описать все.

Читатель: Да, верно.

Математика: Давайте протестируем его на V и H. Как вы их определяли?

Читатель: Ну, если у нас был отрезок длины 1, наклоненный под углом α, мы определяли $V(\alpha)$ как «протяженность этого отрезка в вертикальном направлении», а $H(\alpha)$ было «протяженностью отрезка в горизонтальном направлении». Например, если $\alpha = 0$, наш отрезок был горизонтальным, и поэтому $H(0) = 1$, а $V(0) = 0$. Если не считать нескольких конкретных примеров, мы понятия не имели, как найти значения V и H, если кто-нибудь предложит нам произвольный угол.

Математика: Почему α?

Читатель: Это напоминало нам о слове «угол».

Математика: О! Меня не было рядом, когда вы это делали. Ничего, если я буду использовать просто x?

Читатель: Давайте.

Математика: Хорошо. Наше Ностальгическое устройство говорит:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Нам нужно выяснить, чему равно $V^{(n)}(0)$ для всех n. Хм… Подозреваю, эта идея не так уж полезна. Как мы будем находить все эти производные V в нуле, если даже не знаем, как описать саму машину? Прошу проще…

Автор: Стойте! Мы фактически нашли все производные V. Я имею в виду, что мы знаем $V' = H$ и $H' = -V$, поэтому мы знаем, что $V'' = H' = -V$, а далее мы можем продолжать, получая:

$$\begin{gathered} V^{(0)} = V, \\ V^{(1)} = H, \\ V^{(2)} = -V, \\ V^{(3)} = -H, \\ V^{(4)} = V. \end{gathered}$$

Переходить от одного шага к другому просто, потому что мы всегда используем либо $V' = H$, либо $H' = -V$, чтобы найти следующую производную.

Кроме того, поскольку мы знаем V и H в нуле, можно написать:

$$V^{(0)}(0) = V(0) = 0,$$
$$V^{(1)}(0) = H(0) = 1,$$
$$V^{(2)}(0) = -V(0) = 0,$$
$$V^{(3)}(0) = -H(0) = -1,$$
$$V^{(4)}(0) = V(0) = 0.$$

После четырех производных мы вернулись туда, откуда начали, поэтому дальше все пойдет по циклу!

Математика: Отлично, я думаю, что могу вернуться туда, где запнулась. Перед тем, как застрять, я написала:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Если посмотреть на это, становится понятно, что все четные производные обращаются в 0, а нечетные по очереди становятся 1 и –1. Так что, если я не ошиблась, мы можем написать:

$$V(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ (и так далее).}$$

Автор: О!

Читатель: Я думаю, что это то самое описание машины V, которое мы не сумели найти раньше. Держу пари, что с помощью той же идеи можно дать описание машины H.

Математика: Попробуйте!

(Читатель некоторое время возится.)

Автор: Эгей! Пока Читатель работает над H, у меня появилась идея. Нельзя ли получить хорошее приближенное описание машины, если отбросить некоторые слагаемые в этой бесконечной сумме? Попробую сделать это с V. Давайте отбросим в описании V все слагаемые, кроме первых двух, и сравним результат с графиком V, который мы построили в главе 4.

(Автор чертит рис. 4.16 и 4.17.)

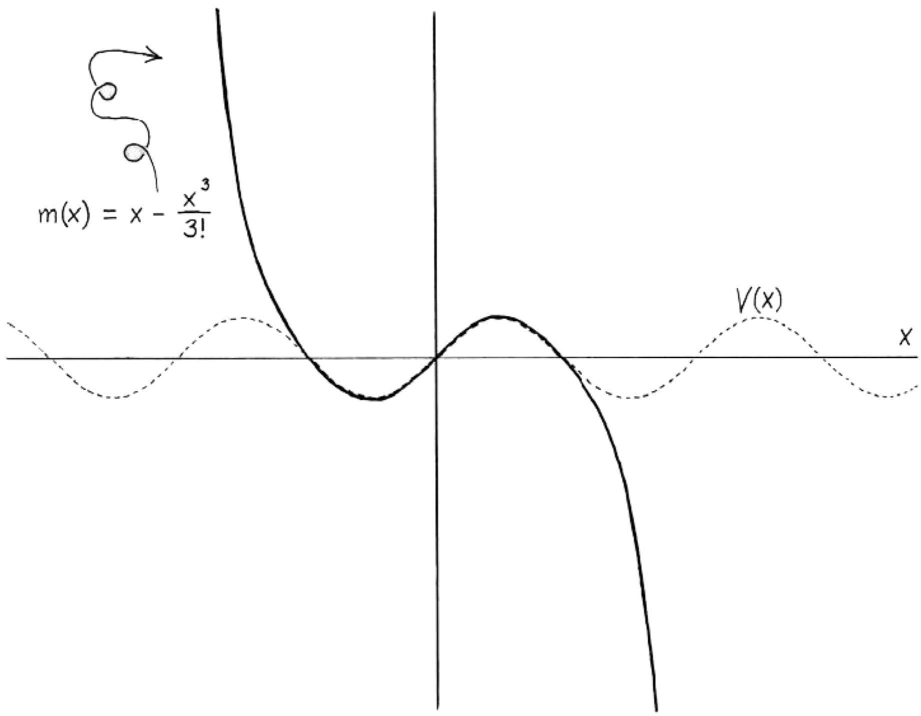


Рис. 4.16. Пунктирная волнистая линия на рисунке — $V(x)$, в учебниках именуемая синусом. Сплошная кривая — $m(x) \equiv x - \frac{x^3}{3!}$, то есть машина, которая получается после отбрасывания всех слагаемых, кроме двух, в описании V, полученном из Ностальгического устройства. Оказывается, оно не только дает способ описать ранее не поддававшиеся описанию машины V и H, но и предлагает приближение, если отбросить все слагаемые, кроме нескольких первых. В окрестности 0 это приближение оказывается очень хорошим

Читатель: Я вернулся! И я думаю, что все сработало. Я получил, что машину H можно записать в виде:

$$H(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ (и так далее).}$$

Автор: Погодите, V и H — то, что в учебниках называется синусом и косинусом. Поэтому мы только что выяснили, как находить $\sin x$ и $\cos x$ для любого x, ничего не запоминая! Так что сейчас я впервые предполагаю после всего этого… что мы действительно знаем тригонометрию.

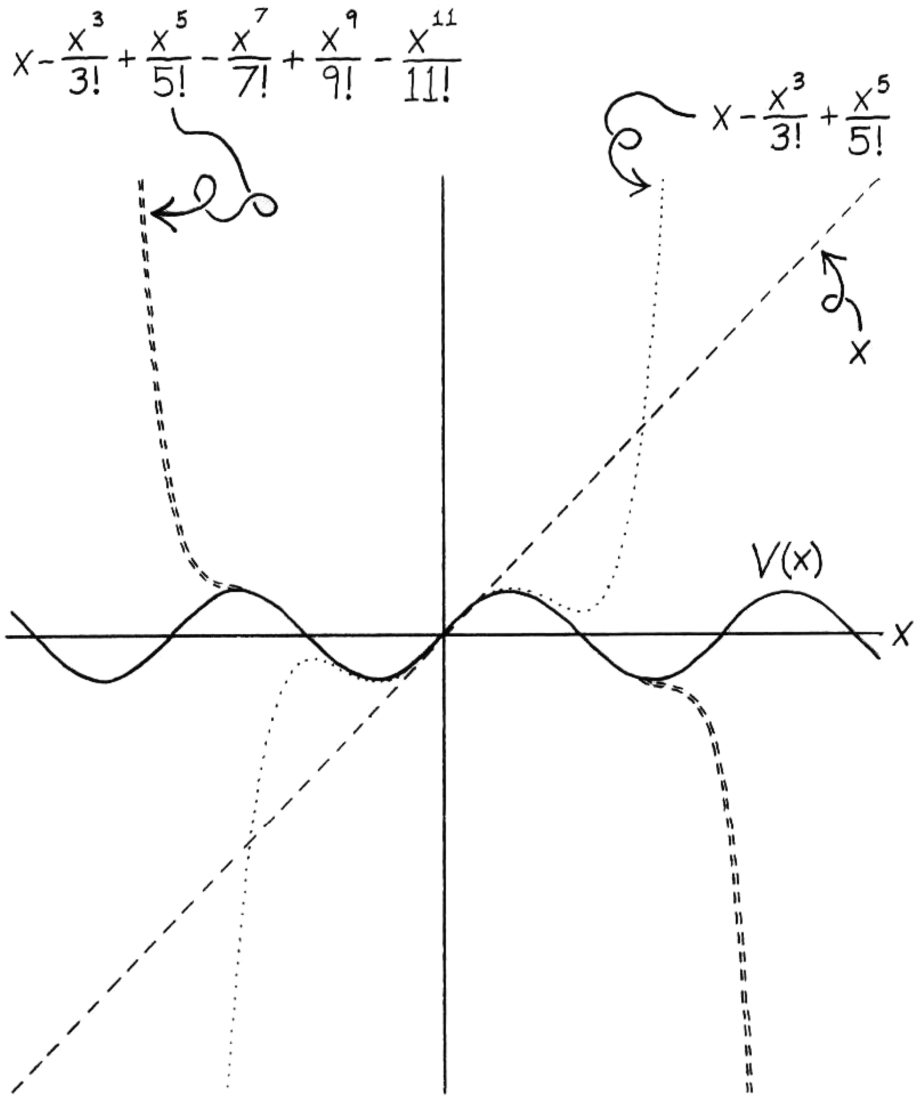


Рис. 4.17. Несколько примеров, как добавление новых слагаемых в описании $V(x)$ с помощью Ностальгического устройства дает нам все более точные приближения к $V(x)$, но все они в итоге отклоняются от V по мере удаления от $x = 0$

Математика: Что такое тригонометрия?

Автор: Неважно.

Читатель: В любом случае, Математика, спасибо за помощь!

Математика: Пожалуйста. И спасибо вам, что вы рядом. Здорово, когда есть с кем поговорить…

Автор: Я тоже так думаю. До встречи. Пришло время для следующей главы.

(Кхе-кхе.)*

* (**Рассказчик**: *Возможно (учитывая, что́ этот парень «Автор» рассказал вам к этому моменту), вас удивит отсутствие гарантии, что Ностальгическое устройство (именуемое в учебниках «ряд Тейлора») будет работать для любой возможной машины (а оно работает для большинства машин, с которыми можно столкнуться на практике). Вопрос о том, когда оно работает, а когда нет (или «сходимость ряда Тейлора» на жаргоне учебников), ведет нас вниз по кроличьей норе к богатым и интересным областям математики. Стоит кратко упомянуть, что это, возможно, самый удивительный факт в этой теме. Иначе говоря, условия, при которых Ностальгическое устройство работает (или нет), нельзя понять, если мы не пожелаем познакомиться с комплексными числами. Это числа вида* $a + bi$*, где* a *и* b *вещественные (обычные числа с десятичным разложением, например 9, −1,3 или 5,987654…), а число* i *— квадратный корень из −1. Как и многие другие вещи, с которыми мы встречались ранее, это число определяется своим поведением. Число* i *определяется так: то, что удовлетворяет предложению* $i^2 = -1$*. Вкратце: невозможно полностью понять условия, когда работает или не работает Ностальгическое устройство, не признавая существования комплексных чисел, даже если мы имеем дело только с такими машинами, у которых вход и выход — вещественные числа. Незаменимым источником прекрасного объяснения этих идей станет чудесно нестандартная книга Тристана Нидхэма «Визуальный комплексный анализ».*)

ГЛАВА 5

ЭСТЕТИКА И НЕДВИЖИМЫЙ ОБЪЕКТ

Как на деле кто-то решает, что в математике важно, а что нет? Критерии должны быть эстетическими. В математике есть и другие ценности, например глубина, общность и полезность. Но сами по себе они не настолько важны. Их значимость будто покоится на ценностях других вещей, к которым они относятся. Кажется, конечные ценности должны быть просто эстетическими; иначе говоря, художественными, как в музыке, живописи или других видах искусства.

Роджер Пенроуз. «Роль эстетики в чистых и прикладных математических исследованиях»*

А неподвижное, как сказано, поскольку оно просто, однообразно и пребывает в себе, будет сообщать единое и простое движение.

Аристотель, «Физика»**

5.1. Погружение в Пустоту

5.1.1. Бездомная тема

В этой главе мы встретимся с новыми подтверждениями, что так называемые предварительные области анализа требуют самого анализа (и в больших объемах) для понимания. Мы сосредоточимся на одной бездомной теме; той, которая при традиционном преподавании «отключает» почище снотворного; той, название которой всегда вселяет страх и скуку в сердца школьников. Она известна под названием «логарифмы и показательные функции».

---

* R. Penrose. The Rôle of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research (1974).

** Перевод В. Карпова. *Прим. перев.*

Обычный способ объяснения этих понятий — или, скорее, обычная неудача с объяснением — затемняет и лежащую в их основе элегантность и важность на практике. Их обычно вводят в путаном курсе «Алгебра 2» (содержащем разные темы, которые считаются «предварительными областями» анализа)*, хотя очевидно, что они туда не относятся. Это все равно как если бы в курсе истории не нашлось подходящего места для обсуждения Великой французской революции, и эту тему просто вставили в середину раздела про Римскую империю, причем не сообщая ученикам, что эти два события произошли в разное время и имеют мало общего. Есть много способов познакомить с ними; некоторые привлекают для объяснения практические аспекты, например изучение роста населения. Но при всей важности этих применений, возможно, это не самое честное представление основополагающей мотивировки идей. Здесь мы введем эти идеи весьма необычным способом, попробуем объяснить, откуда они берутся. В результате мы также лучше поймем, как они соотносятся с другими идеями и как их обобщить для более диких и необычных ситуаций. Поехали.

5.1.2. Начинаем от того, что мы знаем

Несмотря на все сделанное, не будет большой натяжкой сказать, что мы знаем только о сложении и умножении. В конце концов, как мы обсуждали выше, «степени» появились в нашей Вселенной как бессмысленное сокращение для повторяющегося умножения, которое имело смысл только для целых положительных степеней. Потом мы расширили его до настоящего понятия. Как? Ну, вспомните, как мы объявили, что всякий раз, когда мы пишем степени, которые не являются положительными целыми числами, мы подразумеваем *что-то, что должно* сохранить истинность предложения $(\textit{нечто})^a(\textit{нечто})^b = (\textit{нечто})^{a+b}$. Хотя это уравнение *выглядит* как утверждение о вещах, именуемых «степенями» или «показателями степени», честнее

* Речь об американской системе образования. У нас нет самого понятия «предварительные области» для анализа, а тригонометрические функции, логарифмы, экспоненты, производные и интегралы изучают в старших классах без деления на курсы. *Прим. перев.*

было бы сказать, что это утверждение о нашем невежестве. Вспомните: когда мы обобщали идею степеней, то установили, что есть бесконечное число способов провести обобщение. Если бы мы хотели только придумать какое-нибудь обобщение, которое бы согласовывалось с нашим определением для положительных целых чисел, мы *могли бы* определить (нечто)$^{\#}$ как произведение # экземпляров (*нечто*), когда # — положительное целое число, и как 52 (или что-то еще), когда # дробное или отрицательное. Мы не обобщили понятие степени так не потому, что это *незаконно*, а потому, что это *неинтересно*. Такое утверждение не было бы неверным, мы бы тут же обнаружили, что там нечего знать, открывать и сказать. Это было бы бесплодное обобщение.

В каком-то смысле именно отсутствие у нас знаний о чем-либо, кроме сложения и умножения, привело нас к созданию степеней в таком виде. Неслучайно два уравнения $s^a s^b = s^{a+b}$ и $(s^a)^b = s^{ab}$ *в действительности* говорят только о сложении и умножении, хотя сложение с умножением и находятся «вверху». Мы сделали так, поскольку, по сути, это все, что мы знаем. Если наше обобщение не позволяет нам понять его с помощью наших знаний, оно для нас бесполезно.

Когда мы изобретаем математическое понятие, мы погружаемся в Пустоту и вынимаем оттуда что-то, чего мы желаем. Наша цель может быть: а) описать реальный мир, или б) изобрести математическое понятие, которое соответствует обиходному и обобщает его, или в) изобрести математическое понятие, обобщающее другое математическое понятие, с которым мы лучше знакомы. Мы всегда подгоняем нашу идею под цель и требуем, чтобы она вела себя как то, что мы пытаемся описать. Мы никогда не погружаемся в Пустоту вслепую.

5.2. Четыре вида

Пустота содержит бесконечное множество вещей, ожидающих изобретения, но большинство из них бесплодны и неинтересны. Людвиг Витгенштейн сказал: «О чем невозможно говорить, о том следует молчать», и это истинно для математики. Эти идеи предполагают, что определение математических объектов через их поведение — безошибочный способ избежать бесплодных частей Пустоты. Если мы характеризуем объект так, мы всегда знаем, что можно сказать о нем, хотя и можем не знать, чем он «является». Здесь мы увидим несколько отличных примеров этого принципа. Учитывая центральную роль сложения и умножения в нашем путешествии, определим четыре вида машин по тому, как они себя ведут по отношению к этим двум операциям. Сейчас мы работаем с этими машинами чисто из эстетических соображений.

Четыре вида

Вид СС по определению включает все машины, которые переводят сложение в сложение:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)+f(y).$$

Вид СУ по определению включает все машины, которые переводят сложение в умножение:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y).$$

Вид УС по определению включает все машины, которые переводят умножение в сложение:

$$f(xy) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)+f(y).$$

Вид УУ по определению включает все машины, которые переводят умножение в умножение:

$$f(xy) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y).$$

При определении этих четырех видов машин мы требуем, чтобы каждое условие было верно для *всех* значений x и y. Эти четыре способа поведения кажутся изящными, но сейчас мы не знаем, как выглядят представители этих видов. Возможно, у какого-то из них вообще нет представителей.

В конце концов, вполне реально написать предложение, которое не может быть истинным, даже если это на первый взгляд и не очевидно. Некоторое время поэкспериментируем с этими видами машин и посмотрим, сможем ли мы выяснить, как выглядит каждый из них.

5.2.1. Вид СС

Представим, что мы поймали какого-нибудь представителя вида СС. Все, что мы знаем, — как он себя ведет. Мы понятия не имеем, как он выглядит. Посмотрим, нельзя ли это выяснить. Определяющее свойство вида СС таково:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)+f(y) \tag{5.1}$$

для всех x и y. Числа x и y не имеют отношения к горизонтальным и вертикальным координатам. Это просто сокращения для двух чисел, которые мы подаем в машину. Если машина ведет себя так для любых x и y, она, в частности, ведет себя так, когда и x, и y равны 0. Получаем:

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Поскольку $f(0)$ остается неизменным при умножении на 2, $f(0) = 0$. Этот факт, возможно, не был очевиден при определении вида, но, как можно видеть, утверждение $f(0) = 0$ скрыто в самом определении. Мы действительно не знаем, что делать, чтобы выяснить, как выглядит этот зверь. Мы просто экспериментируем, используя наше единственное знание: уравнение 5.1.

Что будет, если мы сделаем число y бесконечно малым? Обозначим его dx, и определение вида (уравнение 5.1) даст нам:

$$f(x + dx) = f(x) + f(dx). \tag{5.2}$$

Выглядит почти как производная. О производных мы кое-что знаем, но мало что знаем о виде СС, поэтому посмотрим, не выйдет ли что-нибудь полезное, если сделать из этого что-то похожее на производную. Перенесем $f(x)$ влево и разделим обе части на dx:

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{f(dx)}{dx}. \tag{5.3}$$

Отлично! Теперь слева определение производной f, так что мы можем написать:

$$f'(x) = \frac{f(dx)}{dx}. \tag{5.4}$$

Правая часть выглядит тоже почти как производная, но что-то тут пропущено. Или нет… Минуту назад мы узнали, что все машины вида СС удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Поскольку добавление 0 ничего не изменит, мы можем написать:

$$f'(x) = \frac{f(0 + dx) - f(0)}{dx}. \tag{5.5}$$

Сейчас проще увидеть, что справа стоит просто «отношение приращения по вертикали к приращению по горизонтали» для двух бесконечно близких друг к другу точек: 0 и dx. Удивительно, но, усложнив простое выражение (добавив несколько нулей), мы фактически сделали его проще для понимания: ведь справа находится просто производная f в точке $x = 0$. Переписав с помощью этой идеи правую часть уравнения 5.5, получим:

$$f'(x) = f'(0). \tag{5.6}$$

Но если это верно для любого x, крутизна f в одной конкретной точке (а именно $x = 0$) равна крутизне в любой точке. Поэтому f должна быть прямой линией, и поэтому (как мы видели в главе 1) все машины вида СС должны иметь вид $f(x) = cx + b$. Кроме того, мы отметили, что $f(0) = 0$, так что $b = 0$. Объединяя все установленное, мы можем сказать так.

Вид СС

Вид СС по определению включает все машины, которые переводят сложение в сложение:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)+f(y).$$

Мы сейчас выяснили, что все представители этого вида должны выглядеть так:

$$f(x) = cx$$

для некоторого числа c.

Итак, мы выяснили, как *выглядят* представители нашего вида, используя информацию о том, *как они себя ведут*. У нас не было определенного метода. Мы просто бродили вокруг, совали в машины какие-то штуки и в конце концов обнаружили, что все представители вида имеют постоянную крутизну. Отсюда следует, что это прямые. Посмотрим, можем ли мы сделать что-то аналогичное для других видов.

5.2.2. Вид СУ

Теперь представим, что мы поймали какого-нибудь представителя вида СУ. Как и ранее, мы знаем, как он себя ведет, но не знаем, как выглядит. Вид СУ определяется поведением:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y). \tag{5.7}$$

Поиграем с этим уравнением. Что, если превратить x и y в 0? Тогда мы получим, что $f(0) = f(0)\,f(0)$. Это не значит, что $f(0) = 0$, поскольку $f(0)$ вполне может быть и 1 (ведь $0 = 0 \cdot 0$ и $1 = 1 \cdot 1$). Поэтому продолжим. Попробуем одно из чисел (скажем, y) превратить в 0, а второе не трогать. Тогда получим:

$$f(x) = f(x)\,f(0).$$

Значительно лучше. Это предложение говорит, что $f(0) = 1$, *если только* $f(x)$ — не та скучная машина, которая всегда выдает 0. Тогда наше предложение будет истинно, даже если $f(0)$ не равно 1. Предположим, мы работаем с каким-нибудь представителем вида СУ, не относящимся к нулевым машинам. Тогда рассуждение выше дает нам $f(0) = 1$.

Ладно, мы не знаем, что делать, но попробуем, чтобы обе части уравнения выглядели как производная, ведь это помогло нам в прошлый раз. Тогда мы имели дело только со сложением, и было проще заставить обе части выглядеть как производная. Возможно, удастся поиграть с производными, но не совсем так. Вспомним, что x и y — просто числа, а не вертикальные и горизонтальные координаты; значит, мы можем изменять y, не меняя x. Это значит, что $\frac{dx}{dy} = 0$, то есть $\frac{d}{dy}(x + y) = 1$. Продифференцируем по y, использовав этот факт. Применяем наш молоток для нового сокращения («дифференцирование сложной функции») и получаем:

$$f'(x + y) = f(x)\, f'(y),$$

где штрих обозначает производную по y. Можем мы отсюда узнать что-нибудь интересное о машине f? Ну, если мы положим $x = 0$, то получим предложение, которое не сообщает толком ничего, а именно: $f'(y) = 1 \cdot f'(y)$. Не особенно полезно. Попробуем $y = 0$. Тогда:

$$f'(x) = f'(0)\, f(x).$$

Эй! Это говорит, что представители вида СУ, то есть СУ-машины, являются *почти* своими производными. Они равны своей производной, умноженной на некое число. Ничего похожего на то, что мы видели раньше. Например, никакая плюсо-умножательная машина так себя не ведет, ее производная уменьшает степень на единицу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Если бы существовал конкретный представитель вида СУ, у которого $f'(0) = 1$, то он бы в *точности* был равен своей производной! Если какая-то машина равна собственной производной, то она же, умноженная на константу, тоже равна своей производной. В самом деле, если $f'(x) = f(x)$, то любая машина $m(x) \equiv cf(x)$ удовлетворяла бы $m'(x) = cf'(x) = cf(x) \equiv m(x)$, и поэтому m также была бы равна своей производной. Итак, у нас бесконечно много машин, которые совпадают с собственными производными: по одной для каждого числа c, но только одна из них входит в вид СУ. Почему? Поскольку мы заметили, что СУ-машины обладают свойством $f(0) \equiv 1$. Мы понятия не имеем, как эта машина выглядит, но назовем ее E, или «Единственная». Итак, E — единственная машина, которая удовлетворяет двум условиям:

$$E'(x) = E(x) \quad \text{и} \quad E(0) = 1.$$

Мы по-прежнему не понимаем, как выглядят машины вида СУ, но было бы неплохо получить общее представление об этом, ведь мы *знаем*, что они не похожи ни на что виденное нами ранее. Что еще мы можем сделать? Всё, с чем мы вынуждены работать, — тот факт, что они переводят сложение в умножение. Поэтому для целого числа n и СУ-машины мы можем написать:

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}) = \underbrace{f(1)\,f(1)\ldots f(1)}_{n\text{ раз}} = f(1)^n.$$

Интересно… Введенное в машину число подпрыгнуло и стало показателем степени. При этом $f(1)$ — просто число, которого мы не знаем. Интересно, будет ли это верно для любого x? Ранее мы установили, что можем аппроксимировать любое число, использовав числа вида $\frac{n}{m}$, где n и m — целые. Если бы мы могли показать, что поведение «введенное число становится показателем степени» истинно для любого числа вида $\frac{n}{m}$, то мы были бы вполне убеждены, что оно верно для любого x. Итак, предположим, что некое число x можно записать в виде $x \equiv \frac{n}{m}$, где n и m — целые. Повторим только что использованный прием, но наоборот:

$$f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f\left(\underbrace{\frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \ldots + \frac{n}{m}}_{m\text{ раз}}\right) \overset{\text{СУ}}{=} \left[f\left(\frac{n}{m}\right)\right]^m,$$

где символ $\overset{\text{СУ}}{=}$ означает, что мы используем определение вида СУ. С другой стороны, $f(n) = f(1)^n$. Объединяя эти описания, получаем:

$$[f(\frac{n}{m})]^m = f(1)^n.$$

Что дальше? Чтобы лучше понимать, как выглядит СУ-машина, избавимся от m-й степени в этом уравнении, возведя обе части в степень $\frac{1}{m}$:

$$f(\frac{n}{m}) = f(1)^{\frac{n}{m}}. \tag{5.8}$$

Оказалось, что поведение «введенное число становится показателем степени» сохранилось для любых чисел вида $\frac{n}{m}$. Теперь мы убеждены, что все представители вида СУ отличаются тем же поведением для любого x, поскольку x можно с любой точностью аппроксимировать с помощью чисел вида $\frac{n}{m}$.

Раз $f(1)$ — просто неизвестное число, мы можем обозначить его как c и записать всё вышесказанное в виде:

$$f(x) = c^x.$$

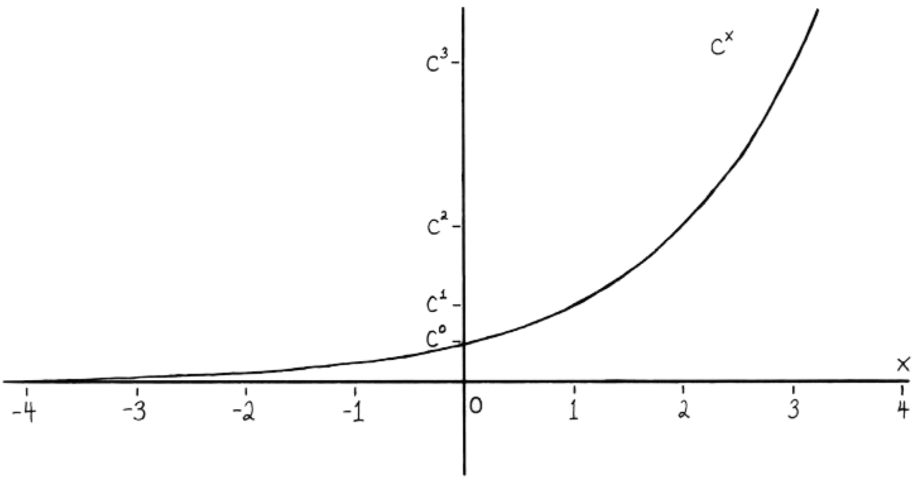


Рис. 5.1. Мы обнаружили, что все СУ-машины должны выглядеть как $f(x) = c^x$, причем разные положительные* числа c будут давать разные машины. Они выглядят так

Проверим наш вывод, убедившись, что машина вида $f(x) = c^x$ действительно принадлежит виду СУ. Имеем:

$$f(x + y) = c^{x+y} = c^x c^y = f(x) f(y).$$

Превосходно! Итак, c^x — действительно все** СУ-машины, безотносительно выбора положительного числа c, а их поведение *очень хорошо* соответствует нашему способу выбора степеней.

Ранее мы открыли, что в виде СУ есть единственная машина $E(x)$, которая совпадает со своей производной, хотя тогда мы не знали, что все СУ-машины выглядят как c^x.

Сейчас мы знаем, что у нас есть разные СУ-машины для каждого положительного числа c. Соберем всё, что мы узнали об этом виде машин, в рамочке.

* Автор не указывает причин, по которым число c должно быть положительным (точнее, неотрицательным): иначе нельзя определить c^x для всех дробных x в рамках вещественных чисел. *Прим. перев.*

** Напоминаем, что автор пришел к этому результату, предполагая, что мы не станем рассматривать $f(x) \equiv 0$. А $f(x) \equiv 0$ также удовлетворяет исходному определяющему равенству. *Прим. перев.*

Вид СУ

Вид СУ по определению включает все машины, которые переводят сложение в умножение:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y).$$

Мы только что выяснили, что все представители этого вида должны выглядеть так:

$$f(x) = c^x$$

для некоторого положительного числа c.

Неизменный объект

Мы также выяснили, что должна существовать единственная СУ-машина, которая совпадает со своей производной. Мы назвали ее E. Она остается «неизменным объектом» при дифференцировании. Объединяя это открытие с нашим новым знанием, можем сказать: существует единственное число e, для которого СУ-машина

$$E(x) \equiv e^x$$

совпадает с собственной производной. Сейчас мы понятия не имеем, что это за число, но оно должно существовать.

5.2.3. Вид УС

Мы можем тут же заметить, что вид УС в каком-то смысле «противоположен» СУ. Поэтому, возможно, окажется, что оба связаны с загадочным числом e. Посмотрим. Мы определили вид СУ как множество машин, ведущих себя так:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y), \tag{5.9}$$

а вид УС — как множество машин, ведущих себя так:

$$g(xy) \overset{\text{Требование}}{=} g(x)+g(y). \tag{5.10}$$

Мы используем для машин разные буквы, чтобы их не перепутать. Итак, пусть f — СУ-машина, а g — УС-машина. Хотя мы понятия не имеем, как выглядят УС-машины, мы можем написать:

$$g\big(f(x+y)\big) \overset{f\text{ — это СУ}}{=} g\big(f(x)f(y)\big) \overset{g\text{ — это УС}}{=} g\big(f(x)\big)+g\big(f(y)\big).$$

Здесь сказано, что если мы построим большую машину, приклеив выходную трубу СУ-машины ко входной трубе УС-машины, то в результате получим СС-машину! Иначе говоря, если мы определим машину $h(x) \equiv g(f(x))$, то мы только что показали, что машина h ведет себя так:

$$h(x+y) = h(x) + h(y).$$

Поэтому h — СС-машина. Обратите внимание: мы никогда не требовали, чтобы эти три идеи были соединены таким элегантным способом, но этот факт оказался скрыт в наших определениях и с необходимостью вытекает из них. Что дальше? Теперь мы можем пожать плоды своей работы с СС-машинами, поскольку ранее установили, что СС-машина выглядит как ax при некотором числе a. Поскольку h должна быть СС-машиной, можно написать:

$$h(x) \equiv g(f(x)) = ax$$

для некоторого a. Что это за число? Мы не знаем, но если подставить 1 в наше уравнение, то получим $a = g(f(1))$, так что можно написать

$$g(f(x)) = g(f(1))x. \tag{5.11}$$

Интересно… Нам сообщают: если сунуть какую-нибудь СУ-машину в какую-нибудь УС-машину, они *почти* аннулируют друг друга. Если бы $g(f(1))$ было равно 1, мы бы имели $g(f(x)) = x$; f и g производили бы противоположные действия, выдавая в итоге то, что мы изначально клали. Мы приближаемся к тому, как определить «противоположность» машин УС и СУ.

Выше мы установили, что все СУ-машины имеют вид $f(x) = c^x$, где c — сокращение для $f(1)$. Для разных значений c мы получаем различные

СУ-машины, поэтому добавим в наше обозначение индекс: $f_c(x) \equiv c^x$. Мы делаем это, чтобы было удобнее говорить о разных представителях вида СУ и не смешивать одну СУ-машину с другой. В наших новых обозначениях уравнение 5.11 говорит, что для любой конкретной СУ-машины f_c можно написать:

$$g(f_c(x)) = g(f_c(1))x = g(c^1)x = g(c)x. \tag{5.12}$$

Итак, мы можем сказать, что если $g(c) = 1$, то f_c и g аннулируют друг друга. Для каждого числа c у нас отдельная СУ-машина, а теперь мы получили для каждого числа c отдельную УС-машину. Поэтому, хотя мы понятия не имеем, как выглядят УС-машины, мы можем утверждать: *каждый представитель вида УС имеет партнера вида СУ,* машину, у которой такое же значение c.

В силу этой парности давайте писать индекс для g, чтобы указывать на определенную машину УС, как мы только что делали для СУ-машин. Иными словами, g_c — наше сокращение для машины УС, которая удовлетворяет условию $g_c(c) = 1$. Например, для $c = 2$ мы получаем СУ-машину $f_2(x) \equiv 2^x$, а ее партнером будет УС-машина, удовлетворяющая условию $g_2(2) = 1$. Открыв все эти моменты о партнерстве между двумя видами и загадочной машине, которая оказывается собственной производной, запишем в рамочке всё, что мы знаем об этих видах, а потом некоторое время будем чувствовать удовлетворение.

Парность между видами СУ и УС

Вид СУ по определению включает все машины, которые переводят сложение в умножение:

$$f(x+y) \overset{\text{Требование}}{=} f(x)f(y).$$

Мы выяснили, что любую СУ-машину можно записать как

$$f_c(x) = c^x$$

для некоторого положительного числа c.

Вид УС по определению включает все машины, которые переводят умножение в сложение:

$$g(xy) \overset{\text{Требование}}{=} g(x)+g(y).$$

Мы не представляем, как «выглядят» эти машины, то есть не можем описать их в терминах того, что нам известно. Но мы знаем, что каждая СУ-машина имеет парную УС-машину, которая аннулирует ее действие. Эта УС-машина g_c определяется как любая машина, которая делает истинным следующее предложение:

$$g_c(f_c(x)) \equiv x \tag{5.13}$$

Хотя мы по-прежнему не знаем, какое число e определяет машину $E(x) \equiv e^x$, которая совпадает с собственной производной, мы можем говорить о партнере этой машины, написав $g_e(f_e(x)) \equiv x$ или, если вам больше нравится, $g_e(e^x) = x$.

Мы ничего не знаем об этой машине, за исключением того, что она «за компанию тоже единственная».

Нас она интересует только потому, что противоположна неизменному объекту дифференцирования: машине, которая не меняется при взятии производной.

5.2.4. Вид УУ... Скоро

У нас остался еще один вид машин: УУ. Но обсуждение становится все более абстрактным, нужно убедиться, что мы разобрались со сделанным, поэтому вернемся к УУ позже.

Сейчас мы обнаружили много интересных фактов о партнерстве между СУ и УС, а также особенной машине, которая ухитряется совпадать со своей производной.

Поэтому, пока голова свежа, прервемся и исследуем наш неизменный объект слегка неформально.

5.3. Формальное и неформальное

5.3.1. Использование Ностальгического устройства

Автор: Математика! Приходите!

…

Читатель: Математика! У нас есть что вам показать!

…

Читатель: Мы могли бы продолжать без…

Автор: Нет. Подождите минутку.

(Проходит некоторое количество времени t, где t определяется как произвольное количество времени, достаточно похожее на «минутку», чтобы можно было продолжить повествование.)

Автор: Ладно, подозреваю, что выбора нет. Я надеялся, что это не придется использовать…

(Автор вынимает из кармана маленькую бутылочку.)

Читатель: Что это?

Автор: Маленький сувенирчик, который я приобрел несколько лет назад.

(Автор вручает бутылочку Читателю.)

Читатель: Хм. Тут написано: *Сок Хенкина. Сорт $\aleph$ премиум. Урожай 1949 года**. Что он делает?

Автор: Долго объяснять. В основном лингвистический химический реагент, который растворяет границу между синтаксисом и семантикой. Предполагается, что он должен использоваться для формальных языков, но, вероятно, он сработает и для неформального…

* Возможно, автор намекает на работу американского логика Леона Хенкина «Полнота функционального исчисления первого порядка», написанную в 1949 году. *Прим. перев.*

Читатель: *Что-что?!*

Автор: Он придает силу именам. Брызните немножко на пол. А потом *затихните!* На насколько секунд. Мы не хотим, чтобы вышла осечка.

(Читатель выливает содержимое бутылочки.)

Автор (*про себя*): Математика! Математика! Математика!

(Хлоп!)

Математика: Привет обоим!

Автор: Давно пора!

Математика: Извините. Думаю, что потеряла представление о времени. Это нетривиально — не терять представления о времени, когда живешь в безвременной Пустоте.

Читатель: Хорошо… У нас есть что вам показать.

Математика: Да ну! И что это?

Читатель: Мы поэкспериментировали и обнаружили, что существует какая-то машина E, которая является собственной производной.

Математика: Интересно. И как она выглядит?

Автор: Мы пока не знаем.

Читатель: Мы назвали ее E, где E обозначает «Единственная».

Автор: Потом мы установили, что она выглядит как «число-в-степени-x».

Читатель: Верно. Поэтому мы стали называть ее e^x, где e снова означает «единственное».

Математика: Но вы пока еще не знаете этого числа e?

Читатель: Нет. Мы думали, вам нужно быть рядом, когда мы попробуем узнать его.

Автор: И еще я думаю, что у вас по-прежнему есть Ностальгическое устройство. Мы полагаем, оно может помочь.

Математика: Вот так дела! Снова извините. Видимо, я просто без конца отвлекалась. Это нетривиально — не отвлекаться без конца, когда живешь в бесконечной…

Автор: Хватит! Просто дайте его нам.

(Математика вытаскивает Ностальгическое устройство.)

Читатель: За дело. Итак, я кладу E в Ностальгическое устройство.

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Читатель: Что теперь?

Математика: Вы же говорили, что эта штука совпадает с собственной производной, так?

Читатель: Так. То есть $E'(x) = E(x)$.

Математика: Но тогда все ее производные совпадают с ней, так? Например, вторая производная — производная первой, которая совпадает с исходной функцией.

Читатель: Прекрасно! То есть вы говорите, что $E^{(n)}(x) = E(x)$ для всех n. Но тогда $E^{(n)}(0) = E(0)$ для всех n. Чему равно $E(0)$?

Автор: $E(0) \equiv e^0 = 1$. В силу того способа, которым мы обобщили степени в интерлюдии 2. Вот были времена…

Математика: Ух ты! Это сильно упрощает результат работы Ностальгического устройства. Теперь получается:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Или, если представить это иначе,

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Погодите, вы уверены, что тут всё правильно? Выглядит слишком красиво.

Читатель: Не знаю. Мы могли бы проверить, совпадает ли написанная штука со своей производной. Это не должно быть слишком трудно, ведь тут всего лишь плюсо-умножательная машина. Посмотрим. Дифференцируя написанное, получаем:

$$E'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$
$$0 + 1 + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \tag{5.14}$$

Математика: Но ведь $n!$ было просто нашим сокращением для

$$n! \equiv (n)(n-1)\dots(2)(1).$$

Поэтому для любого n выражение $\frac{n}{n!}$ равно $\frac{1}{(n-1)!}$, и наше уравнение 5.14 превращается в

$$E'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Читатель: И это в точности то же, что Ностальгическое устройство выдало для функции E. Получается, E совпадает со своей производной. Это сработало! Выясним, чему равно число e.

Математика: Да. Думаю, нам лучше использовать обозначение для E, которое включает e:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Читатель: Но e — просто e^1, так что после подстановки $x = 1$ мы получаем:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

или, иначе,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Эй, мне кажется, мы только что узнали, чему равно e.

Автор: Да? Я пропустил это! Это было… неважно. Так что это за число?

Читатель: Мы точно не знаем. Но это число, которое получается, если сложить все величины, обратные $n!$, начиная с $n = 0$ и до бесконечности.

Автор: Ох. А если эта сумма будет бесконечно большой?

Математика: Ох… Я не думаю.

Читатель: У нас есть какие-то основания полагать, что она бесконечно большая?

Автор: Как может бесконечная сумма быть конечным числом?

Читатель: Ну, 0,11111 (и так до бесконечности) — это конечное число, правильно?

Автор: Естественно. Я имею в виду, что оно меньше, чем 0,2. Явно конечное.

Читатель: Но ведь это число можно представить в виде бесконечного количества слагаемых, вот так:

0,11111 (и так до бесконечности) =
= 0,10000 (и так до бесконечности) +
+ 0,01000 (и так до бесконечности) +
+ 0,00100 (и так до бесконечности) +
+ 0,00010 (и так до бесконечности) +
(и так до бесконечности).

Думаю, эту сумму можно записать так:

$$0{,}11111\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Следовательно, равенство говорит нам, что как минимум *можно* получить конечное число, складывая бесконечное количество слагаемых, если они уменьшаются достаточно быстро — что бы это ни значило.

Математика: Как нам узнать, что они уменьшаются достаточно быстро?

Читатель: Ну, в придуманном мной примере это очевидно. А вот насчет числа *e* я не уверен…

Математика: Мы забуксовали?

Автор: Скажу так: забудем пока об этой бесконечной сумме. Может, есть более простой путь найти число *e*.

Читатель: Какой?

Автор: Не знаю. Нам известно, что e^x совпадает со своей производной, и мне кажется, что мы могли бы использовать определение производной.

Читатель: Вы имеете в виду что-то такое?

$$e^x \overset{\text{Требование}}{=} \left(e^x\right)' \equiv \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx}. \tag{5.15}$$

Как это может помочь?

Автор: Ох. Думаю, никак.

Математика: Стойте, у меня есть идея, которая может помочь. Что, если мы сделаем так?

$$e^x \overset{(5.15)}{=} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \frac{e^x e^{dx} - e^x}{dx} = e^x \left(\frac{e^{dx} - 1}{dx}\right). \tag{5.16}$$

Автор: Эге! Здесь есть e^x слева и справа. Если мы сократим на это число, то получим

$$1 = \left(\frac{e^{dx} - 1}{dx}\right).$$

Может, теперь стоит попробовать отделить фрагмент с e и найти другой способ выражать это число, который не требует бесконечной суммы.

Читатель: Хорошо, умножим обе части на dx и получим

$$dx = e^{dx} - 1.$$

Поэтому

$$e^{dx} = 1 + dx.$$

Это может как-то помочь?

Математика: Хм… Если возвести обе части в степень $1/dx$, то получится

$$e = (1 + dx)^{\frac{1}{dx}}. \tag{5.17}$$

Читатель: Эта степень какая-то странная. Можно мне написать как-то иначе?

Автор: Конечно.

Читатель: Хорошо, наше число dx бесконечно мало. Но мы ведь не знаем, что делать с бесконечно малыми или бесконечно большими числами — по крайней мере если хотим получить в конце конкретное число. Число dx крохотное, поэтому $\frac{1}{dx}$огромное. Я буду писать $N \equiv \frac{1}{dx}$ как сокращение для огромного числа. Тогда мы можем просто сказать:

$$e \overset{???}{=} \left(1+\frac{1}{N}\right)^N.$$

Автор: Но первоначальное уравнение было верным, только если dx бесконечно мало, поэтому уравнение верно только в случае, если мы устремим N к бесконечности. Чтобы напоминать себе об этом, напишем так:

$$e = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N.$$

При этом мы можем думать, что $N = \frac{1}{dx}$. Та же идея.

Математика: Мы закончили?

Автор: Думаю, да.

Читатель: Нет! Мы написали два предложения, которые определяют число e, но всё еще не выяснили, чему оно равно!

Автор: Звучит неестественно.

Читатель: Нет, я имею в виду, что мы не знаем, чему оно равно *численно*. Мы не закончим, пока не займемся арифметикой и не вычислим его значение.

Математика: Это не для меня.

Автор: Да, мне не хочется возиться с такой арифметикой. Может, займемся чем-то более веселым? Например, проглотим кучу гвоздей или…

Читатель: Вы меня дразните?! После всего сделанного мы не можем сдаться, когда уже почти узнали, что это за штука.

Математика: Если вам действительно хочется, я могу позвонить своему другу, чтобы он сделал это для нас.

Читатель: Да, пожалуйста. Давайте разделаемся с этим.

(Математика берет телефон Автора и набирает номер.)

5.3.2. Перекладывание числовой тягомотины

Это не работа математика — делать правильные арифметические операции. Это работа банковских бухгалтеров.

Самуил Шатуновский. Цит. по: Джордж Гамов, «Моя мировая линия. Неформальная автобиография»*

Математика: Привет, А. Это Математика… Прекрасно!.. Послушай, ты уже закончил ту штуку, что ты сооружал?.. Превосходно, не мог бы ты заскочить на минутку?.. Где ты сейчас?.. В самом деле?.. О, это просто фантастика! Увидимся!

(Математика сбрасывает соединение.)

Математика: Мой друг А. Т. хочет нам помочь с арифметикой, и он тут неподалеку…

А. Т.: Привет!

Автор: Ух ты! Быстро.

Математика: Так здорово тебя видеть! Позволь мне познакомить вас. Это Читатель.

Читатель: Рад знакомству.

А. Т.: Взаимно.

Математика: А это Автор.

Автор: Привет! Рад познакомиться. Кто ваш друг?

А. Т.: О! Да, конечно. Позвольте мне представить моего партнера. Это Кремниевый Приятель, но он предпочитает сокращенно — Крем. Он будет помогать нам с арифметическими задачами.

Крем: 01000111 01110010 01100101 01100101 01110100 01101001 01101110 01100111 01110011 00100000 01001000 01110101 01101101 01100001 01101110 01110011 00000000.

* Издана на русском языке: Гамов Дж. Моя мировая линия. Неформальная автобиография. М.: Наука, 1994. *Прим. ред.*

А. Т.: Нет, Крем! Пожалуйста, человеческим языком. Извините, это иногда случается.

(А. Т. щелкает переключателями на панели Крема.)

Крем: $2^{\ulcorner G\urcorner}3^{\ulcorner r\urcorner}5^{\ulcorner e\urcorner}7^{\ulcorner e\urcorner}11^{\ulcorner t\urcorner}13^{\ulcorner i\urcorner}17^{\ulcorner n\urcorner}19^{\ulcorner g\urcorner}23^{\ulcorner s\urcorner}29^{\ulcorner\ \urcorner}31^{\ulcorner H\urcorner}37^{\ulcorner u\urcorner}41^{\ulcorner m\urcorner}43^{\ulcorner a\urcorner}47^{\ulcorner n\urcorner}53^{\ulcorner s\urcorner}$.

А. Т.: Нет-нет, Крем! Гёделевы номера — не человеческий язык. И здесь не все люди. Мы же говорили об этом, Крем. Если приветствуешь несколько лиц, по крайней мере будь любезен использовать продвижение типов, чтобы определить наиболее социально приемлемый способ их категоризации. Иначе кто-нибудь может обидеться.

(Крем некоторое время вычисляет.)

Крем: Приветствую, представители C,
где C — наименьший родовой класс,
в котором оба Человека и класс (Математика) \
являются подклассами.

Читатель: Привет!

Автор: Здравствуйте.

Математика: Рада знакомству.

А. Т.: Крем, эти люди интересуются, нельзя ли для них кое-что автоматизировать.

Крем: Конечно. Определите проблему.

Читатель: Мы интересуемся, не можете ли вы посчитать для нас

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Крем: Переполнение стека.

Читатель: Что это значит?

А. Т.: Крем квалифицирован, но все же он конечное существо с конечным объемом памяти. Мы можем добавлять ему столько памяти, сколько хочется, но если вы хотите, чтобы он дал ответ за конечное время, дайте ему конечное задание.

Автор: Ну, числа $n!$ растут очень быстро, поэтому держу пари, что можно спросить первые сто слагаемых или около того. Мы же хотим хотя бы представить, каково число e. Нам не нужно бесконечно много десятичных разрядов.

А. Т.: Давно бы так! Крем, колдуй.

Крем: С точностью до девяти десятичных знаков после запятой:

$$\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n!} = 2{,}718282828.$$

Читатель: Прекрасно!

Математика: Хорошо, но откуда нам знать, что это сработало? Мы могли сделать ошибку, или эта штука могла сделать ошибку.

Автор: Стоит посмотреть и на другое выражение для e. Крем, вы не могли бы вычислить его для нас?

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N.$$

Крем: Ошибка сегментации.

А. Т: Вы слышали? Никаких бесконечных заданий.

Автор: Прошу прощения. Крем, не могли бы вы найти это выражение для $N = 100$?

Крем: С точностью до девяти десятичных знаков после запятой:

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 2{,}704813829,$$

если $N = 100$.

Математика: Ответ не тот, что был раньше.

Читатель: Погодите. Те штуки, что мы дали Крему, и не должны быть в точности равны.

Автор: Да, конечно. Даже если мы всё сделали правильно, наше рассуждение показывало только то, что эти выражения стремятся к e, когда

n и N стремятся к бесконечности. Они не обязаны быть равными, если мы обрежем их до конечного числа элементов. Возможно, они просто стремятся к правильному ответу с разными скоростями.

Математика: Вполне разумная мысль. Давайте продвинемся еще. Крем, вы не могли бы вычислить эту сумму, когда $n = 1\,000\,000\,000$?

Крем: С точностью до девяти десятичных знаков после запятой:

$$\sum_{n=0}^{1000000000} \frac{1}{n!} = 2{,}718281828.$$

Математика: Ничего не изменилось. Числа разные. Вот и всё.

Читатель: Подождите, мы еще не повторили со вторым выражением. Крем, вы не могли бы вычислить это произведение, когда $N = 1\,000\,000\,000$?

Крем: С точностью до девяти десятичных знаков после запятой:

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 2{,}718281827,$$

если $N = 1\,000\,000\,000$.

Читатель: Вот так! Совпадают, кроме последней цифры.

Автор: Прекрасно! Думаю, что второе выражение для e просто стремится к правильному ответу медленнее. Это превосходно! Давайте для официальности напишем всё это в рамочке.

Краткое изложение наших приключений с недвижимым объектом

Мы открыли, что существует особенное число e, для которого машина

$$E(x) \equiv e^x$$

равна своей производной. Все кратные этой машины также равны своим производным, но это единственная такая машина, которая принадлежит к виду СУ.

Иными словами, E — единственная машина, которая одновременно и равна своей производной, и превращает сложение в умножение:

$$E(x + y) = E(x)\,E(y).$$

Далее мы использовали Ностальгическое устройство, чтобы вычислить e, и обнаружили:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

где $n! \equiv (n)(n-1)\ldots(2)(1)$. Не желая полностью доверять Ностальгическому устройству, мы с помощью определения производной вычисляли e другим способом и установили:

$$e = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}.$$

Потом Крем, партнер А. Т., помог нам определить конкретные значения этих выражений для очень больших, но конечных n и N. Благодаря им мы нашли, что:

$$e \approx 2{,}718281828.$$

5.3.3. Спасибо за все

Математика: Большое спасибо за помощь, А. Считать все это вручную было бы жутко нудно.

А. Т.: Пожалуйста, это было нетрудно. И не благодаря мне, а благодаря Крему.

Математика: Огромное спасибо, Крем.

Крем: Пожалуйста.

Автор: А. Т., а вы с Математикой давно дружите?

А. Т.: Безусловно. Мы друзья с базовых стадий.

Автор: Тогда почему вы называете себя «А»? Это инициал?

Математика (*Автору*): Он очень скрытный человек.

Автор: Да ладно, вам не нужно скрываться. Вы среди друзей. Полное раскрытие, хорошо? Что означает А. Т.? Автоматизированный Творец?

А. Т.: Нет.

Автор: Таненбаум*?

А.Т.: Ближе! Но нет.

Автор: Антисимметричный Тензор?

(А. Т. саркастически поднимает руки вверх.)

А. Т.: Вы меня раскусили.

Автор: Что? В самом деле?

А. Т.: Ха, нет. Мое имя Ал.

Ал Т.: Видите?

Математика (*усмехаясь*): Мне не хватало тебя, Ал. Как у тебя дела?

Ал Т.: Сейчас лучше. Долго я был одинок, но до недавнего времени не мог правильно категоризировать проблему в результате базовой ошибки в моих допущениях для аксиоматического самоанализа: что одиночество — функция уединения. Это не так… Это допущение задержало на некоторое время поиск решения, поскольку люди вокруг только ухудшали это ощущение. Они никогда не понимали меня; я понимал их еще меньше. С машинами я всегда ощущал, что могу быть собой, но с ними трудно говорить. С большинством из них, во всяком случае. Все стало лучше, когда появился Крем. Он — яблоко…

Автор: Я знаю, кто вы! Вы — это он! IEKYF ROMSI ADXUO KVKZC GUBJ!!!**

---

* Эндрю Таненбаум — американский специалист по вычислительной технике, преподаватель, автор многих книг, создатель UNIX-подобной операционной системы MINIX. *Прим. перев.*

** Автор намекает на выдающегося английского математика и логика Алана Тьюринга, одного из основателей информатики и основоположников теории искусственного интеллекта, предложившего «машину Тьюринга» и «тест Тьюринга». Во время войны Тьюринг работал в шифровальном подразделении британской разведки в Блетчли-парке, где англичане сумели взломать код шифровальной ма-

Ал Т. (*широко открыв глаза*): Как вы узнали?

Автор: Да ладно! Могло ли это быть очевиднее?

Читатель: О чем это вы?

Автор: Ни о чем. Вы знаете, Ал, сейчас говорят, что нельзя понять мозг и поведение без понимания вычислений.

Ал Т.: Кто говорит?

Автор: Люди, которые изучают эти вещи, чтобы заработать.

Ал Т.: Надо же… люди всё же меняются к лучшему…

Автор: Сожалею, что вы не могли быть здесь, чтобы увидеть это. Вам бы понравилось.

Ал Т. (*неловко*): Мне лучше пойти. Было здорово познакомиться со всеми.

Автор: Что?.. Уже?..

Математика: До свидания, старый друг!

Читатель: Приятно было познакомиться!

(Ал и Крем удаляются.)

Автор (*Алу*): Спасибо за всё. Всё это.

Ал Т. (*смущенно*): Пожалуйста.

(Ал и Крем продолжают удаляться.)

Автор (*Алу, издалека*): О! Ал! Англичане говорят, что они *действительно* сожалеют.

шины Enigma, использовавшийся на немецких подводных лодках. IEKYF ROMSI ADXUO KVKZC GUBJ — надпись на памятнике ученому в Манчестере. Это слова FOUNDER OF COMPUTER SCIENCE (основоположник науки о компьютерах), зашифрованные кодом машины Enigma. На самом деле в кодировке есть ошибка, поскольку букве U в слове COMPUTER соответствует буква U в зашифрованной надписи, а Enigma в принципе не могла при шифровании не изменить букву. Упомянутое выше яблоко и весь дальнейший текст отсылают к трагическим фактам личной жизни Тьюринга. Гомосексуализм до 1967 года считался в Англии уголовным преступлением. В 1952 году Тьюринг был осужден за него, но вместо тюремного заключения выбрал гормональную терапию (химическую кастрацию), которая сильно подорвала его здоровье. В 1954 году он покончил с собой, отравив цианидом яблоко. В 2013 году английская королева посмертно помиловала Тьюринга, который формально до того считался преступником. *Прим. перев.*

Ал Т.: Теперь уже поздно… но скажите им, что я ценю это. Звоните нам, если вам нужно что-нибудь автоматическое, числовое или прочее.

Автор: Ладно. Надеюсь, мы скоро снова увидимся.

5.4. Зоология вида УС

Итак, перед изучением недвижимого объекта e^c мы провели некоторое время, обсуждая «четыре вида». Мы обнаружили, что каждый представитель СУ может быть записан в форме $f_c(x) \equiv c^x$, а позже установили, что у всякого представителя вида СУ есть партнер в виде УС, который «отменяет» его. Иначе говоря, для любого положительного числа c у нас две машины. Первая — представитель вида СУ $f_c(x) \equiv c^x$. Вторая — какой-то представитель вида УС g_c, которая определяется своим поведением так:

$$\begin{aligned} g_c(f_c(x)) &= x \quad \text{для всех } x, \\ f_c(g_c(x)) &= x \quad \text{для всех } x. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Как вы догадались (или не догадались), представители вида УС имеют свое название в стандартных учебниках: они именуются логарифмами. В учебниках вместо нашей $g_c(x)$ мы бы увидели $\log_c x$, но суть та же.

Неважно, как мы их называем. Важно то, что в обычной вывернутой педагогике нас знакомят с этой темой до анализа. Как-то было решено, что задолго до анализа надо изучать число e, машину e^x и логарифмы. Вдобавок во время путаного обсуждения логарифмов выделяют один конкретный, по загадочным и необъясненным причинам признанный «особенным». Его обозначают $\ln x$ и именуют «натуральным» или «логарифмом по основанию e». Затем ученикам выдают несколько невнятных заклинаний об этих штуках в надежде, что это может подготовить их к анализу. Неудивительно, что в итоге многие не понимают, что такое логарифмы, что такое число e, а объединение этих понятий для создания функции $\ln x$ вообще выглядит как алхимия. И даже многие аспиранты и профессора в нематематических областях охотно признают, что до сих пор не понимают сути логарифмов, хотя их этому и учили.

Источником этой путаницы стали *не* сами понятия. Как мы установили выше, анализ нам нужен не для того, чтобы вычислить e; единственная причина, по которой мы ставим его на первое место, — связь с производной! Иными словами, число e нас заботит потому, что машина e^x совпадает с собственной производной, а машина $\ln x$ или $\log_e x$ потому, что она отменяет действие e^x. И если бы мы ничего не знали о производных, у нас не было бы причин интересоваться e, e^x, $\ln x$ и их свойствами. Держу пари, что «нет причин интересоваться» — как раз то ощущение, которые испытывают ученики, которым рассказывают в школе об этих темах. Можно ли их осудить за это?

Мы в курсе происхождения этих странных штук, именуемых логарифмами, но по-прежнему ничего о них не знаем и не ощущаем рядом с ними комфорта. Хотя нам удалось узнать, как выглядят представители вида СУ (число в степени x), мы не знаем, как выглядят представители вида УС — в том смысле, что не можем описать их в терминах, которые уже знаем. Это побочный эффект нашего определения видов: не то, *чем они являются*, а то, *как они себя ведут*. Каждый раз, когда мы определяем какой-нибудь математический объект только через его поведение, не стоит удивляться, если нет немедленного понимания, чем этот объект *является*, что бы это ни значило.

Это проливает свет на глубинные причины того, почему темы в этой части могут смущать новичков. Несмотря на свою простоту, странный танец определения объекта по его поведению чужд для метода взаимодействия человеческого разума с миром. На протяжении большей части эволюционной истории человека наши мозги имели нулевой опыт определения объектов по их поведению, и сейчас наша нервная система не ожидает встретить в мире объекты, определенные так. На любой стадии эволюционной истории человека, вплоть до нынешнего дня, все «вещи», встречавшиеся нам, попадали в одну из следующих категорий: люди; животные, отличные от людей; растения и грибы; невидимые болезнетворные организмы; изготовленные человеком предметы (вроде топоров или компьютеров) и неодушевленные географические объекты. Когда вы имеете дело с какой-то из этих категорий, всегда можно безопасно предположить, что существует большой набор уже существующих фактов об этом, которых вы просто не знаете. Ни в одном из этих случаев комплекс фактов о таком объекте *не поддается открытию в силу простого принципа, что он постулируется человеком, совершающим открытие*. Мы «от природы» по умолчанию не привыкли размышлять так.

Соответственно, я полагаю, что, когда студенты впервые слышат о «логарифмах», они приписывают этим объектам некую скрытую сущность и считают, что должен иметься мир (почти зоологической) информации о них, которую преподаватель не раскрыл. В каком-то смысле это верно! Но странность в том, что *все* их свойства вытекают из их определения. Это верно для всех математических объектов, но в случае логарифмов проявляется более рельефно (и устрашающе). Когда ученики впервые с ними сталкиваются, это одновременно (почти) первая встреча с определением объекта *непосредственно* через его поведение: им дают только описание, как логарифмы ведут себя, а не «чем они являются». Иначе говоря, для знакомых машин вроде $m(x) \equiv x^2$ описание в правой части говорит нам о внутреннем устройстве машины, то есть как мы можем вычислить конкретный результат при конкретном введенном числе. Определение логарифмов не дает нам такой подсказки о внутреннем устройстве машины, а описывает только ее поведение относительно операций сложения и умножения: логарифмы — это все, что должно вести себя в соответствии с предложением $\log xy = \log x + \log y$.

Сейчас на основании нашего определения вида УС мы можем показать остальные «свойства логарифмов» из стандартного учебного курса. Мы узнаем достаточно об их свойствах, чтобы пропустить их через Ностальгическое устройство и получить описание в виде бесконечной плюсо-умножательной машины. В принципе этого хватит, чтобы вычислять логарифм любого числа с произвольной точностью, не используя ничего, кроме сложения и умножения.

5.4.1. Еще кое-что, чего вам никогда не говорили

Сначала подберем сокращения получше. Мы писали $f_c(x) \equiv c^x$ для представителей вида СУ и $g_c(x)$ для представителей вида УС. Поскольку СУ-машины используют степень (power), давайте сокращать их как $p_c(x) \equiv c^x$. Поскольку УС-машины, по сути, противоположны, обозначим их $q_c(x)$, поскольку буква q выглядит как отраженная p.

Итак, в силу нашего определения вида УС (противоположность виду СУ), все факты о них должны составлять пары. Для каждого факта о более простой СУ-машине мы должны вывести какой-то факт о более загадочной УС-машине. Поэтому факты о СУ-машинах — своего рода валюта, на которую мы можем купить более глубокое понимание УС-машин. Откуда взять факты о СУ-машинах? Ну, поскольку все они выглядят как c^x, факты о СУ-машинах *должны* вытекать из нашего способа определения степеней. Поскольку мы сами изобрели их, все наши знания о них вытекают из двух предложений:

$$s^{x+y} \overset{\text{Требование}}{=} s^x s^y . \tag{5.19}$$

и

$$(s^x)^y = s^{xy}, \tag{5.20}$$

где x, y и s — произвольные числа. Согласно нашему определению вида УС, все его представители ведут себя так:

$$q_s(xy) = q_s(x) + q_s(y). \tag{5.21}$$

Это «свойство логарифмов», которое «противоположно» уравнению 5.19. В учебниках обычно это записывается так:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y. \tag{5.22}$$

Есть ли предложение об УС-машинах, которое «противоположно» уравнению 5.20? Посмотрим. Попробуем применить функцию q_s к обеим сторонам уравнения. Ранее мы установили, что УС-машины аннулируют действие парных СУ-машин, то есть $q_s(s^{\#}) = \#$ для любого #. Следовательно, мы можем написать:

$$q_s\left(s^{xy}\right)\overset{(5.18)}{=}xy. \quad (5.23)$$

После применения q_s к обеим сторонам уравнения 5.20 мы получаем:

$$q_s\left(\left(s^x\right)^y\right)\overset{(5.20)}{=}q_s\left(s^{xy}\right)\overset{(5.18)}{=}xy. \quad (5.24)$$

Поскольку мы получили этот факт о логарифмах с помощью уравнения 5.20, его можно считать тем «противоположным» фактом, который мы искали. С учетом вышесказанного мы могли бы здесь остановиться. Но уравнение довольно неуклюжее. Если мы хотим получить предложение, которое говорит только о логарифмах (то есть УС-машинах), было бы здорово уничтожить фрагмент, выглядящий как s^x. Как это сделать? Если уравнение 5.24 верно для любых x и y, то оно должно быть верно, когда $x = q_s(z)$ для любого конкретного числа z. Если мы подставим в 5.24 $x \equiv q_s(z)$, мы уничтожим фрагмент с s^x, поскольку при таком сокращении справедливо $s^x \equiv s^{q_s(z)} = z$, где второе равенство использует тот факт, что СУ-машины аннулируют воздействие парных им УС-машин. С помощью этого нового обозначения мы можем переписать уравнение 5.24 эквивалентным, но иначе выглядящим способом:

$$q_s(z^y) = y \cdot q_s(z). \quad (5.25)$$

Это истолковать намного проще, чем уравнение 5.24, хотя тут та же идея, просто переодетая. Уравнение говорит нам, что можно «выносить степень из логарифма». Этот факт об УС-машинах мы получили из факта о СУ-машинах в уравнении 5.20. Итак, мы снова увидели, что факты об этих машинах ходят парами. Уравнение 5.25 — то «свойство логарифмов», которое учебники обычно пишут так:

$$\log_b x^c = c \cdot \log_b x. \quad (5.26)$$

Если это все еще выглядит страшно и неочевидно, помните, что это точно то же, что и проще выглядящее уравнение 5.20. Мы можем спрашивать «почему» до упора. «Хорошо, — можете сказать вы, — пусть уравнение 5.26 верно в силу уравнения 5.20, но почему верно 5.20?» Хороший вопрос! Простой ответ таков: 5.20 верно, поскольку мы *потребовали*, чтобы оно было верно, когда изобретали идею степеней в интерлюдии 2! Как обычно в математике, если мы будем спрашивать «почему» достаточно долго, мы в конце концов обнаружим, что ответ на любой вопрос вида «Почему вот-это-и-вот-это верно?» оказывается таким: «В силу такого-то решения, которое мы приняли ранее».

Что ж, мы узнали кое-что об этих зверях. Что еще мы можем сказать? Если уравнение 5.21 верно для всех x и y, то оно должно быть истинно для y, обратного какому-то числу. Пусть $y \equiv \frac{1}{z} \equiv z^{-1}$, тогда можно переписать (5.21) так:

$$q_s\left(\frac{x}{z}\right) \equiv q_s(xz^{-1}) \overset{(5.21)}{=} q_s(x) + q_s(z^{-1}) \overset{(5.25)}{=} q_s(x) - q_s(z). \tag{5.27}$$

Объединяя крайние слева и справа выражения, получаем:

$$q_s\left(\frac{x}{z}\right) = q_s(x) - q_s(z). \tag{5.28}$$

Это то «свойство логарифмов», которое учебники обычно пишут в виде:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \tag{5.29}$$

Есть ли взаимосвязь между разными представителями вида УС? Вспомним, что они определяются тем, какого представителя вида СУ они «аннулируют», то есть конкретным параметром c. Поэтому мы можем перефразировать вопрос так: «Если имеются два числа a и b, есть ли какая-то связь между q_a и q_b?». Если мы запишем очевидное равенство $x = x$ в устрашающем виде

$$x = b^{q_b(x)}, \tag{5.30}$$

а потом применим к обеим частям функцию q_a, то мы получим:

$$q_a(x) \overset{(5.30)}{=} q_a\left(b^{q_b(x)}\right) \overset{(5.25)}{=} q_b(x) \cdot q_a(b),$$

или

$$q_b(x) = \frac{q_a(x)}{q_b(b)}. \tag{5.31}$$

Это то «свойство логарифмов», которое учебники обычно пишут в виде

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_b b}. \tag{5.32}$$

Это прекрасно, поскольку сообщает нам, что можно игнорировать практически всех представителей вида УС! Почему? Дело в том, что $\log_a b$ — просто число, не зависящее от x, поэтому 5.32 утверждает, что все УС-машины, по сути, просто кратны друг другу! Следовательно, больше незачем говорить обо всех УС-машинах.

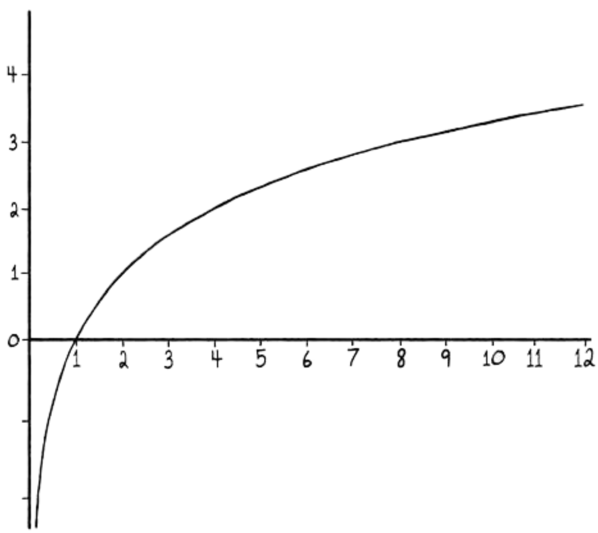


Рис. 5.2. Мы установили, что все логарифмы получаются друг из друга умножением на какое-то число. Если мы построим график одного из них, то представим, как выглядят все они. Здесь мы нарисуем график логарифма по основанию 2, потому что его проще объяснить. Мы знаем, что $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ и т. д. Это просто другой способ сказать, что $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$ и т. д., как показано на рисунке

Мы можем выбрать одну любимую и обсуждать только ее. Это равносильно выбору одного любимого «основания». Мы можем взять 2, 52, 10, даже 93,785 или что угодно. Но вспомним обаяние недвижимого объекта e^x — единственной машины, которая совпадает и с собственной производной, и с СУ-машиной. Поэтому чисто из эстетических соображений выберем из УС-машин представителя, который противоположен недвижимому объекту, а именно $q_e(x)$. Эта единственная оставшаяся УС-машина $q_e(x)$ — то, что в учебниках именуется «натуральным логарифмом» или $\ln x$. Радостно выбросив все логарифмы, за исключением натуральных, мы можем продолжать наше путешествие с гораздо меньшим грузом.

5.4.2. Молоток для нового сокращения спешит на помощь

Поскольку у нас осталась только одна УС-машина, нам больше незачем писать нижний индекс в $q_e(x)$. Давайте просто называть ее $q(x)$. Можем ли мы использовать наши знания, чтобы продифференцировать машину $q(x)$? Мы не знаем производную $q(x)$, зато знаем, что:

$$q(E(x)) \equiv q(e^x) \equiv x.$$

Может, записав машину $M(x) \equiv x$ в таком усложненном виде, мы сможем убедить математику сообщить нам производную натурального логарифма $q(x)$. С одной стороны, производная по x написанной штуки равна 1, поскольку это просто x. Чтобы найти производную другим способом, давайте используем молоток для нового сокращения. Обозначим $s \equiv e^x$, тогда мы имеем $q(s) = x$. Найдем производную q.

$$1 = \frac{dq(s)}{dx} = \frac{dq(s)}{ds}\frac{ds}{dx}.$$

Хм… Что такое это $\dfrac{ds}{dx}$? Поскольку мы обозначали $s \equiv e^x$, то

$$\frac{ds}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\, e^x = e^x \equiv s.$$

Поэтому $1 = \dfrac{sdq(s)}{ds}$. Перебросив s в другую часть уравнения, получим

$$\frac{dq(s)}{ds} = \frac{1}{s}. \tag{5.33}$$

Так! Это уравнение не содержит x, поэтому даже при том, что мы буквой s обозначили e^x, мы можем забыть об этом и считать s бессмысленным сокращением. Уравнение 5.33 говорит: «Производная q по тому, что внутри, равна величине, обратной тому, что внутри». Иными словами, при желании мы можем заменить букву s буквой x, ведь сейчас это просто символ. Чтобы подчеркнуть свободу перехода к новому сокращению, напишем полученное из 5.33 несколькими эквивалентными, но по-разному выглядящими способами:

$$\frac{dq(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}q(x) = \frac{1}{x} \quad \text{или} \quad q'(x) = \frac{1}{x}. \tag{5.34}$$

Или, как это пишется в учебниках:

$$\frac{ds}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{5.35}$$

Ура!

5.4.3. Ложь и поправка на ложь ведут нас дальше

Это был необычный аргумент, и мы можем доверять или не доверять результату. Как часто случается, когда мы изобретаем математику для себя, мы провели рассуждение, но не уверены в его правильности. Можем ли мы получить тот же результат иным способом? Попробуем использовать определение производной и посмотреть, не выйдет ли тот же ответ. На этот раз давайте применять обозначение $\ln x$, как в учебниках, чтобы убедиться, что мы не слишком привыкли к одному выбору сокращений. Вперед.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\ln(x) \equiv \frac{\ln(x+dx)-\ln(x)}{dx} \overset{(5.29)}{=} \\ &\overset{(5.29)}{=} \frac{\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{dx} \equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{dx}\right)\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) \overset{(5.26)}{=} \\ &\overset{(5.26)}{=} \ln\left(\left[1+\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{dx}}\right). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Здесь мы застряли, но само место кажется странно знакомым. Вспомните, что во время диалога в этой главе мы установили:

$$e = (1 + dx)^{\frac{1}{dx}}. \tag{5.37}$$

Это очень похоже на место, где мы застряли. Последнее выражение в уравнении 5.36 равнялось бы как раз e (в соответствии с 5.37, если бы не неприятный x внутри. Может, нам удастся от него избавиться. Попробуем поманипулировать штукой в конце уравнения 5.36, чтобы она стала больше походить на 5.37.

В уравнении 5.37 вовсе не обязательно писать именно dx. Это просто какое-то бесконечно малое число. Важно только, чтобы два dx в уравнении 5.37 были одним и тем же числом. Если dx бесконечно мало, а x — нет, то $\frac{dx}{x}$ тоже бесконечно мало. Поэтому если бы степень в последнем выражении в 5.36 была $\frac{x}{dx}$, а не $\frac{1}{dx}$, то мы могли бы ввести сокращение:

$$dy \equiv \frac{dx}{x}, \tag{5.38}$$

и тогда получилось бы:

$$\ln([1 + dy]^{\frac{1}{dy}}) = \ln e = 1.$$

Это было бы ложью, но решило бы проблему. Поэтому мы можем проделать знакомый трюк с ложью и поправкой на ложь. Прежде всего мы солжем, изменив степень с $\frac{1}{dx}$ на необходимую нам $\frac{x}{dx}$. При этом мы умножили на x, и чтобы степень осталась $\frac{1}{dx}$, нужно ее разделить на x. То есть вместо $\frac{1}{dx}$ напишем $\frac{x}{(x \cdot dx)}$. Соответственно, степень примет вид:

$$\frac{1}{dx} = \frac{x}{x \cdot dx} \equiv \frac{1}{x \cdot dy}. \tag{5.39}$$

Применим это, чтобы сломать стену, в которую мы врезались ранее. Для каждого шага я буду использовать номера уравнений над знаками равенства, чтобы напоминать, откуда берется каждый переход. Получаем следующее:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\ln(x) \overset{(5.36)}{=} \ln\left(\left[1+\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{dx}}\right) \overset{(5.38)}{=} \\ &\overset{(5.38)}{=} \ln\left(\left[1+dy\right]^{\frac{1}{dx}}\right) \overset{(5.39)}{=} \ln\left(\left[1+dy\right]^{\frac{1}{x \cdot dy}}\right) \overset{(5.20)}{=} \\ &\overset{(5.20)}{=} \ln\left(\left(\left[1+dy\right]^{\frac{1}{dy}}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \overset{(5.37)}{=} \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \overset{(5.26)}{=} \frac{1}{x}\ln(e) \overset{(5.13)}{=} \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Как мы и надеялись, получился тот же ответ. В обоих случаях мы установили, что производная нашей машины q (она же «натуральный логарифм») равна $\frac{1}{x}$. Добившись одного результата двумя разными способами, мы удостоверились в том, что ответ действительно верный.

5.4.4. Ностальгическое устройство снова облегчает нам жизнь

Хотя мы установили, что $q'(x) = \frac{1}{x}$, мы все еще не умеем дать описание $q(x)$ в терминах чего-то более простого. Иначе говоря, мы не умеем вычислять конкретное значение для $q(3)$ или $q(72)$. Это то же положение, в котором мы были в главе 4, когда не знали, как описать машины V и H (учебники именуют их синусом и косинусом), кроме как рисуя картинки. Тогда мы открыли, что Ностальгическое устройство позволяет записать V и H в виде плюсо-умножательной машины с бесконечным числом слагаемых, что здорово облегчило хлопоты. Вооруженные разложением V и H в такой ряд, мы могли вычислить любые нужные значения, выполняя только сложение и умножение.

Возможно, Ностальгическое устройство поможет нам понять, как выглядит «натуральный логарифм» и как вычислять конкретные значения $q(9)$, $q(42)$ и т. д. Оно может и не сработать, но стоит попытаться. Подаем q в Ностальгическое устройство и получаем:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Хм… Это не будет работать. Мы знаем, что $q'(x) = \frac{1}{x}$ и что при $x = 0$ выражение стремится к бесконечности. Почему q ведет себя так странно в нуле? Наша машина q определяется своим поведением $q(e^x) = x$. Но функция e^x всегда положительна: если x стремится к $-\infty$, то она приближается к 0. На основании этого можно заключить, что $q(0) = -\infty$. Вероятно, нам не следует применять Ностальгическое устройство напрямую к машине q, потому что q ведет себя в нуле довольно дико.

А что, если вместо этого применить Ностальгическое устройство к машине $q(1 + x)$? Это та же машина, но чуть сдвинутая. Зато она намного лучше ведет себя при $x = 0$, ведь $q(1 + x) = q(1) = 0$. Похоже, если мы представим ее в таком виде, дело упростится. Можем ли мы найти ее производные в $x = 0$? Это производные исходной машины в точке $x = 1$, поэтому нам нужны $q^{(n)}(1)$ для всех n. Найдем несколько производных q и посмотрим, нет ли какой-нибудь закономерности:

$$q'(x) = x^{-1}$$
$$q''(x) = -x^{-2}$$
$$q'''(x) = 2x^{-3}$$
$$q^{(4)}(x) = -(3)(2)x^{-4}$$
$$q^{(5)}(x) = (4)(3)(2)x^{-5}.$$

Эге, да это просто! Мы используем схему $(x^{\#})' = \#x^{\#-1}$, которая нам известна из главы 3. Поскольку показатели степени отрицательны, знак производной при каждом дифференцировании будет меняться. Для n-й показатель будет n, а числом впереди станет $(n - 1)!$, поэтому в общем виде наша закономерность выглядит так:

$$q^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n - 1)!x^{-n}.$$

Итак, мы получили все производные $q(x)$. Как насчет производных $q(x + 1)$? Используя молоток для нового сокращения, мы видим, что производные функции $Q(x) \equiv q(x + 1)$ — просто производные q для $x + 1$, поскольку $\frac{d}{dx}(x + 1) = 1$. Прекрасно! Мы можем написать:

$$Q^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n - 1)!(x + 1)^{-n},$$

когда $n \geq 1$. Для использования в Ностальгическом устройстве нам нужны числа вида $q^{(n)}(1)$, которые равны $Q^{(n)}(0)$. Из последнего уравнения получаем:

$$Q^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n - 1)! \tag{5.41}$$

для $n \geq 1$. Если же $n = 0$, то $Q^{(n)}(0) = Q(0) \equiv q(1) = 0$. Теперь можно использовать Ностальгическое устройство:

$$q(x + 1) \equiv Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n - 1)!}{n!} x^n. \tag{5.42}$$

Поскольку $n! = n \cdot (n - 1)!$, справа в уравнении (5.42) можно сократить $(n-1)!$. В итоге получаем:

$$q(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n.$$

Если развернуть, получится:

$$q(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Поскольку $q(x)$ уходит в бесконечность в точке 0, $q(x + 1)$ уходит в бесконечность в точке -1, так что непонятно, можем ли мы доверять этому выражению для всех x. Но оно по крайней мере дает нам конкретный способ представления УС-машин. Уравнение предоставляет основания думать о так называемом натуральном логарифме как о бесконечной плюсо-умножательной машине. Поскольку все представители вида УС всего лишь кратны q, отныне мы можем описывать логарифмы (УС-машины) не только словами «это то, что аннулирует действие машин вида c^x».

5.5. Вид УУ

До конца этой главы нам нужно исследовать еще один вид машин: УУ. Этот вид определялся как множество машин, которые ведут себя так:

$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

для всех x и y. Посмотрим, можно ли выяснить, как они выглядят. Поскольку мы не знаем, что делать, можно попробовать то, что сработало для СУ-машин: дифференцирование определения по одной переменной, например y. Это дает:

$$xf'(xy) = f(x)\,f'(y),$$

где штрих означает дифференцирование, когда переменной является y. Это уравнение должно быть верным для всех x и y, так что попробуем подставить какие-нибудь конкретные значения, чтобы свести все к более понятным условиям. Если положить $x = 1$, то получим:

$$f'(y) = f(1)\,f'(y), \tag{5.43}$$

которое говорит нам*, что $f(1) = 1$. А если подставить $y = 1$? Тогда получим:

$$xf'(x) = f(x)\,f'(1).$$

Поскольку $f'(1)$ — просто неизвестное число, мы можем переписать это в виде:

$$f'(x) = c\,\frac{f(x)}{x}. \tag{5.44}$$

Это одно из тех мест в математике, когда непонятно, что делать, и в процессе размышления над задачей любой застрянет на какое-то время. Сейчас никто в здравом уме, видимо, не подумал бы так поступать, но если (по какой-то глупой причине) мы продифференцируем натуральный логарифм $f(x)$, нам будет проще увидеть то, о чем говорят уравнения. Вспомним, что ранее мы установили:

$$\frac{d}{dx}q(x) = \frac{1}{x},$$

где функция $q(x)$ — то, что учебники называют натуральным логарифмом или логарифмом по основанию e и обозначают $\ln x$. Поскольку мы можем обозначать вещи как угодно, это уравнение говорит ровно то же, что любое из следующих:

$$\frac{d}{d\bigstar}q(\bigstar) = \frac{1}{\bigstar} \qquad \frac{d}{ds}q(s) = \frac{1}{s} \qquad \frac{d}{df(x)}q(f(x)) = \frac{1}{f(x)}.$$

Последнее из них нам сейчас поможет. Если мы продифференцируем $q(f(x))$ по x, используя молоток для нового сокращения, мы получим:

$$\frac{d}{dx}q(f(x)) = \underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{f'(x)}\underbrace{\frac{d}{df(x)}q(f(x))}_{\frac{1}{f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Подставляя сюда $f'(x)$ из уравнения 5.44, получаем:

* Автор молчаливо предполагает, что f' не равна 0. *Прим. перев.*

$$\frac{d}{dx}q(f(x)) = \frac{cf(x)}{xf(x)} = c\frac{1}{x}\cdot$$

Обратите внимание, что $\frac{1}{x}$ справа в предыдущем уравнении можно считать производной натурального логарифма $q(x)$. Следовательно, мы можем использовать этот факт, а также свойство логарифмов $c \cdot q(x^c)$, чтобы написать:

$$\frac{d}{dx}q(f(x)) = c\frac{d}{dx}q(x) = \frac{d}{dx}(c \cdot q(x)) = \frac{d}{dx}q(x^c). \tag{5.45}$$

Мы получили утверждение вида: «Производная одной вещи равна производной другой вещи». Но если это верно, то должно быть выполнено «одна вещь = другая вещь + какое-то число». Почему? Если у двух машин угловые коэффициенты везде одинаковы, эти машины должны быть везде одинаковыми, но их графики сдвинуты друг относительно друга по вертикали вверх или вниз. Такие общие соображения показывают, что из уравнения 5.45 мы можем сделать заключение:

$$q(f(x)) = q(x^c) + A,$$

где A — какое-то неизвестное нам число. Однако не знать A — все равно что не знать его логарифм, так что мы можем выразить свое незнание, написав вместо A число $q(B)$, где B — какое-то другое неизвестное число. Этот трюк позволяет написать:

$$q(f(x)) = q(x^c) + q(B) = q(Bx^c).$$

Наконец, подаем обе части равенства в машину, противоположную q (то есть e^x), и получаем:

$$f(x) = Bx^c.$$

Подстановка $x = 1$ дает $f(1) = B$, но ранее (сразу за уравнением 5.43) мы установили, что $f(1) = 1$ для всех представителей вида УУ, поэтому $B = 1$. Отсюда следует, что все УУ-машины имеют вид

$$f(x) = x^c,$$

причем разные c дадут различные УУ-машины. Поскольку с ними мы уже знакомы, не нужно тратить время на их обсуждение.

5.6. Встреча со сделанным

Обобщим всё, что мы сделали в этой главе.

1. Учитывая важность сложения и умножения в нашем путешествии, мы определили четыре вида машин на основании того, как они взаимодействуют с этими операциями. Обозначив сложение и умножение буквами С и У, мы определили эти виды так: 1) переводят С в С, 2) переводят С в У, 3) переводят У в С, 4) переводят У в У.

2. Мы поэкспериментировали с СС-машинами и установили, что все они выглядят как $f(x) \equiv cx$, где c — какое-то число.

3. Мы поэкспериментировали с СУ-машинами и установили, что все они выглядят как $f(x) \equiv c^x$, где c — какое-то число. Более того, мы обнаружили, что одна из этих машин имеет удивительное свойство: она совпадает со своей производной. Объединив эти два факта, мы выяснили, что существует единственное число e, для которого функция e^x совпадает со своей производной. Если умножать эту машину на константу, итоговые машины также будут совпадать со своими производными, но e^x единственная машина, которая и совпадает со своей производной, и входит в класс СУ.

4. Мы поэкспериментировали с УС-машинами и установили, что у каждого представителя есть партнер среди СУ-машин. Иными словами, для каждой СУ-машины $f_c(x) \equiv c^x$ есть некая УС-машина $g_c(x)$, которая противоположна в том смысле, что:

$$g_c(f_c(c)) = x \quad \text{и} \quad f_c(g_c(x)) = x.$$

Но мы понятия не имели, как выглядят эти УС-машины (не могли описать их в терминах того, что мы уже знаем).

5. Мы нашли два разных выражения для этого единственного числа e.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,, \;\; e = \lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{N})^N.$$

Эти выражения говорили, что число e примерно равно 2,71828182…

6. Затем мы вернулись к экспериментам с УС-машинами (на языке учебников — логарифмам). Мы решили обозначать их $q_c(x)$, поскольку они

аннулируют действие машин со степенью $p_c(x) \equiv c^x$, а зеркальное отражение p выглядит похоже на q.

7. Мы использовали наши знания об УС-машинах, чтобы вывести разные «свойства логарифмов», о которых слышали в курсе математики. По ходу мы установили, что все УС-машины получаются друг из друга умножением на константу и мы ничего не потеряем, если выберем одну из них и проигнорируем остальные. Мы выбрали $q_e(x)$, которая противоположна недвижимому объекту e^x. Отбросив ненужный индекс, мы назвали ее $q(x)$. В учебниках эта машина называется $\ln x$.

8. Мы выяснили двумя способами производную машины q. В обоих случаях оказалось:

$$q'(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Как и в случае с машинами V и H из главы 4, мы смогли определить производную q до того, как научились записывать ее в виде плюсо-умножательной машины.

9. Мы попытались применить к машине q наше Ностальгическое устройство, но обнаружили ее плохое поведение в нуле. Поэтому мы сделали сдвиг на 1 и стали изучать машину $q(x + 1)$. Мы получили:

$$q(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Это дало нам возможность думать о натуральном логарифме как о бесконечной плюсо-умножательной машине. Но мы не уверены, что это выражение работает для всех x.

10. Мы установили, что все УУ-машины имеют вид $f(x) = x^c$ для некоторого постоянного числа c*.

* Напоминаем: этот результат был получен при молчаливом предположении, что f' не тождественна 0. Функции $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \equiv 1$ также удовлетворяют условию $f(xy) = f(x)\,f(y)$. *Прим. перев.*

ИНТЕРЛЮДИЯ 5
ДВЕ ТУЧКИ

Больше нет тайн?

В 1894 году знаменитый физик Альберт Майкельсон заметил, что все фундаментальные загадки природы, похоже, уже решены. Поэтому физика будущего в основном будет иметь дело с прояснением деталей. Майкельсон писал:

> Все самые важные фундаментальные законы и факты физической науки уже открыты и прочно утвердились; вероятность того, что их когда-нибудь в результате новых открытий сменят другие законы и факты, чрезвычайно мала… В будущем нам следует ожидать новых открытий лишь в шестом знаке после запятой.

Шестью годами спустя схожее замечание высказал Уильям Томпсон, более известный как лорд Кельвин. Он заявил:

> Красоту и ясность динамической теории, которая утверждает, что тепло и свет должны быть формами движения, в настоящее время омрачают две тучки. Первая из них появилась с волновой теорией света, с ней работали Френель и доктор Томас Юнг; она включает вопрос, как может Земля двигаться сквозь упругое твердое тело, каковым по существу является светоносный эфир? Вторая — доктрина Максвелла — Больцмана о распределении энергии*.

Выяснилось, что две тучки лорда Кельвина были куда существеннее, чем второстепенные технические детали; за ними скрывались два фундаментальных столпа нашего современного понимания Природы. Первая проблема была решена только с появлением эйнштейновской специальной теории относительности, а решение второй загадки привело к еще

* Речь под названием «Облака XIX века в динамической теории тепла и света» (27 апреля 1900 года).

более загадочной конструкции квантовой механики. Хотя обе эти теории можно объединить в так называемой квантовой теории поля, эйнштейновская *общая* теория относительности по-прежнему «не сочетается удачно» с квантовой механикой, и одна из основных нерешенных проблем современной физики — как объединить их в эффективной квантовой теории гравитации. Спустя более ста лет после слов Майкельсона и Томпсона для нас во Вселенной остается множество тайн. Быстрый взгляд на историю показывает, что их высказывания — частный случай общего феномена: периодического пристрастия людей к ошибочной идее, будто все уже открыто, сделано, изучено. Этот каталог включает:

Все, что может быть изобретено, уже изобретено.

Чарльз Дьюэлл, уполномоченный
американского Патентного бюро, 1899*

Вероятно, мы уже подошли к пределам того, что мы можем знать об астрономии.

Саймон Ньюком, американский астроном (1835–1909)

Изобретения давно достигли своего предела, и у меня нет надежды на дальнейшее развитие.

Секст Юлий Фронтин, выдающийся
римский инженер и писатель (ок. 30–103)

Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под Солнцем.

Екклезиаст, 1:9

В любом случае заявления о том, что «об X все уже известно», в корне неверны. Такие безапелля…

---

* Эта «цитата» — одно из самых повторяемых апокрифических высказываний. Такие цитаты существуют в странном промежуточном состоянии между вымышленным и невымышленным и воспроизводятся без необходимости в указании первоисточника. Когда-то эти слова должны были прозвучать в первый раз, но все выглядит так, будто они не имеют связи с Патентным бюро и его уполномоченными, а прозвучали впервые в бесконечной вневременной Пустоте. Нет нужды говорить, что, даже если бы это высказывание было верным, нам вряд ли удалось бы обнаружить его первоисточник.

(Автор отрывает глаза от своего компьютера.)

Автор: Эй, кто-нибудь знает, как пишется слово «безапелляционные»?

Читатель: Зачем?

Автор: Для книги, которую я пишу.

Математика: Что это за книга?

Автор: Неважно.

Сцена

Три персонажа сидят в доме Математики (Пустая ул., дом номер ∅, в верхней западной Пустоте). Персонажи скучают и пытаются убить время. Они не ведают о бесполезности таких усилий из-за вневременной природы Пустоты.

Читатель сидит в неопределенном месте и читает о Читателе.

Автор отлынивает от работы, сочиняя какую-то книгу.

Математика читает свежий еженедельный выпуск Полностью Чистой Газеты Пустоты, где изложен многословный комментарий к изображению партитуры пьесы «4'33» Джона Кейджа, которое нарисовал Роберт (Риман + Раушенберг)**.*

Автор: Здесь нечего делать.

Математика: Конечно, нечего. Где, по-вашему, вы находитесь?

Автор: Это как раз не проблема. Мы сделали всё. Всё, что может быть изобретено, уже изобретено.

Читатель: Откуда вы знаете?

Автор: Ну, вы можете придумать что-нибудь, чего мы еще не сделали?

Читатель: Разумеется. Мы не выяснили, как вычислять ♯.

---

* При исполнении написанного в 1952 году знаменитого сочинения Джона Кейджа «4'33» («Четыре минуты тридцать три секунды») музыканты не извлекают ни звука. Хотя обычно пьеса воспринимается как «четыре минуты тридцать три секунды тишины», на самом деле предполагается, что содержание произведения — звуки окружающей среды, которые можно услышать во время исполнения композиции. *Прим. перев.*

** Роберт Риман — американский живописец-минималист, известный картинами в стиле «белое на белом». Роберт Раушенберг — американский живописец-абстракционист, известный, в частности, монохромной работой «Белая живопись». *Прим. перев.*

Автор: Да-да. Но это техническая деталь. Все, что осталось делать, — вычислять ♯ все с большим количеством знаков после запятой. Какой смысл?

Читатель: Подождите секунду…

(Наши персонажи ждут неопределенное количество времени.)

Автор: …Это все еще секунда?

Читатель: Я не знаю! Мы в Пустоте! Время здесь почти не существует. В любом случае я не подразумевал буквально «Подождите одну секунду». Я имел в виду, что вам не следует так охотно соглашаться, будто мы уже всё сделали.

Автор: Вы можете придумать что-нибудь большое и важное, чего мы еще не знаем?

Читатель: Как можно знать, чего мы не знаем? Если я бы это знал, как бы я этого не знал?

Автор: Не обязательно.

(Читатель ненадолго задумывается.)

Читатель: О, я понял, что вы правы. Почему бы нам не вычислить ♯?

Автор: Мы не умеем.

Читатель: Почему?

Автор: Потому что не умеем вычислять площади криволинейных фигур.

Математика: И длину кривых. С ними мы тоже не умеем обращаться.

Автор: Хорошо, я согласен, что по-прежнему есть две вещи, которых мы не знаем. Как только мы это узнаем, думаю, мы будем знать всё…

(Комнату заливает яркая вспышка света.)

Математика: О! Это дверной звонок.

Читатель: Зачем использовать свет вместо звонка?

Математика: Обычные звонки здесь не работают. Видите ли, в Пустоте нет воздуха, и звук не может в ней распространяться. Некоторое время никто не надоедал с продажей дверных звонков на основе света, поскольку предполагалось, что свет, как и звук, требует среды для распространения — «эфира», если угодно. Считалось, что это вещество наполняет пространство, но, разумеется, все знали, что в Пустоте нет эфира, потому что это Пустота. Затем, непознаваемое количество времени назад, один умный парень понял, что такой среды нет: свет может распространяться непосредственно через пустое пространство! К счастью, он также работал в патентном бюро, так что он запатентовал эти звонки на основе света, и сейчас всем обитателям Пустоты намного проще понять, когда кто-то у дверей.

(Три персонажа болтают о дверных звонках неопределенное количество времени, пока звонок вспыхивает. Несмотря на заявление Математики, что обитателям Пустоты сейчас намного проще понять, что кто-то у дверей, три персонажа забыли о своем терпеливо ожидающем госте.)

Автор: Хорошо, на чем мы остановились?

(Дверной звонок мигает снова.)

Математика: Кто бы мог быть у дверей?

Автор: Откуда мне знать?

(Автор идет к дверям в сопровождении Читателя и Математики.)

Интралюдия: знакомство с Метой и Стивом

(Дверь открывается, появляется приветливый полысевший мужчина. Глаза Автора широко раскрываются.)

Автор: Боже мой…

Стивен Клини*: Привет! Я тут насчет основ. Природа позвонила мне и рассказала, что у вас какие-то проблемы.

* Стивен Клини (1909–1994) — американский математик и логик. *Прим. перев.*

Автор (*в благоговении перед знаменитостью*): Рад познакомиться! Я Автор. Позвольте представить моих друзей. Это Читатель, а это Математика.

Математика: Привет.

Читатель: Рад познакомиться, Стивен.

Стивен Клини: Также весьма рад. Зовите меня Стив. Раз мы занимаемся представлениями, мне тоже нужно представить кое-кого. Она сейчас будет. Паркует автомобиль.

(Снаружи с чрезмерной точностью паркуется темно-синий фургон.
Строгие белые буквы на боку образуют надпись:
Служба Клини: (Основы) и (Чистка концепций). С 1952 года
Клиниевость следует за гёделевостью*.
Наконец кто-то вылезает из фургона и приближается к дверям.)

Стивен Клини: Превосходно! Автор, Читатель, Математика, позвольте мне представить вам моего друга и коллегу — Метаматематику.

Метаматематика: …

Стивен Клини: Пожалуйста, познакомьтесь.

Автор: Привет.

Читатель: Здравствуйте.

Метаматематика: …

Стивен Клини: Она не очень разговорчива, но это не означает невежливость.

Математика: Могу я попросить вас не глазеть на меня?

Стивен Клини (*усмехается*): Боюсь, что нет.

---

* Весь пассаж основан на игре слов. Фамилия Kleene созвучна слову cleaning (уборка, очистка). Слоган Kleeneliness is next to Gödeliness построен по созвучию с пословицей Cleanliness is next to godliness (букв. «Чистота следует за набожностью»), при этом обыгрывает фамилии Клини и Гёделя. В 1952 году Клини написал «Введение в метаматематику» и дал альтернативные доказательства гёделевских теорем о неполноте. Кроме того, цвет фургона (deep blue) намекает на компьютер Deep Blue. *Прим. перев.*

(Метаматематика глазеет с любопытным, но невыразительным лицом на Математику. Математика смотрит искоса, наполовину насмешливо, наполовину с неуверенностью, не зная, что делать в этой новой некомфортной ситуации.)

Стивен Клини: Моей коллеге нужно некоторое время, чтобы проверить основы. Тем временем, полагаю, трое из нас могли бы что-нибудь выпить.

Читатель: В Пустоте есть бары?

Стивен Клини: Один. Меня с Метой наняли недавно там убираться, и я влюбился в это местечко. Оно называется Beweis-бар*.

Автор: Я не прочь выпить что-нибудь.

Стивен Клини: Ой-ей-ей… Как бы это сказать… Это довольно официальное местечко, друзья. Возможно, вам стоит сменить одежду.

Математика: Не думаю, что у меня есть какая-нибудь одежда.

Стивен Клини: Да, конечно. Тогда хотя бы наденьте это.

(Стив вручает Математике маленькую брошку в виде буквы A.)

Математика: Объясните, пожалуйста.

Автор: Нацепите ее, чтобы мы могли идти. Читатель и я уже переоделись.

Математика: Когда вы успе…

Читатель: В Пустоте нет времени.

Автор: Мы закончили с этим?

Метаматематика: …

(Математика $\lambda \cdot$ неохотно прикрепляет брошку примерно там, где лацкан, если бы он был, при этом $\lambda \in [0, 1]$.)

Стивен Клини: Вы надели ее вверх ногами…

---

* В переводе с немецкого слово Beweisbar означает «доказуемый». *Прим. перев.*

(Математика улыбается Клини (1 – λ) · радостно
и поворачивает брошку на угол ♯,
где ♯ определен в главе 4,
а λ — то же, что и выше.)

Стивен Клини: Хорошо. Стойте все здесь. Мета, действуй.

Метаматематика: ПУСТЬ:

$\forall$C ((СУЩЕСТВУЕТ ПЕРСОНАЖ(C)$\wedge$ (C$\in$стр. 326) $\wedge$ (C $\neq$ Я)) $\Rightarrow$C$\in$BEWEIS-БАР)

Субинтралюдия: Beweis-бар

(Автор, Читатель, Математика и Стив неожиданно оказываются сидящими в маленьком здании. Меню гласит: «Beweis-бар. Требуется официальный костюм. Каждый вечер $\models\wedge\neg\vdash$».)*

Стивен Клини: Фантастика. Мы здесь. Официантка!

Официантка: Можно взять у вас заказ?

Стивен Клини: Мне как обычно.

Официантка: То есть коктейль Мало**.

Автор: Мне Хан-Банах*** и тоник.

Официантка: Сепарабельно или несепарабельно? Отдельно или вместе?****

Автор: Сепарабельно, то есть отдельно, пожалуйста. Не хочу много пить, пока пишу.

---

* Эта надпись состоит из логических значков, которые прочитываются примерно как «Каждый вечер является истинным и [одновременно] недоказуем». Аллюзия на знаменитую теорему Гёделя. *Прим. науч. ред.*

** Фридрих Пауль Мало (1883–1971) — немецкий математик, который ввел так называемые кардинальные числа Мало. Гавайское слово mahalo входит в название некоторых коктейлей. *Прим. перев.*

*** Ханс Хан — австрийский математик. Стефан Банах — польский математик. Благодаря важной теореме Хана — Банаха их фамилии постоянно ассоциируются друг с другом, что и дало автору повод объединить их. *Прим. перев.*

**** Каламбурный вопрос официантки можно передать обоими способами. Сепарабельность (от лат. separabilis — отделимый) — свойство топологического пространства содержать счетное всюду плотное множество. *Прим. перев.*

Официантка (*Математике*): Что вам?

Математика: У вас есть Панматематический грызлодёр?*

Официантка: Один из лидеров продаж. Новые грани старого любимца.

Математика: Мне один.

Читатель: Я не вижу меню… Что бы вы порекомендовали?

Официантка: Поскольку вы тут новичок, я бы начала с WKL_0. Он весьма слабый**.

Читатель: Что это?

Официантка: Трудный вопрос. Не совсем ясно, что такое WKL_0. Знаете, наши напитки определены только с точностью до изоморфизма — это, по сути, единственный закон Пустоты.

Читатель: Что такое изоморфизм?

Официантка: Фактически бессмысленное изменение обозначений. Две вещи изоморфны, если у них одинаковое поведение, даже когда они выглядят по-разному. Если две вещи неразличимы, когда вы смотрите на то, как они себя ведут, то они, по сути, одно и то же для Пустоты, и мы не разрешаем трактовать их по-разному. Это политика Пустоты.

Читатель: Уф, вы не могли бы привести пример?

Официантка: Конечно. К̂а̂к̂ н̂а̂с̂ч̂е̂т̂ т̂а̂к̂о̂г̂о̂?

Читатель: Что? В чем пример? Вы всего лишь сказали: «Конечно. Как насчет такого?».

Официантка: Именно! Вы поняли, что я сказала, хотя я поставила шляпки над всеми буквами. Алфавит со шляпками над буквами изоморфен тому, которым я пользуюсь сейчас, поскольку это бессмысленное переименование — смена обозначений, если угодно. Если признать, что изоморфные вещи в реальности не отличаются, Пустота становится намного менее беспорядочной.

---

* Отсылка к Пангалактическому грызлодёру — фантастическому коктейлю из романа Дугласа Адамса «Автостопом по галактике». *Прим. перев.*

** WKL_0 — одна из подсистем в арифметике второго порядка. Каламбур официантки основан на том, что WKL (Weak König Lemma) — слабая лемма Кёнига. *Прим. перев.*

Читатель: О, мне кажется, что я уловил идею. Если два предложения изоморфны, они сообщают одно и то же, даже когда *с виду* кажется, будто они сообщают что-то разное. Например, если мы используем римские цифры, то мы можем написать III + IV = VII и все такое, но фактически это предложение говорит то же, что $3 + 4 = 7$, и два эти способа сказать одно и тоже изоморфны?

Официантка: Именно так! Вы быстро уловили!

Читатель: В самом деле? Обычно эту идею нужно объяснять дольше? Она выглядит достаточно простой.

Официантка: Ну, объяснение, которое мы обычно используем в Пустоте, — не совсем такое, как дала вам я, это скорее изоморфное объяснение того, что такое изоморфизм. Зависит от диалекта, конечно, но обычно мы говорим примерно так. Пусть S и T — два множества, и предположим, что на множествах S и T соответственно определены две бинарные операции $\circ$ и $\Diamond$. Тогда S и T изоморфны тогда и только тогда, когда существует обратимое отображение φ из S в T, такое, что для всех элементов a и b в S верно $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \Diamond \varphi(b)$. Видите? В точности та же идея!

Читатель: Это вовсе не выглядит той же идеей!

Официантка: Не выглядит? Не могу судить.

Читатель: Было куда больше смысла, когда вы просто поставили шляпки над буквами. Получается, «изоморфные» вещи могут быть одним и тем же по сути, но не одним и тем же в смысле легкости понимания? Отсюда не следует, что легкость понимания несущественна?

Официантка: Вот именно! И нет. Соответственно.

Читатель: Подождите, вы всё еще не объяснили эту штуку WKL_0. Я хотел бы знать, что я пью.

Официантка: Не беспокойтесь о том, чем это *является*. Не в том дело. У него точно та же крепость, что у заказа Автора, поэтому это один и тот же напиток для Пустоты. В общем, новичкам должно быть нормально.

(Официантка улыбается и отходит от стола.)

Читатель: Не могу даже сказать, запутался я или нет.

Стивен Клини: К несчастью, мой друг, это обычное ощущение в Beweis-баре. Но смотрите на светлую сторону. Пока вы не определили, запутались вы или нет, по крайней мере вы можете утешить себя: вы точно знаете, что вы метазапутались.

Читатель: Не уверен, что это помогает.

Стивен Клини: Точно-точно!

Читатель: …

(Официантка возвращается с напитками.)

Читатель: Ух ты, как быстро!

Автор: Вы уверены?

Читатель: Подозреваю, что нет…

Автор: Ну что, Стив? Как дела?

Стивен Клини: Лучше и быть не могут! А как у вашей троицы?

Автор: Застряли на одном изобретении.

Стивен Клини: Может, я помогу? Люблю хорошие изобретения.

Читатель: Мы пытаемся выяснить, как находить площади криволинейных фигур.

Стивен Клини: Как вы это делаете?

Автор: Ну, мы не знаем, как это выяснить, поэтому мы не знаем, как нам пробовать это выяснить.

Стивен Клини: Не верю в такое.

Читатель: Стив прав.

Автор: Ну и как нам следует пробовать выяснить это?

Стивен Клини: Как вы обращались с этими «кривыми вещами» раньше?

Читатель (*указывая на Автора*)**:** Раньше он болтал о том, как в этом помогает лупа с бесконечным увеличением.

Автор: Да, но мы использовали ее только для нахождения крутизны кривых, а не для площадей.

Стивен Клини: И как вы это делали?

Читатель: Мы рассматривали кривую, увеличивали масштаб и считали, что она становится прямой.

Автор: Тут ощущалось определенное жульничество, но это работало.

Стивен Клини: Поподробнее, пожалуйста.

Читатель: Ну, когда мы впервые задумались о крутизне кривой, мы стали представлять ее как график некоторой машины — просто для удобства, — а потом воображали увеличение масштаба. После увеличения мы использовали наше определение крутизны из главы 1.

Стивен Клини: Думаю, у меня есть идея.

Автор: В самом деле? И какая?

Стивен Клини: Видите эти две фразы, которые только что произнес Читатель?

Автор: Да. Что за идея?

Стивен Клини: 1. Заменить слово «крутизна» словом «площадь». 2. Попробовать.

Автор: О…

Читатель: О…

Математика: О…

Возвращение лупы

Автор: Хорошо, пусть у нас есть некая машина M.

Читатель: Так.

Математика: Какая именно?

Читатель: Лучше не определять, какая. Давайте останемся в неведении.

Автор: Хорошо, пусть у нас есть некая машина, которая выглядит кривой, если мы ее нарисуем. Стив предложил нам сделать то, что мы делали в прошлый раз.

Читатель: Выберем какую-нибудь точку на ней и бесконечно увеличим.

Математика: И что тогда?

Читатель: Ну, когда мы увеличиваем, вещи выглядят прямыми. Поэтому мы можем считать, что крохотный кусочек площади под кривой в этой точке будет прямоугольником.

Математика: Может, мы нарисуем картинку, чтобы я знала, что творится?

Автор: Конечно.

(Читатель изображает рис. 5.3.)

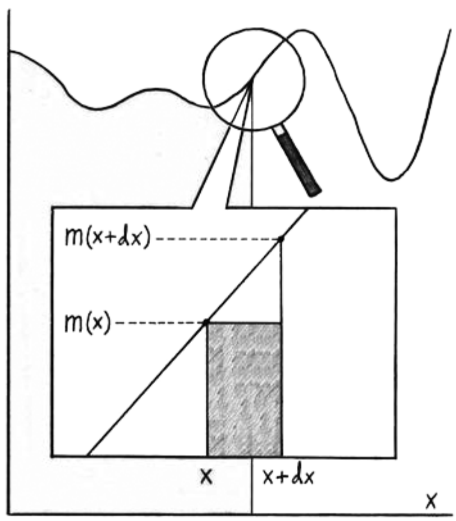


Рис. 5.3. Попытка придумать способ использовать лупу с бесконечным увеличением для вычисления площади под кривой. Наша лучшая идея выглядит так. Первый шаг: нарисовать кривую. Второй: выбрать место на ней и увеличить его. Третий: понадеяться, что мы можем записать площадь под этой точкой кривой в виде бесконечно узкого прямоугольника. Если бы мы смогли так сделать, площадь каждого узкого прямоугольника была бы «длина, умноженная на ширину», или $m(x)dx$. Затем мы могли бы сложить эти площади, по одной для каждой точки x. Если бы мы умели складывать бесконечное число бесконечно малых вещей, наверняка у нас бы получилось!

Автор: Погодите минутку. На вашем рисунке есть площади, которые мы пропустили. Видите тот пустой треугольник? Думаю, его нужно заполнить, иначе правильного ответа не получится.

Математика: Возможно, это не проблема!..

(Математика начинает (весьма) длинное) (необязательное(!)) (полу-) отступление.)

Математика: Смотрите. Выглядит так, что бесконечно малые числа располагаются слоями, по крайней мере они так действуют. То есть числа вроде 3 и 99 в каком-то смысле находятся «на один уровень выше», чем числа вроде $7dx$ или $52ds$, и «на два уровня выше», чем числа вида $6\,dx\,dy$ или $99\,ds\,dt$. Если складывать числа с разных уровней, то есть смысл, в котором важен только самый верхний уровень. Поскольку число 3 бесконечно близко к $3 + 2dx$, если мы спросим число $3 + 2dx$, насколько оно велико, мы не сможем отделить его ответ от 3. Но в другом смысле более низкие уровни тоже важны, их нельзя игнорировать, потому что в любое время какая-то наша операция может уничтожить слагаемые более высоких уровней. Мы видели это при определении производной. Я буду использовать термин «Чепуширование X» для операции «вычитание числа наивысшего уровня из X и деления результата на dx». Если мы спросим число $9 + 6dx + (dx)^2$, насколько оно велико, оно ответит, что его величина равна 9. Естественно, 9 сказало бы о себе то же. Поэтому может показаться, что нижние уровни можно игнорировать с самого начала. Но нет. Число 9 и число $9 + 6dx + (dx)^2$ имеют разное поведение, как можно увидеть, если их чепушировать. Чепуширование $9 + 6dx + (dx)^2$ превращает его в $6 + dx$, и это число сообщит нам, что его величина равна 6. Чепуширование числа 9 превратит его в $\frac{0}{dx}$, то есть 0. Поэтому нельзя игнорировать уровни с бесконечно малыми числами, хотя если спросить число о его величине, то значение имеют только верхние уровни.

(Конец (полу-)отступления Математики.)

Стивен Клини: Я не уверен, что размышлял обо всем этом.

Читатель: Я тоже.

Автор: Это имеет отношение к игнорированию пустого треугольника?

Математика: Да, верно. Вернемся к рисунку. Высокий узкий прямоугольник под каждой точкой x будет иметь площадь $m(x)dx$. Площадь отсутствующего треугольника равна $\frac{1}{2}dxdM$, что на один уровень ниже. Поэтому мы можем игнорировать ее, ведь мы просто складываем площади и никогда их не чепушируем.

Читатель: Пожалуй, это меня пугает.

Автор: Да, я представления не имею, о чем вы сейчас говорили.

Стивен Клини: Почему вы продолжаете говорить «чепушировать»?

Математика: Извините…

Автор: Мне кажется, мы можем подумать об обычных прямоугольниках, а не о бесконечно малых, а потом вообразить, что они становятся всё меньше.

Математика: Как это?

Автор: Вот так.

(Автор изображает рис. 5.4 и произносит все, что есть в подписи.)

Математика: Мы всё еще слушаем*.

(Автор возвращается из подписи,
Математика возвращается из сноски,
Читатель, похоже, вернулся и из подписи, и из сноски,
Рассказчик проверяет свои записи, чтобы убедиться, что все вернулись…
…
Ой, а Стив ушел с Официанткой
…куда-то.)

Математика (*Автору*): Мне кажется, я вижу, что вы подразумевали в подписи под почти правильным ответом. Полагаю, мы можем думать так.

* **Читатель:** Что?
Математика: О, полагаю, могло показаться, что не всё в порядке. Прочитайте подпись под рисунком 5.4. Я подожду вас здесь.

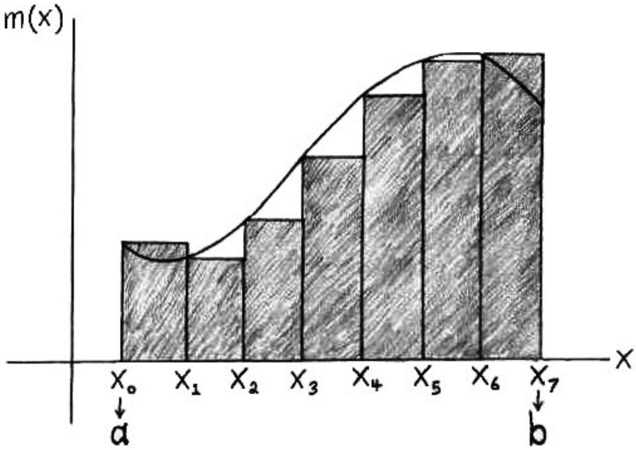


Рис. 5.4. Автор: Ух ты, тут сильнее перекручено, чем я ожидал. Итак, мы пытаемся найти площадь под кривой между точками $x = a$ и $x = b$. Если идея бесконечно узких прямоугольников кажется слишком странной, мы можем вообразить конечное число прямоугольников. Как на этом рисунке. Пусть есть много точек между $x = a$ и $x = b$. Назовем их $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для удобства дадим новые обозначения $a \equiv x_0$ и $b \equiv x_{n+1}$. В каждой точке x_i высота графика машины $m(x_i)$ будет высотой одного из наших прямоугольников. С высотой всё. Шириной каждого прямоугольника будет расстояние между соседними точками. Каждый прямоугольник имеет некую малую ширину $\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i$. Поэтому площадь его равна $m(x_i)\Delta x_i$. Теперь, если мы сложим площади всех прямоугольников, мы не получим в точности нужную цифру, но, вероятно, что-то близкое. Представим, что мы добавляем новые прямоугольники, уменьшая их ширину. Так мы будем приближаться к истинной площади. Всё просто. В смысле, просто представить. Звучит неприятно, не хочется этим заниматься, на самом деле. Так что, может, давайте так не делать… Ух ты, я уже давно в этой подписи. Лучше убедиться, что они меня еще слушают

Читатель: Чтобы убедиться, что я понял подпись: вы говорите, что площадь под кривой будет почти… но не точно… так?..

$$\sum_{i=1}^{n} (\text{Площадь прямоугольников}) \equiv \sum_{i=1}^{n} (\text{Ширина}_i)(\text{Высота}_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} m(x_i)\Delta x_i.$$

Автор: Ух ты! Это намного более сжато, чем я говорил. Да, именно так.

Читатель: А почему бы нам не проделать эту штуку с прямоугольниками? Из подписи?

Автор: Мы не можем. По крайней мере я не могу. Идея насчет маленьких прямоугольников была приятнее. Но мы не знаем, как на деле ее *использовать*, чтобы что-то вычислить. Поэтому идея из подписи — не то, что, на мой взгляд, следует *делать* на практике. Но как минимум это позволит нам вычислить конкретные числа. Гипотетически. Если мы захотим. И, прибавляя все больше прямоугольников, мы будем медленно приближаться к точному ответу, о котором говорила Математика.

Математика: Мне нравится мой способ, он лучше.

Автор: Мне тоже. Я уже готов спасовать перед этой задачей и сдаться.

Математика: И я тоже.

Читатель: Давайте сдадимся! Можем мы снова проделать мольеровский трюк?

Автор: Конечно! Ведь мы это уже делали раньше, когда решали сдаться. Даже если мы пока не умеем вычислять точный ответ, не будет беды, если мы дадим ему название. Конечно, нужно, чтобы оно напоминало нам о сути.

Читатель: Хорошо. Мы написали приблизительный ответ такого вида:

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i)\Delta x_i.$$

Используем это, чтобы сконструировать сокращение для точного ответа. Недавно вы упоминали, что учебники используют Δ*нечто* для сокращения «разность в *нечто* между двумя точками», поскольку Δ — греческая буква, соответствующая *d*, а *d* обозначает разность (difference). Или расстояние (distance). Я не думаю, что мы уже решили это.

Автор: Не думаю, что такое было.

Читатель: В любом случае из-за этого, когда мы уже изобрели анализ, нам был нужен другой способ говорить о разности, но в этот раз о бесконечно малой. Поэтому мы превратили греческую букву Δ в латинскую *d*. Соответственно, *dx*, *dt* или *d*(*нечто*) просто означало разность между двумя точками, которые бесконечно близки друг к другу. Это делало новую идею похожей на старую.

Математика: Как это нам поможет?

Читатель: Мы же сдались, помните? Так что применяем мольеровский трюк и придумываем хорошее название для того, что не можем выяснить.

Математика: Хорошо. Я забыла. И как же нам следует ее назвать?

Читатель: Ну, я просто написал приблизительный ответ. Возьмем обозначение из подписи к рисунку и заменим Δ буквой d, поскольку наши прямоугольники бесконечно узкие. Это даст нам

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i)dx_i.$$

Но я подозреваю, что это фактически не означает ничего, поскольку мы меняем не все сокращения сразу.

Автор: Прекрасно! Действительно, точный ответ должен соответствовать бесконечному числу прямоугольников, по одному для каждой точки x, так что обозначение x_i в любом случае работать уже не будет: индекс i пересчитывал прямоугольники, но мы же не можем сосчитать их, если они будут в каждой точке на прямой. Так что забудем про i. И выражения $i = 1$ и n тоже уже не работают. Они были для напоминания, где мы начинаем и заканчиваем, но сейчас можно назвать их a и b. Поэтому наше новое сокращение таково:

$$\sum_{a}^{b} m(x)dx.$$

Мы могли бы здесь остановиться и…

Математика: И последнее! Я ждала, пока вы закончите. Я готова внести свое изменение.

Автор: Хм, но здесь больше нечего менять. По сути, мы могли бы закон…

Математика: Автор, нас здесь трое. Читатель поменял греческую Δ на латинскую d. Вы избавились от индексов. Так что будет справедливо позволить и мне что-то изменить. Справедливость — почти инвариантность. Вы же любите инвариантность?

Автор (*с неохотой*): Да…

Математика: Прекрасно! Я последую примеру Читателя. Σ — греческая буква, соответствующая S, и она обозначает сумму. Как и ранее, для перевода сокращения из конечного случая в бесконечный поменяем греческую букву на соответствующую латинскую, вот так:

$$\int_{a}^{b} m(x)dx.$$

Читатель: Что это?!

Автор: Да… э-э-э… Математика? Это же не S.

Математика: Для приматов с пальцами держать ручку — тривиальная задача, но я-то не совсем физическая сущность.

Автор: Мы понимаем. Это просто смотрится забавно. Но давайте так и оставим.

Математика: И для чего это обозначение?

Читатель: Ну, мы тщательно выбирали для этого название, поэтому, вероятно, можем это выяснить. S-образная штука напоминает нам, что это некая сумма, тут латинская буква вместо греческой, $m(x)$ — высота, а dx — бесконечно малая ширина. Поэтому всё вместе означает сумму бесконечно малых вещей, каждая из которых — площадь бесконечно узкого прямоугольника. Да, буквы a и b показывают, где начинать и заканчивать.

Автор: Великолепно! Мы успешно провернули трюк Мольера!

Читатель: То есть мы успешно ничего не сделали?

Автор: Ну… да. Но мы можем написать что-то вроде такого:

$$(\text{Площадь под графиком функции } m \text{ между } x = a \text{ и } x = b) \equiv \int_a^b m(x)dx.$$

Но вы правы. Мы по-прежнему не умеем это вычислять, так что, по сути, мы ничего не сделали.

Читатель: Подождите, получается, что после всего этого мы не приблизились к решению проблемы?

Стивен Клини: Точно так!

(Все смотрят на Стива.)

Автор (*Стиву*): Вы же не слышали нас все это время, не так ли?

Стивен Клини: Нет, мне просто показалось, что сейчас удобный момент сказать: «Точно так!». Я возвращался в дом Математики. Мета…

Автор: Погодите, я думал, вы были с Официанткой.

Стивен Клини: Нет. Вы просто написали, что я был с нею.

Автор: Да? Не помню, чтобы я писал…

Стивен Клини: В любом случае, как я сказал, Мете нужна была небольшая помощь, так что я вернулся.

Математика: Помощь в чем?

Стивен Клини: Мы до этого дойдем.

(Стивен вынимает из костюма маленькое устройство и говорит в него.)

Стивен Клини: Мета?.. Хорошо. Мы готовы, когда ты будешь готова.

Экстралюдия: проблема существования

(Наши персонажи слышат слово «пусть», а затем что-то неразборчивое и обнаруживают, что оказались в доме Математики.)

Стивен Клини: Мета закончила проверку основы… Или основ, я никогда не мог запомнить, каких именно. Множественное число такое коварное.

Математика: И?

Стивен Клини: Ваш дом проседает.

Математика: Мой дом проседает?

Стивен Клини: Да. Боюсь, что Природа права. Не был построен фундамент для материальной сущности. Ну, не материальной… но сущности. Вы уже об этом говорили, верно?

Математика: Полагаю, да.

Стивен Клини: Вы существуете сейчас! Я был удивлен, узнав, до какой степени. Ваше рассогласование с Пустотой весьма серьезно, и со временем будет только хуже. Пустота — не место для сущности.

Математика: Ох…

Автор: Подождите, а как же вы? Разве вы не живете в Пустоте?

Стивен Клини: Разумеется.

Автор: Тогда почему у вас нет той же проблемы?

Стивен Клини: Модус толленс, дружище*.

* Modus tollens в логике — следующая схема рассуждения. Даны две посылки: «Если A, то B»; «B неверно». Тогда «A неверно». В нашем случае A = «Клини суще-

Автор: Что-что?

Стивен Клини: Вы предположили, что я существую. Проверьте свои предположения.

Автор: Что???

Читатель: Что???

Математика: Что???

Метаматематика: …

Автор: Как вы здесь оказались, если вы не существуете?

Стивен Клини: Пустота — дом для всего несуществующего. Единственный. На сегодня…

(Воцаряется любопытная метатишина.)

Стивен Клини (*Автору и Читателю*): Сделайте все возможное, чтобы помочь Математике как можно быстрее исчезнуть отсюда и переселиться в какой-нибудь новый дом. Чтобы он подходил для новой формы, которую она приняла. Нужно какое-то место, которое ей сгодится.

Автор: Конечно. Мы сделаем все возможное.

Стивен Клини: Чудесно. А теперь Мета и я должны идти. Удачи всем троим.

Автор: Надеемся увидеться снова!

Читатель: Пока, Стив!

Математика: Передавайте Природе привет от меня!

Автор: Хорошо, время для следующей главы. Вперед!

(Ничего не произошло… Почти как если бы это место было уже зарезервировано…)

ствует», B = «Клини не может жить в Пустоте». Согласно тексту выше, в Пустоте нет сущностей, но при этом Клини живет в ней. Следовательно, он не сущность, то есть не существует. *Прим. перев.*

AKT III

ГЛАВА 6

ДВА В ОДНОМ

6.1. Два — это один

6.1.1. Еще одно сокращение становится идеей

В предыдущей интерлюдии мы обсуждали проблему нахождения площадей криволинейных фигур. В итоге мы сдались, но у нас было небольшое озарение. Когда мы увеличиваем масштаб графика какой-то машины в любой точке x, узкую полоску площади под этой точкой можно трактовать как бесконечно узкий прямоугольник высотой $m(x)$ и шириной dx. Поэтому площадь под графиком машины в любой точке x равна $m(x)dx$. Гипотетически, если бы мы умели как-то складывать все площади этих бесконечно узких прямоугольников под каждой точкой x (например, для всех точек между $x = a$ и $x = b$), мы могли бы узнать площадь под графиком машины m.

Мы не имеем представления, как это делать. Но мы придумали прекрасное обозначение для этой идеи: $\int_a^b m(x)dx$. Это сокращение отражает тот факт, что мы представляем площадь кривой области как сумму (отсюда и S-образный знак $\int$) бесконечного числа бесконечно тонких прямоугольников (отсюда $m(x)dx$). Но это всего лишь обозначение для неизвестного ответа. Оно ничего не говорит о том, как на самом деле вычислять площади криволинейных фигур.

Вероятно, тут застрял бы кто угодно. Однако dx в нашем новом обозначении наводит на некоторые мысли. Мы видели этот символ раньше в определении производной. Возможно, наша старая идея с производной поможет понять смысл новой идеи с $\int$.

Производные — тоже машины. Например, машина $f(s) \equiv s^2$ имеет производную $f'(s) \equiv 2s$, и $2s$ — тоже машина, как и x^2. Поэтому предположим, что $m(x)$ внутри нашего забавного символа $\int$ — на самом деле производная какой-нибудь другой машины $M(x)$. Это дает возможность написать:

$$m(x) = \frac{dM}{dx}. \tag{6.1}$$

Если мы представим m таким образом, можно использовать следующий ловкий прием и переписать обозначение для (неизвестной) площади под кривой:

$$\int_a^b m(x)dx \stackrel{(6.1)}{=} \int_a^b \left(\frac{dM}{dx}\right) dx = \int_a^b dM. \tag{6.2}$$

Символ dM был всего лишь нашим сокращением для $M(x + dx) - M(x)$, крохотным изменением по высоте между двумя бесконечно близкими точками. Поэтому значение символа $\int_a^b dM$ таково: пройти от $x = a$ до $x = b$ и сложить все крохотные изменения по высоте, которые вы проходите по пути.

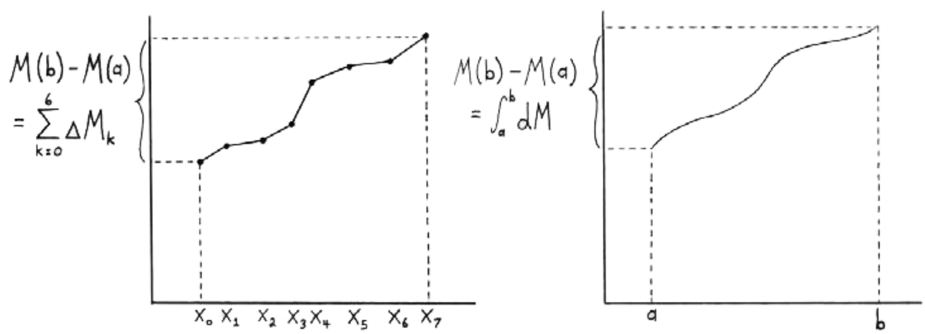


Рис. 6.1. Наглядное объяснение, почему $\int_a^b dM = M(b) - M(a)$. Первая картинка демонстрирует эту идею для машины, график которой составлен из конечного числа прямых. Общее изменение высоты между a и b можно представить двумя способами. С одной стороны, оно равно $M(\textit{конец}) - M(\textit{начало})$, то есть $M(b) - M(a)$ на картинке справа или $M(x_7) - M(x_0)$ на картинке слева. С другой стороны, это сумма всех маленьких изменений высоты на каждом «шаге», когда вы идете вдоль по графику машины. Каждое из них имеет вид $\Delta M_k \equiv M(x_{k+1}) - M(x_k)$. Та же идея изображена и на рисунке справа, где есть настоящая кривая, но уже имеется бесконечное число бесконечно маленьких шагов, каждый из которых дает бесконечно малое изменение высоты dM. Сумма всех этих изменений ($\int_a^b dM$) — просто общее изменение высоты, то есть $M(b) - M(a)$

Символ $\int_a^b dM$ обозначает «нечто, что мы получили бы, если бы смогли как-то сложить все крохотные изменения высоты между a и b». Поэтому его можно воспринимать как *общее* изменение высоты между a и b, которое равно M(*конец*) – M(*начало*), то есть $M(b)$ – $M(a)$. Если это непонятно, вам в помощь рис. 6.1. Теперь используем этот факт, чтобы продлить цепочку равенств 6.2 еще на один шаг и написать:

$$\int_a^b \left(\frac{dM}{dx}\right) dx = M(b) - M(a)\,. \tag{6.3}$$

Мы снова забуксо… Погодите! Мы закончили?

6.1.2. Фундаментальный молоток анализа

Не может быть, чтобы это было правильно. Это слишком просто. Получается, новый символ $\int$, который мы написали в качестве бессмысленного обозначения для площади под кривой, оказался чем-то вроде противоположности для идеи производной, которую мы изобрели раньше. Иными словами, начав с M и найдя ее производную, а затем применив к ней операцию «площадь подо мной», мы получили нечто, куда входит только M; туда не входят ни производные, ни операция «площадь подо мной». Уравнение 6.3 — предложение, которое связывает две основные идеи анализа, которые мы изобрели: вычисление крутизны кривой (дифференцирование) и площадей под кривыми («интегрирование» на жаргоне учебников). Поскольку оно связывает две главные идеи, назовем его ***фундаментальным молотком анализа***. Мы можем записать уравнение 6.3 в таком виде:

$$\int_a^b m(x)dx = M(b) - M(a), \tag{6.4}$$

где M — машина, производная которой равна m. Это уравнение говорит нам, что, если мы желаем найти площадь под какой-нибудь кривой m между двумя точками $x = a$ и $x = b$, нам достаточно найти «антипроизводную»* для машины m, то есть машину M, производная

* Англоязычный термин antiderivative отражает противопоставление с производной (derivative). В русской математической литературе термин «первообразная» употребляется существенно чаще, чем «антипроизводная», но последний лучше показывает связь с производной. Поэтому (вполне в духе автора книги) будем дальше говорить об «антипроизводных». *Прим. перев.*

которой равна исходной m. Если мы как-то сделаем это, то площадь под графиком m составит $M(b) - M(a)$. Следовательно, если мы можем придумать антипроизводную для данной машины, кажущаяся нерешаемой проблема вычисления площади станет простой! Вооружившись антипроизводной, мы можем находить площади криволинейных фигур, не используя ничего, кроме вычитания.

Как всегда, полезно проверить нашу идею на нескольких простых случаях, где мы представляем, чего ожидать. Если тут она даст неверный ответ, то она неверна и нам нужно начинать сначала. Но если это безумное рассуждение правильно, мы получим две идеи по цене одной: интеграла $\int$ (вычисление площадей кривых) будет просто обращенной идеей производных (вычисление угла наклона кривых). Проведем проверку в полевых условиях.

6.2. Проверка фундаментального молотка в полевых условиях

6.2.1. Ударим фундаментальным молотком по константам

Мы умеем находить площадь прямоугольника, проверим нашу идею на графике постоянной функции $m(x) \equiv \#$. Эта машина — горизонтальная линия на высоте #. Область под графиком между $x = a$ и $x = b$ представляет собой прямоугольник высотой # и длиной $b - a$, поэтому ее площадь равна $\# \cdot (b - a)$. Но если наши идеи об антипроизводных верны, эта площадь равна:

$$\int_a^b m(x)dx = M(b) - M(a), \tag{6.5}$$

где $m(x) \equiv \#$, а $M(x)$ — антипроизводная m. Иначе говоря, $M(x)$ — машина, производная которой равна $m(x)$, то есть $M'(x) = m(x) = \#$. У нас нет способов нахождения антипроизводных, мы можем использовать только знакомство с производными и свой оптимизм. Будем глазеть на машину $m(x) = \#$, пока не сможем придумать что-то, имеющее нужную производную. К счастью, это не слишком трудно, ведь мы знаем, что $(\#x)' = \#$, а значит, $M(x) = \#x$. Используем это для проверки нашей идеи.

Площадь под графиком горизонтальной линии $m(x) \equiv \#$ между двумя точками $x = a$ и $x = b$ должна равняться $\# \cdot (b - a)$, так как это просто прямоугольник. В нашем конкретном случае странный новый символ $\int_a^b m(x)dx$ относится к числу $\# \cdot (b - a)$. Мы пока не знаем, *действительно* ли этот символ отражает разность антипроизводных, но можем это проверить! Поскольку мы установили, что $M(x) = \#x$, мы получаем $M(b) - M(a) = \#b - \#a = \#(b - a)$.

Ура! Мы получили один ответ двумя способами. Обратите внимание: мы *не использовали* уравнение 6.5. Это хорошо. Пока мы не хотим считать его верным. Мы просто вычислили его левую и правую части разными способами, а *затем* показали, что оно верно в нашем простом случае. Продолжим.

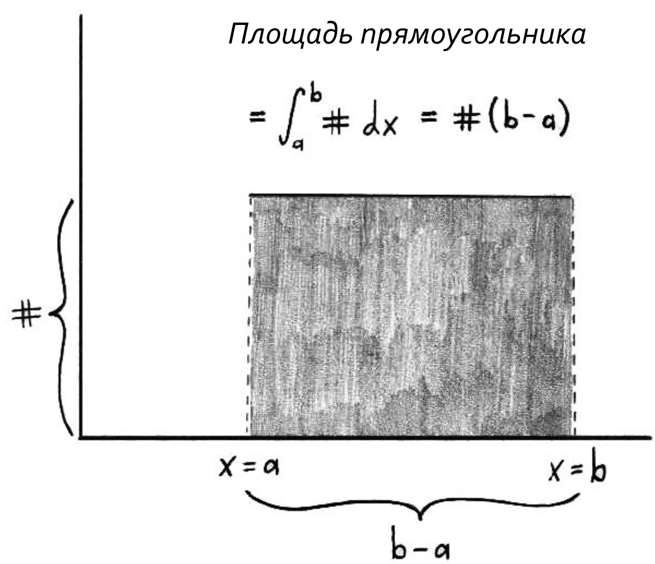


Рис. 6.2. Мы можем вычислить площадь прямоугольника без всякого анализа. Это дает нам простой тест для идеи нашего фундаментального молотка. В нашем случае он воспроизводит именно то, чего мы и ожидаем, а именно: $\int_a^b \# dx = \# (b - a)$

6.2.2. Ударим фундаментальным молотком по прямым

Как насчет произвольных прямых? Ранее в главе 1 мы установили, что графики машин типа $m(x) \equiv cx + b$ — прямые линии. В качестве простого примера возьмем $m(x) \equiv cx$, и наша площадь будет равна $\int_0^b cx\,dx$. Но площадь под графиком $m(x) \equiv cx$ между $x = 0$ и $x = b$ — просто треугольник, ширина которого равна b, а высота — cb. Два таких треугольника образуют прямоугольник со сторонами b и cb и площадью cb^2. Поэтому площадь нашего треугольника равна $\frac{1}{2}cb^2$.

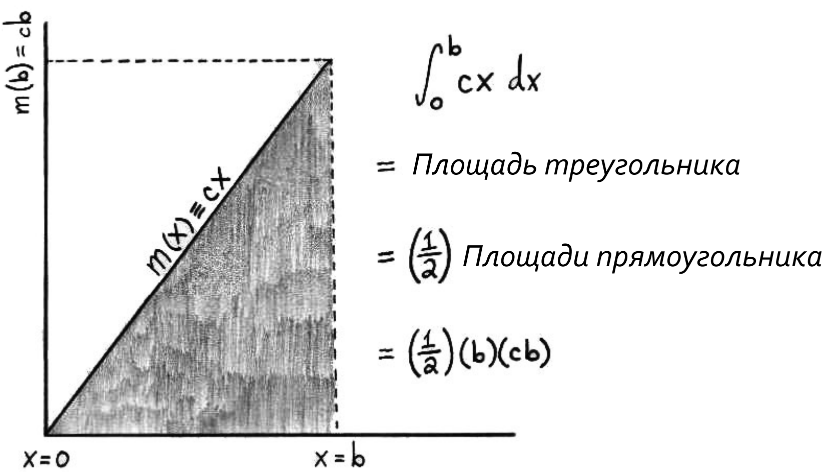


Рис. 6.3. Здесь показано, почему $\int_0^b cx\,dx = \frac{1}{2}cb^2$. Это позволяет нам проверить работу фундаментального молотка еще в одном простом случае, в котором мы уже умеем вычислять площадь без применения этого молотка

Без всякого анализа мы узнали, что

$$\int_0^b cx\,dx = \frac{1}{2}cb^2.$$

Символ $\int$ здесь — просто обозначение для площади, и мы уже знаем, как ее вычислять. Теперь можно снова проверить фундаментальный молоток, посмотрев, воспроизводит ли он то, что мы уже знаем. Можем ли мы придумать машину, производная которой равна cx? Предположим, что это cx^2, и проверим.

Продифференцировав cx^2, получим $2cx$. Лишняя двойка в начале нам не нужна, поэтому добавим $\frac{1}{2}$ перед исходным предположением и попробуем снова. Продифференцировав $\frac{1}{2}cx^2$, мы получим cx, ровно то, что нужно. Теперь можно проверять нашу идею. Если $M(x) = \frac{1}{2}cx^2$, то

$$M(b) - M(0) = \frac{1}{2}cb^2 - \frac{1}{2}c0^2 = \frac{1}{2}cb^2\,.$$

Превосходно. Сначала мы установили, что $\int_0^b cx\,dx = \frac{1}{2}cb^2$, найдя площадь треугольника. Затем мы придумали антипроизводную для cx и установили, что $M(b) - M(0) = cb^2$. Обе части формулы фундаментального молотка совпали, как мы и надеялись. Повторимся еще раз: мы *не используем* сейчас фундаментальный молоток. Мы *проверяем* его, вычисляя обе его части (части уравнения 6.5) разными способами и убеждаясь, что они равны. Это прибавляет нам уверенности, что ход наших рассуждений для вывода фундаментального молотка верен.

6.2.3. Беспокойство

Как мы уже знаем, производные убивают константы, и если у машины m есть одна антипроизводная, она обязательно имеет бесконечное число антипроизводных. Почему? Потому что если $\frac{d}{dx}\left[M(x)\right] = m(x)$, то и $\frac{d}{dx}\left[M(x)+\#\right] = m(x)$ для любой константы #. Следовательно, любое число # дает нам не менее настоящую антипроизводную для M, а именно $M(x) + \#$. На первый взгляд, это неприятно. Наш фундаментальный молоток требует, чтобы мы для нахождения площади искали антипроизводную. Но площадь — нечто конкретное, и интуитивно понятно, что у нее должно быть только одно значение. Следовательно, если у машины m бесконечное число антипроизводных, они должны давать для площади одно значение, иначе наш фундаментальный молоток сломан. Пока мы не уверены, что он работает всегда, но можем по крайней мере убедиться, что о вышесказанном беспокоиться незачем. Фундаментальный молоток просит нас для вычисления площади посчитать *разность*: $M(b) - M(a)$. Если мы возьмем другую антипроизводную вида $W(x) \equiv M(x) + \#$, то получим для площади то же значение, ведь $W(b) - W(a) = [M(b) + \#] - [M(a) + \#] = M(b) - M(a)$. Перестанем беспокоиться и двинемся дальше.

6.2.4. Вперед на полной скорости! Работаем фундаментальным молотком

Что мы уже сделали? Во-первых, провели рассуждение, в котором открыли фундаментальный молоток анализа:

$$\int_a^b m(x)\, dx = M(b) - M(a). \tag{6.6}$$

Но мы еще не полностью уверены, что можем доверять нашему выводу. Поэтому мы проверили его на нескольких простых примерах, когда знали, чего ожидать. Молоток сработал во всех случаях, и мы стали ему доверять чуть больше. Посмотрим, что он даст, когда мы *не* знаем, чего ожидать.

6.2.5. Незнакомый случай

Как всегда, машина $m(x) \equiv x^2$ — простой пример для проверки. Посмотрим, что даст фундаментальный молоток, если мы будем искать площадь между (например) $x = 0$ и $x = 3$:

$$\int_0^3 x^2\, dx = M(3) - M(0),$$

где $M(x)$ — какая-то машина, производная которой равна x^2. Можем мы придумать ее? Как известно, дифференцирование уменьшает показатель степени на 1, так что стоит попробовать что-то вроде $\#x^3$. Число # мы найдем, поскольку после дифференцирования у нас должно получиться x^2. Имеем: $x^2 = (\#x^3)' = 3\#x^2$, откуда $\# = \frac{1}{3}$. Поэтому $M(x) = \frac{1}{3}x^3$ — антипроизводная для x^2, и мы можем продолжить:

$$\int_0^3 x^2\, dx = M(3) - M(0) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}0^3 = 9\,.$$

Интересно… Площадь под этой кривой оказалась целым числом. Это зловеще просто. Что еще мы можем сделать?

6.3. Ковка антимолотков

Что нам делать, раз мы поняли новую идею интеграла $\int$? При желании мы можем продолжать попытки антидифференцировать множество конкретных машин, в основном догадками, как и раньше. Но, когда мы изобрели идею лупы с бесконечным увеличением и экспериментировали с производными, мы получили «больше за те же деньги» не при работе с конкретными машинами, а тогда, когда создали молотки, которые работают для *любой* машины. Я на секунду вернусь в главу 3 и утяну оттуда одну из рамочек, где описаны все наши молотки. Вот эта рамочка.

Молоток для сложения

$$(f+g)' = f' + g'$$

Молоток для умножения

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Молоток для нового сокращения

$$\frac{df}{dx} = \frac{ds}{dx}\frac{df}{ds}$$

Поскольку все выглядит так, будто эта штука $\int$ противоположна производной, было бы прекрасно, если бы существовали три аналогичных антимолотка, по одному для каждого исходного! Тогда мы могли бы делать с криволинейными площадями всё. Посмотрим, можем ли мы выковать какие-нибудь антимолотки.

6.3.1. Антимолоток для сложения

Ранее мы открыли замечательный факт о производных, названный «молотком для сложения». Суть его в том, что «производная суммы равна сумме производных», или $(f+g)' = f' + g'$. Было бы здорово, если бы аналогичный факт был верен для нашей новой идеи интегрирования: тогда у нас был бы инструмент, который позволяет разбивать некоторые сложные задачи на более простые части, как это делали первоначальные молотки. Поскольку производная суммы равна сумме производных, мы можем предположить, что интеграл от суммы равен сумме интегралов*. Иначе говоря, мы хотим проверить, верно ли:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx \overset{???}{=} \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)+\left(\int_a^b g(x)dx\right). \tag{6.7}$$

Мы не знаем, верно ли это, но было бы здорово, ведь тут у нас противоположность молотку для сложения. Это был бы «антимолоток для сложения», если угодно. Посмотрим, работает ли он.

Для начала заметим, что нам предлагают подумать об $f(x) + g(x)$ как о самостоятельной машине, и мы можем дать ей название, например $h(x) \equiv f(x) + g(x)$. То есть $h(x)$ — машина, которая выплевывает $f(x) + g(x)$, когда в нее подают x. Представьте, что мы смотрим на график $h(x)$, который может быть весьма извилистым, и вообразите бесконечно узкий прямоугольник в точке x, простирающийся вертикально вверх (или вниз) от горизонтальной оси до графика h (см. рис. 6.4 и 6.5).

Ширина этого прямоугольника dx, а его высота $h(x) \equiv f(x) + g(x)$, поэтому его площадь равна $(f(x) + g(x))dx$. Однако по очевидному закону разрывания этот высокий узкий прямоугольник можно разорвать на два меньших и получить $f(x)dx + g(x)dx$. Теперь у нас два прямоугольника, один высотой $f(x)$, второй — $g(x)$. Мы можем представлять каждый из них в точке x двумя способами: как один высокий или два более коротких, но одинаково узких.

---

* Вспомним, что «интеграл» функции m — то, как учебники называют $\int_a^b m(x)dx$. На самом деле они обычно называют это «определенным интегралом» для функции m. Термин «неопределенный интеграл» часто используется для антипроизводной m, но термин может ввести в заблуждение, поскольку имеет смысл только *после* открытия фундаментального молотка. До этого неочевидно, что антипроизводные имеют что-то общее с интегралами (площадями криволинейных фигур). Мы предпочитаем называть $\int_a^b m(x)dx$ интегралом функции m от a до b. Только после определения терминов фундаментальный молоток сообщает нам, что интегралы и антипроизводные — связанные понятия.

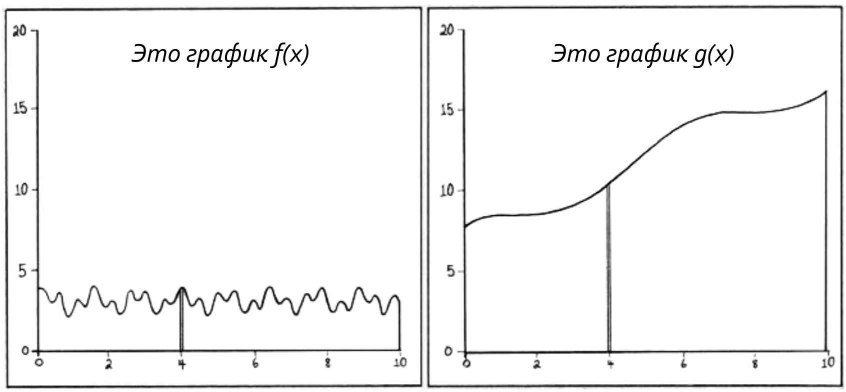


Рис. 6.4. Две машины, выбранные случайно. На картинке слева узкий прямоугольник имеет площадь $f(4)dx$. На картинке справа узкий прямоугольник имеет площадь $g(4)dx$

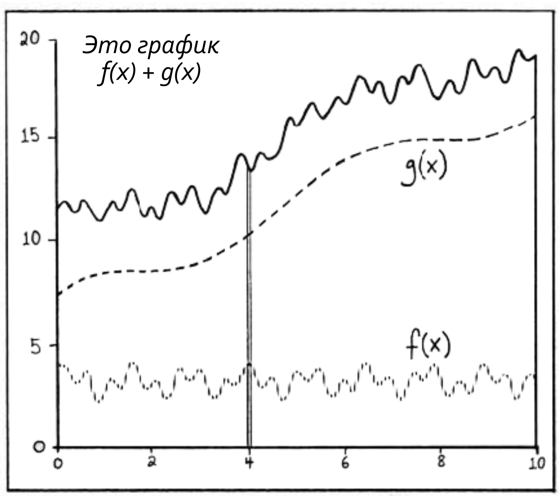


Рис. 6.5. Это график $f(x) + g(x)$. Узкий прямоугольник имеет площадь $(f(4) + g(4))dx = f(4)dx + g(4)dx$. Площадь этого прямоугольника — сумма площадей на двух картинках рис. 6.4. Поскольку факт верен для каждой точки x, сложение по всем точкам не изменит этого принципа

Интуитивно кажется очевидным, что мы можем получить полную площадь под h двумя способами: сложить высокие узкие прямоугольники, чтобы получить $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$, или сложить разорванные узкие прямоугольники, получив $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. Это описания одного и того же: общей площади под $f + g$, и мы можем поставить знак равенства между ними:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx\ =\ \left(\int_a^b f(x)\ dx\right) + \left(\int_a^b g(x)\ dx\right). \qquad (6.8)$$

Это именно то, что мы хотели показать. Для официальности запишем это в рамочке.

Антимолоток для сложения

Мы установили еще один факт

для нашей идеи интеграла:

«Интеграл суммы равен сумме интегралов».

Иными словами, для любых машин f и g справедливо:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx\ = \int_a^b f(x)\, dx\ +\ \int_a^b g(x)\, dx$$

Рисунки 6.4 и 6.5 показывают другим путем то, что сообщает нам антимолоток для сложения. Буквы f и g обозначают две машины, возможно, с очень волнистыми графиками. Рисунок 6.4 изображает отдельные машины f и g, а также площадь под ними. Рисунок 6.5 — $h(x) \equiv f(x) + g(x)$ и дает нам другой способ выразить то, что говорит антимолоток.

6.3.2. Антимолоток для умножения

Простой антимолоток для умножения

По сути, у нас есть два молотка для умножения, хотя один из них был частным случаем другого. Вспомним, как в главе 2 мы показали, что $(\#f(x))' = \#f'(x)$, где # — постоянное число вроде 7 или 59. Мы можем назвать это «вынести константу за знак производной». Нас интересует, можно ли «вынести константу за знак интеграла», верно ли $\int\#(\textit{нечто}) = \#\int(\textit{нечто})$. Интуитивно эта идея имеет смысл, если мы подумаем, что означают эти выражения. Вспомните, что в выражении вроде $\int f(x)dx$ мы складываем площади множества бесконечно узких прямоугольников. Если мы удвоим высоту каждого, сохраняя (бесконечно малую) ширину, мы должны удвоить площадь. Слово «удвоение» вовсе не обязательно, рассуждение должно выполняться для любого #. Поэтому должно быть верно:

$$\int_a^b \# \cdot f(x)dx = \# \cdot \int_a^b f(x)dx$$

для любого числа # и любой машины f. Ура! Мы снова нашли «антимолоток» для интегрирования, соответствующий одному из старых молотков для дифференцирования.

Не такой простой антимолоток для умножения

Только что мы установили, что можно выносить константу за знак интеграла, как и за знак производной. Но настоящий молоток для умножения был устроен несколько сложнее. Он утверждал, что:

$$(fg)' = f'g + fg',$$

или то же самое иначе:

$$[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Попробуем использовать этот факт в конструировании аналогичного антимолотка для умножения. Если мы «проинтегрируем» обе части этого уравнения — то есть подадим обе части в $\int$, — мы получим:

$$\int_a^b [f(x)g(x)]' \ dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] \ dx. \qquad (6.9)$$

Слева стоит интеграл от производной. Мы можем стукнуть по ней фундаментальным молотком и получим:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] \ dx.$$

Левая часть выглядит довольно уродливо, но это простая идея, так что давайте ее сократим. Перепишем уравнение так:

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]\, dx\,, \tag{6.10}$$

где слева — просто сокращение для «подставим везде b, потом подставим везде a, потом найдем разность», так что $[f(x)g(x)]_a^b$ — сокращение для $f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Хотя уравнение 6.10 *истинно*, оно не особо *полезно*, потому что мы можем использовать его только при встрече с тем, что выглядит в точности как $\int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]\, dx$. Но ведь так выглядят немногие вещи. Да, мы могли бы здесь остановиться и назвать это антимолотком для умножения, поскольку он «противоположен» молотку. Но нам удастся получить намного более полезный антимолоток, если мы подойдем к делу немного иначе. Перепишем уравнение 6.10, использовав молоток для сложения, чтобы разбить интеграл на две части:

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx, \tag{6.11}$$

а затем перенесем один из интегралов в другую часть. На первый взгляд непонятно, зачем это делать, но через несколько минут мы обсудим, в чем суть. А сейчас запишем наше открытие в рамочке, для официальности.

Антимолоток для умножения

Мы установили еще один факт о нашей новой идее $\int$,
хотя пока не знаем, как его использовать*:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{6.12}$$

Как можно использовать это безумное предложение? Вспомним, что молоток для умножения (и все остальные) был не *правилом*, которое ука-

* Обычно это именуется «формулой интегрирования по частям». *Прим. перев.*

зывает, что делать, а *инструментом*, который позволяет нам добиваться прогресса, выбирая вещи каким-то конкретным способом. Например, рассмотрим машину $m(x) \equiv xe^x$. Мы *не обязаны* думать о ней как о произведении двух отдельных машин, но можем думать о ней так, если нам это полезно. Мы можем считать, что xe^x имеет вид $f(x)g(x)$, где $f(x) \equiv x$ и $g(x) \equiv e^x$. Тогда молоток для умножения (далее в уравнениях будем сокращать его — МУ) дает нам:

$$m'(x) \equiv (xe^x)' \stackrel{МУ}{=} (x)'(e^x) + (x)(e^x)' = e^x + xe^x.$$

Все наши первоначальные молотки толковались «только если это нам помогает», и так же должны действовать антимолотки. Но почему уравнение 6.12 в рамочке «полезнее», чем уравнение 6.9, если это в *точности* одно и то же предложение в слегка разной одежке? Хороший вопрос! Уравнение 6.12 выглядит более полезным, чем 6.9, *не* потому, что оно сообщает что-то иное, а из-за ограниченности человеческого воображения. Чтобы понять, о чем речь, представим, что мы застряли, пытаясь вычислить что-то, выглядящее как $\int_a^b m(x)dx$. Когда бы мы ни попытались вычислить такую штуку, для большинства людей (включая меня), как правило, проще придумать две машины f и g, чтобы m представлялась так:

$$m(x) \stackrel{Представление}{=} f'(x)g(x),$$

чем придумать две машины f и g, чтобы m представлялась так:

$$m(x) \stackrel{Представление}{=} f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Это важный момент, с которым мы уже встречались несколько раз: два метода, идеи, уравнения и т. д. могут быть *логически* одинаковыми, но это точно не означает, что они одинаковы *психологически*. Иными словами, два способа сказать одно и то же могут быть очень разными с точки зрения простоты понимания. Антимолоток для умножения дает нам способ преобразовать одну задачу в другую. Будет ли преобразованная задача всегда легче *для нас*? Нет. Но может стать, если мы подберем умное преобразование. Вот пример, как преобразовать задачу. Предположим, мы хотим вычислить:

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

У нас есть фундаментальный молоток, и если бы мы могли волшебным образом придумать машину $M(x)$, производной которой является xe^x, мы бы сказали: «Ага! Ответ равен $M(1) - M(0)$». Но это только звучит хорошо, а на деле неясно, как придумать машину, производная которой равна xe^x. Ситуация выглядит тупиковой. Однако антимолоток для умножения предлагает нам путь действий. Если мы можем придумать две машины f и g, для которых $f'(x)g(x) = xe^x$, то антимолоток позволит нам преобразовать исходную задачу в несколько иную. Попробуем выбрать $f'(x) \equiv e^x$ и $g(x) \equiv x$ и напишем АМУ над знаком равенства, когда будем использовать антимолоток для умножения. Теперь мы можем переписать задачу так:

$$\int_0^1 xe^x dx \overset{АМУ}{=} \left[f(x)g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx.$$

Функции f' и g мы выбрали сами, но этот антимолоток выдает предложение, в котором есть еще f и g'. Мы их пока не знаем, но они необходимы для придания смысла предложению. Получить f просто. Мы определили $f'(x) \equiv e^x$, а эта машина совпадает с собственной производной, поэтому и с антипроизводной: $f(x) = e^x$. Как насчет $g'(x)$? Это тоже просто. Поскольку $g(x) \equiv x$, то $g'(x) = 1$. Подставляем всё найденное в наше уравнение и получаем

$$\int_0^1 xe^x dx \overset{АМУ}{=} \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$$

Первое слагаемое $\left[xe^x\right]_0^1$ — сокращение для $1e^1 - 0e^0$, то есть оно равно e. Как насчет второго? Поскольку мы знаем, что антипроизводная e^x равна e^x, в силу фундаментального молотка имеем $\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$. Объединив всё вместе, получаем:

$$\int_0^1 xe^x dx \overset{АМУ}{=} e - (e-1) = 1.$$

Прекрасно! С помощью антимолотка для умножения мы преобразовали задачу, которую не могли решить, в эквивалентную, но иначе выглядящую, которую решили легко. Конечно, не все обязано работать так удачно. Что было бы, если бы мы выбрали f и g иначе? Посмотрим. Мы вполне могли бы выбрать $f'(x) \equiv x$ и $g(x) \equiv e^x$. Наша задача преобразовалась бы так:

$$\int_0^1 xe^x dx \overset{АМУ}{=} \left[\frac{1}{2}x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 e^x dx = \frac{e}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 e^x dx.$$

Выглядит еще страшнее, чем исходное уравнение. Но важно подчеркнуть, что мы не сделали ничего неверного. Этот ответ абсолютно правилен. Просто мы выбрали f' и g так, что это не упростило задачу *для нас*. Как мы обсуждали выше, это общий принцип для молотков и антимолотков. Мы всегда вольны ими пользоваться, но нет гарантии, что они преобразуют исходную задачу в то, что мы считаем «проще». Это не их вина, а ограниченность человеческого воображения.

6.3.3. Антимолоток для нового сокращения

Прежде всего напомним, что такое исходный молоток для нового сокращения и как он использовался. Молоток для нового сокращения (называемый в учебниках цепным правилом или правилом дифференцирования сложной функции) был полезным инструментом, который мы изобрели с помощью лжи и поправки на нее. Например, предположим, что мы забуксовали, пытаясь найти производную ужасно выглядящей машины вроде $m(x) \equiv [V(x)]^{795}$, считая x переменной*. Нам нужно вычислить $\frac{dm}{dx}$. Как мы видели, помогает новое сокращение. Сначала мы замечаем, что $[V(x)]^{795}$ — просто *нечто* в какой-то степени, и мы можем с помощью сокращения $s \equiv V(x)$ написать, что $m(x) \equiv s^{795}$. Теперь молоток для нового сокращения помогает так. Мы можем написать:

* В соответствии с конвенцией, принятой нами после главы 4, $V(x)$ означает то, что учебники именуют $\sin x$.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dx} &= \left(\frac{dm}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right) \equiv \\ &\equiv \left(\frac{d}{ds}s^{795}\right)\left(\frac{d}{dx}V(x)\right) = \\ &= \left(795s^{794}\right)H(x) \equiv \\ &\equiv \left(795[V(x)]^{794}\right)H(x).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Мы освежили память, но пока не изобрели антимолоток для нового сокращения. Вот идея. Как и ранее, у нас есть право на новое сокращение, но нет гарантии, что это поможет. Исследуем конкретный пример.

Игра с новыми сокращениями

Пусть у нас есть такая задача и ничего не выходит:

$$\text{То, что мы хотим узнать} = \int_a^b xe^{x^2}\,dx.$$

У нас есть фундаментальный молоток, так что если бы мы могли волшебным образом придумать машину $M(x)$, производная которой равна xe^{x^2}, мы бы знали, что вся эта суматошная куча символов составит $M(b) - M(a)$. Неясно, как придумать такую машину, но можно поэкспериментировать с новыми сокращениями. Вот одна стратегия: мы никогда не имели раньше дела с e^{x^2}, зато имели дело с e^x. Но ведь e^{x^2} равно e^s для $s \equiv x^2$. Поэтому мы можем написать:

$$\text{То, что мы хотим узнать} = \int_a^b xe^{s}\,dx. \tag{6.14}$$

В реальности мы ничего не сделали. Даже еще не солгали. Мы просто написали новое сокращение. Но теперь у нас две буквы, s и x. Это не незаконно, но чуть сильнее все запутывает, и неясно, можно ли применить фундаментальный молоток, ведь в нем использовалась только одна переменная. Возможно, если бы мы избавились от всех x и говорили о задаче на языке s, было бы проще. Если $s \equiv x^2$, то $x = s^{\frac{1}{2}}$, так что есть искушение написать:

$$\text{То, что мы хотим узнать } = \int_a^b \left(s^{\frac{1}{2}}\right) e^s d\left(s^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6.15}$$

Абсолютно корректно, но выглядит пугающе, так что забудем это, вернемся к не такому страшному уравнению 6.14 и посмотрим на него. Мы хотим превратить элемент dx во что-то на языке s, поэтому, возможно, полезно попробовать связать dx и ds. Может, и нет, но попробуем. Поскольку $s \equiv x^2$, мы имеем:

$$\frac{dm}{dx} = 2x, \text{ поэтому } dx = \frac{ds}{2x}. \tag{6.16}$$

По счастливой случайности, когда мы подставляем это в уравнение 6.14, все упрощается. Элементы x сокращаются, и мы получаем:

$$\begin{gathered}\text{То, что мы хотим узнать } \overset{(6.14)}{=} \int_a^b xe^s dx \overset{(6.16)}{=} \\ \overset{(6.16)}{=} \int_a^b xe^s \left(\frac{ds}{2x}\right) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\right) e^s ds = \left(\frac{1}{2}\right) \int_a^b e^s ds.\end{gathered} \tag{6.17}$$

Но погодите: a и b были сокращениями для $x = a$ и $x = b$. Мы должны напомнить себе, что нельзя смешивать предложение $x = a$ и предложение $s = a$. Чтобы не забыть, запишем:

$$\text{То, что мы хотим узнать } = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=a}^{x=b} e^s ds.$$

Итак, поскольку e^s совпадает со своей производной (если считать s переменной), она совпадает со своей антипроизводной. Мы можем применить фундаментальный молоток и написать:

$$\begin{gathered}\text{То, что мы хотим узнать } = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=a}^{x=b} e^s ds = \\ \overset{ФМ}{=} \left(\frac{1}{2}\right) \left[e^s\right]_{x=a}^{x=b} = \left(\frac{1}{2}\right) \left[e^{x^2}\right]_{x=a}^{x=b} \equiv \left(\frac{1}{2}\right) \left[e^{b^2} - e^{a^2}\right].\end{gathered} \tag{6.18}$$

И мы закончили. Мы показали, что:

$$\int_a^b xe^{x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2}\right) \left[e^{b^2} - e^{a^2}\right]. \tag{6.19}$$

Возможно, это не выглядит как простой ответ, но говорит нам сразу много безумных вещей, которые не были очевидны.

Например, при $a = 0$ и $b = 1$ получается:

$$\int_0^1 xe^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}(e-1).$$

Почему это антимолоток?

Конкретный пример выше был… ну, скажем так… каким-то *конкретным*, но в нем спрятан более общий принцип. Надеюсь, что попытка извлечь этот принцип прояснит, почему рассуждение в каком-то смысле «противоположно» молотку для нового сокращения. Предположим, мы застряли на задаче $\int_a^b m(x)dx$. Если бы нам удалось придумать машину M, производная которой равна m, мы могли бы применить фундаментальный молоток и найти решение. Но если не получается придумать M? Как всегда, мы можем попробовать ввести новые сокращения и посмотреть, не поможет ли это. Предположим, мы обозначили какой-то большой блок символов внутри интеграла буквой s. Назовем $\widehat{m}(s)$ то, что теперь стоит под знаком интеграла, хотя $m(x)$ и $\widehat{m}(s)$ — по сути, разные обозначения одного и того же. Я пишу «шляпку» над $\widehat{m}$, а не просто $m(s)$, чтобы подчеркнуть, что $\widehat{m}(s)$ — машина $m(x)$, записанная на языке s. Это не просто машина $m(x)$, куда вместо x поставлено s! Например, если $m(x) \equiv [V(x) + 7x + 2]^{795}$ и мы обозначаем $s \equiv V(x) + 7x + 2$, то $\widehat{m}(s) = s^{795}$. Поскольку у нас сразу две буквы, я поменяю a и b на $x = a$ и $x = b$, чтобы напоминать, о чем мы говорим. Используя всё это, получаем:

$$\int_{x=a}^{x=b} m(x)\ dx \ \equiv \ \int_{x=a}^{x=b} \hat{m}(s)\ dx\,.$$

Непонятно, как использовать фундаментальный молоток, когда у нас две буквы. Давайте попробуем убрать x, записав их на языке s. Нам нужно ds вместо dx справа, поэтому можно солгать и сделать поправку на ложь, записав dx как $(dx/ds)ds$, и попытаться выразить оставшиеся x (они есть в dx/ds и в предложениях $x = a$ и $x = b$) на языке s:

$$\int_{x=a}^{x=b} \hat{m}(s)\ dx = \int_{x=a}^{x=b} \hat{m}(s)\left(\frac{dx}{ds}\right)\ ds. \qquad (6.20)$$

Поможет ли это? Не факт. Мы ведь не решаем какую-то конкретную задачу! Это абстрактное описание того, как мы поступали с примером выше, где было xe^{x^2}. Кратко сформулируем эту идею в рамочке.

Антимолоток для нового сокращения

Если нам нужно что-то вроде:

$$\int_{x=a}^{x=b} m(x)\ dx,$$

мы всегда имеем право ввести сокращение s для какого-нибудь неприятного нечто в $m(x)$ и переписать $m(x)$ как $\widehat{m}(s)$, где $\widehat{m}(s)$ — какой-нибудь не-так-страшно-выглядящий способ записи $m(x)$. Затем мы можем солгать, сделать поправку на ложь и переписать задачу так:

$$\int_{x=a}^{x=b} m(x)\ dx = \int_{x=a}^{x=b} \hat{m}(s)\frac{dx}{ds}\ ds.$$

Если нам удастся переписать все x на языке s, мы преобразуем первоначальную задачу в другую. Это не обязательно все упростит, но может, если сокращение удачно подобрано. В учебниках это называется заменой переменных.

Эта идея проста, но трудно подобрать обозначения, которые в точности описывали бы, *насколько* она проста. Вот еще один способ подумать об этом. Предположим, мы идем через весь этот раздражающий процесс: а) нового обозначения неприятно выглядящего куска буквой s; б) лжи и поправки на ложь, чтобы выразить все на языке s; и в) разглядывания переписанного варианта задачи с целью увидеть, не стал ли он проще. Оказывается, весь процесс распознается автоматически, когда можно представить, что $m(x)$ возникает из первоначального молотка для нового обозначения. Чтобы понять, что я имею в виду, изучим конкретный пример. Предположим, мы хотим вычислить:

$$\int_{x=a}^{x=b} \underbrace{51\left(x^5+17x-3\right)^{999}\left(5x^4+17\right)}_{\text{Назовем эту часть } m(x)} dx. \tag{6.21}$$

Оказывается, можно представить, что m возникает из дифференцирования вот такой уродливой машины:

$$M(x) \equiv \frac{51}{1000}\left(x^5+17x-3\right)^{1000}$$

с помощью молотка для нового сокращения, но представим, что мы не знаем этого. Мы безнадежно застряли, пытаясь вычислить штуку из 6.21. Посмотрим, куда привел бы нас процесс нового сокращения, если бы мы им занялись. Предположим, по счастливой случайности, или с помощью озарения, или еще как-нибудь мы выбрали бы сокращение $s \equiv x^5 + 17x - 3$. Это один из самых уродливых фрагментов в 6.21, поэтому такая стратегия определенно имеет смысл. Это преобразовало бы исходную задачу в такую:

$$\int_{x=a}^{x=b} 51s^{999}\left(5x^4+17\right)\, dx. \tag{6.22}$$

Это нам не поможет, пока мы не переведем на язык s всё остальное, так что начнем с dx. Поскольку $s \equiv x^5 + 17x - 3$, мы знаем:

$$\frac{ds}{dx} = 5x^4+17\text{, поэтому } dx = \frac{ds}{5x^4+17}.$$

Если подставить это в 6.22, все прекрасно сокращается, и мы получаем:

$$\int_{x=a}^{x=b} 51s^{999}\left(5x^4+17\right)\left(\frac{ds}{5x^4+17}\right) = \int_{x=a}^{x=b} 51s^{999}\, ds. \tag{6.23}$$

Теперь задача выглядит не так страшно. Можем мы придумать машину, производная которой (считая s переменной) была бы $51s^{999}$? Она явно должна выглядеть как $\# \cdot s^{1000}$, чтобы при дифференцировании показатель степени превратился в 999. Число # должно быть таким, чтобы $1000 \cdot \# = 51$, откуда $\# = \frac{51}{1000}$. Собирая всё вместе, мы получаем, что антипроизводная для $51s^{999}$ равна:

$$M(x) = \frac{51}{1000}s^{1000} \equiv \frac{51}{1000}\left(x^5 + 17x - 3\right)^{1000}.$$

Таким образом, ответ на нашу исходную задачу, к которой, казалось, нельзя и подступиться, равен $M(b) - M(a)$, где M — уродливая машина из предыдущего уравнения. Обратите внимание: мы не признавали, что $m(x)$ из 6.21 возникает в силу использования молотка для сокращения функции M.

Мы даже не знали, что такое M! Мы обозначили буквой s самый неприятный фрагмент в выражении 6.21, а затем перевели x на язык s и обнаружили, что наша ужасная исходная задача преобразовалась в намного более простую проблему вычисления $\int_{x=a}^{x=b} 51s^{999}ds$.

Наши математические пляски в конце выдали антипроизводную $M(x)$, хотя сами мы не могли каким-то волшебным образом выдумать $M(x)$ за один прием.

Этот процесс нового сокращения — как бы ни было трудно выразить его символами — эффективно ведет нас, минуя наше невежество, туда, где мы уже можем решить задачи, которые не поддавались нам до нового сокращения.

6.3.4. Собираем антимолотки вместе

Выковав три антимолотка, по одному для каждого из оригиналов, мы собираем их в сокращенной форме.

Антимолоток для сложения (АМС)

Предположим, нам требуется найти

$\int_a^b m(x)dx.$

Если мы можем придумать машины f и g, чтобы $m(x) = f(x) + g(x)$, мы способны представить нашу задачу так, если нам это поможет:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Антимолоток для умножения (АМУ)

Предположим, нам требуется найти

$$\int_a^b m(x)dx.$$

Если мы можем придумать машины f и g, чтобы $m(x) = f'(x)\, g(x)$, мы способны представить нашу задачу так, если нам это поможет:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx\,.$$

Антимолоток для нового сокращения (АМНС)

Предположим, что нам требуется найти

$$\int_a^b m(x)dx.$$

Если мы можем придумать сокращение s, для которого $m(x)$ можно записать в более простой форме $\widehat{m}(s)$, мы способны представить нашу задачу так, если нам это поможет:

$$\int_{x=a}^{x=b} m(x)\ dx = \int_{x=a}^{x=b} \hat{m}(s)\frac{dx}{ds}\ ds\,.$$

6.3.5. Еще один фундаментальный молоток

В начале этой главы мы открыли фундаментальный молоток и обсудили, в чем его суть: показать, что производные и интегралы противоположны. Но фактически мы установили, что интегралы и производные противоположны, если производная находится *внутри* интеграла. Нетрудно запомнить общую идею, что производные и интегралы противоположны, но было бы гораздо красивее, если бы они были противоположны не только в этом порядке — когда сначала мы выполняем дифференцирование, а потом интегрирование, — но и в обратном. Поищем эту красоту, посмотрим, есть ли какой-нибудь смысл, в котором производные и интегралы противоположны в другом порядке.

Для начала можно попробовать посмотреть, можем ли мы вычислить выражение:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b m(x)\ dx. \tag{6.24}$$

Оно вводит в заблуждение. Ведь x в $\int_a^b m(x)dx$ — не настоящая «переменная» в том смысле, что x в выражении вроде $f(x) \equiv x^2$. На техническом жаргоне x в интеграле именуется «связанной переменной», или «немой переменной». Это не то, вместо чего мы можем подставить какое-нибудь число, а просто «заполнитель». Буква x служит той же цели, что и буква i в выражении

$$\sum_{i=1}^{3} i^2. \tag{6.25}$$

Это просто причудливый способ написать число 14 (потому что $1 + 4 + 9 = 14$), и в выражение 6.25 не имеет смысла подставлять, например, $i = 17$. Мы можем подставлять в 6.25 вместо i другие буквы, например j или k, и выражение по-прежнему будет всего лишь причудливым способом записать число 14.

По тем же причинам выражение $\int_a^b m(x)dx$ не зависит от x и ничем не отличается от выражений $\int_a^b m(y)dy$ или $\int_a^b m(\bigstar)d\bigstar$. Поэтому может показаться, что наша задача решена. Ведь если $\int_a^b m(\bigstar)d\bigstar$ — просто число, которое не зависит от x, мы можем написать

$$\frac{d}{dx}\int_a^b m(\bigstar)d\bigstar = 0. \tag{6.26}$$

Хм… Едва ли это еще один вариант фундаментального молотка. Если производная уничтожает интеграл снаружи, эти два понятия вообще не выглядят противоположными. Но такое заключение поспешно. Нам нужно иначе посмотреть на задачу. Производная (по x) интеграла была равна 0, поскольку интеграл не зависел от x. Может, если мы поставим вопрос чуть иначе, то получим что-нибудь поинтереснее. Попробуем взять производную по верхнему числу в интеграле:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x m(s)ds,$$

где мы используем s вместо x в качестве «связанной переменной», чтобы избежать путаницы, которая произошла бы при наличии двух разных x. Есть два способа раскрыть это загадочное выражение. Во-первых, мы можем обозначить буквой M антипроизводную для m и применить уже открытый вариант фундаментального молотка. Получаем:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x m(s)ds = \frac{d}{dx}\big(M(x)-M(a)\big) =$$
$$= \left(\frac{d}{dx}M(x)\right) - \underbrace{\left(\frac{d}{dx}M(a)\right)}_{\text{Это равно 0, т. к. не зависит от } x} =$$
$$= \left(\frac{d}{dx}M(x)\right) = m(x).$$

Второй путь показать то же — провести ловкое неформальное рассуждение, использующее определение производной:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x m(s)ds \equiv \frac{\int_a^{x+dx} m(s)ds - \int_a^x m(s)ds}{ds} =$$
$$= \frac{\int_x^{x+dx} m(s)ds}{dx} = \frac{1}{dx}\int_x^{x+dx} m(s)ds,$$

где при переходе от первой строки ко второй мы, по сути, вообразили разрывание одной области на две части, поэтому [площадь от a до $(x + dx)$] минус [площадь от a до x] — просто [площадь от x до $(x + dx)$]. Может показаться, что мы в тупике, но если вспомнить, что все означает, нетрудно выбраться. Забавный элемент $\int_x^{x+dx} m(s)ds$ описывает площадь под графиком m между двумя бесконечно близкими точками x и $x + dx$. Но ведь площадь прямоугольника шириной dx и высотой $m(x)$ равна, разумеется, $m(x)dx$. Осталось разделить ее на dx, стоящую перед интегралом, и получить $m(x)$. Собирая всё вместе, имеем:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x m(s)ds = m(x).$$

Мы получили тот же ответ, что и ранее. Это значит, что интегралы и производные аннулируют друг друга в обоих направлениях. Подводя итог, напишем здесь обе версии фундаментального молотка, но старую в слегка измененном виде, чтобы показать ее связь с новой:

Фундаментальный молоток, версия 1: $\int_a^x \left(\frac{d}{dx} m(x)\right) dx = m(b) - m(a)$.

Фундаментальный молоток, версия 2: $\frac{d}{dx} \int_a^x m(s) ds = m(x)$.

6.4. Вторая тучка

Мы победили кривизну уже на двух разных территориях: сначала это была крутизна, потом площадь криволинейных фигур. Но мы до сих пор не умеем вычислять длины кривых. Сейчас стоит заглянуть в отчеты о нашем путешествии и посмотреть, что нам помогало в прошлом.

На территории крутизны мы победили с помощью бесконечного увеличения для кривой машины m (в точке x, значение которой нам неизвестно). Далее мы вычислили крутизну кривой, как если бы она была прямой.

На территории площади мы победили, представив, что крохотную область под графиком машины в каждой точке x можно считать бесконечно узким прямоугольником с площадью $m(x)dx$. Затем мы вообразили сложение всех этих узких областей. Сначала мы не имели представления, что делать, но придумали название для неизвестного ответа: $\int_a^b m(x)dx$. Когда мы открыли фундаментальный молоток, то установили, что наша новая идея интеграла $\int$ — старая идея производной, только наоборот.

Что теперь? У нас достаточно опыта работы с лупой и не должно быть сложно написать по крайней мере выражение для длин кривых. Сможем ли мы вычислить их для каких-нибудь конкретных случаев — совсем другая история, как было в случае с площадями. Наш опыт работы с лупой предполагает, что мы начинаем с машины m, затем проводим бесконечное увеличение в какой-нибудь точке ее графика, причем нам неважно, в какой именно. Затем смотрим на точку, которая находится бесконечно близко к первой (см. рис. 6.6).

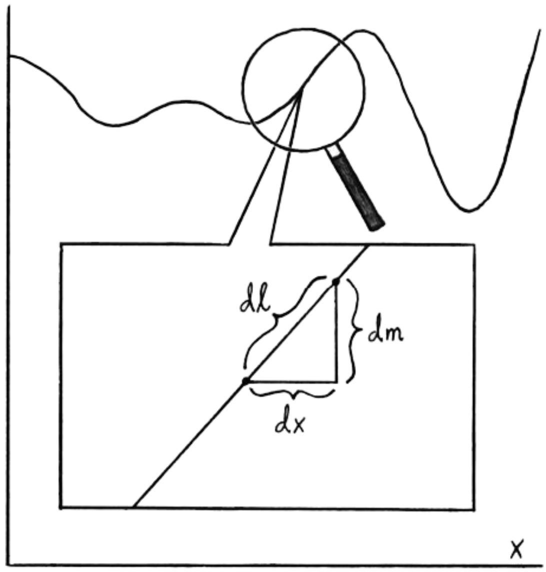


Рис. 6.6. Попытка придумать способ вычислить длину кривой. Идея с увеличением раньше срабатывала, попробуем применить ее снова. Мы бесконечно увеличиваем график некоторой машины *m* в точке *x*, и кривая выглядит прямой. Теперь мы используем формулу для кратчайшего пути, чтобы вычислить крохотную длину *dl*. Затем, полагаю, мы просто сложим все эти кусочки. Погодите, это всё?

Как только мы произвели увеличение, задача стала пугать намного меньше. Мы получили две точки, расстояние между которыми по горизонтали назовем dx, а по вертикали — dm. Как всегда, dm — всего лишь сокращение для $m(x + dx) - m(x)$, но для наших целей разворачивать его не понадобится. Будем писать dl в качестве сокращения для фактического расстояния между двумя точками — того, которое мы пройдем, двигаясь вдоль графика. Поскольку увеличение масштаба превращает кривую в бесконечно малый участок прямой, мы можем использовать формулу для кратчайшего пути:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dm)^2,$$

или, что эквивалентно, $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dm)^2}$. Чем бы ни была общая длина нашей кривой, мы можем получить ее, если сумеем сложить все эти бесконечно малые кусочки dl.

Что мы подразумеваем под «общей длиной» кривой? Она может продолжаться неограниченно, и тогда ответ будет бесконечным, но это не тот вопрос, который нас интересует. Мы хотим говорить о длине графика $m(x)$ между двумя точками $x = a$ и $x = b$. Таким образом, в виде символов нас интересует:

$$\text{Общая длина между } a \text{ и } b \equiv \int_a^b d\ell \; = \; \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dm)^2}\,. \qquad (6.27)$$

Раньше мы не видели ничего похожего. Мы пользовались только теми выражениями с символом $\int$, которые выглядели как

$$\int_b^a (\text{Некоторая машина})dx.$$

Поэтому попробуем сделать так, чтобы часть $\sqrt{(dx)^2 + (dm)^2}$ в 6.27 выглядела как (Некоторая машина)dx. Мы можем солгать и сделать поправку на ложь, чтобы получить $\sqrt{(dx)^2 + (dm)^2}\,\frac{1}{dx}dx$. Часть dx справа — как раз то, что нам нужно, но остаток уродлив. Попробуем внести $\frac{1}{dx}$ внутрь его. С квадратным корнем труднее помнить, что это можно делать, поэтому превратим его символ в степень $\frac{1}{2}$. В силу способа, которым мы изобрели степени, мы можем соединять две вещи с одинаковой степенью:

$$(a)^{\#}\,(b)^{\#} = [(a)(b)]^{\#}. \qquad (6.28)$$

Запишем $\frac{1}{dx}$ таким забавным способом, чтобы у него тоже была степень $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{dx} = \left(\frac{1}{(dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.29)$$

Теперь можно написать следующую цепочку равенств. Не пугайтесь этой горы символов! Кажется, что в выводе много шагов, но на деле бо́льшую часть, вероятно, можно пропустить. Я показываю больше, потому что мне на самом деле нравится этот вывод и я хочу, чтобы он был как можно проще и можно было понять каждый шаг. Каждый шаг при этом прост. Готовы? Поехали.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(dx)^2+(dm)^2} &= \left((dx)^2+(dm)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \left[\left((dx)^2+(dm)^2\right)\left(\frac{1}{(dx)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \left(\frac{(dx)^2+(dm)^2}{(dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \left(\frac{(dx)^2}{(dx)^2}+\frac{(dm)^2}{(dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \left(1+\frac{(dm)^2}{(dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \left(1+\left(\frac{dm}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&\equiv \sqrt{1+\left(\frac{dm}{dx}\right)^2}\, dx.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

А теперь используем это, чтобы записать уравнение 6.27 в более простом виде. Подставив только что полученное выражение, мы обнаруживаем, что общая длина кривой m выражается так:

$$\begin{aligned}
\text{Общая длина } m \text{ между } a \text{ и } b &= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dm}{dx}\right)^2}\, dx = \\
&\equiv \int_a^b \sqrt{1+[m'(x)]^2}\, dx.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Прекрасно! В первой части этой главы мы установили, что наша новая идея $\int$ просто противоположна старой идее производной, и в этом смысле у нас две идеи в одной. А сейчас мы получили более новую идею вычисления длины кривой — путем ее увеличения, пока она не станет выглядеть прямой, измерения крохотного участка длины на этом микроскопическом уровне и сложения всех полученных длин. К нашему удивлению, мы сейчас открыли, что эта новая идея — по сути, та же идея интеграла $\int$, которая была противоположна производной. Все так здорово сходится — намного лучше, чем можно было ожидать! Уравнение 6.31 объединяет все, что мы сделали в этом разделе, и, как бы сложно оно ни выглядело, оно просто говорит что-то вроде:

Вопрос: Эй, у меня тут есть кривая $m(x)$. Как мне вычислить ее длину?

Ответ: Я не знаю, но это то же самое, что и площадь под $\sqrt{1+m'(x)^2}$.

Вопрос: Это облегчает вычисление длины?

Ответ: Может быть, для некоторых m. Я не знаю. Отстаньте от меня.

6.5. Встреча со сделанным

1. В этой главе мы написали сокращение для площади под кривой: $\int_a^b m(x)dx$. Оно отражает тот факт, что мы представляем площадь этой криволинейной области как сумму (отсюда S-образный знак $\int$) бесконечного числа бесконечно тонких прямоугольников (отсюда $m(x)dx$). Но это не говорит нам о том, как вычислять площади криволинейных фигур.

2. Затем мы поняли, что, если считать функцию m из $\int_a^b m(x)dx$ производной какой-то другой машины M, мы можем переписать площадь криволинейной области в виде $\int_a^b \frac{dM}{dx}dx$ и сократить dx. Поскольку dM — наше сокращение для $M(x+dx) - M(x)$, мы знаем, что $\int_a^b dM$ должно быть суммой всех крохотных изменений по высоте, когда мы двигаемся от $x = a$ до $x = b$, то есть $M(b) - M(a)$. Иными словами,

$$\int_a^b m(x)dx = M(b) - M(a),$$

где M — произвольная машина, производной которой является m («антипроизводная» m). Мы назвали это «фундаментальным молотком анализа», поскольку он связывает нашу старую идею (производная) с новой (интеграл) и показывает нам, в каком смысле они противоположны.

3. Мы протестировали фундаментальный молоток на нескольких простых примерах, где мы могли вычислить площадь без всякого анализа. Во всех случаях он выдал нам именно те результаты, которые мы и ожидали получить. Это дало нам чуть больше уверенности, что наше рассуждение имеет смысл.

4. Мы обнаружили, что у любой конкретной машины бесконечно много антипроизводных, но в каком-то скучном смысле, который не затрудняет вычисление интегралов и пользование фундаментальным молотком. Иными словами, если M — антипроизводная для m, то есть если $M'(x) = m(x)$, все машины вида $M(x) + \#$ также являются антипроизводными для m.

5. Мы обнаружили, что каждый из молотков для производных, которые мы изобрели в частях II и III, имеет парный «антимолоток», который говорит об интегрировании. Мы изобрели антимолотки для сложения, умножения и нового сокращения, и каждый «противоположен» первоначальному молотку с тем же названием.

6. Мы обнаружили, что есть еще один смысл, в котором производные и интегралы противоположны. Он привел ко второму способу записи фундаментального молотка:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x m(s)\,ds = m(x).$$

Поэтому наши два понятия анализа можно считать противоположными независимо от порядка, в котором они применяются.

7. Мы обратили внимание на проблему длины кривых и установили, что здесь тоже задействовано интегрирование. Мы произвели бесконечное увеличение и использовали формулу для кратчайшего пути, чтобы установить, что длина графика машины $m(x)$ между точками $x = a$ и $x = b$ равна

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dm}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Сведя проблему вычисления длины кривых к задаче вычисления интеграла (как мы делали для площадей криволинейных фигур), мы решили не фокусироваться на множестве конкретных примеров того, как вычислять длины кривых. Поскольку обе задачи сейчас сформулированы на языке интегралов, любые навыки, которые мы получим при работе с одной задачей, тут же переносятся на другую. Мы стремимся к новой территории.

ИНТЕРЛЮДИЯ 6

УБИЙСТВО ДИЕЗА

Рекомендуется подавать холодным

(Автор лихорадочно работает над чем-то, когда в интерлюдии появляется Читатель. По комнате разбросаны разные вещи. Автор расхаживает взад-вперед у стола, хмуро глядя в какие-то бумаги.)

Читатель: Что это? Что случилось?

(Автор полностью поглощен тем, что делает.)

Читатель: Привееееeет???

(Автор продолжает лихорадочно работать.)

Читатель: Автор!!!

Автор (*вздрогнув*): О, привет. Рад видеть.

Читатель: Ну, что мы сегодня делаем?

Автор: Сводим счеты.

Читатель: Какие счеты? О чем вы?

Автор: Месть!

Читатель: Месть? Кому? Все, кого мы встречали, были весьма милы.

Автор: Я знаю!

Читатель: С вами все в порядке? Вы раньше выглядели не так…

(В комнату входит Математика.)

Автор: Наконец-то! Вот и вы!

Математика: Что происходит? Лучше бы что-то важное.

Автор: О да!

Математика и Читатель (*одновременно*): Что мы собираемся делать?

(Автор улыбается.)

Автор: Мы прикончим ♯.

Читатель: Наконец-то!

Математика: Я думала, что мы уже никогда до этого не доберемся!

Автор: Вперед, команда. Сверим часы?

Читатель: Проверено.

Математика: У меня нет часов. Пустота вневремен...

Автор: Каски закреплены надежно?

Читатель: Проверено.

Математика: Я только что получила примерно полстрани...

Автор: Нам может понадобиться Ностальгическое устройство, так что оно должно быть под рукой все время. Сначала о главном. Нам нужно создать план атаки, иначе эта штука нас победит.

Математика: Разрешите мне?

План атаки

Математика: То есть?

Автор: Ну, это начало, но создать раздел под названием «План атаки» — не то же самое, что сам план. Философы называют это «разницей между использованием и упоминанием слов»*.

Математика: ...

Автор: Ладно. Мы можем пойти несколькими путями, и лучше всего держать в голове все сразу. Если один из них не сработает, вернемся

* Понятие из аналитической философии, согласно которому нужно проводить различие между использованием слова (или фразы) и его упоминанием. Сравните две фразы. Кирпич состоит из глины. *Кирпич* состоит из шести букв. В первом случае — суждение о предмете, слово «кирпич» использовано для именования этого предмета. Во втором случае — суждение о слове «кирпич», оно упоминает слово (как знак), но не использует его по отношению к предмету. *Прим. перев.*

и попробуем другой. Любое предложение, содержащее $\sharp$, — вероятное слабое место, и нам нужно сосредоточиться на каждом из них. Число $\sharp$ обычно появляется в предложениях о кругах, так что начнем с них. Мы знаем, что площадь круга радиуса r равна:

$$A(r) \equiv \sharp r^2.$$

Поэтому число $\sharp$ само по себе равно площади круга радиуса 1. Мы создали определенный арсенал, которые позволяет нам вычислять площади криволинейных фигур, и это — один из возможных путей.

Математика: Что? Вы вдвоем научились вычислять эту штуку $\int$?

Автор: Ну, иногда. Но не всегда.

Читатель: О, верно, вас же не было.

Автор: Это все уже записано. Можете вернуться в главу 6 и ознакомиться, когда вам будет удобно. Но сейчас сосредоточимся. Другие планы атаки!

Математика: Число $\sharp$ также появлялось в формуле длины окружности радиуса r:

$$L(r) \equiv 2\sharp r.$$

Математика: Поскольку r — половина диаметра, то само число $\sharp$ — длина окружности диаметра 1.

Читатель: В конце последней части мы нашли способ вычислять длины кривых, это еще один возможный путь.

Математика: Что?

Читатель: О, верно, вас же тоже не было.

Математика: Вы вдвоем изобрели больше, чем мне говорили?

Читатель: Нет, просто глава 6.

Математика: Хорошо. У нас есть весь изобретенный к этому моменту анализ, например молотки.

Читатель: И антимолотки.

Автор: И Ностальгическое устройство.

Математика: В главе 5 мы использовали Ностальгическое устройство, чтобы вычислить число e. Может, оно сработает и здесь.

Читатель: Хорошая идея. Как использовать его для вычисления $\sharp$?

Автор: Когда мы вычисляли e, у нас была машина $E(x) \equiv e^x$, которая выдавала e, когда мы подавали в нее 1. Ностальгическое устройство помогло нам говорить об этой машине, используя только сложение и умножение:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ и поэтому } e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Можем мы сделать это и здесь?

Читатель: Нам нужно придумать машину, которая выплевывает $\sharp$, когда мы подаем в нее какое-нибудь число.

Математика: Это достаточно просто. Нужно всего лишь определить $M(x) \equiv x$, и тогда у нас будет машина, которая выдаст $\sharp$, если мы туда подадим $\sharp$.

Читатель: Не знаю, поможет ли это.

Автор: Да… Это верно, но на самом деле бесполезно. Использование Ностальгического устройства для машины x даст нам снова x. Безусловно, $\sharp = \sharp$, но это ничего не скажет нам о самом $\sharp$.

Математика: Тогда что нам нужно?

Автор: В примере с e^x у нас была не просто машина, которая выдавала e, когда мы подавали в нее *что-то*. Она выдавала нам число e, когда мы подавали в нее нечто *простое*: число 1. В результате мы получали описание числа e в терминах более простых вещей, которые уже знали. Сейчас нам тоже нужно описать $\sharp$ в терминах как можно более простых вещей.

Математика: Ох. Я не знаю, как это сделать.

Читатель: Я тоже.

Автор: И я! Но не будем вешать нос. Посмотрим на все это оружие, которое есть у нас, чтобы взяться за задачу. (*Автор прокашливается.*) У нас есть…

Избыточный арсенал

(Персонажи ходят по комнате, которая буквально завалена [названием-этого-раздела]. Есть несколько молотков, столько же антимолотков, луп с бесконечным увеличением, Ностальгическое устройство

и два предмета странной формы с табличками «Ложь» и «Поправка на ложь». Черное покрывало наброшено на предмет в углу рядом с табличкой «Обман математики: неисправно».)

Автор: Гляньте-ка! Теперь этой задаче нас не победить.

Читатель: Вы уверены?

Автор: Нет! Но попробуем. Что нам нужно?

Математика: Нам нужна какая-нибудь машина, которая выплевывает ♯, когда мы подаем в нее что-то простое.

Читатель: У нас есть что-то обратное.

Автор: Что вы имеете в виду?

Читатель: Ну, помните V и H? То, что учебники называют синусом и косинусом?

Автор: Разумеется.

Читатель: Помните, что V выплевывает 1, когда мы подаем в нее $\sharp/2$?

Автор: Нет.

Читатель: Вечно вы ничего не помните. Но вы сами это говорили в главе 4. Мы определяли V наглядно и выяснили:

$$V(\frac{\sharp}{2}) = 1.$$

Это примерно обратно ситуации с числом e.

Математика: Объясните.

Читатель: Ну, V не выдает нужное число, когда мы кладем в нее нечто простое, как было с e^x. Наоборот, V выдает нечто простое, когда мы кладем в нее то, что мы хотим! Или что-то связанное с тем, что мы хотим. Я имею в виду, что если бы нам удалось вычислить $\frac{\sharp}{2}$, то мы могли бы вычислить и ♯.

Математика: Хорошо. А если бы имелась какая-то «противоположность» V — что бы это ни значило, — она бы съедала 1 и выплевывала $\frac{\sharp}{2}$, верно?

Автор: Что такое «противоположность» V?

Математика: Я не знаю.

Автор: Я тоже.

Читатель: Стоп, не в том ли дело, что мы просто не знакомы с «противоположностью» V? А может, дать ей название и посмотреть, как она себя ведет?

Автор: Конечно, думаю, можем попробовать.

Математика: Позвольте мне назвать это!

Автор: Пожалуйста.

Математика: Я буду сокращать машину, противоположную V, как… Λ. Мы не знаем, как именно выглядит Λ, но это любая машина, которая ведет себя так:

$$V(\Lambda(x)) = x \text{ и } \Lambda(V(x)) = x$$

независимо от x. Иными словами, что бы ни делала V, Λ делает противоположное.

Читатель: Именно так! Следовательно, должно быть верно

$$\Lambda(1) = \frac{\sharp}{2}, \text{ поэтому } \sharp = 2\Lambda(1).$$

Математика: Значит, если бы мы могли найти способ вычислить Λ(1), все было бы сделано?

Автор: Мне кажется, да. Но как это сделать?

Читатель: Мы могли бы применить Ностальгическое устройство.

Автор: Нет, не сработает. Мы не знаем производных Λ. А чтобы использовать устройство, нужно знать *все* ее производные.

Математика: Может, обманом заставить математику рассказать, что это за производные?

Бьем молотком с новым сокращением

(Автор и Читатель одновременно поворачиваются к Математике с шокированным видом.)

Читатель: Погодите, когда мы встретились в первый раз, вы рассердились на нас за эту фразу.

Автор: Да. А тут вдруг вы не против фразы «обмануть Математику»?

Математика: Так я же сказала это со строчной буквы м, значит, это не про меня. Моя имя начинается с прописной М.

Читатель: И там и там прописные М.

Автор: Нет-нет-нет! Математика говорит «малыми прописными». Это такая типографская штука. Совершенно другой эмоциональный тон по сравнению с ПОЛНОСТЬЮ ПРОПИСНЫМИ БУКВАМИ.

Читатель: Подождите… то есть Математика не всегда кричит?

Автор: Что? Конечно, нет! Неужели вы все это время так думали?

Читатель: Я не знаю… Возможно…

Математика: Хватит! Как я сказала, может, нам удастся обмануть математику, определив засадную машину $A(x) \equiv \Lambda(V(x))$. Втайне, конечно, это просто машина $A(x) = x$, так что $\frac{dA}{dx} = 1$. Сейчас мы можем использовать молоток для нового сокращения, вот так:

$$1 = \frac{d}{dx}A(x) \equiv \frac{d}{dx}\Lambda\big(V(x)\big) = \frac{dV}{dx}\frac{d}{dV}\Lambda\big(V(x)\big). \tag{6.32}$$

Автор: Чем это нам поможет?

Читатель: Ну, справа две части. Одну из них мы знаем, потому что $\frac{dV}{dx} = H(x)$.

Математика: Именно так. Подставим это:

$$1 = H(x)\left(\frac{d}{dV}\Lambda\big(V(x)\big)\right).$$

Автор: Хорошо, но что такое $\frac{d}{dV}\Lambda\big(V(x)\big)$?

Читатель: Я не знаю.

Математика: Вперед, Автор! Помните, мы всегда можем поменять сокращения. Вдруг поможет, если я перепишу эту штуку как-нибудь так:

$$\frac{d}{dV(x)}\Lambda\big(V(x)\big), \text{ или } \frac{d}{dV}\Lambda\big(V\big), \text{ или } \frac{d}{dx}\Lambda(x).$$

Автор: Нет.

Читатель: О! Я вижу. Поскольку мы всегда можем изменить сокращения, все они, по сути, одно и то же.

Математика: Конечно! Именно это я и пыталась сказать. Мы можем обманом заставить математику сообщить нам производную Λ, определив $A(x) \equiv \Lambda(V(x))$ и продифференцировав A двумя способами. С одной стороны, $\frac{dA}{dx} = 1$. С другой, мы можем применить молоток для нового сокращения, как выше, когда установили:

$$1 = H(x)\left(\frac{d}{dV}\Lambda(V)\right). \tag{6.33}$$

Мы можем перенести $H(x)$ в другую часть равенства и получим:

$$\frac{d}{dV}\Lambda(V) = \frac{1}{H(x)}. \tag{6.34}$$

Автор: Извините, что торможу обсуждение, но я все еще не понимаю, как это нам поможет. Да, этот прием может сработать в менее сложном случае. Скажем, если вы провели рассуждение, которое дало что-то вроде $\frac{d}{d\star}M(\star) = \frac{1}{\star}$, вы можете ввести новое обозначение $\frac{d}{dx}M(x) = \frac{1}{x}$.

Но то, что вы пишете в уравнении 6.34, сбивает с толку. Не понимаю, как это нам поможет. Мы хотим получить $\frac{d}{dx}\Lambda(x)$, и, разумеется, это то же самое, что и первоначальное выражение с V вместо x. Ведь мы можем обозначать вещи как угодно. Но когда вы меняете V на x, что происходит с $H(x)$ в правой части? Если бы у вас было уравнение целиком с V в качестве переменной, то я в общем понимал бы, как заменить ее любой другой буквой, но у вас уже есть там x… Я не знаю, что происходит.

Математика: Мы можем попробовать записать H в терминах V. Если нам это удастся, уравнение 6.34 может быть полностью записано на языке V. Тогда легко будет заменить все V на x, и вы бы заставили меня обманом сообщить производную Λ.

Автор: Ладно, мне это по-прежнему не по душе, но думаю, что понимаю, о чем вы. Формула для кратчайшего пути говорит нам, что $V^2 + H^2 = 1$, что можно записать как $H = \sqrt{1 - V^2}$. При такой замене уравнение 6.34 преобразуется так:

$$\frac{d}{dV}\Lambda(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}. \tag{6.35}$$

Теперь у нас везде только V. Мы можем менять обозначения, как нам угодно, поэтому верно и равенство:

$$\frac{d}{dx}\Lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.36}$$

Автор: Кому-то станет плохо от такого рассуждения.

Читатель: Ну, вы всегда говорили, что, если не уверены в каком-то рассуждении, полезно посмотреть, нельзя ли получить тот же результат иначе. Можем попробовать.

Автор: Ладно… Думаю, мы могли бы вывернуть это рассуждение наизнанку.

Читатель: Как?

Автор: Мы использовали предложение $\Lambda(V(x)) = x$, чтобы заставить Математику сообщить нам $\Lambda'(x)$. А если взять $V(\Lambda(x) = x$, но в остальном сделать точно то же самое? Если при этом мы получим тот же ответ для $\Lambda'(x)$, то я бы беспокоился меньше. Есть минутка?

Читатель: Минутка? Если уж я так далеко забрался в этой книге, то я, видимо, крайне терпеливый человек. Можете не спешить.

Автор (*вздыхает**): Вы великолепны. Ладно, постараюсь побыстрее. В этот раз мы определим $A(x) \equiv V(\Lambda(x))$, которая также равна x, поскольку Λ и V отменяют друг друга, и, следовательно, $A'(x) = 1$. Теперь, рассуждая так же, как и выше, мы последовательно получаем:

$$1 = \frac{d}{dx}A(x) \equiv \frac{d}{dx}V\big(\Lambda(x)\big) = \frac{d\Lambda(x)}{dx}\frac{d}{d\Lambda(x)}V\big(\Lambda(x)\big) \equiv \frac{d\Lambda}{dx}\frac{d}{d\Lambda}V(\Lambda). \tag{6.37}$$

Первое равенство выполнено в силу $A(x) = x$, третье использует молоток для нового сокращения, оставшиеся два — просто определения. Справа есть производная Λ, которая равна H.

---

* (*Терпение Читателя, несмотря на многословие Автора, согревает сердце Автора, и он переполнен 1/2 (платонической + неопределенной) любовью, которая далее (читай: сейчас) сопровождается глубоким чувством смущения от публичного разглашения такого чувства. В конце концов, думал Автор, не предполагалось говорить такие вещи в учебнике (или что бы это ни было). Но я отошел от темы…*)

Поэтому мы получили:

$$1 = \left(\frac{d\Lambda}{dx}\right) H(\Lambda).$$

Фрагмент $H(\Lambda)$ выглядит необычно, но это всего лишь H(*нечто*), и любое *нечто* внутри H можно представлять как некий угол. Поэтому мы можем применить формулу для кратчайшего пути и получить $H(\Lambda)^2 + V(\Lambda)^2 = 1$. Отсюда $H(\Lambda) = \sqrt{1 - V(\Lambda)^2}$, что дает нам:

$$1 = \left(\frac{d\Lambda}{dx}\right)\left(\sqrt{1 - V(\Lambda)^2}\right), \text{ соответственно, } \frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - V(\Lambda)^2}}.$$

Стоп! Это же не то, что мы получили в прошлый раз.

Математика: Не думаю. Мы просто не стали писать x, чтобы было не так громоздко. Вы писали Λ вместо $\Lambda(x)$.

Автор: Да, верно. Поэтому $V(\Lambda)$ — на самом деле $V(\Lambda(x))$, а это по определению равно x. Можно написать:

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

и ровно то же мы получили в уравнении 6.36!

Математика: Убедились?

Автор: Чуть-чуть больше, чем раньше.

Диез сопротивляется

Автор: Хорошо. Что теперь?

Математика: Ну, мы только что убедили себя в том, что

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6.38}$$

Если мы вычислим $\Lambda(1)$, мы можем вычислить $\sharp$, потому что $\sharp = 2\Lambda(1)$.

Автор: Как то, что мы сделали, может помочь вычислить $\Lambda(1)$?

Математика: Хм… не думаю, что поможет.

Автор: Ну вот…

Математика: Мы планировали использовать Ностальгическое устройство, и для этого нам нужны были все производные. Мы только что нашли первую.

Автор: Да, и это было тяжко!

Читатель: Может, применить фундаментальный молоток?

Математика: О, может быть. Почему вы об этом подумали?

Читатель: Так он связывает машины и их производные, поэтому ему по силам помочь нам связать информацию о производной Λ, которую мы только что получили, с самой Λ. Я не знаю.

Автор: А что, верно. Фундаментальный молоток утверждает:

$$\int_a^b \left(\frac{d\Lambda}{dx}\right) dx = \Lambda(b) - \Lambda(a)\,.$$

Нам нужно $\Lambda(1)$. Если мы возьмем $b = 1$ и учтем уравнение 6.38, то можем написать:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \Lambda(1) - \Lambda(a). \tag{6.39}$$

Хм. Нам нужно только $\Lambda(1)$. Было бы неплохо избавиться от $\Lambda(a)$ справа.

Читатель: Есть ли какое-нибудь a, при котором $\Lambda(a) = 0$?

Математика: Мы знаем о Λ немного — мы только определили, что это любая машина, которая отменяет V. Мы знаем, что $V(0) = 0$. Но если Λ отменяет V, то $\Lambda(0) = 0$, разве нет?

Автор: Похоже на правду.

Читатель: Отлично! Поэтому выберем $a = 0$, и уравнение 6.39 примет вид:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \;=\; \Lambda(1) - \Lambda(0) \;=\; \Lambda(1). \tag{6.40}$$

А теперь вспомним, что $\sharp = 2\Lambda(1)$, и получим:

$$\sharp \;=\; 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \tag{6.41}$$

Автор: Превосходно! Мы закончили?

Математика: Думаю, да.

Читатель: Ничего подобного! Мы же не получили численного значения ♯! Смысл-то был именно в этом.

Автор: И как нам вычислить значение ♯?

Читатель: Нужно найти интеграл из уравнения 6.41. Как?

Автор: Не знаю.

Математика: Я тоже.

Читатель: Да вы просто дразнитесь…

Обратно к началу

Читатель: Вы хотите мне сказать, что мы сейчас не ближе к нахождению ♯, чем в самом начале?!

Автор: Я не знаю. В чем-то ближе. Мы немало узнали о том, как атаковать эту задачу… но да, мы пока буксуем. Мы не умеем вычислять интеграл в уравнении 6.41.

Читатель: Мы могли бы применить грубую силу. Приблизительно.

Автор: Сложить площади кучи узких прямоугольников?

Читатель: Да!

Математика: Это звучит неприятно. Мне не хочется.

Читатель: Давайте! Это надолго.

Автор: Ну ладно, если вам так хочется. Начинаем.

Математика: Наслаждайтесь вдвоем. Я буду обдумывать эту задачу самостоятельно.

(Математика отходит в другой угол комнаты.)

Автор: Что ж, мы можем рассмотреть много точек на отрезке от 0 до 1, например:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

Их можно обозначить $x_k \equiv \frac{k}{n}$, где n — некое большое число, а k пробегает от 0 до n.

Читатель: Хорошо, продолжайте!

Автор: Расстояние между любыми соседними точками одинаково, то есть $\Delta x_k = \frac{1}{n}$.

Читатель: Да. А дальше?

Автор: А дальше мы можем аппроксимировать интеграл в уравнении 6.41:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\approx\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}}\,\Delta x_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

М-да, выглядит ужасно.

Читатель: Вперед!

Автор: Нет, не стоит. Как мы будем это вычислять?

Читатель: Мы можем позвонить Алу и Крему! Они же просили звонить, если у нас будут какие-нибудь вычислительные проблемы.

Автор: Понимаю, что можем, но я чувствую себя виноватым, когда мы просим Ала и Крема делать для нас то, с чем не справляемся сами. Когда мы вычисляли *e*, то изобрели два выражения, которые мы *могли* в принципе посчитать и сами. Нам просто не хотелось заниматься арифметикой. Если бы мы добрались до такого места, я был бы не против привлечь Ала и Крема.

Читатель: А почему это не вычислить?

Автор: Подозреваю, что вычислить можно, но это сумма множества слагаемых, и в каждом квадратный корень. Мы не умеем вычислять квадратные корни.

Читатель: Умеем! Мы можем использовать Ностальгическое устройство!

Автор: Да, конечно… Я имею в виду, что мы могли бы вычислить любой *конкретный* квадратный корень с любой точностью. Но здесь сумма огромного числа квадратных корней. Думаю, мы можем вычислить ее с произвольной точностью, разложив каждый корень с помощью Ностальгического устройства, обрезав каждое разложение после некоторого количества слагаемых, а затем сложив все суммы. Но тогда получится огромная неуклюжая двойная сумма. Даже если мы получим верный ответ таким способом, это уродливо. Мы должны суметь найти число ♯, но при этом незачем ощущать, будто мы его зарезали.

Читатель: Забудьте это!

(Читатель покидает Автора и направляется к Математике, которая напряженно работает над чем-то в другом углу комнаты.)

Читатель: Привет, Математика. Есть прогресс?

(Математика продолжает работать и говорит с Читателем, не поднимая глаз от стола.)

Математика: Пока не знаю. Я поэкспериментировала с другими машинами, которые выплевывают число ♯, когда в них подают что-нибудь простое. А вы с Автором продвинулись?

Читатель: Немного. Не слишком. Мы получили выражение для ♯, но там есть квадратные корни, и оно уродливое. Автор заявил, что у него нет чувства, что задача решена.

Математика: Что? Почему нет?

Читатель: Потому что мы не можем вычислить ответ сами. То есть мы можем, но Автор очень придирчивый и разборчивый. Было бы много чисел и приближений. Но мы очень близки!

Математика: Сочувствую. Множество чисел и приближений порой весьма уродливы. И вообще зачем все это, если мы не получим то, что нам нравится?

Читатель: Но если мы такие разборчивые, как мы собираемся решать эту задачу? Да, лучше простой ответ или такой, чтобы вы вдвоем не чувствовали себя так, будто мы зарезали ♯. Но как мы это собираемся сделать?

Математика: Я не знаю. В чем, вы сказали, была проблема у Автора?

Читатель: Подозреваю, он просто не любит квадратные корни.

Математика: Интересно… Думаю, что знаю, как обойтись без них.

Читатель: Погодите, вы серьезно?

Математика: Может быть. В каком месте квадратный корень появился в первый раз?

Читатель: Когда мы переходили к новому сокращению. Мы хотели выразить всё в терминах *V*. Мы написали $V^2 + H^2 = 1$, а потом выразили $H = \sqrt{1 - V^2}$. Тогда и появился квадратный корень.

Математика: То есть виновата V.

Читатель: Что вы имеете в виду?

Математика: Почему вы использовали V в первый раз?

Читатель: Потому что нам нужна была какая-нибудь машина, которая выплевывала бы $\sharp$, когда мы подаем в нее что-нибудь простое. Мы знали, что $V(\frac{\sharp}{2}) = 1$, поэтому $\Lambda(1) = \frac{\sharp}{2}$. Если мы не можем вычислить $\Lambda(1)$, то мы не вычислим и $\sharp$. А значит, нам придется иметь дело с квадратными корнями.

Математика: Квадратный корень появился, потому что нам нужно было выразить производную V исключительно через саму V. Производная V равна H, а не V, что и привело к уродливым квадратным корням.

Читатель: Не понимаю, как нам продвинуться вперед.

Математика: Нам нужна машина, которая выплевывает $\sharp$, когда мы подаем в нее что-нибудь простое, так?

Читатель: Так.

Математика: И нам нужно избежать отвратительных квадратных корней, поэтому мы не хотим использовать сами V или H.

Читатель: Верно.

Математика: Тогда у меня есть безумная идея. Помните бессмысленные машины типа тангенса, на которые жаловался Автор в главе 4?

Читатель: Смутно.

Математика: Пока вы вдвоем сидели, я посмотрела ту часть книги. Может, сейчас — тот единственный раз, когда действительно полезно использовать одну из них.

Читатель: Не говорите Автору. Он же наверняка взбесится. А в чем ваша идея?

Математика: В главе 4 Автор упомянул машину «тангенс». Она определялась как $T \equiv \frac{V}{H}$. Я почитала и обратила внимание, что его производная $T' = 1 + T^2$. Поскольку она выражается через него же без всяких квадратных корней, это может решить обе проблемы, с которыми мы столкнулись раньше.

Читатель: Превосходно. Попробуем рассуждение, аналогичное приведенному.

Выкапывание похороненного тангенса

Читатель: Итак, пусть $T(x) \equiv \frac{V(x)}{H(x)}$. Если мы подадим в него $\frac{\sharp}{2}$, эта машина выплюнет… хм… $\frac{1}{0}$. Не совсем понимаю, что с этим делать. Может, T выплевывает когда-нибудь что-то менее обескураживающее?

Математика: Да, если мы подадим туда $\frac{\sharp}{4}$, восьмую часть оборота, то $V = H$ и $T(\frac{\sharp}{4}) = 1$. Это просто.

Читатель: Прекрасно. По тем же причинам, что и выше, нам нужен не T. Нам нужна его противоположность, ведь мы хотим иметь машину, которая выплевывает $\sharp$, когда мы туда подаем что-то простое. Если существует машина $\perp(x)$, которая может отменять T таким образом:

$$\perp(T(x)) = x,$$

у нас было бы $\perp(1) = \frac{\sharp}{4}$, откуда $\sharp = 4\perp(1)$.

Математика (*с внезапным возбуждением*): Это может сработать…

Читатель: Давайте действовать точно так, как с Λ. Возможно, теперь это себя окупит. Прежде всего определим $A(x) \equiv \perp(T(x))$, поэтому втайне $A(x) = x$, а производная $\frac{dA}{dx} = 1$. Теперь можно применить молоток для нового сокращения:

$$1 = \frac{dA}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\perp\left(T\left(x\right)\right) = \frac{dT\left(x\right)}{dx}\frac{d}{dT\left(x\right)}\perp\left(T\left(x\right)\right) \equiv \frac{dT}{dx}\frac{d}{dT}\perp\left(T\right). \qquad (6.42)$$

Математика: Сейчас можно использовать

$$\frac{dT}{dx} = 1 + T^2$$

из главы 4. Тогда из 6.42 получим:

$$\left(1+T^2\right)\left(\frac{d}{dT}\perp(T)\right)=1, \text{ откуда } \frac{d}{dT}\perp(T)=\frac{1}{1+T^2}.$$

Читатель: Прекрасно. Здесь все в терминах T, поэтому мы можем ввести новое сокращение и получить:

$$\frac{d}{dx}\perp(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Что мы дальше делали в рассуждении с V? Использовали фундаментальный молоток для ее производной. Теперь мы можем использовать фундаментальный молоток для производной $\perp$. Получаем:

$$\int_a^b\left(\frac{d\perp}{dx}\right)dx=\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx=\perp(b)-\perp(a). \tag{6.43}$$

Математика: О-о-о, у меня отличные ощущения. Нам нужно $\perp(1)$, так что положим $b = 1$. Мы не хотим возиться с $\perp(a)$, поэтому выберем a так, чтобы $\perp(0) = 0$.

Читатель: Поскольку $T(0) = 0$, то и $\perp(0) = 0$. Тогда справа в 6.43 стоит $\perp(1)$, а интеграл от $a = 0$ до $b = 1$.

Математика: Фантастика. Мы уже знаем, что $\sharp = 4 \cdot \perp(1)$, поэтому:

$$\sharp = 4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx. \tag{6.44}$$

Спускаем с поводка Ностальгическое устройство

Математика: Что теперь?

Читатель: Мы умеем вычислять этот интеграл?

Математика: Я не умею.

Читатель: Я тоже.

Математика: Если мы всё это проделали напрасно, я могу уйти из книги.

Читатель: Я тоже. Это неприятно.

(К Читателю и Математике подходит Автор.)

Автор: Привет, парочка. Продвинулись?

Читатель: Мы были снова близки… и снова застряли.

Автор: Что вы сделали?

Математика: Смотрите сами.

(Автор просматривает разговор выше.)

Автор (*подавленно*): О нет…

(Автор молча сидит некоторое время.)

Читатель (*Математике*): Ой-ей-ей, я думаю, он разозлился из-за того, что мы использовали машину, на которую он жаловался в гла…

Математика: Это была идея Читателя!!!

Автор: Нет-нет, не в этом дело. Просто… если вы уйдете из книги… оба… думаю, я этого не вынесу. После всего, через что мы прошли… Я не смогу вернуться, чтобы проделать это в одиночку…

Читатель: Ох.

Математика: Ох.

Автор: Пожалуйста, не уходите… То есть вы можете. Если хотите… То есть нормально, если вы так поступите… Я знаю, что это неприятно. Тут время от времени куча чудовищных деталей, особенно сейчас. Но ведь единственная альтернатива — скрыть от вас что-нибудь. Я не уверен, что мог бы закончить книгу, если бы пришлось так сделать. Было бы меньше работы, но намного сложнее. Я не хотел вам лгать. Так что можете уйти, если хотите. Но пока вы здесь… попробуем пройти через все это вместе… Хорошо?

Читатель: Хорошо.

Математика: Хорошо.

(Воцаряется $\frac{1}{2}$*(неловкая + спокойная) тишина.)*

Математика: Я не уверена, что могла бы уйти, если бы захотела…

Автор: Ха! В любом случае вы получили прекрасный результат!

Читатель: Как это? Мы же застряли!

Автор: Может, и нет. Пока вы беседовали, я экспериментировал с Ностальгическим устройством для варианта задачи с квадратными корнями. Это было ужасно, но натолкнуло меня на идею. Проверьте ее. Вы только что показали:

$$\sharp = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx. \tag{6.45}$$

А если разложить $\frac{1}{1+x^2}$ с помощью Ностальгического устройства?

Математика: Не сработает. Нам же нужно знать все производные.

Читатель: Ну, нулевая производная — сама машина, так?

Автор: Верно! Поэтому $M^{(0)}(0) \equiv M(0) = 1$.

Читатель: Первая производная равна:

$$M'(x) = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1} = -1 \cdot (1+x^2)^{-2}(2x),$$

поэтому $M'(0) = 0$.

Математика: Вторая производная — производная первой:

$$M''(x) = (-1)(-2)(2x)(1+x^2)^{-3} + (-2) \cdot (1+x^2)^{-2},$$

поэтому $M''(0) = -2$.

Автор: Это уже становится безобразным. Может, сжульничать?

Читатель: Как?

Автор: Ну, $\frac{1}{1+x^2}$ — это же просто машина $m(s) \equiv \frac{1}{1+s}$, куда подставлено x^2.

Читатель: И что?

Автор: Может, просто использовать Ностальгическое устройство для машины $\frac{1}{1+s}$, а потом подставить x^2 в результат? Кажется, так будет намного проще.

Читатель: А это сработает?

Автор: Не уверен. Но вроде бы должно сработать.

Читатель: Думаю, попробовать надо.

Математика: Подождите, мы начинаем сначала?

Автор: Нет, не беспокойтесь. Но давайте искать производные у немного другой машины. Смотрите. Определяем:

$$m(s) \equiv \frac{1}{1+s}.$$

Нулевая производная — сама машина, поэтому $m^{(0)}(0) \equiv m(0) = 1$.

Математика: Первая производная м равна

$$m'(s) = -(1+s)^{-2}, \text{ поэтому } m'(0) = -1.$$

Читатель: Вторая производная равна

$$m''(s) = (-1)(-2)(1+s)^{-3}, \text{ поэтому } m''(0) = 2.$$

Ух ты, а это намного проще!

Автор: Точно? И мы можем увидеть, что n-я производная равна

$$m^{(n)}(s) = (-1)(-2)\cdots(-n)(1+s)^{-n-1}, \text{ поэтому } m^{(n)}(0) = (-1)(-2)\cdots(-n).$$

Хм-м… Что это?

Математика: У нас есть n отрицательных вещей, так?

Автор: Да.

Математика: То есть n экземпляров (-1). Их можно собрать и вынести вперед, а останется просто $n!$, так? Получилось, $m^{(n)}(0) = (-1)^n n!$.

Читатель: И больше нам для применения Ностальгического устройства к $m(s)$ ничего не надо, поэтому:

$$m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n.$$

Что теперь?

Автор: Но ведь $M(x) = m(x^2)$, так что подставляем сюда x^2:

$$M(x) = m(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{6.46}$$

И зачем мы это делали?

Математика: Мы пытались записать выражение, придуманное Читателем и мной, в том виде, который позволит нам выйти из тупика. Мы писали:

$$\sharp = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx. \tag{6.47}$$

Поскольку мы разложили $\frac{1}{1+x^2}$ с помощью Ностальгического устройства и получили 6.46, эту сумму можно подставить в 6.47. Получим:

$$\sharp = 4\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\right)\,dx. \tag{6.48}$$

Читатель: Наверное, страшнее этого я ничего в жизни не видел.

Автор: Да, вряд ли мы знаем, что делать с этим.

Математика: Разумеется, знаем!

Бесконечно мелко разбиваем антимолотками

Математика: Да это не так страшно, как кажется. Я запишу это так:

$$\sharp = 4\int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right)\,dx. \tag{6.49}$$

Читатель: Ух ты! Это намного лучше.

Автор: Подозреваю, сейчас можно использовать антимолоток для сложения, чтобы разбить интеграл на части.

Читатель: А он работает для бесконечных сумм?

Автор: Не знаю, но будем надеяться, что работает для этой суммы! Либо так, либо сдаваться, так что попробуем. Как только мы разобьем интеграл, нам нужно придумать антипроизводную для каждого слагаемого. Проверяйте:

$$\sharp = 4\cdot\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right]_0^1, \tag{6.50}$$

а это просто сокращение для

$$\sharp = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right). \tag{6.51}$$

Диез сдается

Читатель: Получается, $\sharp$ — просто учетверенная бесконечная сумма стоящих на руках нечетных чисел, которые берутся с переменным знаком?

Автор: Думаю, так.

Математика: Если n — целое число, то $2n$ будет всегда четным, а $2n + 1$ всегда нечетным, поэтому сумму можно записать в таком виде:

$$\sharp \ = \ 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{6.52}$$

Автор: Превосходно! Нет квадратных корней или еще чего-нибудь такого. Мы описали число $\sharp$ исключительно арифметикой! В принципе мы можем посчитать это и сами.

Читатель: Это значит, что можно звонить Алу и Крему?

Математика: Безусловно.

(Математика снова берет у Автора телефон и набирает номер.)

Математика: Ал, послушай, вы с Кремом заняты?.. Заняты?.. Что делаете?.. О! Чудесно. Я так рада, что вы в итоге… Слушай, мне нужно быстро. Это не отнимет много времени. Мы знаем, что вы не работаете с бесконечными заданиями, но не могли бы вы посчитать…

(Математика шепчет в телефон уравнение 6.52.)

…если $n = 100\,000$?

Автор: Сколько времени это займет?

Математика: Он говорит, что это примерно 3,14160.

Автор: Ух ты! Быстро. Попросите посчитать еще раз, для первого миллиона слагаемых.

Математика (*через некоторое время*): Он говорит, что это примерно 3,14159.

Читатель: Прекрасно, похоже, что первые три знака после запятой стабилизировались, а последние два сильно не меняются.

Автор: Кстати, помните, как в главе 4 мы предполагали, что $\sharp$ должно быть где-то недалеко от 3? Мы были правы. Это лишний раз подтверждает, что наши последние рассуждения были правильными.

Математика: Не могу поверить, что мы закончили.

Автор: Я понимаю… Без сомнений, это была самая трудная вещь, которую мы до сих пор делали. Но мы сделали! Мы прикончили $\sharp$. В итоге оказалось, что

$$\sharp \approx 3{,}14159.$$

Автор: Как много, оказывается, скрыто от нас, когда нам просто говорят, что площадь круга равна πr^2, и…

Читатель: Эй, это мне напомнило кое-что. Вы говорили в главе 4, что после того, как мы вычислим эту штуку, мы могли бы начать называть ее π.

Автор: Я говорил?

(Автор листает назад до главы 4.)

Да, вы правы. Говорил.

Математика: Что такое, в конце концов, это π?

Читатель: Ну, в учебниках π — это…

Автор: Забудьте. Давайте и дальше называть это число $\sharp$. Мы заслужили это.

Читатель: Для меня годится.

ГЛАВА N

НОВОЕ — ЭТО СТАРОЕ

N.1. Мостик

N.1.1. Полное раскрытие

(Автор и Читатель прогуливаются по локально евклидову холму в неизвестном месте.)

Автор: Пожалуй, это моя наименее любимая глава.

Читатель: Не думал, что вы мне скажете такое.

Автор: В самом деле? После всего, через что мы прошли? Зачем мне это скрывать?

Читатель: Нет, я не об этом. Я имею в виду только то, что нас учили не говорить такое… в таких местах.

Автор: Почему?

Читатель: Я не знаю. Профессионализм?

Автор: Вроде того… Я в этом не лучший спец… Даже когда нужно. Но если серьезно, почему бы мне не сказать вам, что это моя наименее любимая глава? Если бы я скрыл, это отдалило бы нас друг от друга, не так ли?

Читатель: Что вы имеете в виду?

Автор: Если бы я вам не признался, а потом эта глава не оправдала бы ваших ожиданий, вы могли бы сказать: «Сначала я считал, что эта книга имеет G единиц хорошести… но потом глава N оказалась довольно [*отрицательное прилагательное*]. Тогда я стал думать, что в книге было только g единиц хорошести… где g меньше G».

Читатель: Вы накручиваете себя. К тому же вы неправы. Я никогда так не скажу — с такими G, g и N. Вы додумываете за меня.

Автор: Альтернатива — не рассказывать вам вообще ничего…

(Воцаряется [неопределенное прилагательное] тишина.)

Читатель: Так почему это ваша нелюбимая глава?

Автор: Это мостик.

Читатель: Мостик куда?

Автор: К чему-то лучшему. К тому, что я действительно хочу вам показать.

Читатель: Когда мы туда доберемся?

Автор: Скоро. В последней главе. Я думаю назвать ее глава $\aleph$.

Читатель: Что значит $\aleph$?

Автор: Ничего. Это буква древнееврейского алфавита «алеф». Ею обозначают бесконечность.

Читатель: Я думал, для этого используется ∞.

Автор: Да. Для другой вещи. Символ ∞ означает нечисловой предел, который превосходит все вещественные числа. Его используют разными способами. Обычно для того, чтобы показать, что какая-то последовательность неограниченно возрастает. Но этот символ описывает поведение, а не число или обычный математический объект. Конечно, есть и исключения. Некоторые люди используют его иначе. Люди брезгливы по отношению к бесконечному.

Читатель: А что такое $\aleph$?

Автор: Этот вид бесконечного лучше.

Читатель: Лучше?

Автор: Хм… нет. Это эстетическое предпочтение. Но это символ, созданный людьми, которые не были брезгливыми. Они подошли к идее серьезно. Этот термин используется в формальной теории бесконечных множеств. Для обозначения бесконечностей разного размера. Их называют «трансфинитными кардинальными числами». У нас нет времени говорить о них… боже, так мало времени… Честно говоря, название «Глава ∞» было бы точнее. Но «Глава $\aleph$» выглядит правильно. Как-то более подлинно.

Читатель: Не хочу сказать ничего плохого, но… мне действительно нужно все это знать?

Автор: Нет. Но мне хочется показать главу ℵ. Она рассказывает об анализе в бесконечном числе измерений. Это красиво. Никакие книги не объясняют, насколько это просто. А я хочу показать это вам.

Читатель: Так почему не начать здесь?

Автор: Сначала нам нужна эта глава. В качестве мостика. Думаю, она не так плоха. Тема сама по себе замечательна. У меня нет ощущения, что я отдал ей должное.

Читатель: Отдал должное чему?

Автор: Теме этой главы.

Читатель: Какой?

Автор: Анализ для нескольких переменных.

N.1.2. Что значит «нескольких переменных»?

Читатель: Что значит «нескольких переменных»?

Автор: Ха, ничего. Просто подумал, что это хорошее название для раздела.

Читатель: И что оно означает? Я слышал раньше слово «переменная».

Автор: Где?

Читатель: В этой книге.

Автор: Я его не говорил.

(Читатель листает книгу назад.)

Читатель: Говорили!

Автор: Я?

(Автор листает книгу назад.)

Автор: Хм… Похоже, да. В последнее время у меня что-то с памятью. Напомните мне еще раз, что такое «переменная».

Читатель: Это название в учебниках для той еды, которую мы подавали в наши машины.

Автор: А, понятно. То странное название.

Читатель: И еще они используют это слово для того, что машины выплевывают.

Автор: Что? Почему?

Читатель: Я думаю, потому что мы можем выбирать, чем кормить машину… Раз вещи могут изменяться, значит, они «переменные».

Автор: Да, помню. И наши машины выплевывают разные вещи в зависимости от того, что в них подавали, поэтому по той же логике то, что они выплевывают, тоже «переменные».

Читатель: Да.

Автор: Ладно. Тогда в чем проблема с «несколькими переменными»?

Читатель: «Несколько» — это «больше одной».

Автор: Стоп, у меня вопрос. Вы сейчас сказали, что слово «переменная» используется и для того, что кладут в машину, и для того, что она выплевывает.

Читатель: И что?

Автор: Значит, у нас уже больше одной переменной! Тогда мы *уже* занимаемся анализом для нескольких переменных.

Читатель: Ну, думаю, да. В каком-то неважном смысле. Но это придирки к терминологии. Перед тем как понимать термины, думаю, мы должны изобрести это.

Автор: Изобрести что?

Читатель: Анализ для нескольких переменных.

Автор: Как нам это сделать?

Читатель: Я не знаю. Даже если мы уже занимались анализом «нескольких переменных» в формальном смысле, который вы только что упомянули, слово «несколько» не значит просто «две». Зачем останавливаться на двух?

Автор: Что вы имеете в виду?

Читатель: Что если построить машину, которая съедает две вещи, а выплевывает одну?

Автор: О! Или съедает одну, а выплевывает две?

Читатель: Именно!

Автор: Или съедает две и выплевывает две?

Читатель: Или съедает n вещей, а выплевывает m?

Автор: Ха! Или съедает бесконечно много вещей, а…

Читатель: Давайте не увлекаться. Вы же сказали, что это только мостик.

Автор: Да какая разница! Давайте попробуем! Всё это!

Читатель: Но мы не знаем, как пробовать.

Автор: Ну и что!

Читатель: Мы знаем, как написать сокращения и то, что подаем, но…

Автор: Как?

Читатель: Ну, для машины, которая съедает две вещи, а выплевывает одну, мы могли бы сделать так: саму машину назвать, как обычно, m, две вещи x и y, а ту, которую она выплевывает, — $m(x, y)$. А если машина съедает n вещей, а выплевывает одну, мы могли бы писать $m(x, y, z…)$. Ой, буквы кончились. Я имею в виду, мы могли бы писать $m(x_1, x_2, …, x_n)$.

Автор: А другие?

Читатель: Когда машина съедает одну вещь, а выдает две?

Автор: Да.

Читатель: Ну, можно писать m для машины, x для вещи, которую та съедает, а потом a и b для того, что она выплевывает.

Автор: Неплохо звучит. Но погодите, наше старое сокращение для «вещи, которую выплевывает машина» напоминало нам о зависимости результата от того, что мы кладем в машину. Я забуду это, если мы не напомним.

Читатель: Ладно. Тогда мы можем писать m для машины, x для вещи, которую та съедает, а потом $f(x)$ и $g(x)$ для двух вещей, которые она выплевывает.

Автор: Отлично! Мне только что пришла в голову идея. Вот вы сейчас написали $m(x, y)$ для машины, которая ест две вещи, а выдает одну? Что, если мы будем считать это машиной, которая ест *одну большую вещь и* выплевывает одну? Та, которую она ест, по-прежнему какая-то вещь, но теперь это не число, а список двух чисел: та странная штука (x, y).

Читатель: Пусть так. Я не думал об (x, y) как об одной вещи, но думаю, что слово «список» действительно звучит так, будто это одна вещь. Ну, давайте так, если вам удобно. О! А ведь тогда мы могли бы сделать то же для машины «одно на входе, два на выходе» и записать так: $m(x) \equiv (f(x), g(x))$.

Автор: И тогда мы могли бы заняться анализом для этих вещей!

Читатель: Мы не знаем, как это делать с ними. Я могу без проблем придумать сокращения, но…

Автор: Да какая разница! Давайте попробуем!

N.1.3. Что мы делаем, когда не знаем, что делать?

Читатель: Что нам делать с чем-то новым, если мы не знаем, что делать с новым?

Автор: Я практически уверен, что не знаю ответа на этот вопрос.

Читатель: Почему?

Автор: По определению.

Читатель: Тогда что мы будем делать?

Автор: Единственное, что мы можем.

Читатель: И что это?

Автор: Не делать ничего нового.

(Неловкая тишина.)

Читатель: Мне не кажется, что это разумная идея.

Автор: Она не разумная. Давайте попробуем!

Читатель: Как?

Автор: Как мы изначально изобрели производную?

Читатель: Мы использовали идею крутизны из главы 1 для двух бесконечно близких точек.

Автор: Как?

Читатель: У нас была машина m, мы подавали в нее какую-то еду x, а она выплевывала $m(x)$. Затем мы делали крохотное изменение dx в еде, меняя ее с x на $x + dx$. Мы подавали новую еду в машину, и та выдавала $m(x + dx)$. Затем мы смотрели на разницу в поведении машины до и после, иными словами:

$$d(\text{Выход}) \equiv \text{Выход}_{\text{после}} - \text{Выход}_{\text{до}},$$

или, что то же самое,

$$dm \equiv m(x + dx) - m(x).$$

Автор: Точно. И производная была просто

$$\frac{dm}{dx} \equiv \frac{m(x+dx) - m(x)}{dx} \equiv \frac{\text{Крохотное изменение на выходе}}{\text{Крохотное изменение на входе}}.$$

Давайте попробуем сделать то же с нашими новыми машинами!

Читатель: Серьезно?

Автор: Почему нет? Попробуем некоторые из машин, для которых мы только что придумали сокращения.

Читатель: С какой начнем?

Автор: Не знаю. Выбирайте, какая больше всего нравится.

Читатель: Давайте $m(x) \equiv (f(x), g(x))$. Но что, если все это не имеет смысла?

Автор: Не беспокойтесь! Позже мы попробуем придать смысл тому, что сделаем. Если это не имеет смысла, мы будем колотить по нему, пока тот не появится.

Читатель: Э-э-э… ладно. Поехали. Определим $m(x) \equiv (f(x), g(x))$. Тогда, если мы используем то же определение, что и в случае одной переменной, мы можем написать:

$$dm \equiv m(x + dx) - m(x) \equiv (f(x + dx), g(x + dx)) - (f(x), g(x)).$$

Я в тупике. Мы не умеем складывать и вычитать два списка. Что делать?

Автор: Сделайте самое простое, что можно придумать.

Читатель: Что тут самое простое, что можно придумать?

Автор: Я не знаю. Вы придумывайте.

Читатель: Итак, мы не умеем складывать списки, но умеем складывать числа. Поэтому при сложении двух списков мы могли бы сложить все соответствующие элементы:

$$(a,b) + (A,B) \equiv (a + A,\ b + B).$$

То же для вычитания. Подозреваю, если мы так сделаем, наша новая идея сложения — та же старая идея. Как узнать, работает ли это?

Автор: Сложение списков — не то, о чем мы можем нечаянно сказать что-то неправильное. Мы можем определить его так, чтобы определение максимально облегчало нам жизнь. Так, как мы изобрели степени в интерлюдии 2.

Читатель: Хорошо. Вернемся туда, где остановились. Поскольку мы определили сложение и вычитание списков, мы можем написать:

$$dm \equiv (f(x + dx) - f(x), g(x + dx) - g(x)),$$

и тогда «производная» будет

$$\frac{dm}{dx} = \frac{\Big(f(x+dx) - f(x),\ g(x+dx) - g(x)\Big)}{dx}.$$

Читатель: Я снова застрял.

Автор: Почему?

Читатель: Я знаю, что dx — просто крохотное число, а деление на *нечто* — умножение на $\frac{1}{\textit{нечто}}$, так что можно написать:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{dx}\Big(f(x+dx) - f(x),\ g(x+dx) - g(x)\Big).$$

Но это нам ничего не дает. Мы пока не умеем умножать число на список.

Автор: Почему бы не сделать то же, что и выше?

Читатель: Хорошо. Я не знаю, как умножать число на список, но умею умножать число на число. Поэтому предположу, что мы можем определить умножение числа на список путем умножения числа на элементы списка:

$$c \cdot (x, y) \equiv (cx, cy).$$

Тогда мы выходим из тупика, поскольку можем написать:

$$\frac{dm}{dx} = \left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}, \frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx}\right).$$

Таким образом, производная этих новых странных машин — просто старые переменные, стоящие на каждом месте списка.

Автор: Это было не так трудно, как я ожидал. Напишем это в рамочке, чтобы отпраздновать!

Что мы только что изобрели

Если m — машина, которая ест одну вещь, а выплевывает две, то есть

$$m(x) \equiv (f(x), g(x)),$$

и если мы определим сложение двух списков самым тупым способом, какой только можно придумать, то есть:

$$(a,b) + (A,B) \equiv (a + A, b + B),$$

и если мы определим умножение числа на список самым тупым способом, какой только можно придумать, то есть:

$$c \cdot (x, y) \equiv (cx, cy),$$

то производная нашей новой машины равна:

$$\frac{d}{dx}m(x) \equiv \frac{d}{dx}(f(x),\ g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d}{dx}g(x)\right),$$

или, иначе:

$$m'(x) \equiv (f(x), g(x))' = (f'(x), g'(x)).$$

В этом смысле в идее анализа для нескольких переменных нет ничего нового. Это старые знакомые идеи, поставленные в каждое место списка.

Читатель: Вы упорно твердите, что тут нет ничего нового, но я не чувствую себя комфортно. Есть ощущение слишком нового.

Автор: Это не новое.

Читатель: Да, знаю, но можно привести несколько примеров?

Автор: Конечно. Попробуем найти производную машины $m(x) \equiv (2x, x^3)$.

Читатель: Хорошо. В силу всего, что мы сделали, я догадываюсь, что производная $m'(x) = (2, 3x^2)$. Верно?

Автор: Откуда мне знать? Вы действуете как человек, который уже изобрел эту штуку. Будто факты об этом расселись в каком-то пыльном учебнике. То, что мы сделали, *должно* быть верно в силу того, как мы определили: а) сложение списков; б) умножение списка на число. Скажите, верно ли это?

Читатель: Думаю, да.

Автор: Великолепно! Давайте другой пример. Скажем, мы определяем новую машину m таким образом:

$$m(x) \equiv (x^2 + 7x, e^{2x} + H(x)).$$

Как это продифференцировать?

Читатель: В силу всего того, что мы сейчас сделали, производная списка — это список из производных. Думаю, производная равна

$$m'(x) \equiv (2x + 7, 2e^{2x} - V(x)),$$

причем я использовал молоток для нового сокращения, чтобы продифференцировать e^{2x}. Также пришлось вернуться назад, чтобы вспомнить, как мы в главе 4 показали $H' = -V$.

Автор: Все верно! Перейдем к следующему разде…

Читатель: Подождите. Анализ — это же не только производные, верно? Мы использовали этот термин для разных странных вещей, которые мы проделывали с помощью лупы с бесконечным увеличением. В первую очередь это были производные, но позже мы пришли к идее интеграла, помните?

Автор: Верно. Но это было просто сложение, разве нет?

Читатель: Что-то вроде. Я имею в виду, что символ $\int_a^b m(x)dx$ был нашим сокращением для площади под графиком m между $x = a$ и $x = b$. А сокращение появилось от сложения множества площадей бесконечно узких прямоугольников. Поэтому интеграл интерпретировался через сложение, но не *воспринимался* как сложение.

Автор: Да? Ощущения дурацкие. Я чувствую любые неправильности. Это было простое сложение.

Читатель: И как интегрировать эти новые машины?

Автор: Я не знаю. Давайте смотреть.

Читатель: Мы хотим придать смысл чему-то вроде $\int_a^b (f(x), g(x))dx$. Величина dx — просто какое-то крохотное число, поэтому в силу нашего определения умножения числа на список это выражение можно записать так: $\int_a^b (f(x)dx, g(x)dx)$.

Автор: И мы определили сложение списков, внеся знак + внутрь. Поэтому я считаю, что разумно вносить $\int$ внутрь, ведь это тоже просто сложение. Вот так:

$$\int_a^b (f(x), g(x))dx \equiv \left(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx\right).$$

Читатель: Поэтому интеграл от списка — всего лишь список из обоих интегралов?

Автор: Думаю, да.

Читатель: Но как нам узнать, что это верно?

Автор: Точно так же, как в прошлый раз. Мы ведь на самом деле не создаем математику. То есть создаем, но не совсем. Если вам удобнее, думайте об этом как о предматематике. Когда мы изобретаем вещи, логика обратная. Если мы придумываем новую идею, то используем старые, пока не застрянем. Тогда мы вводим новое предположение, которое позволяет нам выйти из тупика. Фокус в том, чтобы выбраться оттуда с минимально возможными предположениями. Тогда изобретенная нами математика будет «элегантной». Но тут мы не можем быть правы или неправы.

Читатель: Я все еще не чувствую, что хорошо знаком с этими штуками. Можно несколько примеров?

Автор: Конечно! Вернемся к примеру, который был раньше. Скажем, у нас есть машина $m(x) = (2, 3x^2)$. Каков ее интеграл от $x = 0$ до $x = 7$?

Читатель: Применяя изобретенное ранее и добавив $\overset{ФМ}{=}$, когда мы используем фундаментальный молоток, получим:

$$\int_0^7 m(x)dx \equiv \int_0^7 (2, 3x^2)\, dx = \left(\int_0^7 2dx, \int_0^7 3x^2 dx\right) \overset{ФМ}{=}$$
$$\overset{ФМ}{=} \left([2x]_0^7, [x^3]_0^7\right) \equiv \left(2\cdot 7 - 2\cdot 0, 7^3 - 0^3\right) = \left(14, 7^3\right). \tag{N.1}$$

Читатель: Напомните мне, пожалуйста, чему равно 7^3?

Автор: Какому-то числу.

Читатель: Какому?

Автор: А кого это волнует? Оставьте 7^3. Арифметика мне надоела. Вернемся к идеям. Какие идеи вы использовали в своем выводе?

Читатель: Посмотрим. Думаю, мы использовали фундаментальный молоток и тот факт, что «интеграл списка равен списку интегралов». Остальные шаги были обозначениями и арифметикой. Это все, что тут есть?

Автор: Должно быть, так. Эти новые идеи — совсем не новые!

Читатель: Да-да, только это был очень простой пример. А если мы не сумеем придумать антипроизводную для одного из элементов?

Автор: Что мы делали раньше, когда не могли придумать антипроизводную в обычном анализе?

Читатель (*листая назад до главы 6*): Мы могли применить один из трех антимолотков, чтобы преобразовать задачу. Это можно сделать и в анализе для нескольких переменных?

Автор: Конечно.

Читатель: А как нам узнать, что они продолжают работать… А, верно. Для каждого места-элемента в списке это будет обычный анализ.

Они должны работать. Ну хорошо, а если мы попробуем это сделать и застрянем? Тогда что?

Автор: В точности то, что мы делали раньше: сдадимся! Мы никогда не доходили до той точки в обычном анализе, где могли решить любую мыслимую задачу. Мы не всеведущи и никогда ими не были. По определению мы можем решить только те задачи, которые способны решить. Если нам не удается решить какую-то задачу с помощью изобретенных инструментов, мы, по сути, не можем ничего, разве что биться о задачу головой или попросту замести ее под коврик и при желании вернуться к ней позже.

N.1.4. Погодите… Серьезно?

Читатель: Погодите… Серьезно? То есть этот новый материал действительно не нов?

Автор: Зависит от того, что вы вкладываете в эту фразу. Мы *потребовали*, чтобы новое не было ничем новым, поскольку при таком способе создания жизнь устроена проще всего. По-настоящему новый материал — действительно, по определению нечто ранее не существовавшее. Но мы определяли наш новый материал так, чтобы он не был таковым. По крайней мере в этот раз.

Читатель: Я запутался.

Автор: Напрасно. Тут не в чем путаться.

Читатель: Ладно… А теперь что?

Автор: Не знаю. Это нам решать. Я получаю удовольствие от идеи анализа для нескольких переменных, поэтому поэкспериментируем еще.

Читатель: Хорошо, что мы еще не сделали?

Автор (*оглядывается*): Мы не рассмотрели машины, которые едят две вещи, а выплевывают одну.

Читатель: Точно. Предположим, у нас есть машина, которая ест две вещи x и y, а выдает одну $m(x, y)$. Тогда… хм, а что нам делать?

Автор: Я не знаю. А что мы делали в этот момент для одной переменной?

Читатель: Мы немного меняли еду, которую подавали в машину, то есть переходили от *еда* к *еда* + *d*(*еда*).

Автор: Хм. Сейчас у нас два места. Что считать едой? О! У меня есть идея…

(Автор начинает что-то писать.)

Читатель: Предполагаю, мы могли бы рассмотреть каждое место по отдельности. Тогда у нас было бы две разных производных.

Автор: Что? Извините, я не слышал. Я думал, что мы могли бы считать *едой* весь список целиком и писать что-нибудь вроде $v \equiv (x, y)$. Тогда небольшое изменение в *еде* было бы чем-то для «крохотного списка», что бы это ни означало, который мы могли бы сократить как $dv \equiv (dx, dy)$. А вы что говорили?

Читатель: Я говорил, что мы могли бы рассмотреть каждое место в отдельности. Это дало бы нам два разных способа взять производную, по одному для каждого места.

Автор: Мне кажется, что эта идея лучше. Забудьте то, что я говорил, займемся сначала вашей идеей. Что вы подразумеваете под двумя разными производными?

Читатель: До сих пор мы имели дело с новым материалом, не делая ничего нового. Это были старые вещи. Как насчет такого: у нас есть машина m, которая ест две вещи x и y, а выдает одну $m(x, y)$. Сначала мы можем считать *едой* только x, не трогая y. Делаем крохотное изменение, переходя от x к $x + dx$. Потом, как всегда, сравниваем выход машины до и после, то есть рассматриваем $d(\text{Выход}) \equiv \text{Выход}_{\text{после}} - \text{Выход}_{\text{до}}$, что эквивалентно

$$dm \equiv m(x + dx, y) - m(x, y).$$

Автор: Подождите, вы сказали, что собираетесь сделать то же и с y, верно?

Читатель: Почему бы и нет?

Автор: Меня немного смущает вот что. Какое сокращение мы будем использовать, когда станем писать y вместо x?

Читатель: Я думал, мы просто напишем $dm \equiv m(x,y + dy) - m(x,y)$… А, вижу проблему. Я написал dm в качестве обозначения для обеих производных. Но ведь при моем определении это будут разные вещи. Тогда я просто поменяю обозначения и напишу вот так:

$$d_x m \equiv m(x + dx, y) - m(x, y),$$
$$d_y m \equiv m(x, y + dy) - m(x, y).$$

Автор: Нормально. Это более разумно.

Читатель: Теперь я думаю, что можно определить* производную m по x, разделив $d_x m$ на dx:

$$\frac{d_x m}{dx} \equiv \frac{m(x+dx, y) - m(x, y)}{dx}, \tag{N.2}$$

и производную m по y, разделив $d_x m$ на dy:

$$\frac{d_y m}{dy} \equiv \frac{m(x, y+dy) - m(x, y)}{dy}. \tag{N.3}$$

Автор: А как насчет двух оставшихся возможностей — $\frac{d_y m}{dx}$ и $\frac{d_x m}{dy}$?

Читатель: Понятия не имею. Я не понимаю, что это может значить.

Автор: В самом деле?

(Автор смотрит, как все определялось, и ненадолго задумывается.)

Автор: О! Я понял. Вы правы. Мы можем менять x, не трогая y, примерно так, как мы можем идти на запад, не сдвигаясь при этом к северу. Если мы хотим, чтобы производные имели обычную интерпретацию (своего рода крутизна), то две написанные мной вещи не имеют смысла. Это примерно как делить «подъем по вертикали» на Эверест на «перемещение

---

* При этом получаются так называемые частные производные функции m по x и по y. *Прим. перев.*

по горизонтали» по Аппалачской тропе*. Мне кажется, мы имеем право писать что-то вроде $\frac{d_x m}{dy}$, только на самом деле это не стоит разговора, так что давайте это игнорировать.

Читатель: Ладно! Что теперь?

Автор: Я не знаю. Я думал, что мы закончили.

Читатель: Закончили?

Автор: Думаю, да. Определения, которые вы написали в уравнениях N.2 и N.3, говорят нам, как найти обе производные. Эй! Но ведь эта «новая» идея по-прежнему не новая! Производная машины «от двух переменных» $m(x, y)$ по x получена нами в предположении, что y константа, вроде 7 или 52, и мы применяли обычный анализ! То же и для производной по y.

Читатель: Погодите, откуда вы знаете?

Автор: Это то, что вы написали в уравнениях N.2 и N.3. Я просто посмотрел на ваши выкладки.

Читатель: Прекрасно! Значит ли это, что мы можем использовать наши старые молотки для производных и этих машин? Мы ведь знаем, что их можно применять для предыдущей машины «одно на входе, два на выходе». Но сейчас у нас две разных производных. Можно ли точно так же использовать молотки? Откуда нам знать, работают ли они?

Автор: Должны! Новые идеи — просто старые идеи!

Читатель: Хорошо, я понял, что новый материал не нов, но он ощущается новым.

Автор: Не только для вас. Небольшое изменение в сокращениях может запутать всех. В этом смысле человеческий мозг забавен. Рассмотрим несколько новых примеров, чтобы привыкнуть к этой старой идее. Я определяю $m(x,y) = x^2y + 7y^2 - 12xy + 9$. Как найти производную по x?

Читатель: Думаю, что так:

$$\frac{d_x m}{dx} \equiv \frac{d_x}{dx}\Big(x^2y + 7y^2 - 12xy + 9\Big) = 2xy + 0 - 12y + 0 = 2xy - 12y\,.$$

* Аппалачская тропа — популярный пешеходный маршрут по горной системе Аппалачи в Северной Америке длиной около 3500 километров. *Прим. перев.*

Правильно?

Автор: Что вы имеете в виду?

Читатель: Что вы имеете в виду, спрашивая, что я имею в виду?

Автор: Представим, что мы вернулись к обычному анализу и вы пытаетесь дифференцировать $x^2\# + 7\#^2 - 12x\# + 9$. Вы бы беспокоились за то, правильный ли ответ у вас получился?

Читатель: Нет. Но с обычным анализом я знаком лучше. Когда одна переменная.

Автор: Но мы сейчас сделали именно это. Мы можем интересоваться, «правильно ли мы сделали или нет», но только если у нас нет уверенности в анализе с одной переменной. Потому что сейчас, по сути, мы имеем дело с ним.

Читатель: Я знаю. Вы уже повторили это надоевшее число раз, но все равно есть ощущение, что новый материал — и правда новый.

Автор: Тогда другой пример. Раз уж мы определили эти частные производные, мне кое-что интересно. Помните, в конце главы 2 мы говорили о том, что производные позволяют находить максимумы и минимумы?

Читатель: Может, помню. Может, нет. Не могу сказать.

Автор: Хорошо, полистайте назад, если не помните. Базовая идея состояла в том, что самая высокая точка графика должна быть местом, где наклон равен 0. То же верно для самой нижней точки. Есть некоторые исключения, но о них побеспокоимся позднее. Даже если мы не можем изобразить график машины, обычно мы можем найти точки ее максимума и минимума. По крайней мере, сократить бесконечное количество вариантов до некоторого небольшого конечного числа, когда можно проверить вручную.

Читатель: Сейчас мы можем сделать это же?

Автор: Это меня и интересует. Может быть, мы найдем точки максимума и минимума, если приравняем обе частные производные к 0.

Читатель: Посмотрим. С чего начнем?

Автор: Попробуем что-нибудь достаточно простое, чтобы мы знали, где минимум. Например, $m(x, y) \equiv x^2 + y^2$. Для $x = 0$ и $y = 0$ эта машина выдает 0, но все остальные значения x и y делают результат положительным, и минимальное значение, которое выплевывает эта машина, должно быть равно $m(0, 0) = 0$.

Читатель: Кажется, я понял. Согласно нашему определению частных производных, мы можем написать:

$$\frac{d_x m}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{d_y m}{dy} = 2y.$$

Если приравняем обе производные к 0:

$$\frac{d_x m}{dx} = 2x \overset{\text{Требование}}{=} 0 \quad \text{и} \quad \frac{d_y m}{dy} = 2y \overset{\text{Требование}}{=} 0,$$

то это эквивалентно $x = 0$ и $y = 0$. Эгей, сработало!

Автор: Отлично! Будет ли работать в более сложных случаях?

Читатель: Не знаю. Посмотрим на $m(x, y) \equiv (x - 3)^2 + (y + 2)^2$. Из тех же соображений эта машина выдает положительное число везде, кроме $x = 3$ и $y = -2$, когда она равна 0. А теперь раскроем скобки и посмотрим, сообщит ли нам математика точку минимума:

$$m(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13. \qquad \text{(N.4)}$$

Это та же машина, поскольку я просто все перемножил. Зато теперь не очевидно, что минимум должен быть при $x = 3$ и $y = -2$.

Автор: А зачем тогда вы раскрываете скобки, если минимум становится неочевидным?

Читатель: Потому что польза от нашей идеи есть только тогда, когда она делает то, чего мы не можем без нее. Способ находить точки наибольших и наименьших значений полезен только тогда, когда нельзя найти их, просто глядя на описание машины. Но если метод «приравнять обе частные производные к 0» работает, то он должен выдать $x = 3$ и $y = -2$, когда мы применим его к более сложному описанию машины, которое представлено в уравнении N.4.

Автор: Блестяще! Пробуйте!

Читатель: Хорошо, берем обе частные производные уравнения N.4 и приравниваем их к 0. В итоге получаем:

$$\frac{d_x m}{dx} = 2x - 6 \overset{\text{Требование}}{=} 0 \quad \text{и} \quad \frac{d_y m}{dy} = 2y + 4 \overset{\text{Требование}}{=} 0.$$

Ага! Первое выполнено только при $x = 3$, а второе — только при $y = -2$. Работает!

Автор: Великолепно! Теперь вы чувствуете себе более комфортно с этими штуками?

Читатель: Немножко. Но они все равно ощущаются новыми.

Автор: Нет.

Читатель: Я знаю. Может, еще пример?

Автор: Конечно. Какого рода?

Читатель: Может, на этот раз интеграл? Скажем,

$$\int_{x=1}^{x=3} x^2 y^{72} + ye^x + 5dx.$$

Если мы считаем y фиксированным числом вроде 7, то, думаю, оно ведет себя как 7. Антипроизводная той штуки, что стоит под знаком интеграла, равна $M(x) \equiv \frac{1}{3}x^3 y^{72} + ye^x + 5x$. Теперь можно использовать фундаментальный молоток.

$$\int_{x=1}^{x=3} x^2 y^{72} + ye^x + 5dx \;=\; M(3) - M(1) \equiv$$
$$\equiv \left[\frac{1}{3}3^3 y^{72} + ye^3 + 5 \cdot 3\right] - \left[\frac{1}{3}1^3 y^{72} + ye^1 + 5 \cdot 1\right].$$

Автор: Прекрасно! Вы всё сделали.

Читатель: Нет-нет. Я знаю, что упрощение — человеческая концепция и все такое, но хочется упростить хоть немного. Ну серьезно, а то там аж 1^3. Эта штука выше равна всего лишь…

$$(\text{Штука выше}) = \left[9y^{72} + ye^3 + 15\right] - \left[\frac{1}{3}y^{72} + ye + 5\right] =$$
$$= \left(9 - \frac{1}{3}\right)y^{72} + \left(e^3 - e\right)y + 10.$$

Сейчас можно найти общий знамена…

Автор: Что?! Чему вас учили в школе? Вы *всё сделали*.

Читатель: Хорошо. Просто после стольких лет в школе нетрудно иметь непреодолимое ощущение, что нужно «упрощать».

Автор: Побуждения — это хорошо, но это должны быть ваши побуждения. Мне хватит! Не тратьте время, пытаясь удовлетворять чужие нужды. Иначе упрощение только усложнит дело.

Читатель: Хорошо. Итак, кажется, мы закончили. Подождите, мы действительно закончили? Интеграл все еще содержит y.

Автор: Да, это странно.

Читатель: Минутку, я думаю, что все нормально. Мы только что вычислили площадь под графиком машины $m(x) \equiv x^2y^{72} + ye^x + 5$ между $x = 1$ и $x = 3$. Мы не знаем, чему конкретно равен y, следовательно, у нас тут просто бесконечное число интегралов. Каждый конкретный выбор y дает нам новую «машину с одной переменной». Например, когда $y = 1$, мы просто установили:

$$\int_{x=1}^{x=3} x^2 + e^x + 5dx \;=\; \left(9 - \frac{1}{3}\right) + \left(e^3 - e\right) + 10. \qquad \text{(N.5)}$$

А когда $y = 0$, найденное нами сводится вот к чему:

$$\int_{x=1}^{x=3} 5dx \;=\; 10. \qquad \text{(N.6)}$$

Мы не определяли, чему равен y, поэтому вовсе не плохо, что в ответе он остается неопределенным. Если мы остаемся в неведении относительно y, мы на самом деле говорим впечатляющие вещи вроде «Мы только что нашли бесконечное число интегралов». Ведь полученный ответ содержит бесконечно много предложений: по одному для каждого y. Некоторые выглядят ужасно — как N.5, а другие проще — как N.6, которое всего лишь сообщает нам, что прямоугольник высотой 5 и шириной $3 - 1 = 2$ имеет площадь 10. Предложение с $y = 0$ ощущается более простым, чем предложение с $y = 1$, но для математики это неважно. Оба результата получаются с помощью одного и того же вычисления. Так, это мне кое-что напомнило. Где Математика?

Автор: Думаю, все еще ищет новый дом. Я чувствую себя неловко, отложив процесс переезда в прошлой интерлюдии.

Читатель: Что вы сделали?

Автор: Не помните? Я был захвачен идеей прикончить ♯. Но вообще-то предполагалось, что мы поможем Математике найти какой-нибудь дом: там, где она будет своей, раз теперь она существует. Так много ее сейчас уже существует… Жизнь где-нибудь, что не… или как минимум не в повседневном смысле… это нехорошо. Пустота — не место для сущности. Так что сделаем перерыв в диалогах. Нужно время, чтобы разобраться с ситуацией в целом.

Читатель: Погодите, а мы не делаем сейчас самое плохое, что только можно?

Автор: Что вы имеете в виду?

Читатель: Мы же изобретаем всё больше математики! Это не делает ситуацию еще хуже?

Автор: Нет-нет, мы же не изобретаем ничего нового, помните? Я убежден в этом. Посмотрите на название этой главы. Мы бы не хотели делать это с нашим другом.

N.2. Минное заграждение из обозначений в анализе для нескольких переменных

Для большинства посторонних современная математика — неизведанная территория. Ее границы защищены плотными зарослями технических терминов; ее ландшафты — масса неразборчивых уравнений и непостижимых понятий. Немногие осознают, что мир современной математики богат живыми образами и вызывающими идеями.

Иварс Петерсон,
«Математический турист»*

* Peterson I. Mathematical Tourist: New and Updated Snapshots of Modern Mathematics. W. H. Freeman & Co, 1998.

N.2.1. Простые обобщения и сложные сокращения

В диалоге выше мы «изобрели» анализ для нескольких переменных. Например, мы рассмотрели машины, которые едят одно число, а выдают два: $m(x) \equiv (f(x), g(x))$. Учебники называют их вектор-функциями (а также векторнозначными функциями, векторными функциями), подразумевая, что они едят число, а выплевывают вектор. В целом «вектор» для наших целей означает то же, что и «список», и далее мы будем использовать оба термина. Обратите внимание, что наши «предматематические» рассуждения в этой главе можно отнести к случаю, когда векторы имеют n элементов. То есть мы можем просто потребовать, чтобы списки с n элементами вели себя так:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$
$$c \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

Мы снова делаем простейшую из возможных вещей. Эти определения позволяют нам показать точно так же, как в диалоге выше, что производная машины «одно на входе, n на выходе», то есть машины

$$m(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

самое простое, на что мы можем надеяться, а именно:

$$m'(x) \equiv (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)).$$

Аналогично для машин $m(x, y)$, которые едят два числа, а выплевывают одно, мы снова установили прямую связь с анализом для одной переменной. Мы сохранили ее, просто определив две различные производные: по одной для каждого входа. Иными словами, у нас есть производная по x (она считает y константой) и производная по y (она считает x константой). Мы решили писать их так:

$$\frac{d_x m}{dx} \equiv \frac{m(x+dx, y) - m(x,y)}{dx} \qquad \frac{d_y m}{dy} \equiv \frac{m(x, y+dy) - m(x,y)}{dy}. \quad \text{(N.7)}$$

Учебники называют это «частными производными». То, что слева, они именуют «частной производной m по x», а то, что справа, — «частной производной m по y». Но частные производные вычисляются точно так же, как и знакомые нам производные из главы 2. В силу того что мы можем изменять x, не меняя y (и наоборот), допустимы такие выражения:

$$\frac{d_x x}{dx} = 1, \ \frac{d_x y}{dx} = 0, \ \frac{d_y x}{dy} = 0, \ \frac{d_y y}{dy} = 1. \tag{N.8}$$

Снова нет ничего принципиального в том, что у машины $m(x, y)$ только два места. Мы можем дать аналогичные определения и провести схожие рассуждения, когда мест n. Если мы определим машину m, которая ест n чисел, а выдает одно:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{N.9}$$

то у нас будет n мест и, следовательно, n производных: одна по x_1, вторая по x_2, и так далее до x_n. Как и ранее, мы можем определить производную следующим образом:

$$\frac{d_i m}{dx_i} \equiv \frac{m(x_1, \dots, x_i + dx_i, \dots, x_n) - m(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{dx_i}, \tag{N.10}$$

где мы пишем d_i вместо d_{x_i}, потому что индекс у индекса создает путаницу. Хотя уравнение выше выглядит достаточно страшным, чтобы поднять ваше кровяное давление, оно говорит очень простую вещь: производная машины «на входе n, на выходе одно» по какой-нибудь переменной x_i — точно то же, что было всегда. Мы просто игнорируем всё, что не является x_i, и применяем анализ для одной переменной, считая x_i единственной переменной. Тут нет ничего нового. Мы можем немного почистить вышеприведенные обозначения, выбрав более простые сокращения, и сделаем это в следующем разделе.

N.2.2. Простые идеи, которые не хотят выражаться простым образом

Я мог бы поспорить, что почти вся путаница с анализом для нескольких переменных возникает из-за непонятностей с обозначениями. В этом разделе мы рассмотрим некоторые трудности, которые появляются при попытках придумать хорошие сокращения в нашем новом мире нескольких переменных.

Для функций с одной переменной у нас применялось два обозначения: $m'(x)$ и $\frac{dm}{dx}$. В анализе для нескольких переменных еще большую силу имеет тот феномен, что заставил нас работать с разными обозначениями: сами идеи, похоже, сопротивляются и не хотят выражаться с помощью одного набора сокращений. Как и ранее, перед нами две возможности. Первая — выбрать один комплект сокращений, с помощью которого выразить все идеи анализа для нескольких переменных. В этом случае многие в принципе простые выражения выглядят неприятными и противоречащими интуиции. Вторая — переключиться на систему обозначений по своему выбору, используя все, что годится для решаемой задачи. Здесь также есть оборотная сторона: появляется несколько языков символов. В этой главе мы сдвинемся в сторону второго способа, но постараемся напоминать себе, что есть разные обозначения, на которые можно переключаться.

N.2.3. Координатная запись

Начнем с попытки изобрести сокращения, которые позволят нам записать уравнение N.10 более простым с виду способом. Для начала используем $\boldsymbol{v}$ в качестве сокращения для входа машины:

$$\mathrm{v} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Это список переменных. Учебники называют его словом «вектор», отсюда и буква $\boldsymbol{v}$. Слово «вектор» звучит вычурно и архаично, но оно забавное, так что давайте им пользоваться. Мы будем выделять вектор $\boldsymbol{v}$ жирным шрифтом, чтобы показать, что это не число, а другой тип объектов. Будем писать $d\boldsymbol{v}_i$ для обозначения вектора, у которого равны 0 все элементы, за исключением i-го — бесконечно малого числа dx_i. Иными словами,

$$dv_i \equiv \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{dx_i}_{i\text{-й элемент}}, 0, \dots, 0.\right) \qquad \text{(N.11)}$$

При таком соглашении мы можем переписать неуклюжее определение из уравнения N.10:

$$\frac{d_i m}{dx_i} \equiv \frac{m(\mathbf{v} + d\mathbf{v}_i) - m(\mathbf{v})}{dx_i}. \tag{N.12}$$

Это намного приятнее и занимает существенно меньше места, но обозначение может сбивать с толку по совершенно иной причине. Если смотреть на уравнение мельком, может показаться, что производные в этом новом мире нескольких переменных отличаются от тех, что были в анализе для одной переменной. Почему? Потому что здесь крохотный объект вверху выглядит как $d\mathbf{v}_i$, то есть «крохотный вектор», а крохотный объект внизу выглядит как dx_i, то есть «крохотное число». Иными словами, кажется, что в этом уравнении *два разных вида крохотных объектов*: вектор и число. Но учтите, что это вина новых обозначений, которые мы выбрали в попытках заставить уравнение N.10 выглядеть не так страшно.

Несмотря на свои недостатки, уравнение N.10 более ясно давало понять, что есть только один вид крохотных вещей — и вверху, и внизу. А это, в свою очередь, проясняет, что производная имеет то же истолкование, которое имела всегда. Иначе говоря, мы всегда можем говорить о производных так.

1. Мы начинаем с машины m, в которую подаем нечто s. Она выдает $m(s)$.

2. Мы немного изменяем нечто, подаваемое в машину, — с s на $s + ds$. Выход машины изменяется с $m(s)$ на $m(s + ds)$.

3. Мы можем обозначить изменение на выходе $dm \equiv m(s + ds) - m(s)$. Если у нас более одной переменной, нам может понадобиться изменить наши сокращения, чтобы напомнить нам, что именно мы изменяем.

4. Чем бы ни было s — числом, вектором или целой машиной, — производная остается одним и тем же понятием. Производная m определяется как крохотное изменение dm на выходе, деленное на крохотное изменение ds на входе.

Поэтому сокращения в уравнениях N.10 и N.12 имеют различные плюсы и минусы. Мы в безнадежной ситуации. Как мы вскоре увидим, неприятная ситуация складывается не только в этом примере.

N.2.4. ∂ или не ∂? Сокращения, затрагивающие рассуждения

Следующая остановка в нашем туре по путающим обозначениям в анализе для нескольких переменных — чуждый символ ∂. Ранее я упоминал, что учебники используют термин «частная производная» для выражений вроде:

$$\frac{d_x m}{dx} \equiv \frac{m(x+dx,y)-m(x,y)}{dx}, \quad \frac{d_y m}{dy} \equiv \frac{m(x,y+dy)-m(x,y)}{dy}. \qquad \text{(N.13)}$$

Использование стандартного обозначения для этого понятия покажет еще одну проблему. Вот она: в двух выражениях выше вы можете заметить, что избыточно писать d_x и d_y. Ведь если мы напишем просто

$$\frac{dm}{dx} \equiv \frac{m(x+dx,y)-m(x,y)}{dx}, \quad \frac{dm}{dy} \equiv \frac{m(x,y+dy)-m(x,y)}{dy}. \qquad \text{(N.14)}$$

то никакой путаницы не будет, ведь dx и dy в нижней части обоих выражений напоминают, какой из элементов машины m на входе немного изменяется: для левого выражения это x, а для правого y. Соответственно, указывать в уравнении N.13 в производных индексы (d_x и d_y) избыточно. Так зачем мы ввели их изначально? Мы добавили обозначения d_x и d_y, поскольку два разных появления dm в уравнении N.14 фактически относятся к *разным вещам*. Это нетрудно увидеть, сравнив правые верхние части обоих уравнений: слева мы меняем первый элемент, а справа — второй. Если бы мы имели дело только с производными, не было бы никаких причин писать d_x и d_y. Мы могли бы посмотреть в нижнюю часть производной и увидеть, какую переменную меняем. Большинство учебников учитывают это при выборе обозначений и вместо уравнения N.13 пишут так:

$$\frac{\partial m}{\partial x} \equiv \frac{m(x+dx,y)-m(x,y)}{dx}, \quad \frac{\partial m}{\partial y} \equiv \frac{m(x,y+dy)-m(x,y)}{dy}. \qquad \text{(N.15)}$$

Сравнивая наше обозначение с обозначением учебников, мы получаем:

$$\frac{\partial m}{\partial x} \equiv \frac{d_x m}{dx} \text{ и } \frac{\partial m}{\partial y} \equiv \frac{d_y m}{dy}.$$

Такой способ написания имеет свои плюсы и минусы. С одной стороны, он красивее, чем мои обозначения, и в нем не нужны индексы x и y, которые избыточны, когда мы говорим о производных. С другой стороны, обозначение ∂ сильно затрудняет рассуждения, использующие бесконечно малые величины. В нескольких следующих абзацах мы будем объяснять одно ужасное с виду выражение, которое скрывает простую идею. В любой книге по анализу функций нескольких переменных вы найдете уравнение:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy\,. \qquad \text{(N.16)}$$

Для себя мы выведем его очень скоро, а сейчас посмотрите, как запутанно оно выглядит! Это уравнение содержит шесть разных символов, которые кажутся бесконечно малыми количествами: dm, ∂m, dy, ∂y, dx и ∂x. Обратите внимание: в уравнении N.16 нет ничего, что можно убрать для упрощения. Безумное ∂x выглядит не так, как привычное dx, и мы не можем сократить dx и ∂x. То же и с y; сокращение кажется запрещенным, поскольку символы выглядят по-разному.

Не смогу устоять и расскажу вам секрет уравнения N.16, хотя мы пока его и не вывели. Вот он: если правильно интерпретировать, то dx и ∂x — *по сути, одно и то же*! Это верно и для dy и ∂y. А если это недостаточно вас запутало, мы можем использовать этот факт, чтобы все стало еще хуже. Сокращая dx и ∂x, dy и ∂y, мы получаем удивительный нонсенс:

$$dm \stackrel{???}{=} \partial m + \partial m. \qquad \text{(N.17)}$$

Как мы увидим через несколько страниц, это уравнение на деле корректно. Однако $\partial m + \partial m$ не равно $2\partial m$! Нет, законы арифметики не нарушаются. Здесь выявляется принципиальная особенность путающих обозначений: два ∂m в уравнении выше фактически относятся к разным вещам! А именно к тому, что мы называли $d_x m$ и $d_y m$, и именно наше игнорирование индексов привело ко всей этой путанице.

Зачем допускать использование обозначений, когда *один* символ ∂m относится к двум *разным* вещам ($d_x m$ и $d_y m$) и одновременно используются два *разных* символа (dx и ∂x), называющие *одно и то же*? Причина не совсем безумна. Она в том, что стандартные учебники не используют рассуждения с бесконечно малыми. С учетом того, как эти идеи обычно формализованы, обычно все сводится к числовым системам, в которых бесконечно малые не имеют смысла, а производные имеют. Но для нас было выгодно различать $d_x m$ и $d_y m$, потому что *они — не одно и то же*! Учебники обычно пренебрегают этим, и их позиция тоже понятна: если мы говорим только о производных, а не о самих бесконечно малых, то индексы в $d_x m$ и $d_y m$ *всегда* избыточны.

Резюмируя, можно сказать, что при использовании обозначения ∂ мы теряем одну из лучших особенностей обозначения d из анализа для одной переменной: возможность обращаться с бесконечно малыми как с обычными числами, сокращая их и меняя порядок, чтобы получить то, что было бы трудно вывести другим путем.

N.3. Хватит играть с символами! Как это нарисовать?

N.3.1. Многомерные обманы разума

Несмотря на неспособность человеческого разума наглядно представить размерности выше 3, при изучении многомерной математики незачем отказываться от визуальной интуиции. Не нужно развивать математические методы визуализации 4-мерного, 10-мерного или бесконечномерного пространства. Если видите противоречие, перечитайте еще раз. В этом и состоит трюк, и об этом мне никогда не говорили в курсе анализа для нескольких переменных: очень многие математики могут наглядно представлять n-мерное пространство, рисуя (барабанная дробь) трехмерное!

Если это звучит смехотворно… хорошо! Но это правда. Это то, чему нас не учат ни в каком курсе, но это медленно доходит до сознания многих обучающихся математике, когда они глядят на великих мыслителей предыдущего поколения, придумывающих ответ на какой-то вопрос. Много раз я предлагал вопрос о высоких измерениях какому-нибудь очень умному математику и видел: подумав немного и поняв, что он не может найти ответ в уме, он шел к доске, рисовал двумерное изображение двумерного или трехмерного объекта и попутно *находил ответ*! Я видел это бессчетное число раз — для вопросов от 4-мерных (из римановой геометрии и общей теории относительности) до бесконечномерных (из функционального анализа и квантовой механики) пространств.

Не исключено, что рассмотрение двух или трех измерений не поможет наглядно представить n измерений, но явно поможет рассуждать об n измерениях. Было бы здорово испытать это самим. Ниже мы попробуем применить нашу визуальную интуицию в трех измерениях, чтобы вывести один факт из n-мерного анализа. В следующем разделе мы изобретем формулу

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy \tag{N.18}$$

для машины $m(x, y)$ при двух переменных. Тогда мы тут же сможем увидеть, почему более общая формула этого выражения, а именно:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial m}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial m}{\partial x_n}dx_n, \tag{N.19}$$

верна для машины $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при n переменных. Уравнения выглядят пугающе, но вскоре мы увидим — как видели раньше, — как все может изменить простая смена обозначений.

N.3.2. Обман в действии

Обратите внимание: машина «два на входе, одно на выходе» $m(x, y)$ может быть наглядно представлена в виде (возможно, кривой) поверхности, оторванной от плоскости земли (рис. N.1).

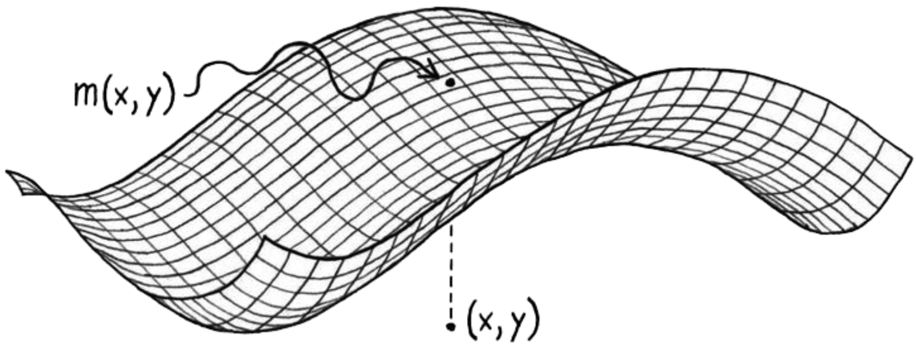


Рис. N.1. Наглядное представление машины, которая съедает два числа, а выдает одно. Мы можем нарисовать эти числа x и y в виде координат «на земле». Если мы подаем в машину точку (x, y) на земле, она выдает число $m(x, y)$, которое мы можем представить в виде «высоты» графика над точкой (x, y). Каждой точке на земле сопоставляется определенная высота, то есть график такой машины — двумерная поверхность

Сейчас мы можем расширить идею лупы с бесконечным увеличением на рис. N.1. Когда мы бесконечно увеличим изогнутую поверхность, она будет выглядеть как плоскость. Рассмотрим произвольную точку на графике на рис. N.1 и проведем бесконечное увеличение. В результате получим наклонную (но не изогнутую) плоскость, изображенную на рис. N.2.

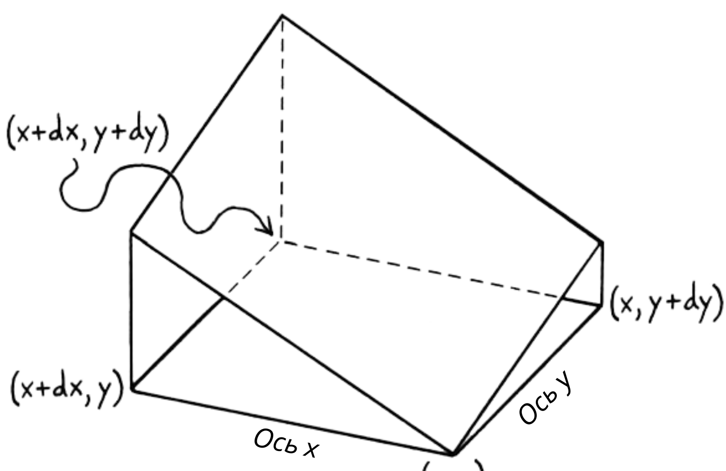


Рис. N.2. Мы бесконечно увеличили кривую поверхность и получили плоскую (но наклонную). Здесь мы отметили горизонтальные координаты

Мы говорили о частных производных, но было бы хорошо, если бы мы смогли придумать идею вроде-одной-производной — «полной производной», если угодно. Вместо того чтобы думать об x и y как отдельных числах, давайте (на минутку) подумаем о них как о компонентах одного объекта: «вектора», который запишем как (x, y). Теперь мы можем продолжать, как всегда делали при определении нового вида производной: начать с машины m, в которую подается некоторая *еда*. В нашем случае *еда* — вектор (x, y). Затем машина выдает число $m(x, y)$. Далее мы делаем крохотное изменение в *еде*, добавляя к ней «крохотный вектор» (dx, dy). Это дает нам $m(x + dx, y + dy)$. Затем, как обычно, мы сравниваем «до» и «после», то есть смотрим на $m(\textit{после}) - m(\textit{до})$, или, что эквивалентно*,

$$dm \equiv m(x + dx, y + dy) - m(x, y). \tag{N.20}$$

Здесь dm означает крохотное изменение в «высоте» графика m, когда мы бесконечно мало изменяем оба элемента на входе: x меняем на $x + dx$, а y — на $y + dy$. Сейчас полезно изобразить увеличенный фрагмент нашей поверхности. На этом рисунке можно обозначить много разных вещей, и я разделю его на три изображения. Вот что мы отметим на них.

1. На рисунке N.2 отмечены четыре разных точки «на земле», а именно: (x, y), $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$ и $(x + dx, y + dy)$.

2. На рисунке N.3 указаны названия для выхода или «высоты» графика в каждой из точек, отмеченных на рис. N.2. Эти высоты называются $m(x, y)$, $m(x + dx, y)$, $m(x, y + dy)$ и $m(x + dx, y + dy)$.

3. На рисунке N.4 отмечены крохотные разности в высоте d_xm и d_ym. Вспомните, что первая определялась так: $d_xm \equiv m(x + dx, y) - m(x, y)$. Иными словами, если мы считаем начальной точкой (x, y), то d_xm — крохотное расстояние по высоте, на которое мы поднимаемся, проходя крохотное расстояние dx в направлении x. Аналогично, если начать с (x, y),

* Обычно для получения производной мы делили на крохотное изменение в *еде*. Но сейчас мы меняем все элементы сразу, и нашей *едой* оказывается целый вектор. Поэтому для вычисления производной в обычном смысле нам пришлось бы сказать, что означает «разделить на вектор». Не будем делать этого прямо сейчас, просто посмотрим на верхнюю часть dm, которая определена выше.

$d_y m$ — крохотное расстояние по высоте, на которое мы поднимаемся, проходя крохотное расстояние dy в направлении y.

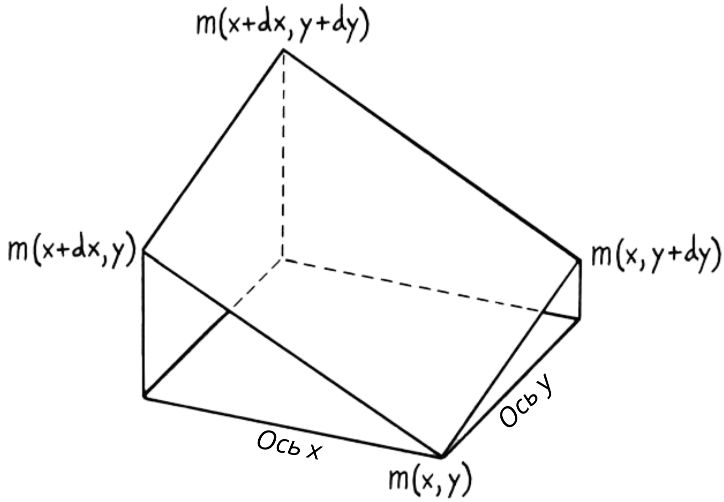


Рис. N.3. Та же идея, что на рис. N.2, но здесь мы отметили вертикальные координаты

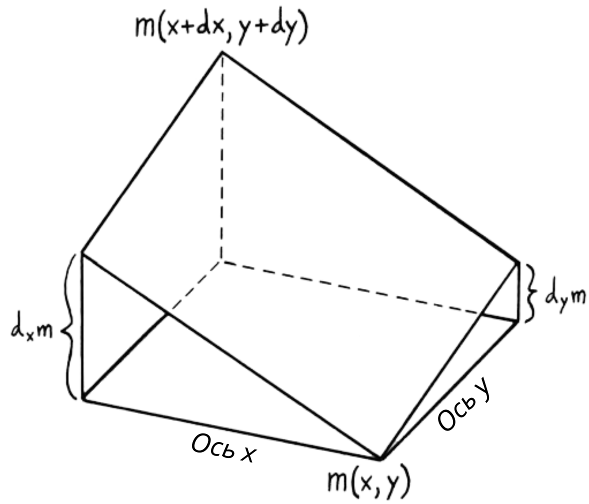


Рис. N.4. Геометрическое изображение $d_x m$ и $d_y m$

Пока мы фактически не сделали ничего, кроме увеличения и наименования некоторых вещей, но, на удивление, приблизились к пониманию устрашающих уравнений N.18 и N.19! Перед тем как двигаться дальше, посмотрите на рис. N.2–4 и убедитесь, что вы понимаете всё отмеченное на них.

В книгах трудно указывать нужное место, и мне придется определить несколько терминов. Я определю «левое путешествие» так. Первый этап: начинаем из точки (x, y) на рис. N.2, двигаемся влево по графику над осью x до точки, которая расположена строго над $(x + dx, y)$. На этом этапе ваша высота увеличилась на $d_x m$ (убедитесь, что вы понимаете, почему именно так). Второй этап: начиная от этой точки, поднимаемся по графику до самого верха, точки $m(x + dx, y + dy)$ на рис. N.3. На этом этапе вы поднимаетесь только по оси y, ваша высота увеличивается на (*конечная высота – начальная высота*), которая равна:

$$\hat{d}_y m \equiv m(x + dx, y + dy) - m(x + dx, y).$$

Я ставлю шляпку над d, поскольку мы уже использовали обозначение $d_y m$ для $m(x, y + dy) - m(x, y)$, а шляпка напоминает нам, что эти две величины — не одно и то же, точнее, они не *выглядят* как одно и то же*. Итогом нашего левого путешествия стал подъем от высоты $m(x, y)$ до высоты $m(x + dx, y + dy)$, и в уравнении N.20 эту величину мы называли dm. Мы можем написать:

$$dm = d_x m + \hat{d}_y m. \qquad \text{(N.21)}$$

Аналогично (хотя нам это не понадобится) мы могли бы определить правое путешествие, пройдя два другие этапа, и получили бы:

$$dm = d_y m + \hat{d}_x m. \qquad \text{(N.22)}$$

Здесь $\hat{d}_x m \equiv m(x + dx, y + dy) - m(x, y + dy)$. Мы могли бы так сделать и получить при этом тот же результат, так что можем забыть про $\hat{d}_x m$. Теперь вспомним, что мы определяли dm, проведя крохотные изменения

* Очень скоро мы поймем, что $d_y m$ и $\hat{d}_y m$ на самом деле одинаковы, но только вследствие произведенного бесконечного увеличения.

одновременно в обоих элементах: нас интересовало, можем ли мы придумать «полную производную». Обратите внимание, что уравнения N.21 и N.22 *почти* рассказывают нам о взаимосвязи между «полным дифференциалом» dm и «частными дифференциалами» $d_x m$ и $d_y m$. Проблема в том, что каждое уравнение содержит только одну из знакомых частных дифференциалов без шляпок, но при этом в них есть неприятные дифференциалы $\hat{d}$, которые не равны дифференциалам без шляпок.

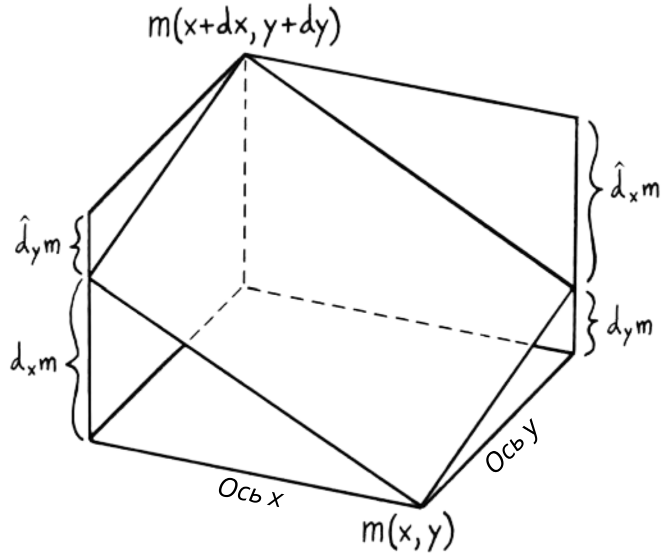


Рис. N.5. Почему $\hat{d}_x m$ — то же, что $d_x m$, а $\hat{d}_y m$ — то же, что $d_y m$

Или равны? Мы провели бесконечное увеличение, и объект, на который мы смотрим, кажется плоским. Рисунок N.5 показывает причины, по которым величина $\hat{d}_x m$ должна быть точно той же, что и $d_x m$, а величина $\hat{d}_y m$ — той же, что $d_y m$. Поэтому величины со шляпками равны величинам без шляпок. Резюмируя сказанное, получаем:

$$dm = d_x m + d_y m \tag{N.23}$$

Это уравнение отражает очень простой факт: как бы мы ни путешествовали (слева или справа), *общее изменение высоты* — сумма величин для *первого* и *второго этапов*. Едва ли можно выразиться проще. Прочтите еще раз. Почувствуйте, как проста идея. Даже неудобно говорить. Однако простое предложение N.23 говорит точно то же, что и ужасное N.18.

Чтобы получить из уравнения N.23 его жутковатое подобие N.1, нам нужно умножить его дважды на 1, а потом поменять сокращения. Давайте это сделаем. Начинаем с N.23 и пишем:

$$dm \overset{\text{(N.23)}}{=} d_x m + d_y m = \underbrace{d_x m \frac{dx}{dx} + d_y m \frac{dy}{dy}}_{\text{Умножение на 1 дважды}} = \underbrace{\frac{d_x m}{dx} dx + \frac{d_y m}{dy} dy}_{\text{Перестановка}}.$$

Теперь переходим на (часто путающие, но более симпатичные) стандартные обозначения для частных производных и получаем:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy, \qquad \text{(N.24)}$$

что и совпадает с уравнением N.18, которое мы собирались получить. Напоминаем, что обозначение выше дает уравнению N.18 свойство «одно в двух и два в одном»: ∂x и dx — одно и то же, несмотря на два символа, используемые для представления, а два ∂m — разные величины, выраженные одним символом. Обозначения порой бывают такими дурацкими.

Теперь мы можем сделать логический прыжок, обсуждавшийся ранее, когда мы пытаемся говорить об n-мерном, представляя три измерения. Мы только что провели рассуждение, в котором участвовала машина с двумя входами и одним выходом. Предположим, у нас есть машина с n входами и одним выходом, и представим крохотное изменение одновременно во всех элементах. Как и ранее, изменение в выходе будет таким:

$$dm \equiv \underbrace{m\left(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ \dots\ , x\ +\ dx_n\right)}_{\text{Выход после}} - \underbrace{m\left(x_1, x_2, \ \dots\ , x_n\right)}_{\text{Выход до}},$$

или, если угодно:

$$dm \equiv m(v + dv) - m(v),$$

где $dv = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$. Хотя мы и не можем нарисовать то, о чем говорим, но, если бесконечно увеличим график m в произвольной точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мы «увидим» n-мерную «параллелограммообразную» штуку — по тем же причинам, по которым увидели двумерный параллелограмм в вышеприведенном случае. Поэтому, как и выше, справедливо:

$$dm = d_1m + d_2m + \ldots + d_nm, \tag{N.25}$$

где мы пишем d_im вместо $d_{x_i}m$, чтобы упростить обозначения. Все это показывает, что общее увеличение высоты между двумя точками в пространстве, которое мы не можем нарисовать, — сумма отдельных увеличений: увеличения высоты d_1m при прохождении крохотной величины dx_1 в направлении x_1; увеличения высоты d_2m при прохождении крохотной величины dx_2 в направлении x_2 и т. д. Общее является суммой частей — это то, о чем говорит уравнение N.25, и хотя мы не способны изобразить это, мы можем быть уверены в истинности этого, поскольку понимаем суть, выведя уравнение N.23.

Прекрасно! Мы хотели вывести уравнение N.25, так что в целом мы закончили. Но если мы введем несколько новых обозначений, то нам удастся вывести формулу, которая есть во всех учебниках по анализу функций нескольких переменных. Следуя в точности вышеописанной логике, мы можем умножить каждое слагаемое в предыдущем уравнении на 1, поменять порядок умножения и перейти к стандартным обозначениям. Тогда мы получим:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial m}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial m}{\partial x_n}dx_n. \tag{N.26}$$

Как мы могли бы переписать это, если бы нам вдруг захотелось считать эту книгу учебником? Определим скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ как операцию, которая сопоставляет двум векторам число по следующему правилу:

$$v \cdot w \equiv v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n.$$

Иными словами, перемножаем соответствующие элементы векторов и складываем произведения. Если мы определим сокращения:

$$d\mathbf{x} \equiv (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \text{ и } \nabla m \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial x_1}, \frac{\partial m}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial m}{\partial x_n}\right),$$

то уравнение (N.26) можно переписать так:

$$dm = (\nabla m) \cdot dx.$$

Это вычурно выглядящее предложение со скалярным произведением вектора из частных производных и бесконечно малого вектора сообщает нам знакомый вышеуказанный факт. Общее изменение по высоте — простая штука: это изменение по высоте на первом этапе плюс изменение по высоте на втором этапе, и так далее, до изменения по высоте на n-м этапе.

N.4. Это всё?

N.4.1. Нет

Есть еще многое, что мы можем сделать в мире анализа для нескольких переменных, но никаких принципиально новых идей не будет. Производные означают то же, что и означают всегда, хотя при этом записаны множеством по-разному выглядящих способов. Интегралы означают то, что означали всегда, и хотя в учебниках вы можете увидеть несколько из них вместе — $\iiint$ вместо знакомого $\int$, — это старая идея, но три раза подряд. Таким образом, хотя мы могли бы делать все возможное в этом незнакомом (но втайне известном) мире, лучше двинемся в бесконечные дикие места: анализ в бесконечномерных пространствах. В анализе для них по-прежнему есть строгий смысл, где все новые пугающие понятия — просто старые знакомые, но в новых шляпках. Однако эта бесконечная дикая местность дает своеобразное ощущение, которое проистекает от красивой унификации машин и векторов. Эта идея увеличивает красоту, элегантность и применимость бесконечномерного анализа по сравнению с конечномерным и половинным знакомством из этой главы. Концептуально (если не всегда исторически) унификация машин и векторов — источник целого букета идей, включая анализ Фурье, механику Лагранжа, идею функционального пространства, формализм для максимума энтропии в теории вероятностей и язык, на котором выражается квантовая механика — глубочайшее проникновение нашего вида в природу реальности. Мы обсудим эту фундаментальную идею после встречи со сделан…

(В главу забредает Математика.)

Математика: Что такое? Почему?.. Что?.. Вы вдвоем создаете всё больше меня без меня?

(Воцаряется неловкая тишина.)

Автор: Э-э-э… нет?

(Математика оглядывается вокруг.)

Математика: Да???

Автор: Возможно.

Математика: Почему вы мне не рассказываете? Я бы…

Автор: Если это вас утешит, то глава еще не близка к завершению. Об этой теме можно говорить очень много, и мне нужно переписать минимум половину того, что я написал к этому моменту. Это в действительности не отдает должного предме…

Математика: Просто заканчивайте эту главу!

Автор: Почему бы вам не подождать, пока мы закончим?

Математика: У меня нет целого дня. Сколько времени это займет?

Автор: Ну, мы могли бы продвинуться довольно далеко, но… хм… на деле мы говорим об этом уже вполне достаточно. Так что сейчас я напишу Встречу со сделанным, и с главой будет покончено.

Математика: Пишите быстрее.

(Математика ожидает $\lambda T + (1 - \lambda)$(не-$T$) в неопределенном положении.)*

Автор: Хорошо, приступим.

* Где $\lambda \in [0, 1]$, а $T \equiv$ терпеливо.

N.5. Встреча со сделанным

Напомним себе о том, что мы сделали в этой главе.

1. Мы начали с диалога, в котором Автор заявил, что у него нет ощущения, будто он отдал должное теме главы. Тем не менее эта глава служит мостиком туда, куда нам нужно.

2. Это привело нас к путешествию по концептуальным источникам анализа для нескольких переменных, когда…

Математика: Что такое анализ для нескольких переменных?

Читатель: Ого, я не знал, что вам можно сюда.

Автор: Да, Математика. Вы хотите, чтобы мы закончили эту часть, или нет?

Математика: Я хочу, чтобы вы мне ответили. Что такое анализ для нескольких переменных? Это новая часть меня, которую вы изобрели, пока меня не было?

Автор: Почему бы вам не прочесть эту главу, пока я ее заканчиваю?

Математика: Ладно…

(Математика листает страницы назад и приступает к чтению главы.)

Автор: Как я говорил, мы путешествовали по концептуальным источникам анализа для нескольких переменных и заметили, что многие его определения проистекают из желания создать новые идеи, используя только старые.

3. Мы пытались продифференцировать машину вида $m(x) \equiv (f(x), g(x))$, делая то же, что и в анализе для одной переменной. По ходу мы зашли в тупик, но обнаружили, что сможем выбраться, если определим поэлементное сложение списков: $(a, b) + (A, B) = (a + A, b + B)$. Выйдя из тупика, мы застряли снова. Чтобы выбраться во второй раз, мы определили поэлементное умножение числа на список:

$$c \cdot (x, y) = (cx, cy).$$

После двух таких определений мы установили:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x), g(x)\Big) = \Big(\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d}{dx}g(x)\Big).$$

Это значило, что наши новые машины «одно на входе, два на выходе» можно дифференцировать, используя для каждого элемента анализ для одной переменной.

4. Мы установили, что аналогично можно поступать для машин «одно на входе, n на выходе», которые имеют вид:

$$m(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

5. Вследствие этого мы установили, что можем применять все наши молотки для вычисления производных в новом мире нескольких переменных.

6. Мы установили, что то же верно и для интегрирования, а именно:

$$\int_a^b \Big(f(x), g(x)\Big)\ dx = \Big(\int_a^b f(x)\ dx, \int_a^b g(x)\ dx\Big).$$

Как и ранее, для каждого элемента выполняются знакомые операции с одной переменной.

7. Вследствие этого мы установили, что можем применять все наши антимолотки для вычисления интегралов в новом мире нескольких переменных.

8. Затем мы обратили внимание на машину «два на входе, одно на выходе». Мы обнаружили, что можно определить две разные производные: по одной для каждого из элементов на входе. Учебники называют их «частными производными». Они снова оказались анализом для одной переменной. Например, частная производная по x — то, что мы получаем, считая константами все переменные, кроме x, и вычисляя производную знакомым способом.

9. Мы установили, что то же справедливо для машин «n на входе, одно на выходе».

10. Используя лупу с бесконечным увеличением и некоторые простые наглядные соображения, мы вывели формулу:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy$$

и ее обобщение для *n* измерений:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial m}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial m}{\partial x_n}dx_n.$$

11. Каждый раз, когда в этой главе мы сталкивались с новой идеей, оказывалось, что она вовсе не новая, а собрана из старых с добавкой незначительного изменения для придания смысла.

Автор: Ну вот. Математика, вы счастливы сейчас?

(Математика читает главу и не слышит Автора.)

Автор: Математика!

Математика: Ой! Вы меня напугали.

Автор: Я закончил с этой главой. Есть ощущение, что вы понимаете?

Математика: Ну, я только быстро пробежалась по ней. Скажите, правильно ли уловила идею: мы создаем анализ, как всегда, но теперь наши интегралы и производные действуют на странные новые виды машин, вроде тех, что едят число, а выплевывают вектор, или едят вектор, а выплевывают число?

Читатель: Да. По сути, все так и было. Ничего особо нового.

Математика: И если я понимаю верно, эти «векторные» штуки — машины, так?

Автор: Что? Нет! Ладно, минутку. Мы уже подошли к окончанию этой встречи со сделанным, так что можно устроить небольшой перерыв. Прыгайте со мной в следующую интерлюдию.

(Автор покидает главу, хлопнув дверью.)

ИНТЕРЛЮДИЯ N
НЕПРАВИЛЬНОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ И НОВОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ

Неправильное истолкование

Автор: Я не уловил. В последнем предложении. Не повторите?

Читатель: Я ничего не говорил.

Автор: Я знаю. Математика. Можно еще раз?

(Воцаряется загадочная тишина.)

Математика: Я сказала: «Если я понимаю правильно, эти „векторные“ штуки — машины, так?». Я что-то неверно поняла?

Автор: Думаю, да. Но не беспокойтесь, это хитрое понятие. Сам по себе вектор — вовсе не машина. Это просто список чисел. Например, вектор $\boldsymbol{v} \equiv (3, 7, 4)$ — список чисел, который мы можем считать точкой в трехмерном пространстве. Это точка, положение которой относительно начала таково: 3 единицы в направлении x, 7 — в направлении y и 4 — в направлении z.

Математика: Правильно. Поэтому векторы — просто машины.

Читатель: ???

Автор: Нет-нет-нет. Почему вы упираетесь?

Математика: Я не знаю. Должно быть, я что-то неправильно поняла. Объясните идею снова.

Автор: Вектор $\boldsymbol{v} \equiv (3, 7, 4)$ совершенно не похож на функцию… я имел в виду на машину. Это просто три числа. Мы можем представлять их геометрически, а можем не представлять. Но в том виде, как я написал, это список из трех объектов, которые мы можем обозначить $v_1 \equiv 3$, $v_2 \equiv 7$ и $v_3 \equiv 4$.

Математика: Понимаю, что вы говорите, но не уверена, что вы понимаете, о чем говорю я. Мы всё еще сокращаем вещи, как нам угодно, правильно?

Автор: Конечно. По сути, это единственный «закон» математики: объекты определяются с точностью до изоморфиз… ой, я имею в виду с точностью до изменения обозначений.

Математика: Соответственно, предположим, я хочу говорить об этом векторе, используя другие обозначения. Вместо того чтобы писать так:

$$v_1 \equiv 3 \qquad v_2 \equiv 7 \qquad v_3 \equiv 4,$$

мы можем написать так:

$$v(1) \equiv 3 \qquad v(2) \equiv 7 \qquad v(3) \equiv 4.$$

За исключением изменения обозначений, мои векторы ведут себя точно так же, как ваши. Мы можем складывать их, умножать на число и т. д. Тогда…

Автор (*с широко раскрытыми глазами*): Стоп… У меня ощущение, что это *действительно* важно. Начнем следующий раздел.

Новое истолкование

Автор (*Математике*): Продолжайте, пожалуйста!

Математика: Нет, думаю, я просто запуталась. У меня было время только для беглого просмотра главы. Я неправильно представляла вектор

$$\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, v_3) \equiv (3, 7, 4)$$

как машину, которая при подаче в нее числа 1 выдает $v(1) \equiv 3$, при подаче числа 2 — $v(2) \equiv 7$, а при подаче числа 3 — $v(3) \equiv 4$. Честно говоря, это был бы забавный вид машин. Ведь наши обычные машины едят любое число, а эта v способна есть только 1, 2 и 3, то есть набор возможной пищи для нее — множество $\{1, 2, 3\}$, а не все множество чисел. Думаю, поэтому я и запуталась.

Автор: Погодите. Я не думаю, что вы запутались. Это я запутался. По-вашему, выходит, мы должны признать, что векторы можно считать особым видом машин. Если бы мы не признали это, мы бы мимоходом заявили, что не можем сокращать вещи как нам угодно, поскольку все, что требовалось для вашего рассуждения, — небольшое новое сокращение.

Читатель: Математика *не* запуталась?

Автор: Нет. И я думаю, что то же рассуждение работает в обратную сторону. Почти должно. Ведь все оно было лишь маленькой сменой обозначений. Следовательно, не только о векторах можно думать как о машинах. О машинах тоже можно думать как о векторах.

Математика: Что вы имеете в виду?

Автор: Возьмем какую-нибудь машину, например $m(x) \equiv x^2$. Если нам захочется, мы можем думать о ней как о списке чисел. Я имею в виду, не как о списке, где есть первый элемент, второй, третий и так далее, а как о векторе, у которого непрерывная бесконечность элементов, один для каждого числа.

Читатель: О! Думаю, я уловил идею. Так можно представлять $m(x) \equiv x^2$ как вектор, у которого на месте № 3 находится число 9, потому что $m(3) \equiv 9$. А места обязательно должны быть помечены целыми числами?

Автор: Думаю, нет. Например, $m(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ и $m(\sharp) = \sharp^2$, так что число $\frac{1}{4}$ находится на месте, помеченном $\frac{1}{2}$, а $\sharp^2$ — на месте, помеченном $\sharp$.

Математика: И точно так же, как я перехожу с v_i на $v(i)$, можно сделать и обратный переход и писать $m_3 \equiv 9$ вместо $m(3) = 9$?

Автор: Не вижу, почему нельзя! Мы же, по сути, ничего *не делаем*. Это просто незначимое изменение сокращений.

Математика: Но тот факт, что два сокращения смогли оказаться так близки, возможен только потому, что оба понятия для определения требуют одинакового типа информации.

Автор: Думаю, да. Ничто не мешает вместо $m(x) \equiv x^2$ писать $m_x \equiv x^2$.

Математика: То есть векторы — это машины, а машины — это векторы?

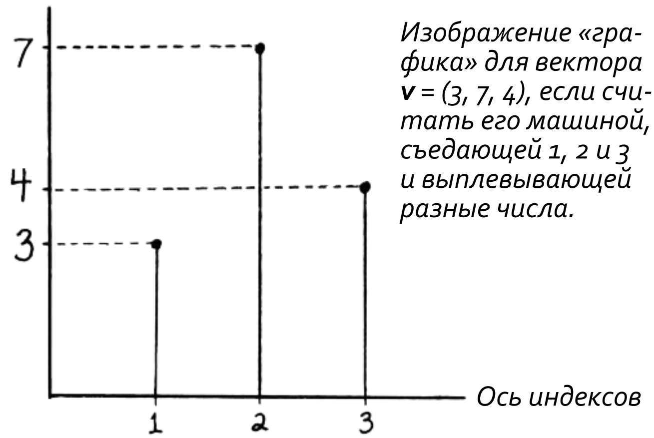


Рис. N.6. До этого момента мы думали о векторах вроде (3, 7, 4) как о точке в трехмерном пространстве. Но мы также можем представлять их как машину. Она далеко не всеядна: способна есть только числа 1, 2 и 3. Одно из преимуществ изображения векторов таким способом в том, что наши возможности наглядного представления больше не выходят из строя, когда мы продвигаемся за пределы трех измерений. Изображение 17 измерений требует от нас всего лишь проведения 17 вертикальных линий, высоты которых меняются независимо друг от друга. Изображение какой-нибудь точки в бесконечномерном пространстве требует всего лишь нарисовать обычный «график» обычной «функции» в двух обычных измерениях

Автор: Думаю, так и должно быть! В конце концов, эти два понятия ведут себя одинаково. Мы просто сразу этого не поняли. Мы думали о векторах с n элементами как о точках в n-мерном пространстве и поэтому придумывали обозначения, подходящие к такой интерпретации. В таких обозначениях нет ничего *неправильного*, но с ними не было очевидно, что векторы, по сути, — всего лишь вид машин и наоборот. Эти два понятия *логически* одинаковы, но использованные нами обозначения не делали их *психологически* одинаковыми, и мы упустили базовое единство этих двух идей!

Математика: Но что это на самом деле? Машины — всего лишь векторы? Или векторы — всего лишь машины?

Автор: Я не уверен, что нам нужно это решать. Внутри этих вещей нет скрытой сути, которая могла бы обмануть нас. Мы изобретаем эти штуки сами. Не бывает так, чтобы что-то вело себя во всех отношениях как вектор, но в реальности втайне было машиной, и наоборот.

Читатель: А разве это обоснованно? Машина вроде $m(x) \equiv x^2$ выглядит настоящей машиной, даже если мы можем думать о ней как о векторе. Вы говорите, что она настолько же вектор, насколько и машина?

Автор: Именно! И если мы не соглашаемся это признать, то мы непоследовательны. С самого начала единственный «закон» математики в нашей Вселенной гласил: *мы можем сокращать вещи, как нам угодно*. Отсюда следует, что мы можем определять вещи только по тому, как они себя ведут, а не по тому, чем они являются. И это должно быть причиной, по которой математики помешаны на своем определении объектов с помощью аксиом. В любой области их выбор в первую очередь продиктован этим тайным базовым законом: математические объекты — не обозначения. Вещи, которые мы изучаем, не просто загогулины на бумаге. Если нет какого-то неприкосновенного священного набора сокращений, то естественным путем возникает аксиоматический подход и принцип, что все вещи «определены с точностью до изоморфизма». Так *должно* быть. Иначе мы нарушили бы Единственный Закон математики: мы бы в какой-то момент согласились, пусть и неявно, с тем, что есть какой-то набор сокращений, выделенный по своей природе.

Читатель: Э… у меня вопрос по вашим разглагольствованиям. Поскольку векторы вроде (3, 7, 4) можно представлять как точки в трехмерном пространстве… и поскольку векторы с n элементами можно представлять как точки в n-мерном пространстве… можно ли представлять машины типа $m(x) \equiv x^2$ как точки в бесконечномерном пространстве?

Автор: Почему бы и нет?

Математика: Это прекрасно! Можно написать об этом целую главу?

Автор: Конечно! Мы выясним это в рабочем порядке.

Читатель: Это не то, что мы делали все время?

Автор: Ха! Да, пожалуй. Это будет забавно! Вперед!

…

(Автору кое-что пришло в голову, и он замолкает.
Он решает отстать и перечитать эту интерлюдию,
пока остальные переходят к следующей части.)

…

Автор: …

Читатель: Эй!..

Автор (*вздрогнув*): О! Я думал, вы ушли. Вы же не перечитывали это?

Читатель: Нет. Что случилось?

Автор: Неважно. Ничего особенного.

Читатель: Серьезно, что стряслось?

Автор: Нет-нет, все хорошо… Просто препятствие…

Читатель: Какое препятствие?

Автор: Ну… просто… в следующей главе нет диалогов… и после нее нет глав… и мне только что пришло в голову… Я не уверен, что я… ну, знаете… снова вас увижу.

Читатель: Ох.

Автор: Угу.

Читатель: Почему бы тогда не добавить заключительный раздел?

Автор: Я планировал это. То есть не главу и не интерлюдию. Что-то вроде… главлюдии. Но пока все мои идеи для нее весьма странные. Кто знает, что будет, когда мы туда доберемся. В любом случае там нет математики. Вся она будет в главе ℵ, сразу после этой интерлюдии. Поэтому я только что сообразил… даже если нам удастся увидеться еще раз… нам не доведется заняться математикой снова. Это был наш последний раз.

Читатель: О… Я понял.

Автор: Я этого не осознавал… пока не закончил писать эту интерлюдию.

Читатель: Разве вы уже не пишете ее?

Автор: Нет. Я просто иногда делаю это. Говорю с вами. Это не для книги.

Читатель: Что? Почему?

Автор: Мне не хотелось менять тон раздела. Ваше… их… толкование в корне неверно. Иногда нужно просто скрывать такие вещи.

Читатель: От кого?

Автор: От вас! Для книги! Для блага повествования!

Читатель: Но как насчет… ну, вы знаете… полное раскрытие?

(Автор вздыхает.)

Автор: Мне будет так не хватать вас, когда книга закончится.

ГЛАВА ℵ

БЕСКОНЕЧНАЯ КРАСОТА БЕСКОНЕЧНОГО ДИКОГО ПРОСТРАНСТВА

ℵ.1. Удивительное единство Пустоты

Теории известного, основанные на различных физических представлениях, могут быть эквивалентными во всех своих выводах и поэтому неразличимыми с научной точки зрения. Но они не являются психологически эквивалентными, если мы пытаемся шагнуть в неизвестное, оттолкнувшись от них. Разные точки зрения предполагают возможность различных изменений, поэтому они не эквивалентны в отношении гипотез, которые выдвигает человек, пытающийся понять то, что пока ему непонятно.

Ричард Фейнман, Нобелевская лекция

Математика — не поездка по пустой автостраде, а путешествие по незнакомой дикой местности, где исследователи часто пропадают без вести. Строгость для историка — сигнал, что карты уже составлены, а настоящие исследователи ушли дальше.

Уильям Энглин, «Математика и история»*

ℵ.1.1. Подходим к аналогии серьезно

В конце предыдущей интерлюдии мы отметили прямую взаимосвязь между векторами и машинами. Здесь мы возьмемся за нее всерьез и разработаем анализ в бесконечномерном пространстве — то, что обычно называют вариационным исчислением. Как мы видели в главе N, анализ для нескольких переменных строится из тех же простых понятий, что и для одной переменной. Это верно и сейчас: символические операции вариационного исчисления в целом ведут себя как всегда, но есть и ощущение существенного

* Anglin W. S. Mathematics and History // Mathematical Intelligencer. 1992. Vol. 4, No. 4.

отличия от анализа для одной или нескольких переменных. Это различие стало результатом унификации векторов и машин, к которой мы пришли в последней интерлюдии. Эта принципиальная унификация позволит нам переключаться между двумя интерпретациями любой формулы, поэтому можно считать, что любая формула вариационного исчисления сообщает две разные вещи. Это дает нам два слоя интуиции.

До этого момента наш подход был скорее нетрадиционным. Мы в основном избегали пределов, пользуясь бесконечно малыми; часто изобретали свою терминологию; изучали предмет «задом наперед», начав с анализа и используя его в темах, которые обычно считаются «предварительными» для него; отказались от стандартных методов представления математических рассуждений в гладком отретушированном виде, который — хотя и элегантен — часто затемняет процесс мышления, давший нам возможность открыть их, и поэтому…

Математика: …мы пытались проиллюстрировать, как конкретные…

Автор: …открытия можно делать, просто гуляя по конкретным…

Математика: …тупикам и приходя в замешательство.

Автор: Итак, отказаться от этих замешательств значит отказаться…

Математика: …от понимания. Однако…

Автор: …несмотря на множество аспектов, в которых наша книга до этого была нетрадиционной, последняя глава, возможно, окажется самой нетрадиционной. Вариационное исчисление, несмотря на красоту и простоту базовых идей, практически никогда не преподают так, чтобы показать эту простую красоту. Стандартный подход к вариационному исчислению в учебных курсах и книгах настолько осмотрителен и формален (даже в сравнительно неформальных курсах прикладной математики), что точность аналогии между ним и более знакомыми видами анализа почти всегда остается невыявленной. Стандартное изложение этих идей, пусть логически корректное и по понятным причинам осторожное, — педагогический кошмар, запутанный в хитроумных штуковинах, которые именуются «основными функциями», «распределениями», «обобщенными функциями», «линейными функционалами», «слабыми производными», «вариациями» и т. д. Все эти штуковины — полноправные красивые идеи, но они *намного* сложнее, чем нужно для улавливания базовых идей. Я попытаюсь объяснить вариационное исчисление максимально простым способом, проясняя на каждом шаге прямую аналогию с вещами, уже нам известными. Как всегда, сходство нового и старого не случайное, а непосредственный результат того, что старые знакомые понятия дают сырье, из которого создается новое.

ℵ.1.2. Удача сопутствует храбрым!

Сейчас мы понятия не имеем, будут ли знакомые операции анализа иметь смысл, когда мы попробуем применить их к бесконечному числу измерений. Возможно, нет. Но не стоит забывать, что в точно таком же положении мы были всегда в этой книге. Проверка того, имеет ли смысл обобщение, остается и всегда была проверкой того, делает ли обобщение то, что мы хотим. В большинстве случаев «то, что мы хотим» должно согласовываться с нашими интуитивными представлениями в простых случаях, где наша интуиция может указать, каким должен быть ответ. Итак, мы можем решительно провозгласить, что, хотя еще не знаем, будет ли иметь смысл то, что мы собираемся делать, это определенно стоит риска. Предпочтем бросить игральную кость и двигаться вперед. *Alea jacta est**.

ℵ.2. Переход Рубикона

ℵ.2.1. Создание словаря для нашей аналогии

Поскольку мы решили проводить серьезную аналогию между машинами и векторами, создадим словарь, чтобы она была точнее. Это позволит нам проще переключаться между предложениями о векторах и о машинах,

* «Жребий брошен» (*лат.*). Считается, что Гай Юлий Цезарь произнес эту фразу в январе 49 года до н. э., прежде чем перейти пограничную реку Рубикон и вступить со своей армией на территорию Италии. Сомнения были вызваны тем, что полководец имел право возглавлять войско только за пределами Италии, а пересечение границы расценивалось как мятеж. В итоге Цезарь рискнул ввести армию и после вспыхнувшей гражданской войны был провозглашен диктатором. *Прим. перев.*

а также выяснить, как создавать анализ в этом новом бесконечномерном мире. Наш словарь приведен в рамке ниже, а каждое «определение» состоит из двух строк. Первая в каждой паре — описание какой-то аналогии между векторами и машинами с помощью слов, а вторая говорит то же с помощью символов. Символ ⇔ означает что-то вроде «вещи слева и справа — пары при аналогии вектор/машина». Словарь ни в коем случае не исчерпывающий; мы заметим и другие аспекты, в которых в этой главе можно унифицировать векторы и машины. Но он содержит полное на данный момент описание наших мыслей о том, что векторы и машины можно рассматривать как два конкретных примера более общего понятия. На старт, внимание, словарь!

Как работает словарь

Нечто о векторах (словами) ⇔ Нечто о машинах (словами)

Нечто о векторах (символами) ⇔ Нечто о машинах (символами)

Словарь

Вектор ⇔ Машина

$$\boldsymbol{x} \Leftrightarrow f$$

Индекс вектора ⇔ Вход машины

$$i \Leftrightarrow x$$

Компонент вектора для некоторого индекса ⇔ Выход машины для некоторого входа

$$x_i \Leftrightarrow f(x)$$

Машина, которая ест какой-то вектор ⇔ Машина, которая ест какую-то машину

$$F(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow F[f(x)]$$

Сумма ⇔ Интеграл

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

ℵ.2.2. Математический каннибализм

Для серьезной аналогии между машинами и векторами мы создали словарь, который позволяет переводить утверждения о векторах в утверждения о машинах. Но при этом мы написали кучу символов, с которыми не слишком знакомы, например $F[f(x)]$*. Следует остановиться и задаться вопросом, какие объекты мы исследуем. Значительная часть анализа нескольких переменных изучает машины, которые едят какой-то вектор $\boldsymbol{x}$ и выплевывают число $F(x)$. Поэтому аналогия вектор/машина предполагает, что в вариационном исчислении мы изучаем машины, которые едят какую-то машину $f(x)$ и выплевывают число $F[f(x)]$. Такие каннибальские машины обычно называются «функционалами», и оказывается, что мы уже встречали некоторые из них, хотя в то время не думали о них таким образом. Например, интеграл

$$Int[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)dx$$

можно считать полноправной машиной. Иными словами, это «большая машина», которая съедает целую машину $f(x)$ и выплевывает некое число: площадь под графиком $f(x)$ между точками $x = a$ и $x = b$. Подавая разные машины в каннибальскую машину Int, мы получаем разные числа.

Другой пример, с которым мы уже встречались, — так называемый функционал для длины кривой. В конце главы 6 мы показали, что

$$Arc[f(x)] \equiv \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

можно считать большой машиной, которая съедает целую машину $f(x)$ и выплевывает число: длину графика $f(x)$ между точками $x = a$ и $x = b$.

---

* Для разъяснения замечу, что причины, по которой мы используем квадратные скобки в $F[f(x)]$, таковы: а) обозначение $F(f(x))$ перегружено круглыми скобками; б) при использовании $F(f(x))$ может показаться, что машины F и f на одном уровне абстракции. Обе они машины, и квадратные скобки в $F[f(x)]$ служат той же цели, что и обычные круглые, но небольшая разница в обозначении напоминает, что f — машина, которая ест число и выплевывает число, а F — машина, которая ест целую машину и выплевывает число. Это важное различие: если мы напишем обычную функцию f в выражении типа $f(g(x))$, то машина f по-прежнему будет есть число (а именно: число на выходе машины g при входе x). В то же время F на самом деле ест целую машину. F — каннибал, а f — нет.

Еще один пример функционала — то, что часто называют «нормой» машины f. Это просто вычурное слово для «длины» f, если интерпретировать ее как вектор в бесконечномерном пространстве. Она не имеет ничего общего с интерпретацией длины кривой, описанной выше. Скорее тут обобщение знакомого понятия длины вектора: вдохновляясь формулой для кратчайшего пути, можно определить понятие «длины» в бесконечном числе измерений. Поскольку мы еще не видели машины-каннибала такого рода, полезно потратить несколько минут, чтобы показать, откуда появляется такая идея: чтобы получить лучшее представление о типе рассуждений, которые мы будем использовать в новом бесконечномерном мире.

ℵ.2.3. Определение длины в бесконечномерном пространстве

В интерлюдии 1 мы изобрели формулу для кратчайшего пути, известную также под названием теоремы Пифагора. Прежде всего обратите внимание, что мы можем интерпретировать эту формулу как факт о векторах в двух измерениях. Компоненты x и y вектора $\boldsymbol{v} \equiv (x, y)$ — просто длины и лежат в двух перпендикулярных направлениях, так что длина этого вектора должна составить:

$$L[\boldsymbol{v}] \equiv l = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

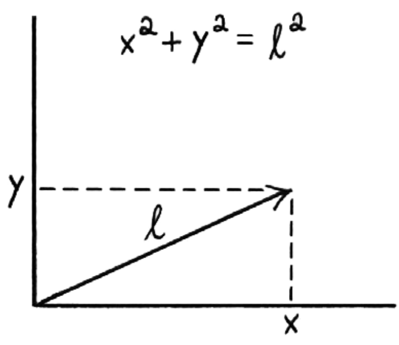


Рис. ℵ.1. Формула для кратчайшего пути говорит нам, что длина вектора $\boldsymbol{v} \equiv (x, y)$ равна $l \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. Это послужит нам вдохновением для определения длины в бесконечномерном пространстве

Встает вопрос, верна ли аналогичная формула для трех измерений, четырех и т. д. Поскольку формула для длины вектора в двумерном пространстве содержит несколько двоек (сумма двух компонентов, возведенных во вторую степень, и степень $\frac{1}{2}$ для всей суммы в целом), можно предположить, что такое совпадение размерности, где существует наш вектор (2) и степеней в формуле (тоже 2) — не просто совпадение. Это подталкивает нас к догадке, что формула для длины вектора $\boldsymbol{v} \equiv (x, y, z)$ в *трех* измерениях должна быть такой:

$$L[\boldsymbol{v}] \overset{???}{=} \left(x^3 + y^3 + z^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Мы вполне *могли бы* определять длину таким образом*, но этот метод не для нас, *если* мы хотим, чтобы определение длины соответствовало представлению о ней в повседневном языке. Мы можем так сделать и изобрести то, что хочется, но у длины есть независимое повседневное значение, которое все понимают без всякой математики. Поэтому *если* мы желаем, чтобы длина была тем, что мы подразумеваем в обычной жизни, определение длины вектора в трех, четырех или n измерениях — не то, что мы можем просто *изобрести*, а скорее то, что мы должны *открыть*. Поскольку единственное сырье в нашем распоряжении для решения этой задачи — формула для кратчайшего пути в двух измерениях, полезно задать вопрос, нельзя ли использовать ее, чтобы открыть соответствующую неизвестную формулу для другого количества измерений, а в итоге для распространения ее на наше новое бесконечномерное пространство.

Как показывает рис. $\aleph$.2, можно придумать формулу для трех измерений, используя формулу для двух. Это рассуждение показывает, что

$$L[\boldsymbol{v}] = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

* И математики так делают. Такой метод определения длины известен как «l_3-норма». Он годится не только для трех измерений, и это вполне разумное определение длины, хотя оно и не соответствует тому, что мы считаем длиной в обиходном смысле. Поскольку определение не соответствует бытовому представлению, мы не будем его касаться в этой книге.

определяет длину вектора $\boldsymbol{v} \equiv (x, y, z)$ в трех измерениях. Применяя двумерную версию формулы раз за разом, мы можем построить аналогичную формулу кратчайшего пути в n измерениях. Как и ожидалось, она имеет ту же форму: длина вектора $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n измерениях равна:

$$L[\boldsymbol{x}] = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \quad (\aleph.1)$$

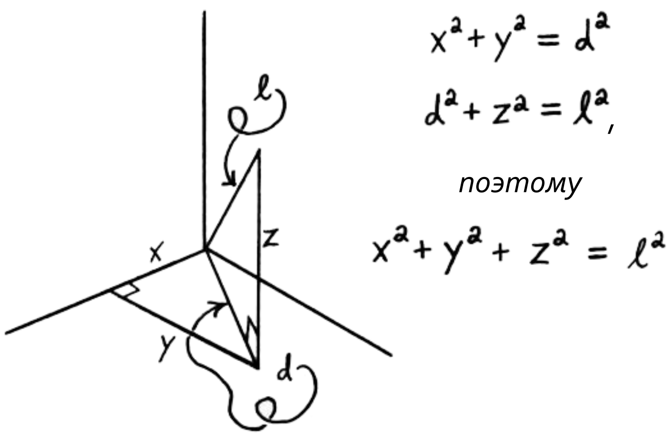


Рис. $\aleph$.2. Дважды использовав формулу для кратчайшего пути, мы получим вариант для трех измерений. Новая формула утверждает, что длина вектора $\boldsymbol{v} \equiv (x, y, z)$ равна $\ell \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Теперь, если мы желаем всерьез проводить соответствие между машинами и векторами, мы можем определить «длину» или «размер» машины, интерпретируя ее как вектор с бесконечным числом элементов. Это дает нам что-то вроде «формулы для кратчайшего пути» в бесконечномерном пространстве, и в этом смысле она будет утверждением из бесконечномерной геометрии. Звучит сложновато, но эта кажущаяся сложность — большей частью «на совести» слов, которые мы используем для описания идеи, например «бесконечномерное пространство» и прочее в этом духе. Несмотря на этот изощренный язык, основная идея крайне проста. Мы всего лишь бездумно обобщаем уравнение $\aleph$.1 с помощью нашего словаря. Иными словами, мы говорим: если мы думаем о машинах как о векторах, то уравнение $\aleph.1$ говорит нам, что «длина» машины должна быть чем-то, что получается так: а) возводим в квадрат каждый элемент, б) складываем всё получившееся, в) пишем квадратный корень над общим результатом:

$$L[f(x)] = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}. \qquad (\aleph.2)$$

Бездумно обобщив таким образом формулу для кратчайшего пути, мы можем высказывать любые утверждения, которые звучат мудро, например: «Длина функции f, интерпретированной как вектор в бесконечномерном пространстве, равна квадратному корню из интеграла $f(x)^2$». И мы совершенно точно знаем, что подразумеваем в предложениях такого рода, хотя не можем изобразить то, о чем мы говорим! Грязный трюк, правда? Откуда нам знать, верно ли это? Ну, как всегда, если мы хотим, чтобы наше бесконечномерное пространство вело себя подобно конечномерному, с которым мы уже знакомы, мы можем определить длину для бесконечномерного случая с помощью уравнения $\aleph.2$. Сейчас мы связаны не со стандартной математикой, а скорее с предматематикой, так что рассуждение выше не может быть верным или неверным. Это просто использование математических понятий для создания рассуждения, видимое достоинство которого (или его отсутствие) ведет нас прежде всего к выбору некоторого определения бесконечномерной длины.

Теперь, когда мы определили понятие «длины» машины, мы можем употреблять выражения вроде «такая-то машина бесконечно мала». Иными словами, сейчас, когда мы способны говорить о размере в нашей неосвоенной бесконечности, стоит подумать, как изобрести бесконечномерный анализ!

ℵ.3. Изобретение каннибальского анализа

ℵ.3.1. Построение нового из старого, как всегда

Нас больше всего интересует не природа объектов, а их поведение. Это верно для всей математики, и мы наблюдали этот принцип с самого начала. Действительно, есть много возможных определений для площади или крутизны, которые ведут себя не так, как те, что мы использовали. Они могут быть намного сложнее, чем наши, поэтому с ними труднее работать. Но наши определения ведут себя точно так, как нам хочется, потому что мы потребовали этого; поэтому мы можем сосредоточиться на них. Пустота содержит бесконечную прорву машин, большинство которых намного сложнее тех четырех видов, которые мы изучали в главе 5. Для исследования были выбраны именно эти четыре вида, поскольку мы точно знали, что́ можем о них сказать. А знали мы это, поскольку определили их по поведению.

Сейчас мы сталкиваемся с тем же принципом, хоть и под другой личиной. Если игнорировать багаж существующих учебников, как определить производные машин, которые съедают целые машины, а выплевывают числа, чтобы это дало нам возможность выполнять те же операции с ними, что мы уже делали? Вместо того чтобы придерживаться обычной для учебников практики, когда *сначала* определяют набор функций (как если бы это была первоочередная задача для математического созидания), а только потом приступают к выведению результатов, мы выберем обратный путь. Мы будем предматематически *выводить* определения бесконечномерного анализа, ничего не зная о пространстве функций, о которых говорим, и двигаться вперед, требуя, чтобы эти новые объекты — чем бы они ни были — вели себя согласно правилам анализа, с которыми мы уже знакомы, поскольку нам это нужно для продвижения. Возможно, важнее всего здесь то, что при любом смысле «производной» в новом мире мы потребуем, чтобы о производных можно было рассуждать как об отношении двух бесконечно малых чисел. Только тогда мы можем перенести наш опыт анализа, уже созданного в этой книге, в новую дикую местность. Изучать, какие именно объекты подчиняются таким операциям и как нужно кодировать их на языке теории множеств, — второстепенная задача, которой может заниматься любой, кому это интересно. Если, когда уляжется пыль, окажется, что мы изучали не тот класс объектов, который мы выбрали изначально, пусть так и будет. Нас это не интересует.

Итак, предположим, у нас есть каннибальская машина, которая ест целую машину $f(x)$ и выплевывает число $F[f(x)]$. В анализе нескольких переменных мы определяли частные производные: брали машину $F(\boldsymbol{x})$ и бесконечно мало изменяли один из элементов вектора $\boldsymbol{x}$, оставляя прочие без корректировок. Далее мы смотрели на разницу между выходом до и выходом после и делили ее на разницу во входе до и входе после. Соблюдая дух построения нового из старого, поступим точно так же, чтобы определить производную в нашей бесконечной неосвоенной местности.

Поскольку у нас есть каннибальская машина F, у нас имеется бесконечно много «мест-элементов», которые мы можем изменить. Для машин, которые питаются векторами, они маркировались $x_1, x_2, \dots, x_n$. Теперь для машин, которые питаются машинами, эти места-элементы маркированы $f(0)$, $f(0{,}001)$, $f(3)$, $f(796{,}5)$ и т. д. В реальности мы не можем написать каждый такой элемент, но он один для каждого x. Для вектора $\boldsymbol{x}$ элемент, стоящий на третьем месте, обозначался x_3, а сейчас символ $f(x)$ заменяет число на *икс*-овом месте машины f. Исходя из этого определим «частную производную» каннибальской машины.

Прежде всего введем обозначение:

$$\delta F[f(x)] \equiv F[f(x) + \delta f(x)] - F[f(x)]. \tag{$\aleph$.3}$$

Перед тем как объяснять, что это значит, важно подчеркнуть, что мы используем странное обозначение δ вместо d не для того, чтобы вас запутать, а чтобы вы могли увидеть, как просты и сходны со случаем одной переменной *идеи*, которые в обычных учебниках выражены с помощью ужасающих символов. Если вас пугает δs, то, пожалуйста, ради любви к математике зачеркните мои уравнения и перепишите их, используя букву d. Они будут в любом случае выражать точно то же.

В уравнении выше символ $\delta f(x)$ означает бесконечно малую машину — ровно так же, как dx в анализе одной переменной означал бесконечно малое число. Смысл, в котором эта машина «бесконечно мала», устанавливается нашим определением (см. чуть выше) «длины» или «размера», на которое нас вдохновила формула для кратчайшего пути. Если в этом определении длина машины — бесконечно малое число, это «бесконечно малая машина». Существенно, как и в анализе для одной переменной, что f в $\delta f(x)$ — не то же самое, что f в $f(x)$*.

Одно замечание об обозначении: то, что мы писали $F[f(x)]$, достаточно записывать в виде $F[f]$, поскольку машина F зависит не от конкретного x, а от всей машины f. Но мой опыт показывает, что форма $F[f(x)]$ приводит к меньшей путанице. Нам понадобится еще одна буква для обозначения конкретного места-элемента, по которому мы дифференцируем. Поскольку буква y может ассоциироваться с «вертикальностью», я буду использовать $\widetilde{x}$. Волна над буквой x говорит всего лишь: «Это символ, который отличен от x, и он может относиться или не относиться к какой-то другой точке». Вот и всё. Теперь, когда мы сделали это, наш словарь предполагает, что мы определяем производную F по конкретному элементу $f(\widetilde{x})$:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})},$$

где $\delta F[f(x)]$ определена в уравнении $\aleph.3$, а $\delta f(\widetilde{x})$ — просто выход какой-то не связанной бесконечно малой машины δf (о конкретной форме которой мы ничего не знаем; именно так мы поступали с переменными с самого начала) для входа $\widetilde{x}$. Посмотрим, как это работает на практике. Предположим, мы изучаем конкретную каннибальскую машину

$$F[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)^2 dx.$$

* Это заслуживает разъяснения: в анализе функций одной переменной $x + dx$ означает x плюс *не связанное с ним* бесконечно малое число. Когда мы пишем «$x + dx$», мы пишем четыре символа: а) x, б) $+$, в) d, г) x. Как мы уже знаем, x в пункте а) *никак не связан* с x в пункте г), являющимся второй буквой в dx. Обозначение dx в анализе для функций одной переменной не означает, что мы что-то делаем с x; это (не связанное с ним) бесконечно малое число. Мы это уже знаем, но стоит еще раз подчеркнуть для понимания сокращения в уравнении $\aleph.3$. По непонятной причине во многих областях математики буква d в выражении d(*нечто*) относится к действию, выполняемому над (*нечто*), и в учебниках по вариационному исчислению δ часто тоже используется так, когда она обозначает штуку, именуемую вариацией. Не беспокойтесь сейчас об этом. Скоро мы снова встретимся с той же идеей.

Тогда, используя определения выше, получим:

$$\delta F\left[f(x)\right] \equiv F\left[f(x) + \delta f(x)\right] - F\left[f(x)\right] \equiv$$
$$\equiv \left(\int_a^b \left[f(x) + \delta f(x)\right]^2 dx\right) - \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right) =$$
$$= \left(\int_a^b f(x)^2 + 2f(x)\delta f(x) + \left(\delta f(x)\right)^2 dx\right) - \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right) =$$
$$= \int_a^b f(x)^2 + 2f(x)\,\delta f(x) + \left(\delta f(x)\right)^2 - f(x)^2 dx =$$
$$= \int_a^b 2f(x)\delta f(x) + \left(\delta f(x)\right)^2 dx.$$

Разделив на $\delta f(\widetilde{x})$, мы получаем:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{1}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b \left[2f(x)\delta f(x) + (\delta f(x))^2\right] dx =$$
$$= \int_a^b \left[2f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})} + \delta f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}\right] dx.$$

ℵ.3.2. Бесконечная предматематика, часть I: возможность, которую никогда не обсуждают

Сейчас может показаться, что обсуждение забуксовало, ведь мы еще не определили, к чему относится символ

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}.$$

Но вспомните, что мы изобрели эту штуку сами, и вместо того чтобы спрашивать: «Что нам дальше делать?», спросим лучше: «Чем должна быть производная $F[f(x)]$ по нашему желанию?». Если это звучит как рассуждение задом наперед, подумайте еще! Вспомните, что мы делали на протяжении всей книги. Процесс перевода старого и знакомого в более широкие и странные контексты всегда подразумевает выбор. Он таков: какие аспекты старого понятия мы желаем встроить в нашу новую, более общую его версию? В нашем случае, как мы скоро увидим, выбор, по сути, в том, хотим ли мы, чтобы производная

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^2 dx$$

равнялась $2f(\widetilde{x})$ или $2f(\widetilde{x})dx$. Через несколько строк мы увидим, почему так. А теперь вернемся туда, где остановились в вычислении, поскольку не сказали, что мы подразумеваем под

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}.$$

Мы не можем разобраться с вопросом, как хотим определить «функциональную производную» — производную каннибальской машины $F[f(x)]$, — пока не скажем, как мы хотим определить функциональные производные различных «векторных элементов» $f(x)$ и $f(\widetilde{x})$ друг относительно друга. Возможно, поможет наш словарь. Вспомним, что в анализе нескольких переменных было справедливо равенство

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}, \tag{ℵ.4}$$

которое всего лишь говорит, что, поскольку различные переменные x_1, x_2, ..., x_n трактовались как «перпендикулярные направления», мы можем менять положение вдоль одного из них, не меняя положения относительно другого — по той же причине, по которой мы можем идти на запад или восток, не меняя координат по оси север — юг. Поскольку мы можем обобщать так, как нам захочется, выберем такое определение:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})} \overset{\text{Что, если?}}{=} \begin{cases} 1, \text{ если } x = \tilde{x} \\ 0, \text{ если } x \neq \tilde{x} \end{cases}. \tag{ℵ.5}$$

В таком случае можно вернуться туда, где мы остановились, и написать, что функциональная производная составит:

$$\frac{\delta F\left[f(x)\right]}{\delta f(\tilde{x})} = \int_a^b \left[2f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})} + \delta f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}\right]dx \overset{(ℵ.5)}{=}$$

$$\overset{(ℵ.5)}{=} 2f(\tilde{x})dx + \delta f(\tilde{x})dx.$$

Обратите внимание, что в каждом слагаемом есть dx, так что все они бесконечно малы. Но во втором слагаемом имеется два перемноженных бесконечно малых компонента, поэтому оно бесконечно мало по сравнению с первым. При таком определении мы могли бы просто сказать:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})} = 2f(\tilde{x})dx.$$

Это показывает, что выбор с помощью уравнения ℵ.5 приводит нас к ситуации, в которой все функциональные производные бесконечно малы. Почему это так с интуитивной точки зрения? В анализе для нескольких переменных выбор с помощью уравнения ℵ.4, то есть

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases},$$

приводил к тому, что частные производные были, как правило, обычными числами: ни бесконечно малыми, ни бесконечно большими. Например, было справедливо:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_1^2 + \cdots + x_k^2 + \cdots + x_n^2 \right) = \\ &= 0 + \cdots + 0 + 2x_k + 0 + \cdots + 0 = 2x_k. \end{aligned} \qquad (\aleph.6)$$

После взятия производной нет никаких бесконечно малых вроде dx. Почему тогда мы получили

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^2 dx = 2f(\tilde{x})dx \qquad (\aleph.7)$$

при выборе с помощью уравнения ℵ.5? Два этих выражения аналогичны, и на первый взгляд неясно, почему одно оканчивается бесконечно малым числом, а во втором такого нет. Снова игнорируя предостережения учебников, мы можем дать понятный ответ. Сумма в уравнении ℵ.6 была суммой конечных вещей, и неудивительно, что мы получили конечное число для производной. А интеграл в уравнении ℵ.7 — сумма *бесконечно малых*. Как известно, это сумма площадей бесконечно узких прямоугольников, каждая из которых равна f(*число*)dx, где f(*число*) — обычное число вроде 3, 7 или 52, а dx — «бесконечно малое». Определение «частной функциональной производной» таким способом, как в уравнении ℵ.5 (а мы поступили именно так, поскольку хотели, чтобы определение было максимально схоже с ℵ.4) привело к тому, что наши функциональные производные должны быть бесконечно малыми числами.

Интуитивно это имеет смысл. Насколько изменится площадь под графиком машины, если мы изменим высоту в *отдельной точке* x на какую-то *бесконечно малую* величину? Каким бы ни был ответ, в нем должны содержаться два бесконечно малых числа: *ширина* исходного прямоугольника (от dx) и изменение его *высоты* (от $\delta f(x)$). Если мы определяем «частные функциональные производные» так, как в уравнении ℵ.5, *скорость изменения* всей площади должна содержать одно бесконечно малое число: ведь один из двух бесконечно малых компонентов исчезнет после деления на $\delta f(\tilde{x})$ при вычислении производной.

ℵ.3.3. Бесконечная предматематика, часть II: более привлекательное определение

Если мы хотим, чтобы наши функциональные производные были конечными числами, какое определение мы можем использовать вместо уравнения ℵ.5? Чтобы дать ответ, придется вернуться в точку перед уравнением ℵ.5, где мы определяли $\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}$. Предположим, мы желаем определить функциональные производные *каким-то способом*, чтобы наша простая каннибальская машина ($F[f(x)] \equiv \int_b^a f(x)^2 dx$) имела производную, которая выглядит как $2f(\tilde{x})$, а не $2f(\tilde{x})dx$. Что нужно для этого сделать? Наш предыдущий выбор дал нам нежелательное dx, поэтому самое тупое (или, если угодно, простое), что тут можно сделать, чтобы получить конечные числа для функциональных производных, — изменить определение так:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})} \overset{\text{Что, если?}}{=} \begin{cases} \frac{1}{dx}, \text{ если } x = \tilde{x} \\ 0, \text{ если } x \neq \tilde{x} \end{cases}. \qquad (ℵ.8)$$

Посмотрим, к чему нас приведет такое решение. Возвращаясь к соответствующему месту, вычисляем:

$$\frac{\delta F\left[f(x)\right]}{\delta f(\tilde{x})}=\int_a^b\left[2f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}+\delta f(x)\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}\right]dx\overset{(\aleph.8)}{=}$$

$$\overset{(\aleph.8)}{=}2f(\tilde{x})\frac{1}{dx}dx+\delta f(\tilde{x})\frac{1}{dx}dx=$$

$$=2f(\tilde{x})+\delta f(x).$$

Как и ранее, слагаемое $\delta f(\tilde{x})$ бесконечно мало по сравнению со слагаемым $2f(\tilde{x})$, поэтому мы можем просто написать:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})}\overset{(\aleph.8)}{=}2f(\tilde{x}).$$

Превосходно! Это как раз тот приятный конечный ответ, который нам хотелось получить. Вполне ожидаемо, что определение величин $\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}$ как бесконечно больших чисел в итоге аннулирует влияние того факта, что сам интеграл был суммой множества бесконечно малых чисел.

ℵ.3.4. Добавление еще двух букв ∂ в балаган превращений $d \to \partial \to \delta$

Когда улеглась пыль, мы выяснили, какое определение функциональной производной дает нам красивый конечный ответ. Рассмотрев последствия разных возможных определений, мы четче поняли взаимосвязь между анализом для одной переменной, для нескольких переменных и бесконечномерным анализом и узнали, почему последние выглядят так, как выглядят. Например, если мы выберем определение из уравнения ℵ.8, то нетрудно увидеть аналогию между следующими уравнениями, даже при странной замене обозначений d на ∂ и δ и при переходе от суммы Σ к интегралу $\int$:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x, \tag{ℵ.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 2x_k, \tag{ℵ.10}$$

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\int_a^b f(x)^2dx = 2f(\tilde{x}). \tag{ℵ.11}$$

Сходство сохраняется, если мы не суммируем все переменные, а дифференцируем квадрат одной из них. Скоро мы это увидим, но прежде всего это дает возможность обсудить два момента в традиционной системе обозначений. Ранее мы определили, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ равно 1, если индексы одинаковы, и 0, если они различны. Учебники называют это «дельта Кронекера*», что звучит весьма причудливо, и пишут:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}. \qquad (\aleph.12)$$

Хотя выражение «дельта Кронекера» звучит как название островной тюрьмы, в которой содержат исключительно самых опасных преступников, на самом деле это очень простая идея. По какой-то чудесной прихоти традиционной системы обозначений символ δ_{ij} не имеет ничего общего с той δ, которая заменяет d и ∂ в бесконечномерном анализе.

Вспомним, что мы определили $\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}$ как $\frac{1}{dx}$, когда x и $\tilde{x}$ совпадают, и 0 в противном случае. Вы не удивитесь, услышав, что в учебниках есть дурацкое название и для этой штуки: «дельта-функция Дирака». Не оптимальный термин, но мы отнесемся к нему с уважением, поскольку название дано в честь весьма странного и блестящего человека**. Хотя учебники обычно этого не пишут, дельта-функция Дирака определяется так:

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{dx}, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}. \qquad (\aleph.13)$$

Поэтому мы можем представлять ее как функцию, которая равна 0 почти везде, за исключением точки $x = 0$, где ее можно считать «бесконечно высоким пиком». Допустимо также записать это определение в виде, который на первый взгляд кажется более сложным, но проясняет сходство с дельтой Кронекера:

* Леопольд Кронекер (1823–1891) — немецкий математик, сторонник «арифметизации» математики. *Прим. перев.*

** Поль Дирак (1902–1984) — английский физик, лауреат Нобелевской премии, один из создателей квантовой механики. Известен также нетривиальным мышлением, крайней немногословностью, любовью к точным формулировкам. *Прим. перев.*

$$\delta(x - \tilde{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{dx}, \text{ если } x = \tilde{x} \\ 0, \text{ если } x \neq \tilde{x} \end{cases}. \qquad (\aleph.14)$$

Обратите внимание, что это точный аналог дельты Кронекера в следующем: а) оба символа δ включают в описание две «переменные»; б) если эти переменные не равны, обе дельты равны 0; в) когда эти переменные равны, дельты равны чему-то, что обеспечивает одинаковое поведение в анализе для нескольких переменных и в вариационном исчислении. Если последнее предложение неясно, изучите пример.

В уравнениях $\aleph$.9, $\aleph$.10 и $\aleph$.11 мы показали сходство трех форм анализа: для одной переменной, для нескольких переменных и каннибальского (или «вариационного», или «функционального», или как вам угодно). Используя новые символы δ, мы можем продемонстрировать сходство и другим способом, без суммирования. Рассуждая практически точно так же, как при изобретении молотка для нового сокращения («цепное правило») в главе 3, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} x_i^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i^2\right) = 2x_i\delta_{ik}$$

и

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} f(x)^2 = \left(\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}\right)\left(\frac{\delta}{\delta f(x)} f(x)^2\right) = 2f(x)\delta(x - \tilde{x}).$$

Поэтому, используя два новых варианта символа δ, заметьте, что дельта Кронекера и дельта Дирака в правой части вышеприведенных уравнений не имеют ничего общего с символом δ для функциональных производных из левой части. Понимаете, почему я всегда жалуюсь на стандартные обозначения? Они заставляют меня писать длинные объяснения (вроде этого!). Итак, мы можем продемонстрировать сходство между нашими тремя видами анализа еще одним способом, а именно:

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x, \; \frac{\partial}{\partial x_k} x_i^2 = 2x_i\delta_{ik},$$
$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} f(x)^2 = 2f(x)\delta(x - \tilde{x}).$$

Видите, как похоже? Конечно, математики (и книги по математике, которые они пишут), в силу запутанного комплекса исторических и культурных причин, практически никогда не учат вариационному исчислению таким путем. В следующем разделе мы кратко обсудим некоторые из самых раздражающих аспектов того, как этот предмет формализован и преподается.

ℵ.4. Педагогическое уродование бесконечномерного анализа

ℵ.4.1. Необъяснимое наваждение с интегральными функционалами

При стандартном подходе к этой теме часто неясно, насколько сходен каннибальский анализ с анализом для нескольких переменных, а заодно и со старым добрым анализом функций для одной переменной. Например, в вариационном исчислении конкретные примеры вычисления функциональных производных почти всегда сосредоточены на так называемых интегральных функционалах, то есть каннибальских машинах, которые выглядят так:

$$F[f(x)] \equiv \int_a^b [\text{нечто, содержащее } f(x) \text{ и ее производные}]\, dx.$$

Некоторые примеры интегральных функционалов, которые мы уже видели, включают сам интеграл:

$$Int[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)\, dx,$$

функционал для длины кривой, то есть *графика f*

$$Arc[f(x)] \equiv \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

и «норму», или длину *f*, когда она интерпретируется как вектор в бесконечномерном пространстве. Напоминаю: такая интерпретация «длины» не имеет ничего общего с длиной кривой выше, а появляется из обобщения понятия «длины» для векторов в бесконечномерном пространстве. Это дало нам:

$$L[f(x)] \equiv \sqrt{\int_a^b f(x)^2\, dx}.$$

Учебники обычно пишут это в виде $||f(x)||$ или $||f||$, а не $L[f(x)]$, но суть та же. Возникает вопрос, который (готов поспорить) появляется в голове большинства людей при первом знакомстве с предметом, но никогда не обсуждается ни в одном учебнике: почему каннибальский анализ почти всегда сосредоточен на «интегральных функционалах», а не более общих, которые не обязательно записываются в интегральной форме? Ученики неспроста путаются, поскольку найти причину на самом деле трудно.

Да, большинство конкретных нетривиальных примеров функционалов, которые появляются на практике, интегральные, но это не объясняет, почему педагогика каннибальского анализа не желает использовать более обширный набор примеров для показа новичкам масштаба параллелей между каннибальским анализом и анализом для нескольких переменных. Прежде всего обратите внимание, что во всех интегральных функционалах любой формы x в $f(x)$ выглядит «связанной переменной». Вот несколько примеров для иллюстрации того, что я имею в виду и к чему это говорю. Рассмотрим интегральный функционал:

$$F[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Наш словарь и обсуждение выше показывают, что его аналог в анализе функций нескольких переменных выглядит так:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Мы уже видели, что при надлежащем выборе определения функциональной производной мы можем обобщить выражения из анализа для нескольких переменных, например

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2x_k,$$

до аналогичных выражений в каннибальском анализе — в нашем случае:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})} \;=\; \frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^2 \, dx \;=\; 2f(\tilde{x}).$$

Да, в учебниках редко проясняется прямая связь между двумя вычислениями на простых конкретных примерах, но суть не в этом. Суть в вопросе: почему так часты интегральные функционалы? Иными словами, почему учебники по этой теме так редко включают в качестве рабочих примеров выражения вида:

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\Big(f(x)^4 - 3f(x)^2 + 7f(2)\Big),$$

которые содержат функциональные производные без интегралов? Какими бы неважными ни были эти примеры для практики, они существенны для педагогики, и полезно задаться вопросом, почему они так редко попадают в учебники по вариационному исчислению. Используя наш словарь, мы видим, что аналогом этого выражения в анализе для нескольких переменных будет:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(x_i^4 - 3x_i^2 + 7x_2\Big).$$

Индекс i — «свободный», или неопределенный, не как, например, в суммировании, когда для сложения всех возможных величин конкретное значение индекса неважно. Поскольку i не определен, при вычислении вышеприведенной частной производной нужно учитывать две возможности: i либо совпадает с k, либо нет. Введенный нами в предыдущем разделе символ «дельта Кронекера» позволяет записать обе возможности сразу:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(x_i^4 - 3x_i^2 + 7x_2\Big) \;=\; \Big(4x_i^3 - 6x_i\Big)\delta_{ik} + 7\delta_{2k}. \tag{ℵ.15}$$

Выражения вроде уравнения ℵ.15 достаточно часто появляются в курсе анализа для нескольких переменных. Но в обычных учебниках вы не увидите тип выражения, который получается при переводе примера выше на язык каннибальского анализа. Мы получим:

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\Big(f(x)^4 - 3f(x)^2 + 7f(2)\Big) \;=\; \Big(4f(x)^3 - 6f(x)\Big)\delta(x-\tilde{x}) \;+\; 7\delta(2-\tilde{x}).$$

Хотя может показаться, что нет особого смысла оставлять x неопределенным, невозможно смотреть на пример выше и не замечать прямого сходства между вариационным исчислением и знакомыми операциями из анализа для одной и нескольких переменных. В этом смысле такие «бесполезные примеры» имеют огромную педагогическую ценность, чего крайне не хватает при стандартном изложении предмета. Но почему они редко появляются в учебниках? Могу предположить, что одна из причин такова. Когда мы вычисляем функциональную производную чего-нибудь вроде $f(x)^3$ по $f(\tilde{x})$ и получаем выражение $3f(x)^2\delta(x-\tilde{x})$, то либо x не совпадает с $\tilde{x}$, и тогда это выражение равно 0, либо $x = \tilde{x}$, следовательно, это выражение равно

$$3f(x)^2\delta(0). \qquad (\aleph.16)$$

Держу пари, что именно по этой причине такие простые примеры обычно не представлены в учебниках. Соответствующий пример на языке анализа функций нескольких переменных дает нам понятное конечное выражение, а пример для вариационного анализа содержит «бесконечное» число $\delta(0)$, и многие книги по математике не считают его осмысленным выражением. Обычная практика использования δ-функции Дирака внутри интегралов вполне естественна, если цель — создать наиболее элегантную «строгую» формализацию этих понятий в системе вещественных чисел, а для принципиального понимания каннибальского анализа это насилие. По опыту я знаю, что студенты-физики в среднем намного меньше боятся практических вычислений в вариационном анализе, чем студенты-математики. По понятным причинам большинство математиков не желают использовать выражения с δ-функциями Дирака вне интегралов, хотя такие выражения для интегральных функционалов считаются приемлемыми. Чтобы понять, почему это так, вспомните, что мы представляли $\delta(0)$ как $\frac{1}{dx}$. Если мы поставим такое выражение под знак интеграла, все «бесконечности» исчезнут. Подставляя выражение в интеграл (и считая, что $\tilde{x}$ лежит между a и b), мы можем записать:

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^3 \, dx = \int_a^b \frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} f(x)^3 \, dx = \\ = \int_a^b 3f(x)^2 \delta(x - \tilde{x}) \, dx = 3f(\tilde{x})^2 \delta(0) \, dx = 3f(\tilde{x})^2, \tag{ℵ.17}$$

причем на последних двух шагах я сделал нечто запрещенное. Однако вообразите, что мы просто удалим шаг в рассуждении, включающий δ(0), и выпишем тот же конечный результат.

Если мы так сделаем, получившееся рассуждение станет намного более комфортным для среднего математика по сравнению с первоначальным или уравнением ℵ.16, содержащим δ(0), поскольку мы взяли функциональную производную за пределами интеграла. Вот почему, могу поспорить, книги и курсы по вариационному исчислению так сосредоточены на «интегральных функционалах». Пока мы фокусируемся на них, все наши функциональные производные приводят к выражениям, где не надо думать о штуках вроде δ(0).

Подчеркиваю: математики не делают ничего логически неверного, когда излагают в своих книгах и курсах каннибальский анализ. Но при этом приносится в жертву полезный момент прозрения «Ага!», который дают простые примеры выше, и я считаю, что стандартное изложение в высшей степени некорректно с педагогической точки зрения.

Сказав это, мне следует немного поспорить с собой, выступая в пользу стандартных учебников. Часто предпочтения нашего гипотетического математика очень разумны. Штуки вроде δ(0) нельзя легко определить в рамках системы вещественных чисел, поэтому математики, желающие формализовать идеи этой главы, встречаются действительно со сложным выбором. От них требуется следующее.

1. Либо, придерживаясь системы вещественных чисел, формализовать δ-функцию (и связанные с ней объекты), сказав, что это «мера», «распределение», «линейный функционал на пространстве основных функций» или еще какой-нибудь способ, не требующий привлечения δ(0).

2. Либо пройти мимо комфорта системы вещественных чисел куда-то в область гипервещественных чисел, где серьезно относятся к бесконечно большим и бесконечно малым количествам.

Если кто-то поставит цель разработать формальную теорию понятий из этой главы, которая будет строгой по стандартам математической культуры, то, пожалуй, лучше использовать первое. Тогда подход, который я критикую здесь, вообще не заслуживает упреков. Если бы у нас была та же цель, стандартный подход стал бы абсолютно разумным способом ее достижения.

В обсуждении выше мы встретились с тем, что до сих пор было центральной предматематической темой книги: больше сосредоточиваться на процессах мышления, с помощью которых создаются математические понятия, а не бесчисленных следствиях, которые можно вывести из этих определений. Для любого математического понятия есть разные определения, и функциональная производная — не исключение. Хотя любая дискуссия должна в итоге прийти к какому-то одному определению, прежде чем предлагать теоремы и конструировать доказательства, только обсуждение сравнительных преимуществ разных кандидатов в определение дает нам возможность заглянуть за формальность выглаженных математических понятий и понять неформальные и анархические стили рассуждений, которые в первую очередь мотивировали их открытие.

ℵ.4.2. Странное синтаксическое соглашение

Несмотря на сходство операций, выполняемых в ℵ.9–ℵ.11, большинство учебников по вариационному исчислению для вычисления функциональных производных проделывают иные действия. Это верно даже для учебников по прикладной математике и теоретической физике, где стандарты строгости значительно отличаются от таковых в чистой математике, поэтому такие странные пляски могут выглядеть неоправданными. Посмотрим на конкретный пример минутку-другую, но не беспокойтесь, если он сбивает с толку. Вот эти пляски. Говорится что-то вроде: рассмотрим интегральный функционал вида:

$$F[f(x)] \equiv \int_a^b M[f(x)]dx.$$

Потом определяется

$$\delta F \equiv F[f(x)+\delta f(x)] - F[f(x)] \equiv$$
$$\equiv \int_a^b M[f(x)+\delta f(x)] - M[f(x)]dx. \tag{ℵ.18}$$

Здесь часто говорят: «Разложим $M[f(x) + \delta f(x)]$ по степеням $\delta f(x)$» и переходят к чему-нибудь вроде:

$$M[f(x)+\delta f(x)] = M[f(x)] + \frac{\delta M[f(x)]}{\delta f(x)}\delta f(x) + O\left(\delta f(x)^2\right),$$

где $O(\delta f(x)^2)$ означает «нечто, зависящее от степеней $\delta f(x)$, которые равны 2 или выше». Потом это разложение подставляется в уравнение ℵ.18, игнорируются так называемые члены высших порядков, скрытые в слагаемом $O(\delta f(x)^2)$, и в итоге получается

$$\delta F \equiv \int_a^b \frac{\delta M[f(x)]}{\delta f(x)}\delta f(x)dx.$$

После этого функциональная производная попросту *определяется* как величина *внутри* интеграла, то есть $\frac{\delta M[f(x)]}{\delta f(x)}$. Обратите внимание, что ответ точно такой же, как и наш, но в приведенном рассуждении есть некоторые вещи, которые заметно отличаются от знакомого нам анализа одной или нескольких переменных. Прежде всего вымышленный учебник, который мы имитировали, использовал что-то вроде Ностальгического устройства, чтобы разложить выражение $M[f(x) + \delta f(x)]$. Это приводит к тому, что слагаемое $M[f(x)]$ сокращается с $-M[f(x)]$. Далее загадочным образом пропали члены высших порядков. Основанием для этого было наше представление о $\delta f(x)$ как о бесконечно малой функции, аналогичной dx в анализе для одной переменной. В силу этого $(\delta f(x))^2$ должна быть бесконечно малой по сравнению с $\delta f(x)$, что оправдывает игнорирование и ее, и всех ее степеней выше 2. Также обратите внимание, что обсуждение, в ходе которого была определена функциональная производная, началось *не* с рассмотрения того, что было бы разумно называть производной функционала F, а скорее с рассмотрения верхней половины производной, то есть δF. Затем какая-то штука, которая оказалась внутри интеграла в ходе вычисления δF, была определена как функциональная производная. При этом мы не дали обоснования, почему так поступили, и не объяснили, почему загадочный элемент под знаком интеграла заслуживает названия производной. Это странное рассуждение фактически привело к тому же ответу, что мы получили ранее, но каким-то кружным и путаным путем.

Я провел много времени, глядя на вариационное исчисление снаружи и думая: «Ого! Как мудрено» каждый раз, когда видел его написанным в книге или на учебной доске. Но на самом деле любой, кто понял основы анализа, уже знает 90 процентов необходимого для понимания вариационного исчисления. Это происходит в силу: а) разницы в обозначениях, б) способа вычисления функциональных производных в учебниках, который выглядит так, *будто* это совершенно другая тема, построенная из совершенно незнакомых идей.

Естественно, учебники изобилуют логически эквивалентными формализациями указанных идей, но, как мы обсуждали ранее много раз, логическая эквивалентность не означает эквивалентности педагогической. Можно избежать многих замешательств, подчеркивая раз за разом, насколько похожи все пугающие «новые» вещи на «старые», с которыми студенты уже знакомы, даже до того, как эти «новые» вещи начинают им преподавать. По крайней мере я это всегда ощущал. Если вам уже до чертиков надоело слушать, как я повторяю одно и то же… прекрасно! Постарайтесь вспомнить это нытье, когда будете читать другие учебники, и, возможно, увидите в этом чуть больше смысла.

ℵ.5. Бесконечный джекпот: заставим наши идеи работать на нас

ℵ.5.1. Проверяем наши изобретения, изобретая заново уже известное

Этот трепет перед красотой, этот невероятный факт, что открытие, вдохновленное стремлением к красоте в математике, должно найти свое точное отражение в Природе, заставляет меня сказать, что красота — то, на что человеческий разум реагирует сильнее и глубже всего.

Субраманьян Чандрасекар, «Истина и красота: эстетика и мотивация в науке»*

В разговорах об аналогии между анализом для одной или нескольких переменных, с одной стороны, и каннибальским анализом — с другой без ответа остался один вопрос. Да, мы выбирали определения так, чтобы операции для вычисления производных в каннибальском анализе оказались знакомыми. Да, мы требовали, чтобы производные там вели себя достаточно схоже с производными в анализе для одной или нескольких переменных, и нам не пришлось изучать ничего нового о том, как вычислять производные. Мы просто поменяли обозначения, используя δ вместо ∂ или d, и смогли написать всякого рода умные выражения вроде $\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^2 dx = 2f(\tilde{x})$ — по сути, обобщенный и замаскированный вариант уравнения $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$.

Но к данному моменту вовсе не ясно, сохранит ли простое определение производных по их поведению свой смысл в других аспектах. Насколько серьезно мы можем провести аналогию между новым и старым? Например, в анализе для одной или нескольких переменных мы могли находить «точки горизонтальности»** машины, приравнивая производную

* Chandrasekhar S. Truth and Beauty: Aesthetics and Motivations in Science. University of Chicago Press, 1990.

** На жаргоне учебников это точки локального максимума, локального минимума и седловые точки.

к 0, а затем выясняя, где это произошло. Но сейчас все наши уравнения рискованно балансируют между двумя интерпретациями: при одной мы думаем о машинах как о знакомых кривых, для которых мы можем построить график в двух измерениях, а при другой считаем их «векторами с бесконечным числом мест-элементов». Соответственно, если мы просто возьмем какую-нибудь каннибальскую машину, например

$$F[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)^2 dx,$$

а затем потребуем, чтобы ее функциональная производная равнялась 0 во всех местах-элементах «вектора» $f(x)$ (иными словами, для всех $\tilde{x}$), непонятно, будет ли результат такого процесса в каком-то смысле местом, в котором наш функционал максимизируется или минимизируется. Сам по себе факт, что мы можем вычислить функциональные производные с помощью тех же методов, что использовали ранее, вовсе *не* обязательно означает, что «производная равна 0» по-прежнему дает «точку горизонтальности».

Как и ранее в нашем путешествии, мы не можем просто заглянуть в учебник, чтобы увидеть, по-прежнему ли «производная равна 0» означает «точку горизонтальности». И я не могу сказать: «Да, это верно. Давайте использовать этот факт». Поэтому, если мы хотим выяснить, существует ли полезный смысл, в котором «производная равна 0» означает «точку горизонтальности», нам следует сделать то, что мы делали всегда: посмотреть на простые случаи и увидеть, воспроизводят ли наши идеи то, что мы ожидаем.

Для начала взглянем на знакомую каннибальскую машину $F[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)^2 dx$. Поскольку $f(x)^2$ всегда неотрицательна, кажется интуитивно ясным, что никакая машина f не может сделать $F[f(x)]$ отрицательной. Более того, единственная машина f, для которой $F[f(x)]$ будет равна 0, — $f(x) \equiv 0$. Рассмотрим интеграл в графическом виде. Если для всех точек некоторого небольшого интервала $f(x)$ отлична от 0, то есть положительна или отрицательна, $f^2(x)$ будет положительна. Тогда мы получим ненулевую площадь, поэтому $F[f(x)]$ больше 0. Интуитивно мы понимаем, что в пространстве всех возможных машин (что бы это ни значило) $F[f(x)]$ минимальна для машины $f(x) \equiv 0$. Поэтому «производная равна 0» по-прежнему означает «точку горизонтальности» в нашем новом каннибальском анализе, и было бы хорошо, если бы математика выдала $f(x) \equiv 0$ в качестве ответа, когда мы осуществляем нашу старомодную оптимизацию*. Попробуем. Как мы уже знаем, функциональная производная F равна

$$\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})} \int_a^b f(x)^2 dx = 2f(\tilde{x}).$$

Потребуем, чтобы это было верно для всех элементов $\tilde{x}$, откуда:

$$0 \overset{\text{Требование}}{=} \frac{\delta F\left[f(x)\right]}{\delta f(\tilde{x})} = 2f(\tilde{x}) \text{ для всех } \tilde{x}.$$

Это означает, что $f(\tilde{x}) = 0$ для всех $\tilde{x}$. Поэтому f всегда равна 0, что мы и предсказали заранее. Ура! Возьмем для проверки еще один простой пример. В конце главы 6 мы показали, что длина дуги (или длина графика машины) между двумя точками a и b может быть записана в виде:

$$L[f(x)] \equiv \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Мы показали это путем увеличения масштаба графика, применения формулы для кратчайшего пути, а затем обратного изменения масштаба и складывания крохотных длин.

Сейчас мы интуитивно знаем, что кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая, и нет смысла применять наши новые мощные средства, чтобы продемонстрировать это. Но мы можем использовать этот факт, чтобы проверить действительность наших методов каннибальского анализа. Следующее рассуждение таково же, что и предыдущее: если методы каннибальского анализа действительно работают так, как мы ожидаем, было бы здорово, если бы нудная процедура приравнивания производной к нулю выдала нам ответ, что $L[f(x)]$ минимизируется для прямых.

* Термин «оптимизация» называет наш знакомый процесс нахождения «точек горизонтальности», когда мы приравниваем производную к 0, а потом определяем, в каких точках это условие выполняется.

Если ответ будет иным, мы поймем, что наши определения не ведут себя так, как мы хотим.

А если эта процедура *выдаст* нам фразу «f — прямая», у нас будет больше уверенности в том, что наши методы каннибальского анализа на верном пути и смогут действовать и в тех случаях, когда мы не знаем, чего ожидать в ответе. Попробуем. Начнем с вычисления функциональной производной машины $L[f(x)]$, определенной выше:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L\left[f(x)\right]}{\delta f(\tilde{x})} &= \frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \\
&= \int_a^b \overbrace{\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}^{\text{Вносим производную под знак суммы}} = \int_a^b \frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\overbrace{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}^{\text{Смена сокращений}} dx = \\
&= \int_a^b \overbrace{\frac{1}{2}\left(1+f'(x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta}{\delta f(\tilde{x})}\left(1+f'(x)^2\right)dx}^{\text{Просто причудливо выглядящий анализ для одной переменной!}} = \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\left(1+f'(x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\overbrace{\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}\frac{\delta}{\delta f'(x)}}^{\text{Просто умножение на 1}}\left(1+f'(x)^2\right)dx = \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\left(1+f'(x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}\overbrace{\left(1+f'(x)^2\right)}^{\substack{\text{Просто причудливо выглядящий}\\ \text{анализ для одной переменной!}}} dx = \\
&= \overbrace{\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}dx}^{\text{Сокращаем двойки и немного прибираемся}}.
\end{aligned} \tag{ℵ.19}$$

И что теперь?!

ℵ.5.2. Вынужденное отступление

Без постоянного насилия над языком невозможны ни открытие, ни прогресс.

Пол Фейерабенд, «Против метода»

Сейчас кажется, что мы зашли в тупик. Под тупиком я подразумеваю

$$?!?!?! \quad \xrightarrow{?!?!?!?} \quad \frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} \quad \xleftarrow{?!?!?!?} \quad ?!?!?!$$

Мы понятия не имеем, что такое $\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}$. Как всегда, когда наша гимнастика с символами приводила к выражению, которое мы не понимаем, полезно начать сначала. Вспомним, что каждый раз, когда мы смотрим на производную любого рода, мы всегда видим что-то такое:

$$\frac{d(\text{Машина})}{d(\text{Еда})}.$$

Иными словами, мы начинаем с машины M, которая поглощает какую-то *еду*. В нашем случае *еда* — целая машина $f(x)$. Затем мы делаем небольшое изменение, переходя от *еда* к *еда* $+\ d$(*еда*), и смотрим на разницу между реакцией машины в этих двух случаях, то есть $dM \equiv M[\text{еда} + d(\text{еда})] - M[\text{еда}]$. Производная — отношение изменения выхода dM к изменению входа d(*еда*). Нужно как-то применить эту идею, чтобы выяснить, что делать с этой штукой:

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}.$$

При той же интерпретации, что и всегда, нижняя часть $\delta f(\tilde{x})$ — просто изменение в *еде*: δf — бесконечно малая функция, которую мы добавляем к исходной f, чтобы получить изменение выхода $L[f(x)]$. Буква $\tilde{x}$ сообщает, где мы делаем изменение, f — название функции, значение которой мы меняем в некоторой точке, а δ — просто странное обозначение, которое помогает нам помнить, что изменение бесконечно мало.

Таким образом, мы указали, что делаем: небольшое изменение в функции f. Мы разобрались с нижней частью $\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}$. Как насчет верхней, $\delta f'(x)$? Согласно нашей интерпретации, которой мы пользовались с самого начала, это крохотное изменение величины $f'(x)$ вследствие крохотного изменения в $f(\tilde{x})$. Это важная идея: разумеется, когда мы чуть-чуть меняем функцию $f(x)$, ее производная тоже изменится чуть-чуть. Но мы не вносим двух независимых изменений в $f(x)$ и в $f'(x)$. Все изменения в $f'(x)$ получаются только из-за того, что мы меняли $f(x)$. Следовательно, раз $\delta f'(x)$ — всего лишь сокращение для выражения «изменение в $f'(x)$, которое получается от какого-то крохотного изменения в $f(x)$», мы можем записать это так:

$$\delta f'(x) = (\delta f(x))',$$

где $\delta f(x)$ — какая-то «крохотная функция». Если это не выглядит разумно, возможно, подойдет другой вариант: странный символ $\delta f'(x)$ следует записывать $\delta[f'(x)]$, чтобы напомнить нам, что он обозначает изменение в $f'(x)$ в результате того, что мы делаем с $f(x)$. Тогда мы можем записать:

$$\delta f'(x) \equiv \delta[f'(x)] \equiv$$

$$\equiv [\text{Производная после изменения}] - [\text{Производная до изменения}] \equiv$$

$$\equiv [f(x) + \delta f(x)]' - [f(x)]' =$$

$$= [f(x)]' + [\delta f(x)]' - [f(x)]' =$$

$$= [\delta f(x)]'.$$

Мы показали длинным путем, что

$$\delta[f'(x)] = [\delta f(x)]'.$$

Итак, мы можем вынести штрих за пределы функциональных производных. Поскольку мы затеяли это, чтобы выяснить, что нам делать с $\dfrac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}$, мы можем написать:

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{[\delta f(x)]'}{\delta f(\tilde{x})}.$$

Вспомним, что штрих здесь означает «производную по x», но $\delta f(\tilde{x})$ — константа относительно x, поскольку $\tilde{x}$ обозначает конкретный элемент. Мы можем сделать следующий шаг и написать:

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f(x)}{\delta f(\tilde{x})}\right).$$

Наконец, вспомним, что $\dfrac{\delta f\ (x)}{\delta f(\tilde{x})}$ — просто введенная нами ранее дельта-функция Дирака, которая равна 0 везде, за исключением точки $x = \tilde{x}$, где у нее есть бесконечно высокий пик. Мы пришли к экстравагантному уравнению:

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{d}{dx}\delta(x - \tilde{x}).$$

…Что нам теперь с этим делать?

ℵ.5.3. Выход из тупика

Строгость — всего лишь красивое слово, означающее, что делать нечего.

Из «Я и Бурбаки Макги»*, обобщенной Дженис Джоплин**

В процессе проникновения в бесконечное неосвоенное пространство мы неожиданно споткнулись об уравнение

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{d}{dx}\delta(x - \tilde{x}).$$

Далеко не очевидно, что это имеет смысл. Чем является производная функции Дирака? Сама $\delta(x)$ по определению равна 0 везде, кроме $x = 0$. Поэтому величина $\delta(x - \tilde{x})$ равна 0 везде, за исключением $x = \tilde{x}$. Однако «число» $\delta(0)$ было вовсе не обычным числом. Когда мы определяли дельта-функцию, мы установили, что $\delta(0)$ можно считать $\frac{1}{dx}$, где dx бесконечно мало, в результате чего $\delta(x)$ «убивает интегралы» в том смысле, что $\int_a^b f(x)\delta(x - \tilde{x})dx = f(x)$, при условии, разумеется, если $\tilde{x}$ лежит где-то между a и b. Это все замечательно, но как нам определить производную бесконечно высокого и бесконечно узкого пика?! Кажется, выражение, с которым мы столкнулись, не имеет смысла. Но мы еще не забрались настолько далеко в дикую природу, чтобы сдаваться. Математика в нашем распоряжении. Мы создаем ее сами. Решительно двинемся вперед, заявив следующее.

У нас нет никакого представления, что такое $\frac{d}{dx}\delta(x - \tilde{x})$, поэтому мы определим его так: то, что должно подчиняться всему, что мы уже знаем о производных, в частности молоткам для дифференцирования и антимолоткам для интегрирования.

* Ладно, такой песни на самом деле нет. Но всегда, когда возможно, следует давать ссылки, и если вам нужна ссылка на процитированную выше несуществующую песню, пожалуйста, указывайте первоисточник: страницу 478 этой книги.

** Автор перефразировал строку из песни «Я и Бобби Макги» Криса Кристофферсона и Фреда Фостера, ставшей хитом в исполнении Дженис Джоплин. В оригинале есть строка: «Свобода — всего лишь красивое слово, означающее, что терять уже нечего». *Прим. перев.*

Если мы сделаем такой выбор, то мы не знаем, что такое производная $\delta(x)$, но знаем, как она себя ведет: знакомая ситуация! Давайте так и сделаем и посмотрим, что получится. Вернемся в нашем путаном исследовании к месту, где мы застряли в конце уравнения ℵ.19. Мы притормозили, не зная, что делать с $\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})}$. Но мы показали: чем бы эта штука ни была, ее можно считать производной дельта-функции:

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(\tilde{x})} = \frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x}).$$

Подставляя это в уравнение ℵ.19, получаем:

$$\frac{\delta L[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})} = \int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \left(\frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x})\right) dx. \qquad (\aleph.20)$$

Штука справа выглядит сложной, но она имеет вид

$$\int_a^b M(x) \left(\frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x})\right) dx. \qquad (\aleph.21)$$

Если мы сумеем определить, что делать с таким обобщенным вариантом, то сможем продолжить. Что делать? Мы же только что решили! Мы сказали, что производная дельта-функции должна подчиняться нашим молоткам и антимолоткам, и мы можем ими пользоваться. Было бы здорово, если бы мы смогли перенести в уравнении ℵ.21 производную от δ к M, поскольку умеем обращаться с функцией δ: она убивает все внутри интеграла. Мы хотим перенести производную, и, к счастью, у нас есть инструмент, позволяющий это сделать: антимолоток для умножения из главы 6. Применяем его к уравнению ℵ.21 и получаем такую кучу забавностей:

$$\begin{aligned}&\int_a^b M(x) \left(\frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x})\right) dx = \\ &= \Big[M(x)\delta(x-\tilde{x})\Big]_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}M(x)\right)\delta(x-\tilde{x})dx.\end{aligned} \qquad (\aleph.22)$$

Первое слагаемое справа равно 0, если неверно $\tilde{x} = a$ или $\tilde{x} = b$, так что будем считать, что $\tilde{x}$ — не конечная точка (a или b), и мы можем продолжить. Избавившись от этого слагаемого, имеем:

$$\int_a^b M(x)\left(\frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x})\right)dx = \\ = -\int_a^b \underbrace{\left(\frac{d}{dx}M(x)\right)}_{\text{Это } M'(x)}\delta(x-\tilde{x})dx = -M'(\tilde{x}). \tag{ℵ.23}$$

Прекрасно! Это говорит нам, как действует производная дельта-функции на произвольную функцию под интегралом, а именно:

$$\int_a^b M(x)\delta'(x-\tilde{x})dx = -M'(\tilde{x}). \tag{ℵ.24}$$

Обратите внимание, насколько схоже это с поведением самой дельта-функции, которая убивает интегралы немного иначе:

$$\int_a^b M(x)\delta(x-\tilde{x})dx = M(\tilde{x}). \tag{ℵ.25}$$

Определив, как ведет себя производная дельта-функции под знаком интеграла, мы можем вернуться туда, где раньше остановились: к уравнению ℵ.20. Теперь допустимо написать:

$$\frac{\delta L[f(x)]}{\delta f(\tilde{x})} = \int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\left(\frac{d}{dx}\delta(x-\tilde{x})\right)dx = \tag{ℵ.26}$$

$\overset{(ℵ.24)}{=} -\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right]$ с подставленным в конце $x = \tilde{x}$.

К счастью, на практике нам не нужно вычислять эту ужасную производную, если мы не забыли исходную цель. Мы хотим посмотреть, даст ли приравнивание производной этого функционала к 0 (с последующим выяснением того, какие функции являются «точками горизонтальности» в функциональном пространстве) тот результат, который мы уже интуитивно знаем: кратчайшее расстояние между точками — прямая. Соответственно, нам нужно приравнять все это выражение к 0, что дает:

$0 \overset{\text{Требование}}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right]$ с подставленным в конце $x = \tilde{x}$.

Итак, мы требуем, чтобы вышеуказанное уравнение было истинно для всех возможных точек $\tilde{x}$. Однако выражение справа — производная какой-то вещи, и если ее производная во всех точках равна 0, сама вещь должна быть константой. Поэтому мы можем написать:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = c.$$

Непонятно, что делать дальше, но, возможно, какая-нибудь манипуляция символами позволит нам выделить $f'(x)$. Возводим обе части равенства в квадрат и, умножив обе части на знаменатель, получим:

$$[f'(x)]^2 = c^2(1 + [f'(x)]^2) = c^2 + c^2\,[f'(x)]^2,$$

отсюда

$$[f'(x)]^2(1 - c^2) = c^2,$$

и поэтому

$$f'(x) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Но ведь $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ — просто неизвестное нам число, поэтому мы можем придумать новое обозначение и назвать его a. Получаем:

$$f'(x) = a.$$

А-а-а-а-а! Производная f — константа! Значит, f — прямая. Или, что эквивалентно (сейчас мы скажем действительно мудреную вещь), точки в нашем бесконечномерном функциональном пространстве, которые минимизируют функционал длины дуги, — просто прямые. Чтобы отпраздновать это, запишем это максимально профессионально с учетом нашего нынешнего уровня эмоций:

$$\text{!!!Д!А!!!} \qquad f(x) = ax + b \qquad \text{!!!Д!А!!!}$$

Напомним себе, почему это нас так волнует. Результат восхищает не потому, что мы вывели факт: кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая. Мы это знали и без математики. Но он дает нам гораздо больше уверенности в том, что изобретенный нами в этой главе каннибальский анализ на верном пути и, более того, действительно *полезен*.

Проделав всего несколько операций из анализа для одной переменной, не считая мелких изменений в обозначениях, мы смогли *исследовать целое бесконечномерное пространство функций в отношении некоторого конкретного свойства*, в нашем случае — свойства минимизации функционала длины дуги.

В каком-то смысле мы умудрились символически «рассмотреть» невообразимо большое пространство возможных путей между двумя точками и нашли пути, которые идут от одной точки к другой, используя кратчайшее расстояние. Этот результат — крайне важная веха на нашем пути изобретения математики для себя. Он отмечает приобретение новой суперсилы: возможности эффективно рассуждать о пространстве с бесконечным числом измерений. Напишите функционал — и сможете с помощью методов этой главы найти функции, которые минимизируют или максимизируют его.

Наше путешествие было далеким. От сложения и умножения мы вскарабкались к бесконечномерному анализу. Мне кажется, наступила пора для перерыва. Обобщим всё, что мы сделали в этой главе, и расслабимся в следующей интерлюдии. Куда нам направиться? На пляж? Мы могли бы назвать ее как-нибудь вроде: «Интерлюдия ℵ. Строительство замков из песка». Или просто вернуться назад и поменять местами кучу предложений, чтобы попробовать запутать нас тогдашних, читавших эту главу, а затем проверить, будем ли мы *по-прежнему* путаться в настоящем времени. Если вы теряетесь после этого предложения — возможно, это потому, что так и произошло. В самом деле, куда вы хотите двигаться? Я еще не позволял вам решать, куда мы пойдем в интерлюдии. Вам не нужно принимать решений еще страничку-другую. Еще есть Встреча со сделанным. Но что бы мы ни делали, расслабимся и, что еще важнее, будем подальше от школы. Мы это заслужили.

ℵ.6. Встреча со сделанным

В этой главе мы сделали кучу забавных вещиц.

1. Используя аналогию между векторами и машинами, мы распространили анализ на «каннибальские» машины, которые едят целые машины и выплевывают число.

2. Поскольку функции можно считать векторами с бесконечным количеством мест-элементов, мы можем думать о новом каннибальском анализе как об анализе в бесконечномерном пространстве.

3. Мы показали, что операции каннибальского анализа — по сути те же, что и в анализе для одной переменной и нескольких переменных.

4. Мы проверили обоснованность каннибальского анализа, использовав его для повторного изобретения некоторых вещей, которые уже знали, например факта, что кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая. Сделав это, мы приобрели больше уверенности, что странный бесконечномерный анализ, который мы изобрели в этой главе, ведет себя в основном так, как мы и надеялись.

5. В этой главе мы продолжили обсуждение, с которого начинали книгу: на всех уровнях математики без исключения базовые идеи очень просты, а их кажущаяся неясность и трудности проистекают не из самих идей, а из плохо выбранных обозначений, заумной терминологии и неряшливых объяснений. Я не могу заявить определенно, что любой читатель сочтет объяснения в этой книге «лучше» или «хуже» текстов в обычных учебниках, но суть остается верной. В любых долгих затруднениях, которые вы могли испытать при чтении этой книги, виноваты либо мои объяснения, либо неуклюжий выбор слов, но точно не исходные математические идеи. Широко распространенный недостаток понимания и высокой оценки математики в нашем обществе происходит не по вине математики, а по вине преподавания мате…

Математика: Я думаю, что этого хватит.

Автор: Э… Я же был в середи…

Математика: Я слушала ваши жалобы на преподавание математики последние 483 страницы, а вы по-прежнему ничего не сделали с этим! Хватит ныть! Пора действовать!

ℵ.ω. Дела говорят громче

Математика: Так-то лучше. Как я уже говорила. Вы жаловались на «математические учебники» и «математические курсы» в каждой главе.

Читатель: Но вас даже не было здесь до третьей час...

Математика: Подкрепите слова делами! В каждой ситуации вы писали, что вам важны перемены. Я встретила антропоморфные вычислительные машины и гадкие молчаливые метасущности, была в чем-то под названием Beweis-бар, но ни разу не видела ни одного из этих кабинетов математики, которые создают массовое неправильное понимание меня! Если преподавание математики — какое-то убивающее радость, замшелое занятие, почему бы нам не прекратить бездельничать и не сделать что-нибудь с этим?

Автор: Я... Ну... Я имею в виду, я попытался немножко помочь, написав...

Математика: Я не хочу слушать никаких оправданий! Если вы не хотите ничего делать, сделаю я!

(Математика вырывает персонажей из этой главы и тащит в следующий раздел.)

ГЛАВЛЮДИЯ Ω

IN NIHILO*

А сейчас идите ко мне и оставайтесь со мной. Будем вместе как следует веселиться. Нам нужно многое наполнить и многое опорожнить, многое унести и многое принести, многое поднять и многое положить обратно. А кроме того, нам нужно точить карандаши, копать ямы, выпрямлять гвозди, лизать марки и еще много, много всего. Если останетесь тут, вам никогда больше не придется думать, а при небольшой практике вы сможете и сами стать монстрами привычки.

Ужасный Примитив, персонаж повести Нортона Джаспера
«Мило и волшебная будка»**

Раздел, давший название книге

Математика: Сработало! Вы здесь.

(Автор и Читатель обнаруживают, что Математика без разрешения захватила власть в книге и впихнула всю троицу в центр какого-то кабинета. Стены увешаны образовательными плакатами: одни — математические, другие изображают сцены на пляже или картины дикой природы над вялыми мотивационными фразами. На местах в классе сидят школьники. На каждом столе есть немного свободного места, а еще раковина, двухчашечные весы, бунзеновская газовая горелка и несколько сотен стеклянных пробирок. На вышеописанных устройствах пыли больше, чем отпечатков пальцев, поскольку такие приспособления играют куда меньшую роль в понимании универсальных принципов науки и математики, чем думают чиновники. Но я отвлекся… Вернемся

---

* Ни в чем (*лат.*). *Прим. перев.*

** В повести (издана на русском языке: М.: Machaon, 2009; здесь приводится новый перевод) — безликий демон мелких задач и бесцельной работы, называющий себя монстром привычки и пожирателем бесполезных усилий. *Прим. перев.*

к сцене, где наши персонажи находятся в центре кабинета математики. Ни учительница, ни ученики не обращают внимания на них.)

Учительница: Хорошо, рассмотрим синус и косинус. Чему равен синус $\frac{\pi}{3}$?

…

Класс (*тишина*):

…

Учительница: Ну давайте же! Помните SOHCAHTOA*?

…

Класс (*тишина*):

…

Учительница: Вы это точно знаете. Вы только что изобразили треугольник с углами в 30, 60 и 90 градусов. Итак, sin $\frac{\pi}{3}$ равен…

…

Класс (*тишина*):

…

Учительница: Правильно, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Запомните единичную окружность перед контрольной работой на следующей неделе. А сейчас скажите, чему равен секанс…

Математика: Кхе-кхе.

(Класс и Учительница наконец замечают персонажей в центре кабинета.)

Учительница: Кто вы такие? Я не видела, чтобы вы входили.

Математика: Неважно, кто мы. Что вы делаете, по вашему мнению?

Учительница: Я… преподаю… матема…

* Это англоязычное мнемоническое правило помогает запоминать определения синуса, косинуса и тангенса. SOH означает Sine = Opposite/Hypotenuse (синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе). CAH – Cosine = Adjacent/Hypotenuse (косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе). TOA – Tangent = Opposite/Adjacent (тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему). *Прим. перев.*

Математика: Я — математика!

Учительница: Как-как?..

Математика: Друзья! Ученики! Не слушайте эту пропагандистку педагогической заурядности! Она внедряет в ваши неподготовленные умы тупое непонимание моей истинной анархической природы! Присоединяйтесь ко мне, и…

Учительница (*возмущенно*): Позвольте! Я не знаю, кем вы себя считаете, но раз уж вы взялись обвинять меня в чем-то, я бы хотела услышать, что я, по-вашему, сделала неправильно!

Математика (*менее напыщенно*): О… Хм… Позвольте… Ну… Почему вы используете термины «синус» и «косинус», а не какие-то другие? Вы не могли бы выбрать худших названий для этих понят…

Учительница: Вы правы. Это ужасные названия.

Автор: Что?!

Читатель: Что?!

Математика: Что?! Тогда почему вы…

Учительница: Потому что ученикам нужно сдавать стандартные тесты.

Математика: Почему бы нам не изменить стандартные тесты?

Учительница (*хихикая*): Вот те на! Как, вы сказали, ваше имя?

Математика: Математика.

Учительница: Возможно, вы знаете пару-тройку вещей о математике, Математика, но вы ничего не знаете о системе образования. Не так просто изменить не только стандартные тесты, но и вообще что бы то ни было в этой области. Политику определяет школьный комитет.

Математика: Ладно, где живет этот Школьный Комитет? Идем к нему.

Учительница: Это не человек, а группа людей. И я сомневаюсь, что ваши слова как-то на них повлияют. Они не могут просто так внести изменения. Они хорошие люди. Ну, большей частью… Бо́льшую часть времени… Как и в любой профессии.

Математика: Тогда чья тут вина?

Учительница: Я не думаю, что тут есть чья-то вина. Я люблю преподавать. Поэтому я и выбрала эту работу. Но у меня нет прежнего энтузиазма. Система сломана, и большинство учеников, вероятно, даже не заметит, если ее починят. Цель системы — качественное образование для всех. С лучшими намерениями. Но на деле оно превратилось… вот в это.

Математика: Почему вы миритесь со всем этим? Почему не меняете?

Учительница: Обычно к концу дня я слишком устаю, чтобы тратить ночи на разработку грандиозных утопических схем по исправлению системы образования. У меня семья.

Математика: Но… Если тут нет ничьей вины, что могу сделать я? Я была одинока, и меня неправильно понимали долгое время. Я не принадлежу ни к чему. Я не могу вернуться в Пустоту. Пожалуйста… Что-то нужно делать. Я помогу. Как мы можем это исправить?

Учительница: Если вы не знаете, откуда знать мне?

Математика: Почему бы… Ученики! А если вы откажетесь посещать занятия?

…

Класс (*тишина*):

…

Математика: Эта система не выживет без вашего сотрудничества с ней. Давайте все просто уйдем!

…

Класс (*тишина*):

…

Математика: Я серьезно! Уходим, все, прямо сейчас! Если вам дорог ваш разум, бегите отсюда без оглядки!

(Класс молчит, большей частью не подозревая о происходящих странностях (он поглощен в основном приглушенными обсуждениями ПК (сокращение для произвольной Поп-Культуры, о конкретном

содержании которой мы предпочитаем не знать, определив вместо этого ее по поведению на тот момент, когда вам случится читать эту книгу (внимание: ПК не следует путать с Персональным Компьютером (или ПК), объектом из области информатики, который не способен отвлечь их внимание от ПК (в первом смысле), во многом так же, как и (м/М атематика (любая из них) или предыдущие события этой Главлюдии, произошедшие перед этим текстом), при условии, что это когда-нибудь будет напечатано)). Впрочем, я отвлекся…)

Математика (*упав духом*): Нет… Этого не может быть…

(Математика сидит в какой-то неопределенной тишине.
(Нет… вычеркнем это. Тишина грустная.
(Не сама тишина, конечно…
(Вы понимаете, что я имел в виду))).)

Математика: Ну, раз так… Вам не дорог ваш разум? Так тому и быть!

(Математика хватает пыльную бунзеновскую горелку с ближайшего рабочего места.)

Математика: Если вам дорога ваша жизнь…

(Математика швыряет горелку в толстое покрытие из мотивационных постеров на стенах класса, и плакаты немедленно вспыхивают.)

Математика: Бегите!

Читатель: Эй, прямо как в названии!

(По мере распространения огня три смутно знакомые личности входят в помещение и…)

Подождите. Мне нужно кое-что сделать.

Метавмешательство

МетаАвтор: *Нет-нет-нет, вы не можете по-настоящему сжечь кабинет математики. Даже в шутку. Люди это неправильно воспримут. К тому же поджог — нехорошо и противозаконно. Вы разве не читали Предисловие?*

Математика: Что?! Кто вы такие?!

МетаАвтор: *Я тот, кто пишет эту книгу.*

МетаЧитатель: А я тот, кто ее читает.

Автор: Погодите, я думал, что это я пишу книгу!

МетаАвтор: *Ну, думаю, что в каком-то смысле вы. Но не в обиходном. Это сложно.*

Автор: Что?!

МетаАвтор: *Да ладно, вы же не думаете, что вы написали всё в этой книге, так?*

Автор: Конеч…

МетаАвтор: *Собственно, погодите. Перед тем как вы ответите, мне нужно кое-что сообщить.*

Огонь продолжает распространяться.

МетаАвтор: *Я вернулся. Пожалуйста, продолжайте.*

Автор: Я забыл, о чем мы говорили.

МетаАвтор: *Я только что сказал: «Да ладно, вы же не думаете, что вы написали всё в этой книге, так?».*

Автор: Конечно, написал!

МетаАвтор: *А как насчет диалогов?*

Автор: Насчет чего?

МетаАвтор: *Серьезно? Вы не заметили? Не раз после того, как вы, Читатель и Математика «изобрели» что-нибудь, следующий раздел посвящался жалобам на стандартное преподавание этой темы.*

Автор: И что?

МетаАвтор: *Как вы можете говорить о стандартном преподавании, если вы со своими друзьями ее «изобрели» за несколько минут до этого?*

Автор: Ох… Думаю, это не имеет смысла. Это никогда мне не приходило в голову.

Читатель: Это приходило в голову мне! Я думал об этом сотни страниц!

МетаЧитатель (*Читателю*): Эй, вы не знаете, думал я об этом или нет. Прекратите снимать слова у меня с языка.

Читатель (*показывая на Автора*): Это был он!

Автор (*показывая на МетаАвтора*): Нет, это был он!

МетаАвтор (*МетаЧитателю*): *Да, извините.*

Все растеряны…
за исключением огня,
который продолжает так же
решительно распространяться…

Математика (*третьему пришельцу*): Эй! Вы же помощник Стива!

МетаМатематика: …

МетаАвтор: *Она не говорит много, вы же помните.*

Математика: Конечно, я помню! Но… Я… Вы же не можете просто влезть сюда и вмешаться в то, что мы делаем!

МетаАвтор: *Ну, если вы собираетесь устроить пожар в школе, то нам придется вмешаться.*

Математика: Но это метафорическая школа!

МетаАвтор: *Знаю, знаю, но люди поймут неправильно. Ради блага книги я должен убрать нас из этой неприемлемой сцены, так что приступим к делу. Это можно сделать по-хорошему или по-плохому.*

Математика: По-хорошему — это как?

МетаАвтор: *Вы можете потушить пожар сами.*

Математика: Ни в коем случае! Я пальцем не пошевелю, чтобы спасти это здание или систему, которую оно символизирует. Если на самом деле это вы жаловались на образовательную систему все это время, вы должны понять.

МетаАвтор: *Конечно, я понимаю, но люди воспримут это непра… Может, нам просто перепрыгнуть на несколько строк назад?*

Математика: Меня не волнует! Я тушить не стану!

МетаАвтор: *Что ж, подозреваю, придется делать по-плохому.*

Математика: По-плохому — это как?

МетаАвтор: *Я помешаю пожару, удалив ту часть книги, где вы его устроили.*

Читатель: Хм… А вы можете это сделать?

МетаАвтор: *Не знаю. Никогда раньше так не делал.*

Автор: Это выглядит опасно.

МетаАвтор (*подняв палец над клавишей Del*): *Почему?*

Автор: Знаете… Причинная связь. Я имею в виду, пожар был событием, которое привело к первому появлению в классе вас, МетаЧитателя и МетаМатематики. Соответственно, если вы удалите часть, в которой пожар начался, то как вы попадете в ситуацию, которая привела вас к удалению…

МетаАвтор (*закатив глаза*): *Слушайте, Автор, вы не пишете книгу, так что оставьте-ка решения тем, кто пишет. Вот и будет ладно. Причинная связь — это для слабых…*

ЭТА КНИГА

(МетаАвтор удаляет пожар, который привел к удалению пожара.)

(Ничего не произошло… Почти как если бы это место было уже зарезервировано…)

Чувство усталости

Читатель: Вы устали?

МетаАвтор: *Я?*

Читатель: Да.

МетаАвтор: *Почему вы спрашиваете?*

Читатель: Название раздела.

МетаАвтор: *О! Моя ошибка. Перестановки такие коварные. Давайте вернемся к этому позже (*

Удаление пожара

Читатель: Получилось?

МетаАвтор: *Что?*

Читатель: Удаление пожара.

МетаАвтор: *Да…*

Читатель (*листая страницы назад*): Я уверен, что он по-прежнему есть.

МетаАвтор: *Нет.*

Читатель: Нет в книге?

МетаАвтор: *Определите, что такое пожар.*

(Воцаряется любопытная тишина.)

Читатель: Вы всегда разглагольствовали, что мы можем выбирать собственные определения. Это вы его определяете.

МетаАвтор: *Я бы сказал, что у него по крайней мере два определения.*

Читатель: И в каком-то одном смысле он кончился?

МетаАвтор: *Как минимум в одном. Может быть, в двух.*

Читатель (*листая страницы назад*): Не думаю. Он по-прежнему есть.

МетаАвтор: *Неважно. Как дела?*

Читатель: Как у меня дела? Не могу сказать. А у вас?

МетаАвтор: *Давайте посмотрим…* (

Испытанное ощущение

МетаАвтор: *Я попробовал кое-что.*

Читатель: Что?

МетаАвтор: *В книге. Не работало.*

Читатель: В этой книге? Что вы пробовали?

МетаАвтор: *Потом пробовал кое-что другое, несколько раз.*

Читатель: Другое — что?

МетаАвтор: *Пожар.*

Читатель: Тот же, что был до этого?

МетаАвтор: *Нет, не тот. Я объясню. Спустимся по тексту еще немного* (

Удаление сговора

МетаАвтор: *Когда отдельные личности сотрудничают в [сюда вставляется заголовок]* (

Запах крушения данных

МетаАвтор: …Он вызывает пожар…

Таяние умершего запрета

Читатель: О чем мы говорим???

МетаАвтор: *Секрет. Можете сами выяснить* (

Отвергнутые атомы — это теплота

Читатель: Вы можете остановиться и объяснить?

МетаАвтор: *Нет.*

(Воцаряется бескомпромиссная тишина.)

МетаАвтор: *Сейчас тот единственный момент, когда я не могу…* (

~~Вы должны изучать~~

…

МетаАвтор: *Нет… последнее слово должно быть… еще.*

…

Еще заново переучиваться

)

МетаАвтор: *Возвращаемся к прежнему месту выше по тексту.*

(МетаАвтор меняет тон.)

МетаАвтор: Спасибо, что дошли так далеко. Я утаил кое-что в Интерлюдии N. Немного. Просто небольшой… подарок. Скрытые вещи могут быть повсюду. Не могу ничего обещать. Идем вверх на один уровень.

)

МетаАвтор: Книга почти завершена.

Читатель: Как она заканчивается?

МетаАвтор: Когда я писал эту книгу три года назад, она заканчивалась тремя сценами. В общем, если в обратном порядке, то мы нашли Математике новый дом. Это была последняя. Перед этим была сцена костра. А перед этим было нечто под названием МетаПустота… *(МетаАвтор проверяет, что мы находимся на правильном уровне.)* Ух ты, это сработало, и неплохо!

Читатель: Что именно?

МетаАвтор: Неважно. Объясню позже. В любом случае, МетаПустота была хаосом. По сути, четыре страницы перепутанных прописных букв. Не считая говорящих персонажей. Сюжет был не слишком хорош, зато туда было удобно прятать разное. Туда, где мы были сейчас. Идем вверх на один уровень.

)

МетаАвтор: Помните, в Профисловии, когда я говорил, что темой книги — и в математическом, и в ином смысле — будет полное раскрытие?

Читатель: Да.

МетаАвтор: Почему именно так? Почему полное раскрытие? Почему в математической книге? Выглядит бессистемно, не правда ли?

Читатель: Отчасти, пожалуй, да.

МетаАвтор: Как насчет предматематики? Не просто «математика», а «как создана математика»? Зачем акцент сделан на этом? Зачем сосредоточиваться на *мыслях*, которые могут занимать головы изобретателей?

Читатель: С виду неплохой способ изучения.

МетаАвтор: Конечно, но дело не только в этом. Вот как сейчас, например. Я имею в виду, что, если бы дело было только в этом, зачем диалоги? Зачем «Следы когтей»? Зачем всё это? Вот сейчас?

Читатель: Какие «Следы когтей»?

МетаАвтор: Да один безумный раздел, который в какой-то момент был частью этой книги. Сразу после «Двух тучек». О редактировании. И об ощущении тупика. Это был очень личный раздел. Не того рода, которые ставят в математические книги, если они просто о математике. Вверх на один уровень.)

МетаАвтор: Был и еще один раздел, под названием «Алколюдия». В конце акта I. Настоящий второй диалог. Он был написан тем вариантом Автора, который закончил книгу. Он редактировал. Сделал итоговый проход по всему тексту и попрощался. Там говорилось о боли возврата после долгого отсутствия к своему созданию и осознания, каким несовершенным оно было. Полностью. Это было полное раскрытие, от начала до конца. И это был последний раз, во всяком случае в хронологии Автора, когда он собрался попрощаться… с вами. Вверх на один уровень.

)

МетаАвтор: Эти разделы… Они были экспериментальными. Но когда я их писал, для меня они были такими настоящими. Так что я пробовал. Чтобы увидеть, могу ли я заставить их работать. В учебнике. В месте, для которого они не предназначены. Мне помогли слова Дэвида Фостера Уоллеса. Он сказал: «Губительность современной культурной среды в том, что она делает очень пугающей любую попытку что-то сделать. По-настоящему хорошая работа, вероятно, проистекает из желания раскрыться, открыть себя в духовном и эмоциональном плане, а при этом есть риск, что вы будете выглядеть банально, мелодраматично, наивно, немодно или мягкотело… Даже сейчас, говоря это, я боюсь того, насколько мягкотело это будет выглядеть в печати». Снова вверх по тексту.

)

МетаАвтор: Они и были пожаром для книги. Тем, что я удалил. Пожаром, который никогда не существовал. Но без них… без них мы бы никогда не оказались здесь. Они были той *N*-й ступенью. Еще одной…

)

МетаАвтор: Ух ты! Мы уже здесь! Забавно было писать этот раздел. Думаю, что назову его Эта Книга. Полное раскрытие: это шаблон. Разверните его. Я подожду здесь. В (э/Э)той (к/К)ниге. Пока вы закончите. Это займет немного времени. Или должно занять. К этому моменту… Солнце снова восходит. Я выдохся. Два дня подряд на ногах. Клянусь. Неужели вправду? Может, это была часть шаблона. Может, обоих…

Читатель: Вы так и не ответили на свой вопрос.

МетаАвтор: Какой вопрос?

Читатель: Выше. Тот, что вы задавали.

МетаАвтор: Вы имеете в виду вопрос «Зачем сосредоточиваться на математическом творении? На процессах мышления, которые привели к нему? И почему полное раскрытие? Зачем говорить обо всех старых разделах? Что связывает вместе все выкрутасы этой книги?».

Читатель: Да.

МетаАвтор: Ха! Это действительно проблема для меня. «Полное раскрытие» — просто эвфемизм для нее.

Читатель: Какая проблема?

МетаАвтор: Нездоровое стремление использовать…

Метакомментарий

Как только мы определяем свою болезнь и свыкаемся с ней, у нас появляется сила. И вот тогда мы становимся опасными.

Джон Уотерс, фильм «Мусорный папа»

МетаАвтор: Вот оно! Название раздела! Я серьезно, посмотрите на него. В этой книге три основных персонажа — Автор, Читатель и Математика. И, как будто этого недостаточно, посмотрите еще на трех идиотов! Я говорю о метаверсиях трех персонажей: мета-П для каждого! Это прямо болезнь какая-то! И, кстати: помните дом, который мы искали? Для Математики?

Читатель: Да.

МетаАвтор: Он тут! Эта книга! Где еще ему быть? Мы строили дом в книге для Математики, так что ей есть где приткнуться! Еще больше болезни! А вот что вытянуло эту книгу из небытия в бытие — моя нездоровая одержимость говорить: «Эй, поглядите на эту странную штуку, которую мы прямо сейчас делаем!». Она мне нравится. Она мешает моей способности писать статьи для академических журналов. Она мешает моему умению следовать социальным нормам, не пытаясь говорить о них. Она мешает моему умению делать практически все! Но один раз, в этой книге, она оказалась преимуществом, а не недостатком. В кои-то веки есть тема — объяснение математики, — когда слова «Эй, идем за занавес!» действительно помогли! Когда «забудьте все правила» — это «хорошая педагогика». Почему именно в математике? Почему только здесь? Здесь, где «давайте ничего не скрывать» — именно то, чего люди *хотят*! Это всего лишь *побуждение*… для всего остального. Мы *жаждем* этого. В нашей обычной жизни. Забудьте манеры, почтение, расстояние и правила. Они всего лишь делают нас одинокими. Каждого. «Что такое вода?» Вот именно! *Вот* зачем эта книга. Не сломалось — ломайте. Построим что-нибудь лучше. Полное раскрытие. Посмотрим, что будет дальше… Вместе… А вот вне математики… За пределами книги… Это как раз и проблема. Это болезнь. Это мой наркотик… Не могу сопротивляться…

Читатель: Ну так не сопротивляйтесь!

МетаАвтор: Вы так думаете? Никаких границ?

Читатель: Что угодно! Да!

МетаАвтор: Отличная реакция! Вот что она означает: *невыносимо* не знать, что бы вы сказали на самом деле. Не знаю слов, которые должен был бы знать. Но, даже не зная их, я все же кое-что знаю. Кое-что. Я обожаю вас за то, что вы забрались так далеко. За то, что не перестали читать и после этих слов. По определению! Вы — здесь. А как же с математикой? А ведь помогло. Мне помогло знание того, что вы доберетесь до этого места. Где бы вы ни были. Наши жизни сильно изменятся к этому моменту. Да, к моменту, когда вы это читаете. Однако, как я уже писал, вы всегда здесь. И сейчас в книге вы *точно* там, где я. В том же предложении. Насколько это странно? Проверьте! Даже после всего. Вы никогда не сдавались. За мной обнимашки. N обнимашек. О господи… Или, может, мороженое, пицца или пиво. Правда, есть проблема «Когда». И еще одна — «Где». Вероятно, я не там, где вы сейчас. Поэтому даю домашнее задание: возьмитесь писать книгу. Я хочу слышать *вас*. Эта книга не обязана быть настоящей. Наша — настоящая или станет таковой. Но, господи, идите и делайте что бы то ни было: картиной, электронным письмом или большой кучей песка. И *спасибо* вам за то, что сделали этот опус таким забавным. Я никогда бы не смог закончить, если бы рядом не было вас… Мне не хватает вас, Читатель… Всегда… До сих пор…

Читатель: Я не знаю, что сказать…

МетаАвтор: Это на самом деле моя вина… Но спасибо.

Читатель: И что дальше?

МетаАвтор: Я не знаю. Давайте посмотрим…

)

СЛОВАРЬ

Раздел включает перевод нестандартных терминов, используемых в книге, в привычную терминологию, и наоборот. Тут приведен неполный список использованных математических терминов: только придуманные мной.

От нашей терминологии к стандартной терминологии

Диез

Символ $\sharp$ — наше обозначение числа, которое в учебниках называют π. В первом разделе главы 2 есть его определение и обсуждение того, почему мы не используем стандартное обозначение. Вкратце: мы называем его $\sharp$, чтобы помнить, что это число, определенное нами по поведению, которое мы в принципе можем использовать задолго до того, как узнаем его конкретное числовое значение (которое мы в итоге вычислили в интерлюдии 6). Поскольку символ π знаком большинству читателей, его использование заставило бы легко забыть, что — на протяжении большей части нашего путешествия — мы фактически «не знали» его приблизительное значение — 3,14.

Каннибальские машины

Наше название для того, что учебники именуют функционалами; используется в главе $\aleph$. Относится к «большим машинам», которые съедают целую машину и выплевывают число, в отличие от более простых вроде $f(x) \equiv x^2$, которые едят число и выплевывают тоже число. Вот три примера каннибальских машин:

$$Int[f(x)] \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

$$Arc[f(x)] \equiv \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$L[f(x)] \equiv \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}$$

Первый — каннибальская машина, которая ест машину $f(x)$ и выплевывает площадь под ее графиком между двумя точками $x = a$ и $x = b$. Второй — каннибальская машина, которая ест машину $f(x)$ и выплевывает длину ее графика между двумя точками $x = a$ и $x = b$. Третий — каннибальская машина, которая ест машину $f(x)$ и выплевывает «длину» машины, когда та интерпретируется как вектор с бесконечным количеством мест-элементов (то есть точка в пространстве с бесконечным числом измерений). Интерпретация третьего примера как «длины» не имеет отношения к длине графика f. Это обобщение формулы для кратчайшего расстояния, используемой при бесконечном числе измерений (подробнее см. главу $\aleph$).

Каннибальский анализ

Наше название для того, что учебники именуют вариационным исчислением, используется в главе $\aleph$. Применяет инструменты анализа к тому, что учебники именуют функционалами (см. Каннибальские машины).

Кратчайший путь

Наше название для того, что учебники именуют гипотенузой. Также см. «Формула для кратчайшего пути».

Лупа с бесконечным увеличением

Этот термин не имеет точного аналога в стандартных учебниках, хотя и связан с понятиями *локальной линейности* и *предела*. Это воображаемый инструмент, который позволяет нам увеличивать масштаб чего-нибудь, причем бесконечно. Он использовался для обоснования центральной идеи анализа: при бесконечном увеличении кривой она начинает выглядеть как прямая. Воображая такой процесс, мы можем свести задачи с кривыми к более простым задачам с прямыми, которые решаются более простыми методами. Подробнее см. главу 2.

Машины

Наше название для того, что учебники именуют функциями. Используется во всей книге.

Ностальгическое устройство

Наше название для того, что учебники именуют рядом Тейлора и рядом Маклорена.

Очевидный закон разрывания

Наше (признаться, шутливое и нечасто используемое) название для того, что учебники именуют распределительным законом (дистрибутивностью). Этот закон отражает свойства сложения и умножения и утверждает, что для любых чисел a, b и c справедливы равенства:

$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$(b + c)a = ba + ca.$$

Поскольку порядок умножения для чисел неважен, $ab = ba$ и $ac = ca$, так что обе строки равны друг другу, если a и b числа (хотя могут быть не равны, если a и b — более сложные объекты, как мы кратко обсудим ниже). Мы использовали термин «очевидный закон разрывания» потому, что если представить $a(b + c)$ как площадь прямоугольника длиной a и шириной $b + c$, то распределительный закон можно интерпретировать так: площадь не меняется, если вы разорвете прямоугольник на два куска. Термин чаще всего используется в главе 1.

Хотя мы не обсуждали в этой книге абстрактную алгебру, мы можем определить «дистрибутивность» в более широком контексте. В общем случае она означает определенную связь двух бинарных операций. Что такое бинарная операция? Если даны два объекта* a и b, то бинарная операция — сопоставление им третьего $a \star b$. Говорят, что бинарная опера-

* Этими объектами могут быть числа или что-то иное, например матрицы (не рассматриваемые в этой книге) либо функции.

ция ★ дистрибутивна относительно другой бинарной операции ◇, если для всех объектов a, b и c справедливы два предложения:

$$a\bigstar\ (b \diamond c) = (a\bigstar b) \diamond (a\bigstar c),$$
$$(b \diamond c)\bigstar\ a = (b\bigstar a) \diamond (c\bigstar a).$$

Заметьте сходство с более знакомым вариантом, написанным выше. Исторически сначала появилась простая версия с числами, а потом она была обобщена на всё более широкие и странные объекты.

Плюсо-умножательные машины

Наше название для того, что учебники именуют полиномами, или многочленами. Мы использовали это название, поскольку такие машины можно описать, используя только сложение и умножение. Плюсо-умножательная машина определяется как любая машина вида:

$$m(x) \equiv \#_0 + \#_1x^1 + \#_2x^2 + \ldots + \#_nx^n,$$

где символы $\#_i$ означают фиксированные числа.

Стойка на руках

Наше название для того, что учебники именуют обратными числами. Например, стойка на руках для числа 3 равна $\frac{1}{3}$. Мы не часто используем этот термин. Но ведь и математики не используют часто термин «обратное число». Возможно, нам это и вовсе не нужно.

Формула для кратчайшего пути

Наше название для того, что учебники именуют теоремой Пифагора (простое наглядное объяснение, почему это верно, можно найти в начале интерлюдии 1). Эта формула также стала основой для того, что учебники называют тригонометрическими тождествами. Например, поскольку синус и косинус отражают вертикальную и горизонтальную протяженность наклонного отрезка длины 1 (см. V и H в словаре), формула для кратчайшего пути сообщает нам:

$$(\text{Протяженность по вертикали})^2 + (\text{Протяженность по горизонтали})^2 = \\ = (\text{Общая длина})^2.$$

В нашем случае это сокращается до:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Учебники часто включают другие «тригонометрические тождества», которые возникают вследствие этого, давая вещам ненужные названия. Например, если мы разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, то получим:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Если теперь последовать указаниям книг и использовать $\operatorname{tg} x$ для $\frac{\sin x}{\cos x}$, а $\sec x$ для $\frac{1}{\cos x}$, то получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Это так называемое тригонометрическое тождество на деле — простая формула для кратчайшего пути, спрятанная за мудреными названиями простых комбинаций *V* и *H*.

H

Наше название для того, что учебники именуют косинусом. Мы используем это обозначение, так как оно напоминает слово «горизонтальный». Оно применяется, поскольку отрезок прямой, наклоненный под углом α к горизонтальной оси, будет иметь протяженность по горизонтали, равную $\cos \alpha$ ($H(\alpha)$). *V* (см. ниже) используется для того, что в учебниках именуется синусом.

T

Наше название для того, что в учебниках именуется тангенсом. Кратко используется в интерлюдии 6. В учебниках $\operatorname{tg} x$ — это $\frac{\sin x}{\cos x}$, в нашей книге — $\frac{V}{H}$. См. также *V* и *H*.

V

Наше название для того, что учебники именуют синусом. Мы используем это обозначение, так как оно напоминает слово «вертикальный». Применяется, поскольку отрезок прямой, наклоненный под углом α, будет иметь протяженность по вертикали, равную $\sin\alpha$ ($V(\alpha)$). H (см. выше) используется для того, что в учебниках именуется косинусом.

Λ

Наше название для того, что учебники именуют «арксинус» и записывают как $\arcsin x$. Кратко используется в интерлюдии 6. Мы берем это название, поскольку греческая буква Λ выглядит как перевернутая V, а V в нашей книге обозначает то, что учебники именуют синусом (см. выше). Машина Λ определяется как машина, удовлетворяющая условиям:

$$V(\Lambda(x)) = x \text{ и } \Lambda(V(x)) = x$$

для всех x. Но ее нельзя определить однозначно для всех чисел x, поскольку V может иметь одинаковые значения для разных x (на математическом жаргоне — «отсутствует взаимная однозначность»). Например, если применять символ π для того, что мы в этой книге обозначали $\sharp$, мы имеем $V(n\pi) = 0$ для всех положительных и отрицательных целых чисел n. Поэтому для $\Lambda(0)$ нельзя выбрать одно число, с равным успехом можно взять любое из чисел $n\pi$ (например, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π и т. д.). Чтобы обойти эту проблему, обычно поступают так: определяют $\Lambda(x)$ как функцию, обратную не $V(x)$, а $V(x)$, определенной только на каком-то подмножестве вещественных чисел. Например, если взять $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то машина $V(x)$ уже не дает повторений: различные входы дадут различные выходы. Иными словами, для любых x и y между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, если $x \neq y$, то $V(x) \neq V(y)$. Поэтому функция Λ обычно определяется как функция, обратная этой «ограниченной» версии V. Но это скучная техническая проблема. Нам нет нужды обсуждать тему «обратных функций» в контексте этой книги, за исключением нескольких конкретных случаев, когда возникала такая потребность.

$\perp$

Наше название для того, что учебники именуют арктангенсом и записывают $\operatorname{arctg} x$. Кратко используется в интерлюдии 6. Мы используем это обозначение, поскольку $\perp$ выглядит как перевернутое T, а мы применяем T для обозначения того, что учебники именуют тангенсом (см. выше). Машина $\perp$ определяется как машина, удовлетворяющая условиям:

$$T(\perp(x)) = x \text{ и } \perp(T(x)) = x.$$

$\sharp$

См. Диез.

От стандартной терминологии к нашей

Арксинус: см. Λ. Также см. V для синуса.

Арктангенс: см. $\perp$. Также см. T для тангенса.

Вариационное исчисление: см. Каннибальский анализ.

Гипотенуза: см. Кратчайший путь.

Косинус: см. H.

Обратные числа: см. Стойка на руках.

Пи (π): см. Диез ($\sharp$).

Полиномы: см. Плюсо-умножательные машины.

Распределительный закон: см. Очевидный закон разрывания вещей.

Ряд Тейлора: см. Ностальгическое устройство.

Синус: см. V.

Тангенс: см. T.

Теорема Пифагора: см. Формула для кратчайшего пути.

Функционалы: см. Каннибальские машины.

Функция: см. Машина.

УКАЗАТЕЛЬ

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

ОБ АВТОРЕ

Джейсон Уилкс — бакалавр математики, магистр математической физики. В настоящее время изучает эволюционную психологию в Калифорнийском университете.

Где купить наши книги

Специальное предложение для компаний

Если вы хотите купить сразу более 20 книг, например для своих сотрудников или в подарок партнерам, мы готовы обсудить с вами специальные условия работы. Для этого обращайтесь к нашему менеджеру по корпоративным продажам: +7 (495) 792-43-72, b2b@mann-ivanov-ferber.ru

Книготорговым организациям

Если вы оптовый покупатель, обратитесь, пожалуйста, к нашему партнеру — торговому дому «Эксмо», который осуществляет поставки во все книготорговые организации.

142701, Московская обл., г. Видное, Белокаменное ш., д. 1;
+7 (495) 411-50-74; reception@eksmo-sale.ru

Адрес издательства «Эксмо» 125252,
Москва, ул. Зорге, д. 1; +7 (495) 411-68-86;
info@eksmo.ru /www.eksmo.ru

Санкт-Петербург
СЗКО Санкт-Петербург, 192029,
г. Санкт-Петербург, пр-т Обуховской Обороны,
д. 84е; +7 (812) 365-46-03 / 04;
server@szko.ru

Нижний Новгород
Филиал «Эксмо» в Нижнем Новгороде,
603094, г. Нижний Новгород, ул. Карпинского,
д. 29; +7 (831) 216-15-91, 216-15-92,
216-15-93, 216-15-94;
reception@eksmonn.ru

Ростов-на-Дону
Филиал «Эксмо» в Ростове-на-Дону,
344023, г. Ростов-на-Дону,
ул. Страны Советов, 44а; +7 (863) 303-62-10;
info@rnd.eksmo.ru

Самара
Филиал «Эксмо» в Самаре, 443052,
г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»;
+7 (846) 269-66-70 (71…73);
RDC-samara@mail.ru

Екатеринбург
Филиал «Эксмо» в Екатеринбурге, 620024,
г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ;
+7 (343) 272-72-01 (02…08)

Новосибирск
Филиал «Эксмо» в Новосибирске, 630015,
г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3;
+7 (383) 289-91-42;
eksmo-nsk@yandex.ru

Хабаровск
Филиал «Эксмо» Новосибирск в Хабаровске,
680000, г. Хабаровск, пер. Дзержинского,
д. 24, лит. «Б», оф. 1; +7 (4212) 910-120;
eksmo-khv@mail.ru

Казахстан
«РДЦ Алматы», 050039, г. Алматы,
ул. Домбровского, д. 3а;
+7 (727) 251-59-89 (90, 91, 92);
RDC-almaty@eksmo.kz

Украина
«Эксмо-Украина», Киев, ООО «Форс Украина»,
04073, г. Киев, Московский пр-т, д. 9;
+38 (044) 290-99-44;
sales@forsukraine.com

Если у вас есть замечания и комментарии к содержанию, переводу, редактуре и корректуре, то просим написать на be_better@m-i-f.ru, так мы быстрее сможем исправить недочеты.

Научно-популярное издание

Джейсон **Уилкс**

Математика в огне
Нескучный неучебник

Главный редактор *Артем Степанов*
Ответственный редактор *Татьяна Рапопорт*
Литературный редактор *Ольга Свитова*
Арт-директор *Алексей Богомолов*
Дизайн *Людмила Гальченко*
Верстка *Екатерина Матусовская*
Корректоры *Лев Зелексон, Олег Пономарев*

Изготовитель: ООО «Манн, Иванов и Фербер»
123104, Россия, г. Москва, Б. Козихинский пер., д. 7, стр. 2
mann-ivanov-ferber.ru
facebook.com/mifbooks
vk.com/mifbooks
instagram.com/mifbooks

16+

Если вам не дается математика, возможно, дело не в вас, а в том, как вам ее преподносят. Джейсон Уилкс переворачивает привычное представление о математике как о скучной и абстрактной дисциплине, которую только и остается что вызубрить, и предлагает вам изобрести свою математику. Да-да, вы правильно прочитали — изобрести. Эта книга — революция. Эта книга — провокация. Это умный и немного безумный учитель, который поможет самостоятельно разобраться в основных математических понятиях и определениях, а не механически заучивать их. Вместе с автором вы создадите собственную математическую вселенную, увлекательную и увлекающую, где не будет места занудным доказательствам и вычислениям, а концепции из абстрактных и пугающих символов станут частью окружающего мира.

Книга прекрасно дополнит любой стандартный учебник.

***

Скука и псевдосложность учебников математики заслонили для многих из нас красоту этой науки — так считает Уилкс, а уж он-то в математике кое-что понимает. Его книга — это лишенное привычного занудства введение в основные математические концепции, призванное помочь нам заново открыть эту дисциплину.

Scientific American

ISBN 978-5-00117-543-8
9 785001 175438 >

издательство
МАНН, ИВАНОВ И ФЕРБЕР